Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. (α) Να λύσετε την εξίσωση : $\sqrt[3]{x-2} = 2$, $x \geq 2$.

   (β) Να απλοποιήσετε την παράσταση : $\frac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[8]{x^{12}}}$, $x > 0$.

2. Αν $2 < x < 5$ και $-3 < y < -1$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή κάθε μιας από τις παραστάσεις:

   (α) $3x + y$ (β) xy

3. Αν $2 < x < 7$ και $-5 < y < -1$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή κάθε μιας από τις παραστάσεις:

   (α) 3χ και (β) $\chi - \psi$

4. Δίνεται ότι $2 < x < 7$, $-6 < y < -4$ και $\omega < y$

   (α) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις $x - 3y$ και $\frac{x}{y+1}$

   (β) Να δείξετε ότι $y^2 < \omega y < \omega^2$

5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης A: (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής και να φαίνονται όλα τα βήματα που θα ακολουθήσετε)

   $$A = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)$$

6. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt[3]{x^2 - 6x} = 3$

7. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{2019} - \sqrt{2018}$ και

   α) Να δείξετε ότι α και β είναι αντίστροφοι αριθμοί

   β) Να δείξετε ότι

   γ) Να δείξετε ότι $\sqrt{\beta - \alpha} \cdot \sqrt{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}} \cdot \sqrt{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις

   (α) $\left(x - 2\sqrt{3}\right) \cdot \left(x + 2\sqrt{3}\right) = 13$ (β) $(2x-1)^{\frac{1}{3}} = 2$, $x \geq \frac{1}{2}$

9. Αν 4 < α < 9 και − 5 < β < − 3, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

   (α) $3\alpha + \beta$ και (β) $\frac{11-\alpha}{\beta^2}$

10. Α10. Αν $\kappa = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$, τότε :

   α) Να αποδείξετε ότι $\kappa^2 = 2$.

   β) Να υπολογίσετε χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής την παράσταση

   $A = \sqrt[11]{\sqrt[8]{\boldsymbol{\kappa}} - 1} \cdot \sqrt[11]{\sqrt[8]{\boldsymbol{\kappa}} + 1} \cdot \sqrt[11]{\sqrt[4]{\boldsymbol{\kappa}} + 1} \cdot \sqrt[11]{\sqrt{\boldsymbol{\kappa}} + 1} \cdot \sqrt[11]{\boldsymbol{\kappa} + 1}$

   .

ΕΝΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1. Να χαρακτηρίσετε ως ΟΡΘΕΣ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις:

   α) $\eta\mu 70^o = \sigma\upsilon\nu 20^o$

   β) $\eta\mu(180^o - \theta) = \eta\mu\theta$

   γ) Αν $\eta\mu\theta > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$ τότε η γωνιά θ έχει τελική πλευρά στο 2^o τεταρτημόριο.

   δ) Η τελική πλευρά της γωνίας -190^o σε κανονική θέση είναι στο 3^o τεταρτημόριο.

   ε) Αν η τελική πλευρά μιας γωνίας θ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο με συντεταγμένες $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, τότε το $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$

2. Αν $\tau\varepsilon\mu\theta = -\frac{13}{12}$, $\theta \in (0,\pi)$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

   $A = \frac{6\cdot\varepsilon\varphi\theta - 26\cdot\eta\mu\theta}{10\cdot\sigma\varphi\theta}$.

3. Αν $\varepsilon\varphi\theta = -\frac{1}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ < θ < 2π, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

   $A = 5\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \varepsilon\varphi\theta \cdot \sigma\varphi\theta + 2$

4. Αν $\eta\mu\theta = \frac{5}{13}$ και $90^o < \theta < 180^o$, να υπολογίσετε με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, την αριθμητική τιμή της παράστασης: $A = \frac{24\varepsilon\varphi\theta - 13\sigma\upsilon\nu\theta}{5\sigma\varphi\theta + 11}$

5. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \eta\mu^2 x} = \sigma\varphi x$

6. Δίνονται: $A = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta} + \frac{1+\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ και $B = \frac{\varepsilon\varphi(180^0-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(90^0-\theta)}{\eta\mu(360^0-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(-\theta)\cdot\sigma\varphi(270^0+\theta)}$.

   Να υπολογίσετε την τιμή της γωνιάς θ εάν $A + B = -\sqrt{2}$, $\theta \in (0,\pi)$

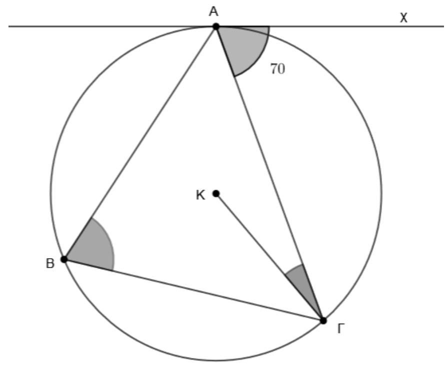
ΕΝΟΤΗΤΑ ΚΥΚΛΟΣ

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K,R) όπου $K\hat{A}B=40°$ και (ε) η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ .

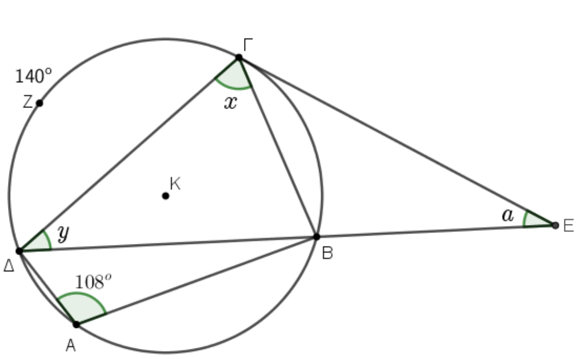
   (α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\widehat{K}B$ και $A\widehat{\Gamma}B$.

   (β) Αν τα τόξα $A\Gamma=x$ και $B\Gamma=x+40°$ να βρείτε την τιμή x και τις γωνιές $A\hat{B}\Gamma$ και $A\widehat{\Gamma}\Delta$.

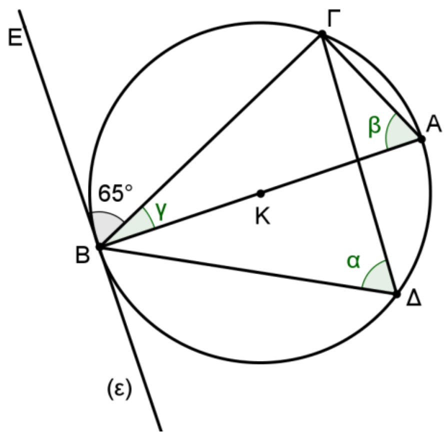
2. Δίνεται κύκλος (Κ,ΚΓ) , η εφαπτομένη στο σημείο Α και οι χορδές ΒΑ και ΒΓ. Αν η γωνία $\Gamma\hat{A}x=70^{\circ}$, να υπολογίσετε τις γωνίες ΑΒΓ και ΚΓΑ του σχήματος, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.



3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K,R) και τα σημεία του Α, Β, Γ και Δ. Αν η ΓΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου και $\widehat{\Delta Z\Gamma}=140^{o}$, να υπολογίσετε τις γωνίες x,y και a δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας .



4. Στο διπλανό σχήμα η AB είναι διάμετρος του κύκλου (K, R) και η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B. Αν η γωνία $\Gamma\hat{B}E = 65°$, να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\alpha,\ \beta,\ \gamma, B\hat{\Gamma}A$ και του μικρού τόξου $\widehat{A\Gamma}$, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



5. Δίνεται κύκλος (K,R). Τα σημεία A(-,4) και Γ(-1,3) είναι σημεία της περιφέρειας του κύκλου. Αν η διάμετρος BΓ του κύκλου έχει εξίσωση $y = 2x + 5$, να βρείτε:
   α) την εξίσωση της χορδής AB
   β) το μήκος της ακτίνας του
   γ) το μέτρο του τόξου $\widehat{AB}$σε μοίρες (κατά προσέγγιση ακεραίου).

ΕΝΟΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. Δίνονται τα σημεία $A(2,-4)$, $B(6,-7)$, $\Gamma(11,-9)$. Να βρείτε:
   α) τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$
   β) το διάνυσμα $\vec{u} = 4 \cdot \vec{AB} - 2 \cdot \vec{B\Gamma}$.
   γ) το μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο είναι αντίρροπο με το $\vec{u}$.

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\chi} = \binom{2}{-2}$ και $\vec{\omega} = \binom{1}{3}$. Να υπολογίσετε:
   α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\chi} - \vec{\omega}$
   β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\chi}$

3. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(2, 2), Β(1, 7) και Γ(11, 3).
   α) Να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$, όπου Μ το μέσο της ΒΓ.
   β) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \binom{2}{-1}$ και $\vec{\beta} = \binom{3}{4}$. Να υπολογίσετε το μήκος του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

5. Δίνονται τα σημεία $A(2,-2)$ και $B(5,2)$.
   α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.
   β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.
   γ) Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}$ που είναι ομόρροπο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = \binom{3}{1}$ και $\vec{v} = \binom{0}{-4}$ και τα σημεία A, B και Γ. Αν $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma} = \vec{u} + \vec{v}$ και $\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma} = 3\vec{u}$:
   α) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}$ και $\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$
   β) να δείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \binom{-6}{-6}$
   γ) αν $\mathrm{B}(-3,-1)$, να δείξετε ότι $\mathrm{A}(3,5)$ και $\Gamma(6,2)$.
   δ) να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{w}$ παράλληλου με το διάνυσμα $\vec{v}$.

7. Δίνονται τα διανύσματα:

   $\vec{\alpha} = \binom{2x-y}{x+2y-5}$, $\vec{\beta} = (x-3y+2)\vec{\imath} + (-3x+2y-2)\vec{\jmath}$, $\vec{\gamma} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ και
   $\vec{\delta} = \binom{-3}{4}$, $x, y \in \mathbb{R}$.
   (α) Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\varepsilon}$ το οποίο είναι αντίρροπο του $\vec{\gamma}$.
   (β) Να βρείτε, συναρτήσει των x και y, τις συντεταγμένες του διανύσματος: $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\delta} - \vec{\gamma}$.
   (γ) Να βρείτε τις τιμές των x και y, έτσι ώστε $\vec{\alpha} = \vec{0}$.
   (δ) Αν τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$ είναι παράλληλα, να δείξετε ότι $5x + 6y = 2$

ΕΝΟΤΗΤΑ ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ - ΕΥΘΕΙΑ

1. Δίνεται η ορίζουσα $\lambda = \begin{vmatrix} 2-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{vmatrix}$

   α) Να δείξετε ότι: $\lambda = -1 - 2\sqrt{2}$

   β) Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω τιμή του λ, να αποδείξετε ότι: $(-\lambda - 1)^{2018} = 2^{3027}$

2. Αν $1 < x < 3$ $και$ $-4 < y < -2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

   α) $A = \begin{vmatrix} 2 & -y \\ 1 & x \end{vmatrix}$ β) $B = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{vmatrix}$

3. Να βρείτε την τιμή του λ$\in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $\begin{vmatrix} \chi - 1 & \lambda \\ 2 & \chi \end{vmatrix} = 0$ να έχει λύσεις αντίστροφες.

4. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(-4,-2)$, $\mathrm{B}(-2,6)$ και $\Gamma(2,1)$.

   α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της $\mathrm{A}\Gamma$ είναι η $\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 0$

   β) να βρείτε το μήκος του ύψους ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ

   γ) να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΒΕ

   δ) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

   ε) να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς $\mathrm{A}\Gamma$ είναι $\mathrm{M}(-1, -\frac{1}{2})$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ, ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.

5. α) Να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ -9 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

   β) Τι συμπεραίνετε για τη θέση των σημείων $A(1,2)$, $B(5,6)$ και $\Gamma(-9,-8)$ στο επίπεδο;

6. Δίνεται η εξίσωση $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 2 & x & 2 \\ \mu & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - 3$ με ρίζες x_1, x_2 και $\mu \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση είναι η $x^2 - (\mu + 3)x + 2\mu + 3 = 0$.

7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AΓ$και ύψος ΑΔ. Δίνονται επίσης, η εξίσωση της πλευράς $AΓ: y = -2x + 10$, η εξίσωση του ύψους $AΔ: x + 3y = 15$ και οι συντεταγμένες του σημείου $Δ(9,2)$.

   α) Να δείξετε ότι η πλευρά ΒΓ έχει εξίσωση $3x - y = 25$.

   β) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Β.

   γ) Να υπολογίσετε:

      i. την απόσταση του σημείου Δ από την πλευρά ΑΓ

      ii. το μέτρο της γωνίας ΑΓΒ

      iii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

ΕΝΟΤΗΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ - ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

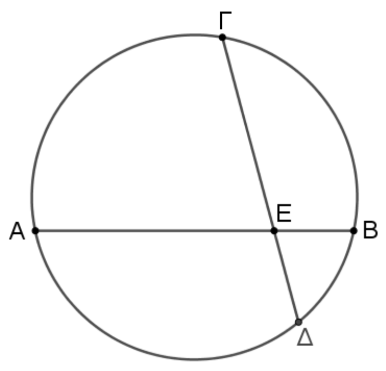
1. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με σημείο τομής των διαγωνίων του Ο και Ζ το μέσον της ΟΔ. Το Ε είναι σημείο πάνω στην προέκταση της ΒΓ ώστε ΓΕ = ΓΒ. Να δείξετε ότι: .(ΟΒ).(ΑΖ)=(ΟΕ).(ΔΖ)

2. Δίνεται κύκλος (K, R) με κέντρο $K(1,3)$. Από σημείο $Σ$ εκτός κύκλου φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα $ΣA$ (όπου A το σημείο επαφής) και τέμνουσα $ΣBΓ$ που περνά από το κέντρο του κύκλου K. Αν το εφαπτόμενο τμήμα $ΣA$ ανήκει στην ευθεία $ε: y = -2x$ και έχει μήκος $(ΣA) = 2$ cm να δείξετε ότι:

   α) το μήκος της ακτίνας του κύκλου είναι $R = \sqrt{5}$ cm

   β) το μήκος $(ΣB) = (3 - \sqrt{5})$ cm

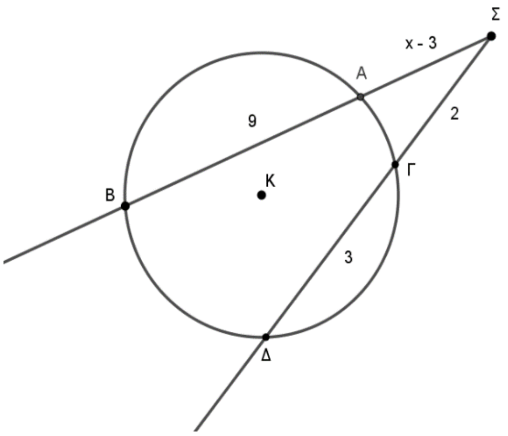
3. Στον πιο κάτω κύκλο οι χορδές ΑΒ και ΓΔ τεμνονται στο σημείο Ε. Αν $(AE) = 12cm, (EB) = 4cm$και $(ΓE) = 10cm$ να υπολογίσετε το $(EΔ)$.



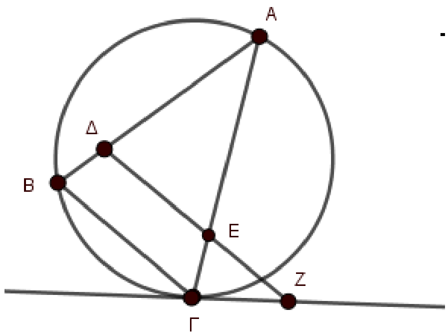
4. Δίνεται κύκλος (K, ρ) και δύο τέμνουσες του, ΣAB και $\Sigma\Gamma\Delta$.

Αν $\Sigma A = (x-3)\ cm$, $AB = 9\ cm$,

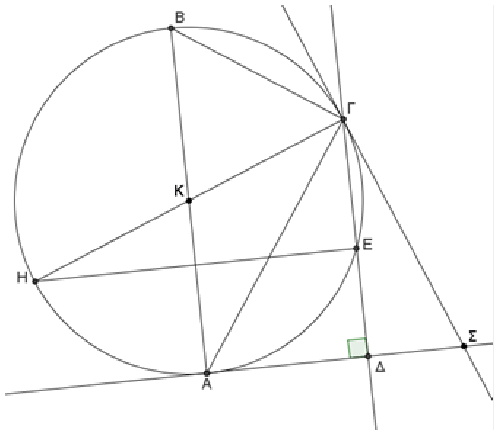
$\Sigma\Gamma = 2\ cm$ και $\Gamma\Delta = 3\ cm$, να υπολογίσετε την τιμή του x.



5. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι Εγγεγραμμένο στον κύκλο, η ευθεία ΓΖ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Γ και ΔΖ παράλληλη με ΒΓ.
   Το μέτρο της γωνίας ΒΑΓ=$\chi^2 (\chi > 0)$,
   $\widehat{\Delta Z \Gamma} = 49^0$, $B\Gamma = 12$cm ,$E\Gamma = 3$cm ,
   $\Gamma Z = 6$cm και μέτρο του τόξου ΑΒ=120^0.
   α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΖ είναι όμοια.
   β) Να υπολογίσετε την τιμή του χ.
   γ) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ.



6. Από σημείο Σ που βρίσκεται έξω από κύκλο (K, R) φέρουμε εφαπτόμενα τμήματα ΣA και $\Sigma\Gamma$.
   Αν $AB, \Gamma H$ είναι διάμετροι του κύκλου
   Και $A\hat{\Delta}E = 90°$, να δείξετε ότι:
   α) $(A\Gamma)^2 = (AB)(\Gamma\Delta)$
   β) Τα τρίγωνα $\Gamma\Delta\Sigma$ και $HE\Gamma$ είναι όμοια
   γ) $(A\Sigma)(EH) = (\Gamma\Delta)(\Gamma H)$.



7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Α, η οποία συναντά την πλευρά ΒΓ στο Δ και τον κύκλο στο Ε.

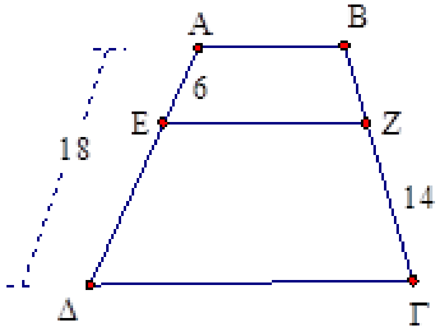
   Να αποδειχθεί ότι:

   α) (ΑΒ)(ΑΓ) = (ΑΔ)(ΑΕ)

   β) $(EB)^2 = (EA)(E\Delta)$.

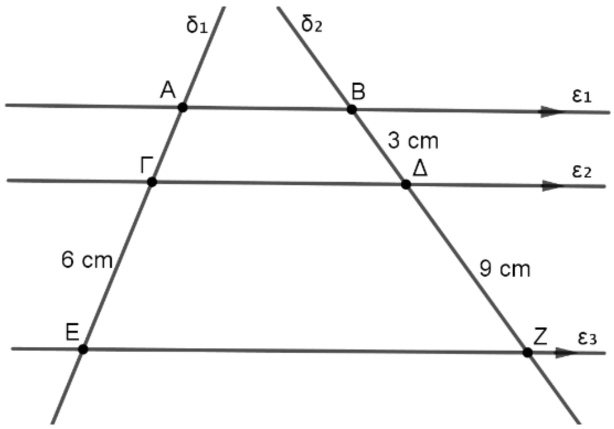
8. (α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Θαλή.
(β) Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του.

Αν ΑΕ = 6cm, ΑΔ = 18cm και ΖΓ = 14cm, να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΒΖ.



(γ) Αν τα τραπέζια ΑΒΖΕ και ΕΖΓΔ είναι όμοια και η περίμετρος του ΑΒΖΕ είναι ίση με 33 cm να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου ΕΖΓΔ.

9. Στο σχήμα δίνεται ότι ΒΔ = 3 cm, ΓΕ = 6 cm, ΔΖ = 9 cm και $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$.
Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΓ.



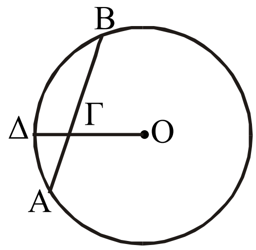
10. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις με Σωστό ή Λάθος, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α) Αν δύο τετράπλευρα έχουν ίσες τις γωνίες τους μία προς μία τότε είναι όμοια.Σ / Λ

(β) Δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν μία οξεία γωνία τους ίση. Σ/Λ

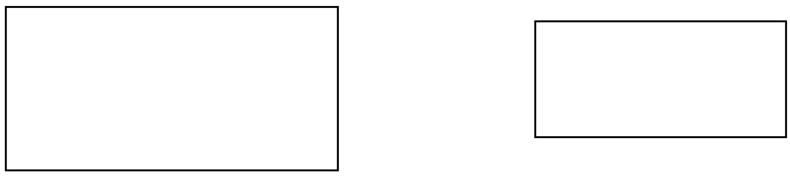
(γ) Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξυ τους. Σ/Λ

(δ) Δυο ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση είναι όμοια. Σ / Λ (ε) Στον κύκλο (Ο, α) του πιο κάτω σχήματος ισχύει η σχέση: ΓΒ · ΓΑ = ΟΓ · ΓΔ. Σ / Λ



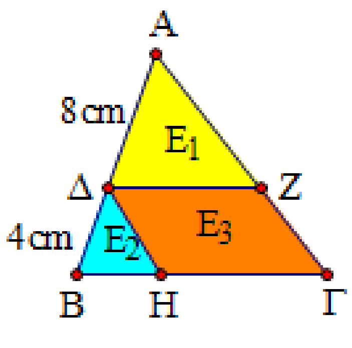
(στ) Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων τριγώνων ισούται με τον λόγο ομοιότητας τους Σ / Λ

11. Τα πιο κάτω ορθογώνια παραλληλόγραμμα είναι όμοια με διαστάσεις του μήκους των πλευρών τους 10cm και 8cm αντίστοιχα. Αν το εμβαδόν του μικρού ορθογωνίου είναι $32cm^2$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του μεγάλου.



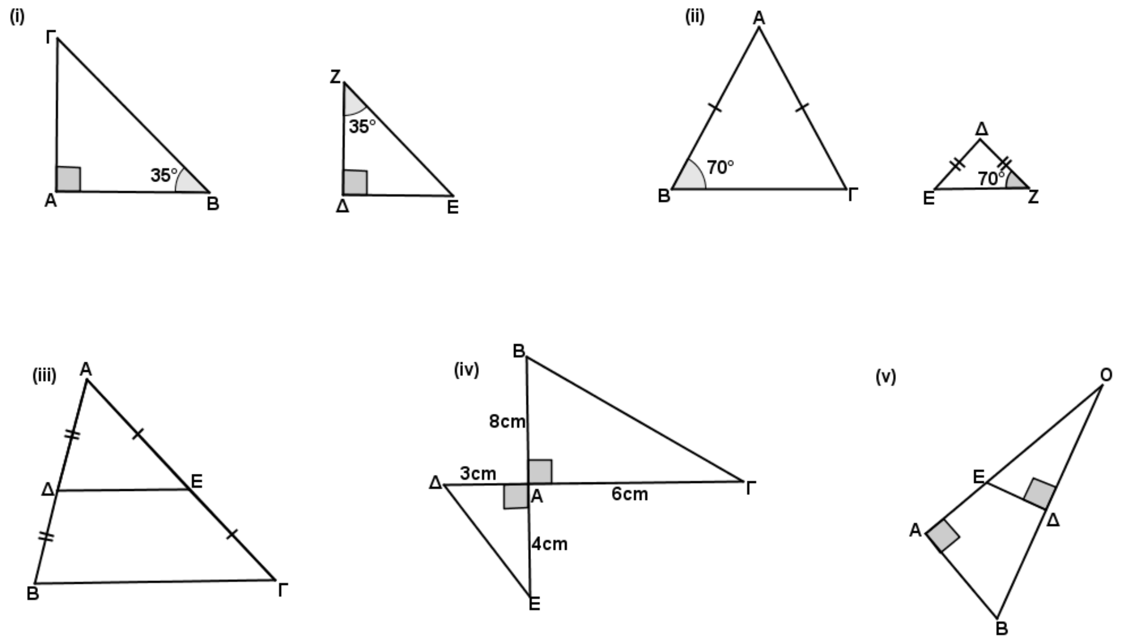
12. Αν Ε είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ , ΔΖ // ΒΓ και ΔΗ // ΑΓ, τα τότε να αποδείξετε ότι για τα εμβαδά E_1 , E_2 και E_3 ισχύουν:

$E_1 = \frac{4}{9}E$, $E_2 = \frac{1}{9}E$ και $E_3 = E_1$.

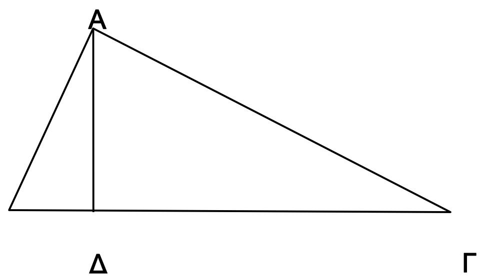


13 Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι 12cm, 15cm και 9cm. Να βρείτε τις ομόλογες πλευρές ενός όμοιου με αυτό τρίγωνο που η περίμετρος του είναι 12cm.

14. Να δείξετε ότι τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια και σε κάθε περίπτωση να γράψετε τους ίσους λόγους ή τις ίσες γωνίες που προκύπτουν από την ομοιότητα.



15. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90°) και ύψος ΑΔ.



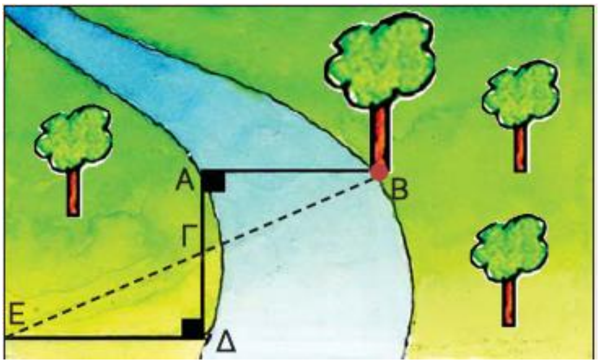
(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια

(β) Αν ΒΔ=4m και ΓΔ=9m , να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

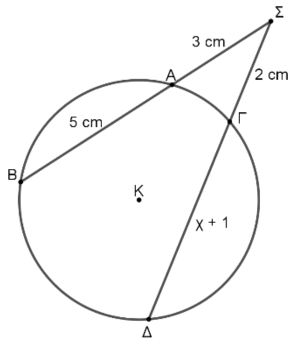
16. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90°). Από τυχαίο σημείο Δ της ΑΒ φέρουμε τη ΔΕ κάθετη στη ΒΓ. Να δείξετε ότι:
(α) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΒ είναι όμοια και
(β) ισχύει η σχέση (ΑΒ)(ΕΔ)=(ΑΓ)(ΕΒ).

17. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90°) φέρουμε το ύψος ΑΔ και τη διχοτόμο της γωνίας Β που τέμνει το ύψος ΑΔ στο Ζ και την πλευρά ΑΓ στο Ε. Να δείξετε ότι: (ΒΖ)(ΕΓ)=(ΒΕ)(ΑΖ)

18. Για να υπολογίσουμε το πλάτος ενός ποταμού μετρήσαμε τις αποστάσεις ΑΓ=36m, ΓΔ=8m και ΔΕ=20m. Να βρείτε το πλάτος ΑΒ.



19. Δίνεται ο κύκλος (Κ, R) και από σημείο Σ εκτός κύκλου φέρουμε τις τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ . Αν επιπλέον ΣΑ = 3 cm, ΣΓ = 2 cm, ΑΒ = 5 cm και ΓΔ = χ + 1 να υπολογίσετε την τιμή του χ και το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ.



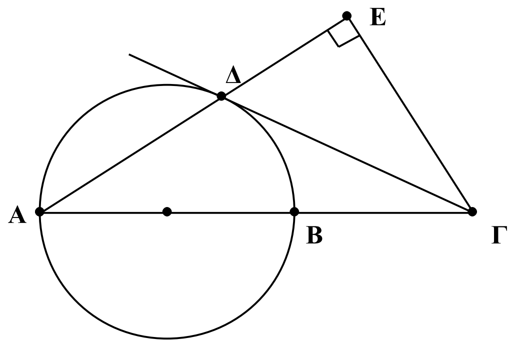
20. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο με διάμετρο ΑΒ. Στο σημείο Α φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ, τον κύκλο στο Σ και την εφαπτομένη στο Ε.

Να δείξετε ότι:

α) Η ΑΣ είναι διχοτόμος της $E\hat{A}\Gamma$

β) (ΓΒ)(ΣΕ) = (ΓΔ)(ΣΑ)

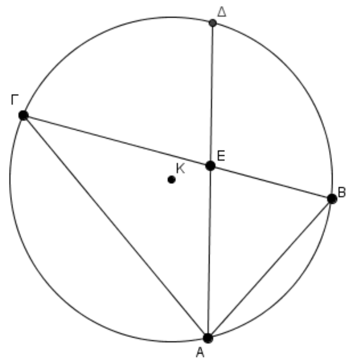
21. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται η ΑΒ διάμετρος και $ΑΕΓ = 90^\circ$.
Να αποδείξετε ότι: (ΑΒ)(ΑΕ)=(ΑΔ)(ΑΓ).



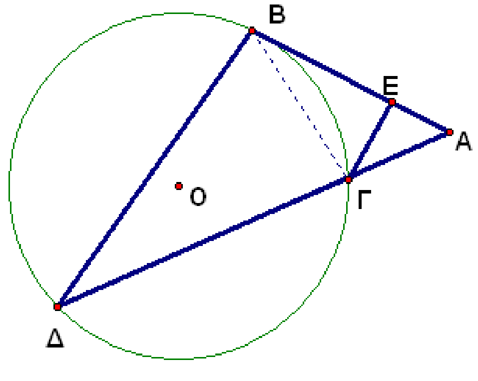
22. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Από τυχαίο σημείο Δ της ΑΓ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ε. Να δείξετε ότι (ΑΒ)(ΔΓ)=(ΔΕ)(ΑΓ)

23. Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) και Δ το μέσο του τόξου ΒΓ. Η ΑΔ τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Να δείξετε ότι:
(α) $(ΑΒ)\cdot(ΑΓ) = (ΑΔ)\cdot(ΑΕ)$

(β) $(ΔΒ)^2 = (ΔΑ)\cdot(ΔΕ)$



24. Δίνεται κύκλος (Ο,R). Από σημείο Α εκτός κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη ΑΒ του κύκλου (Β σημείο επαφής) και την τέμνουσα ΑΓΔ. Από το Γ φέρουμε τη ΓΕ παράλληλη προς τη ΔΒ η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε.
Να δείξετε ότι:
(α) τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΓ είναι όμοια και
(β) $(ΑΓ)^2=(ΑΕ)\cdot(ΑΒ)$



25. Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο ΒΓ και Ε τυχόν σημείο του. Σε σημείο Δ της ΒΓ να φέρετε κάθετη πάνω στη ΒΓ που τέμνει τη ΒΕ στο Η, το ημικύκλιο στο Μ και τη ΓΕ στο Α. Να δείξετε ότι:

(α) $\mathrm{E}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma \approx \Delta\overset{\Delta}{\mathrm{A}}\Gamma$

(β) (ΑΔ)(ΔΗ) = (ΔΓ)(ΔΒ)

26. Έστω ΑΒΓ τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΓ και Η το σημείο τομής της ΑΓ με την ΒΜ. Να δείξετε ότι:

(α) ΒΜ διχοτόμος της $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$

(β) τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΗΒΓ είναι όμοια ($\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\mathrm{M} \approx \mathrm{H}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma$)

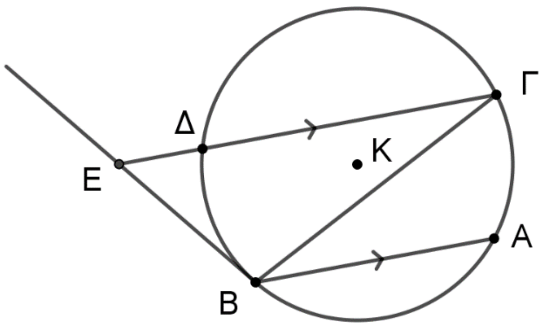
27. Δίνεται κύκλος (K,R) και οι παράλληλες χορδές ΑΒ και ΓΔ του κύκλου. Στο σημείο Β φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου που τέμνει την προέκταση της ΓΔ στο Ε.

(α) Δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας, να δείξετε ότι:

(i) τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΓΕ$ είναι όμοια

(ii) $(ΑΒ)(ΓΕ) = (ΒΓ)^2$

(β) Αν $Γ\hat{Β}Α = 25°$, να βρείτε το μέτρο του μικρότερου τόξου *ΔΒ.*



28. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{Α} = 90°$, $ΑΒ = 9\ cm\ και\ ΑΓ = 12\ cm$. Στην πλευρά $ΑΓ$ παίρνουμε σημείο $Ε$ έτσι ώστε $ΓΕ = 5cm$. Από το σημείο $Ε$ να φέρετε $ΕΔ$ κάθετη στη $ΒΓ$.

(α) i) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΓ$ είναι όμοια.

ii) Να βρείτε το μήκος του $ΕΔ$.

(β) Να φέρετε το ύψος $ΑΗ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ και να δείξετε ότι

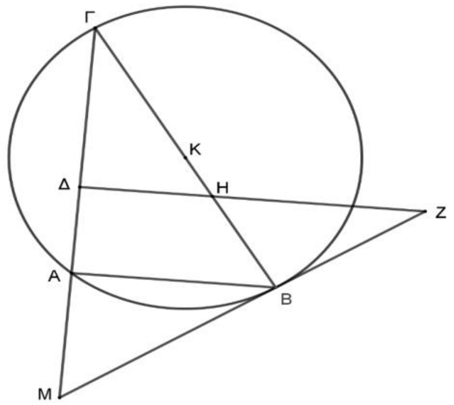
$(ΑΗ)^2 = (ΗΓ)(ΗΒ)$.

29. Δίνεται κύκλος (Κ, R) και σημείο Γ εκτός του κύκλου. Από το Γ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα ΓΑ και τέμνουσα ΓΒΔ.

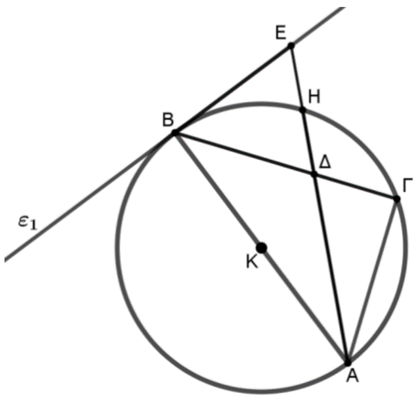
(α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\text{ΑΓΒ}}$ και $\overset{\Delta}{\text{ΑΓΔ}}$ είναι όμοια

(β) Να δείξετε ότι (ΑΓ)(ΔΑ) = (ΔΓ)(ΑΒ)

(γ) Αν ΑΓ = 6 cm , ΓΒ = χ cm, ΒΔ = 9 cm, να υπολογίσετε την τιμή του χ.



30. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (Κ, R) και η ευθεία ε_1 είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β.



(α) Αν ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{ΒΑΓ}}$, να δείξετε ότι:

(i) $\Gamma\hat{B}E = 2\Delta\hat{A}\Gamma$

(ii) τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΕΒΑ είναι όμοια

(iii) (ΓΔ)·(ΑΕ) = (ΑΔ)·(ΒΕ)

(β) Αν (ΕΗ) =x cm, (ΕΒ) =2x cm και (ΗΑ) = 9 cm, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΕΑ.

(Να δικαιολογήσετε πλήρως όλες τις απαντήσεις σας.)

31. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R) με ΒΓ διάμετρο και $\Delta\mathrm{H} // \mathrm{AB}$. Στο σημείο Β φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου η οποία τέμνει τις προεκτάσεις των ΓΑ και ΔΗ στα σημεία Μ και Ζ αντίστοιχα.

(α) Να δείξετε ότι:

i) τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΒΗΖ είναι όμοια.

ii) $(\mathrm{BM})\cdot(\mathrm{BZ}) = (\mathrm{B\Gamma})\cdot(\mathrm{BH})$.

(β) Αν $(\mathrm{AM}) = 2\ \mathrm{cm}$ και $(\mathrm{A\Gamma}) = 6\ \mathrm{cm}$, να υπολογίσετε:

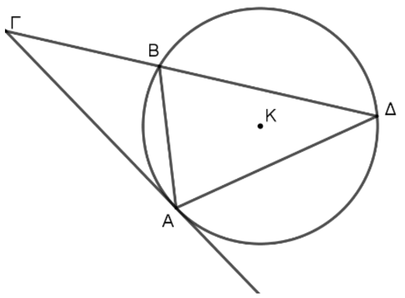
i) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΜΒ.

ii) την ακτίνα R του κύκλου.

32. Από σημείο Σ εκτός κύκλου (K, R) φέρουμε εφαπτομένη ΣA (A σημείο επαφής) και τέμνουσα $\Sigma B\Gamma$ του κύκλου. M είναι το μέσο του μικρού τόξου $B\Gamma$ και Δ το σημείο τομής της AM με την $B\Gamma$.

(α) Να αποδείξετε ότι $(\Sigma A)^2 = (\Sigma B)\cdot(\Sigma\Gamma)$

(β) Αν Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $(B\Gamma)^2 = 4(\Delta M)\cdot(\Delta A)$

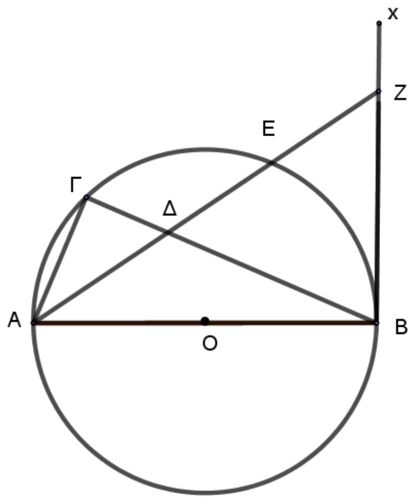


33. Στο πιο κάτω σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμένο στον κύκλο (O, R) και η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας A. Η προέκταση της $A\Delta$ τέμνει τον κύκλο στο σημείο E και την εφαπτόμενη Bx στο σημείο Z.

Να δείξετε ότι:

(i) $(ZB)^2 = (ZE)\cdot(ZA)$

(ii) $E\Delta = EZ$



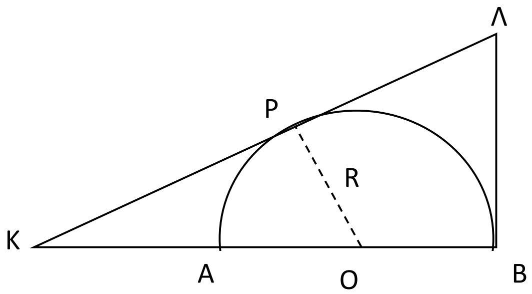
34. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ημικύκλιο (Ο, R) με διάμετρο ΑΒ και τέμνουσα ΚΑΒ με εφαπτόμενα τμήματα ΚΡ και ΛΒ. Αν ΑΒ = 2ΚΑ, τότε :

(α) Να δείξετε ότι : $ΚΑ \cdot ΚΒ = 3R^2$.

(β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΟΡ και ΚΛΒ είναι όμοια.

(γ) Να δείξετε ότι : $ΚΟ \cdot ΚΒ = ΚΡ \cdot ΚΛ = 6R^2$.

(δ) Να υπολογίσετε το μήκος του ΚΡ συναρτήσει του R.



35. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Μ είναι το μέσο της ΒΓ. Από την κορυφή Α φέρουμε το ύψος ΑΖ. Αν ΜΔ και ΜΕ είναι οι αποστάσεις του Μ από τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΔΜΒ είναι όμοια.

(β) $\mathrm{M\Delta} \cdot \mathrm{AB} = \mathrm{ME} \cdot \mathrm{A\Gamma}$