

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2019

ΣΕΜΙΝΑΡΙΑ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ
ΟΛΓΑ ΠΑΠΑΓΙΑΝΝΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

- ▶ ΠΛΗΘΟΣ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ : 3572
- ▶ ΜΕΣΟΣ ΟΡΟΣ : 9.4
- ▶ ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ : 5.52

ΜΕΡΟΣ Α'

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \left(6x^2 + \eta\mu x + \frac{4}{x} - 2 \right) dx$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Δεν βάζουν το απόλυτο στο λογάριθμο ($\ln|x|$)
- Κάνουν λάθος στο πρόσημο του $-\sigma\upsilon\nu x$
- Γράφουν $\int 4x^{-1} = \frac{4x^{-2}}{-2}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω , με $P(A') = \frac{3}{4}$

και $P(B) = \frac{2}{3}$.

Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, να βρείτε τις πιθανότητες :

(α) $P(A \cup B)$

(β) $P(A - B)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Λάθη στους τύπους π.χ.

$$P(A \cup B) = P(A)P(B)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cup B)$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , με τύπο $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και των ευθειών $x = 1$ και $y = 1$.

(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του πιο πάνω χωρίου, γύρω από την ευθεία $y = 1$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Κάνουν λάθος στον τύπο του όγκου.
- Βρίσκουν όγκο με περιστροφή γύρω από y' .

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$. Να δείξετε ότι ικανοποιούνται για την συνάρτηση f όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,2]$. Στη συνέχεια, να βρείτε τα $\xi \in (0,2)$, που ικανοποιούν το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- *Δεν ελέγχουν αν οι λύσεις ανήκουν στο συγκεκριμένο διάστημα*

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)}$ σε άθροισμα απλών

κλασμάτων και να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Κάνουν την ανάλυση σε άθροισμα απλών κλασμάτων και δεν υπολογίζουν το άθροισμα.
- Κάποιοι δεν χρησιμοποιούν το όριο στην εύρεση του αθροίσματος., δηλ. καταλήγουν στο

$$\Sigma_v = \frac{1}{2} - \frac{1}{v+2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\chi = \eta\mu\theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\chi^2}{\sqrt{1-\chi^2}} d\chi$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Δεν αλλάζουν τα όρια ολοκλήρωσης.
- Δεν βάζουν σε απόλυτη το $\sigma\upsilon\nu\theta$ ή δεν αναφέρουν ότι είναι θετικό.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = x + \frac{\ln x}{x+1}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Βρίσκουν δικό τους Π.Ο. π.χ. $\mathbb{R} - \{-1\}$ ή $(0, +\infty) - \{-1\}$
- Εξετάζουν για κατακόρυφη ασύμπτωτη και υπολογίζουν όρια όπως $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
- Εξετάζουν για οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

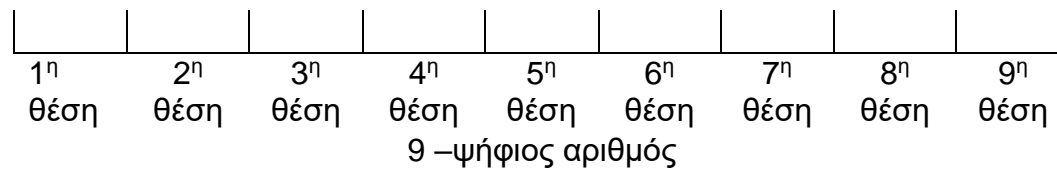
- Γράφουν
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + \ln x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

(α) Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί 9 - ψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα ψηφία
1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4.

(β) Να βρείτε πόσοι από τους 9- ψήφιους αριθμούς που σχηματίζονται στο ερώτημα(α)
έχουν όλα τα 2 σε συνεχόμενες θέσεις.

(γ) Να βρείτε πόσοι από τους 9- ψήφιους αριθμούς που σχηματίζονται
στο ερώτημα (α) έχουν τα ψηφία 1, 1, 3 σε άρτιες θέσεις (δηλαδή στην 2^η, 4^η, 6^η, 8^η θέση).



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Απαντήσανε κυρίως στα δύο πρώτα ερωτήματα.

ΜΕΡΟΣ Β

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{6x}{x^2+x+1}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα μονοτονίας, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, να την παραστήσετε γραφικά.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Λάθος στον υπολογισμό της f' με επακόλουθα λάθη στον πίνακα μονοτονίας και στα ακρότατα.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένα σχολείο έχει 200 μαθητές. Για τη μετάβασή τους στο σχολείο, 120 μαθητές χρησιμοποιούν λεωφορείο, 60 μαθητές χρησιμοποιούν αυτοκίνητο και οι υπόλοιποι πηγαίνουν με τα πόδια. Αν ένας μαθητής χρησιμοποιεί για τη μετάβασή του στο σχολείο λεωφορείο, η πιθανότητα να καθυστερήσει το πρωί στο σχολείο είναι $\frac{1}{3}$, αν χρησιμοποιεί αυτοκίνητο, η πιθανότητα να καθυστερήσει είναι $\frac{1}{4}$, ενώ αν πηγαίνει με τα πόδια, η πιθανότητα να καθυστερήσει είναι $\frac{1}{8}$. Επιλέγουμε στην τύχη ένα μαθητή του σχολείου.

(α) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής που επιλέξαμε να έχει καθυστερήσει το πρωί στο σχολείο.

(β) Αν ο μαθητής που επιλέξαμε καθυστέρησε το πρωί να έλθει στο σχολείο, να βρείτε την πιθανότητα να ήλθε στο σχολείο με λεωφορείο

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αρκετά βατή άσκηση. Σχεδόν όλοι δουλέψανε με δενδροδιάγραμμα.

ΑΣΚΗΣΗ 3

(α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (κ), ο οποίος εφάπτεται στους θετικούς ημιάξονες των συντεταγμένων Ox και Oy και το σημείο επαφής του με τον θετικό ημιάξονα Ox είναι το σημείο $A(2,0)$.

(β) Αν ο πιο πάνω κύκλος (κ) έχει εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) του κύκλου (κ), σε τυχαίο σημείο του $T(2 + 2\sigma\eta\nu\theta, 2 + 2\eta\mu\theta)$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι $\sigma\eta\nu\theta \cdot x + \eta\mu\theta \cdot y = 2\sigma\eta\nu\theta + 2\eta\mu\theta + 2$.

(γ) Η εφαπτομένη (ϵ) τέμνει τον άξονα των τετμημένων $x'x$ στο σημείο B και η ευθεία TA τέμνει τον άξονα των τεταγμένων $y'y$ στο σημείο Γ . Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος $B\Gamma$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Οι πλείστοι μαθητές εργάστηκαν γεωμετρικά και όχι με εύρεση f, g, c .
- Κάποιοι κάνουν λάθος στον υπολογισμό της παραγώγου και στη συνέχεια κάνουν «αλχημείες» για να φτάσουν στην εξίσωση εφαπτομένης που δίνεται.
- Το κύριο λάθος που κάνουν στο ερώτημα αυτό είναι ότι βρίσκουν ως σημείο Γ το σημείο επαφής της εφαπτομένης με τον άξονα $y'y$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνεται η συνάρτηση g , με τύπο $g(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τη κυρτότητα.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της $A(0, g(0))$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $e^{-x} \geq 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Βρίσκουν $g''(x) = e^{-x}$ αλλά γράφουν ότι $g''(x) < 0$, επομένως στρέφεται κοίλα κάτω
- Λύνουν την εξίσωση $e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g''(x)$	-	0	+
$g(x)$	κοίλη		κυρτή

ΑΣΚΗΣΗ 5

(α) Να αποδείξετε ότι: $(\text{τοξεφ}\chi)' = \frac{1}{1+\chi^2}$, $\chi \in \mathbb{R}$.

(β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f με τύπο $f(\chi) = \text{τοξεφ}(\chi^2)$ και να αποδείξετε ότι $f(\chi) \geq 0$, $\chi \in \mathbb{R}$.

(γ) Αν g συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, \alpha]$, $\alpha > 0$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\chi^2 = u$, να αποδείξετε ότι: $\int_0^\alpha \chi^3 g(\chi^2) d\chi = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha^2} \chi g(\chi) d\chi$.

(δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης h με τύπο $h(\chi) = \chi^3 \text{τοξεφ}\chi^2$, τον άξονα των τετμημένων χ' και τις ευθείες $\chi = 0$ και $\chi = 1$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

(α) - Λίγοι μαθητές ασχολήθηκαν.

- Σχεδόν κανένας δεν έβαλε τον περιορισμό $y \in (-\pi/2, \pi/2)$

(β) Γίνεται λάθος στον υπολογισμό της παραγώγου,

$$\text{π.χ. } f'(x) = \frac{1}{1+x^4} \text{ ή } f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

(γ) Σχεδόν όλοι προσπάθησαν να την λύσουν οι περισσότεροι με επιτυχία.

(δ) Επειδή $f(x) = \text{τοξεφ}(x^2) \geq 0$ για $x \in \mathbb{R}$ και $x^3 \geq 0$ για $x \geq 0$ θα έχουμε ότι

$$h(x) = x^3 \text{τοξεφ}(x^2) \geq 0 \quad (1) \text{ για } x \in [0, 1]$$

Ελάχιστοι χρησιμοποίησαν την ανίσωση (1)

Κάποιοι προσπάθησαν αν βρουν το ολοκλήρωμα με ολοκλήρωση κατά παράγοντες χωρίς να χρησιμοποιήσουν το (γ)

ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ
ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΑΣ