Πολυδιάστατη προσέγγιση για την αξιολόγηση της Μαθηματικής γνώσης του μαθητή

Ιωάννης Μεγάλεμος, ΕΜΕ Μαθηματικών
Σεμινάρια Φεβρουαρίου 2020

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένας από τους στόχους του κάθε εκπαιδευτικού είναι να πετύχει να υπάρχει στους μαθητές του μια ισορροπημένη προοπτική μεταξύ της διαδικαστικής ευχέρειας και της εννοιολογική κατανόησης. Επιπρόσθετα, η αξιολόγηση του εκπαιδευτικού για τον μαθητή πρέπει επίσης να υπογραμμίζει αυτή την ισορροπία.

Η ισορροπία αυτή φαίνεται να εξασφαλίζεται, σε κάποιο , τουλάχιστον, ικανοποιητικό βαθμό, αν την κάθε έννοια που εισαγάγουμε την προσεγγίσουμε πολυδιάστατα. (Thompson and Senk, 2008 και Usiskin, 2003 and 2007).

Η ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Η προτεινόμενη προσέγγιση που υποβοηθάει τόσο στη διδακτική διαδικασία όσο και στην αξιολόγηση του μαθητή στηρίζεται σε τέσσερεις διατάσεις :

Δεξιότητες - Skills

Ιδιότητες – Properties

Εφαρμογές - Uses

Παραστάσεις – Representations

Σημείωση: Στη βιβλιογραφία η πιο πάνω προσέγγιση είναι γνωστή ως «The SPUR Approach»

- Οι **Δεξιότητες** αντιπροσωπεύουν εκείνες τις διαδικασίες που οι μαθητές πρέπει να καταλάβουν σε ικανοποιητικό βαθμό. Αυτές οι διαδικασίες κυμαίνονται από εφαρμογή πρότυπων αλγόριθμων, επιλογή και σύγκριση αλγορίθμων μέχρι ανακάλυψη ή εφεύρεση αλγορίθμων, συμπεριλαμβανομένων και διαδικασιών με χρήση τεχνολογίας.

- Οι **Ιδιότητες** είναι οι βασικές αρχές των Μαθηματικών, που κυμαίνονται, από την απλή ονομασία των ιδιοτήτων, οι οποίες χρησιμοποιούνται για να δικαιολογούνται τα συμπεράσματα, μέχρι και αποδείξεις.

- Οι **Εφαρμογές** είναι η χρήση των εννοιών σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου ή σε άλλες έννοιες στα Μαθηματικά και κυμαίνονται από «απλά προβλήματα λέξεων" μέχρι την ανάπτυξη και χρήση μαθηματικών μοντέλων.

- **Οι Παραστάσεις** είναι γραφήματα, εικόνες και άλλες οπτικές απεικονίσεις των διαφόρων εννοιών, συμπεριλαμβανομένων τυποποιημένων παραστάσεων και ό,τι άλλο μπορεί να σχετίζεται με την ανακάλυψη νέων τρόπων για την εκπροσώπηση αυτών των εννοιών.

Η χρησιμότητα της πολυδιάστατης προσέγγισης

- Παρά το γεγονός ότι, αρχικά, η προσέγγιση αυτή χρησιμοποιήθηκε για την ανάπτυξη προγραμμάτων σπουδών στις Ηνωμένες Πολιτείες, στη συνέχεια αποδείχτηκε ότι η προσέγγιση αυτή μπορεί, επίσης, να αποτελέσει και ένα ισχυρό εργαλείο αξιολόγησης. Εάν η αξιολόγηση των επιτευγμάτων των μαθητών στηρίζεται σε μια μόνο διάσταση, τότε οι εκπαιδευτικοί μπορεί να έχουν λανθασμένη άποψη για τον βαθμό κατανόησης των μαθητών τους. Αντίθετα, αν οι μετρήσεις των μαθητών για την κατανόηση στηριχθούν και στις τέσσερις διαστάσεις, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αποκτήσουν καλύτερη γνώση για τα δυνατά σημεία και τις αδυναμίες των μαθητών τους. (Berinderjeet Kaur , Wong Khoon Yoong, 2011).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

- **Στη διερεύνηση εξίσωσης α΄ βαθμού μιας μεταβλητής (Β΄ Γυμνασίου)**

ΑΣΚΗΣΗ ΓΙΑ ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ

- Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η εξίσωση $3(x - 2) = \lambda x - 4$:

(α) να έχει μια μόνο λύση και

(β) να είναι αδύνατη

ΛΥΣΗ:

$3(x - 2) = \lambda x - 4$

$3x - 6 = \lambda x - 4$

$3x - \lambda x = 6 - 4$

$(3 - \lambda)x = 2$

(α) Αν $\lambda \neq 3$ τότε η εξίσωση έχει μια μόνο λύση

(β) Αν $\lambda = 3$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη

ΑΣΚΗΣΗ ΓΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Δόθηκε η εξής άσκηση σε μαθητές ενός τμήματος:

Να λύσετε την εξίσωση: $(λ+2)x - 2 = 7$

Ο Κώστας έδωσε την εξής λύση:

$$(λ+2)x - 2 = 7$$

$$(λ+2)x = 7+2$$

$$(λ+2)x = 9$$

$$\boxed{x = \frac{9}{λ+2}}$$

Είναι σωστή η απάντηση του Κώστα, ναι ή όχι και γιατί;

- ΛΥΣΗ

Όχι, γιατί αν $\lambda = -2$, τότε ο παρονομαστής είναι 0 και επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη και άρα δεν υπάρχει λύση.

Αν, όμως, ο Κώστας έθετε τον περιορισμό $\lambda \neq -2$, τότε ο παρονομαστής δεν θα ήταν 0 και η απάντηση θα ήταν σωστή.

ΑΣΚΗΣΗ ΓΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Ο Γιάννης και ο Αντρέας άρχισαν να εξοικονομούν χρήματα για να αγοράσουν ένα «video game». Ο Γιάννης έχει ήδη €20 και επιπλέον εξοικονομεί €3 την εβδομάδα. Ο Αντρέας δεν έχει καθόλου χρήματα αυτή τη στιγμή και προσπαθεί να εκτιμήσει πόσα χρήματα μπορεί να εξοικονομεί την εβδομάδα και στη συνέχεια να βρει σε πόσες βδομάδες θα έχει ίσο αριθμό χρημάτων με τον Γιάννη.

Να κατασκευάσετε μια παραμετρική εξίσωση που να περιγράφει το πιο πάνω πρόβλημα.

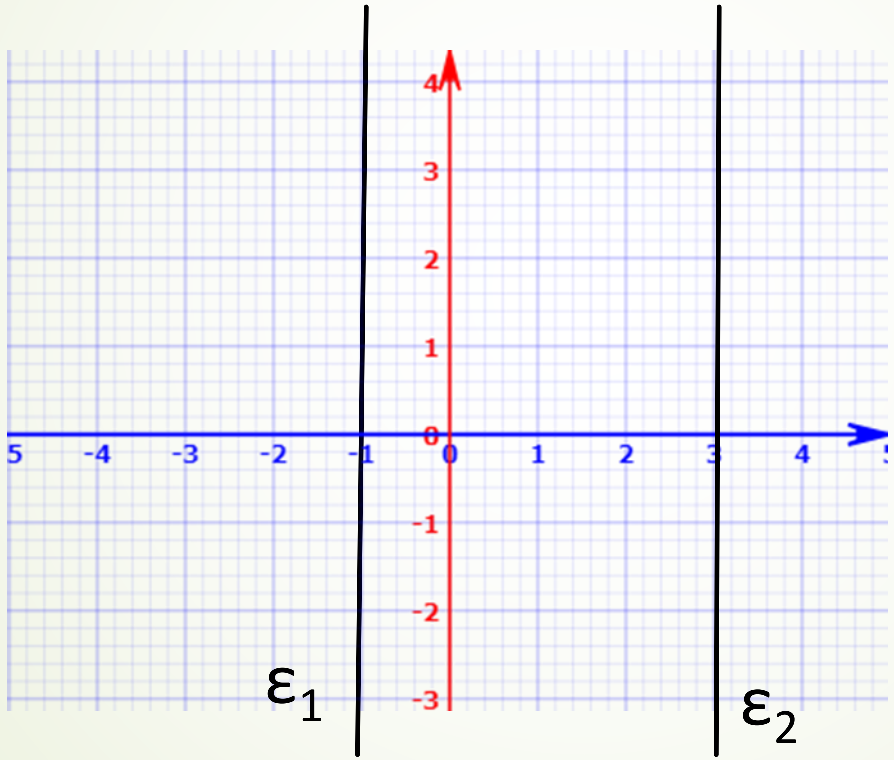
ΛΥΣΗ:

x: ο αριθμός των εβδομάδων

λ: το ποσό που προσπαθεί να εκτιμήσει ο Αντρέας

Παραμετρική εξίσωση: $3x + 20 = \lambda x$

- **ΑΣΚΗΣΗ ΓΙΑ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ**
- Η παραμετρική εξίσωση $(\lambda-4)x=3$ αντιστοιχεί στις εξισώσεις των πιο κάτω ευθειών ε_1 και ε_2 . Να βρείτε την τιμή του λ, για κάθε περίπτωση. Για ποια τιμή του λ, η εξίσωση δεν μπορεί να αντιστοιχεί σε ευθεία;



Σημείωση: Η ερώτηση αυτή, προφανώς, μπορεί να δοθεί μετά που θα διδαχθεί η ευθεία.

- ΛΥΣΗ

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda-4)x=3\\ x=-1\end{array}\right\}\Rightarrow(\lambda-4)(-1)=3\Rightarrow\ldots\Rightarrow\lambda=1$$

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda-4)x=3\\ x=3\end{array}\right\}\Rightarrow(\lambda-4)3=3\Rightarrow\ldots\Rightarrow\lambda=5$$

- Για $\lambda = 4$ η παραμετρική εξίσωση είναι αδύνατη και επομένως, δεν μπορεί να αντιστοιχεί σε εξίσωση ευθείας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

- **Στον ορισμό της απόλυτης τιμής (Β΄ Λυκείου Κατεύθυνσης)**

ΑΣΚΗΣΗ ΓΙΑ ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ

- Να γράψετε την πιο κάτω συνάρτηση χωρίς απόλυτα:

$f(x)= |x-3|$

ΛΥΣΗ

$$f(x) = |x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{αν } x \geq 3 \\ -x+3, & \text{αν } x < 3 \end{cases}$$

$\forall x \in R$

- **ΑΣΚΗΣΗ ΓΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**
- Να χαρακτηρίσετε το καθένα από τα πιο κάτω ως ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:

(α) $|-x^2 - 7| < 0$

(β) $|-x + 6| = |x - 6|$

ΛΥΣΗ

(α) $|-x^2 - 7| < 0$ ΛΑΘΟΣ (διότι $|x| \geq 0, \quad \forall x \in R$)

(β) $|-x + 6| = |x - 6|$ ΣΩΣΤΟ (διότι $|x| = |-x| \; \forall x \in R$)

ΑΣΚΗΣΗ ΓΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Αν υποθέσουμε ότι σε μια χώρα θεωρείται ως «ιδανική θερμοκρασία» οι 26^0C, να βρείτε μια συνάρτηση που να εκτιμά την απόλυτη διαφορά, σε ^0C, της εκάστοτε θερμοκρασίας στην χώρα αυτή, από την «ιδανική θερμοκρασία».

ΛΥΣΗ

x η εκάστοτε θερμοκρασία

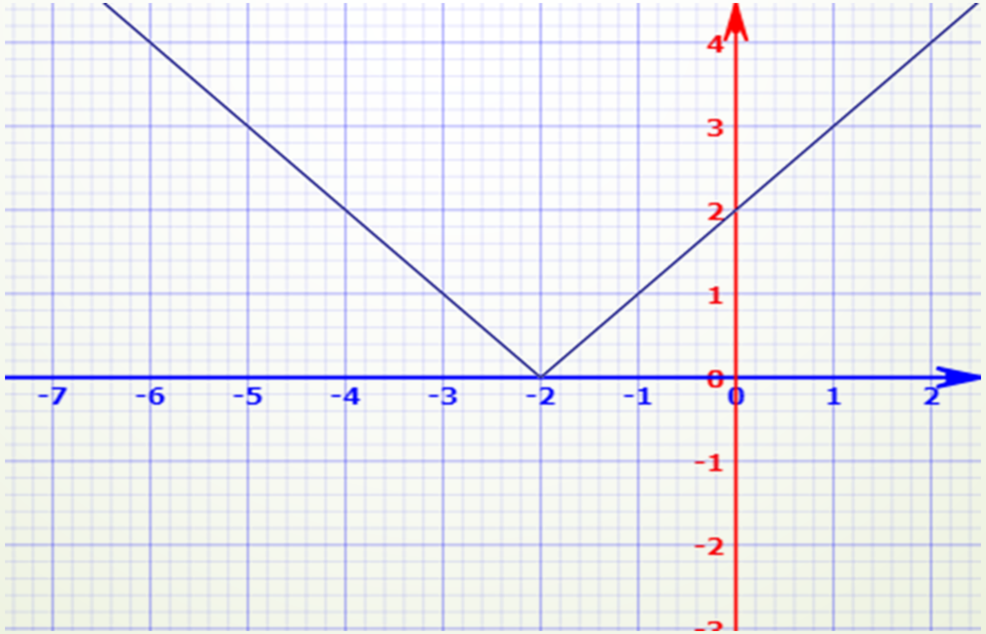
$$\left.\begin{aligned} &\text{Αν } x \geq 26 \Rightarrow f(x) = x - 26 \\ &\text{Αν } x < 26 \Rightarrow f(x) = 26 - x \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = |x - 26|$$

- **ΑΣΚΗΣΗ ΓΙΑ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ**

Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x+2|$.

ΛΥΣΗ

$$f(x) = |x+2| = \begin{cases} x+2, & \text{αν } x \geq -2 \\ -x-2, & \text{αν } x < -2 \end{cases}$$



ΚΑΤΑΚΛΕΙΔΑ

- Για να μπορέσουμε να επιφέρουμε στη διδασκαλία μας μια ισορροπημένη προοπτική μεταξύ της διαδικαστικής ευχέρειας και της εννοιολογική κατανόησης από μέρους των μαθητών
- Για να υποβοηθήσουμε το έργο μας στην κατανόηση της αξιολόγησης της Μαθηματικής γνώσης του μαθητή

Προτείνεται η εφαρμογή στην πράξη μιας πολυδιάστατης προσέγγισης , για την αξιολόγηση της Μαθηματικής γνώσης του μαθητή, στο βαθμό που αυτό είναι εφικτό, σε ΚΑΘΕ νέα έννοια που εισάγουμε στους μαθητές μας στο μάθημα των Μαθηματικών.

Βιβλιογραφία

- Berinderjeet Kaur & Wong Khoon Yoong (2011). Assessment in the Mathematics Classroom. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore: National Institute of Education.
- Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- Kaur, B., Koay, P. L., & Yap, S. F. (2004). Country reports: Singapore. In D. Burghes, R. Geach, & M. Roddick (Eds.), International Project on Mathematical Attainment Report. Series of international monographs on mathematics teaching worldwide, Hungary: Müszaki Könyvkiadó, a WoltersKluwer Company.
- Krutetskii, V. (1976). The psychology of mathematical abilities in school children. (translated by J. Teller. Edited by J. Kilpatrick and I. Wirszup). Chicago, IL: University of Chicago Press.

- Thompson, D. R. (2004). Country reports: USA. In D. Burghes, R. Geach, & M. Roddick (Eds.), International Project on Mathematical Attainment Report. Series of international monographs on mathematics teaching worldwide, Hungary: Müszaki Könyvkiadó, a WoltersKluwer Company.
- Thompson, D. R., & Senk, S. L. (2008, July). A multi-dimensional approach to understanding in mathematics textbooks developed by UCSMP. Paper presented in Discussion Group 17 of the International Congress on Mathematics Education. Monterrey, Mexico.
- Usiskin, Z. (2003). A personal history of the UCSMP secondary school curriculum: 1960-1999. In Stanic, G. M. A., & Kilpatrick, J. (Eds.), A history of school mathematics, Volume 1,Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Usiskin, Z. (2007). The case of the University of Chicago School Mathematics Project: Secondary Component. In C. R. Hirsch (Ed.), Perspectives on the design and development of school mathematics curricula. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Σας ευχαριστώ πολύ!