ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

Μαθηματικά

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Μέρος Β'

Αναθεωρημένη Έκδοση

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ Λυκείου

Β΄ τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Α΄ Λυκείου, Α΄ Τεύχος

Συγγραφή: Αθανασίου Ανδρέας
Αντωνιάδης Μάριος
Γιασουμής Νικόλας
Έλληνα Αγγέλα
Ματθαίου Κυριάκος
Μουσουλίδου – Νικολαΐδου Μαριλένα
Παπαγιάννης Κωνσταντίνος
Τιμοθέου Σάββας
Φιλίππου Ανδρέας

Συντονιστής: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*

Εποπτεία: Θεοφίλου Στέλιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Κωστή Αντώνιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παντελή Παντελής, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*

Γλωσσική επιμέλεια: Παλάτου – Χριστόφια Μαριάννα, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*
Κατσουρά Ευφροσύνη, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Σχεδιασμός εξωφύλλου: Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης: Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Α΄ έκδοση 2013
Β΄ έκδοση 2014

Εκτύπωση: Ariagraf & ΣΙΑ ΕΕ

ISBN: 978-9963-0-4741-3

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε δύο τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Α΄ Λυκείου», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Στην αρχή κάθε ενότητας γίνεται παράθεση των στόχων και οι μαθητές/τριες προϊδεάζονται ως προς το τι «θα μάθουμε». Ακολουθεί, στο «Έχουμε μάθει …», η παρουσίαση της αναγκαίας προϋπάρχουσας γνώσης που οι μαθητές/τριες πρέπει να διαθέτουν, κάτι που βοηθά τους/τις εκπαιδευτικούς στον καταρτισμό καλύτερης διαγνωστικής και διαμορφωτικής αξιολόγησης. Στη συνέχεια, οι νέες μαθηματικές έννοιες διερευνώνται με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών/τριών, όπως ορίζουν οι αρχές των Εκσυγχρονισμένων Αναλυτικών Προγραμμάτων των Μαθηματικών. Η προσπάθεια κλιμακώνεται με παραδείγματα και διαβαθμισμένες δραστηριότητες, με έμφαση στη λύση προβλήματος και στην ανάδειξη της τεχνολογίας ως αναπόσπαστου μέρους της Μαθηματικής εκπαίδευσης.

Όλες οι εκδόσεις για τα Μαθηματικά των τελευταίων χρόνων βρίσκονται υπό συνεχή αξιολόγηση, διαμόρφωση και βελτίωση στη βάση της ανατροφοδότησης και των παρατηρήσεων που προέρχονται και από τους/τις μάχιμους/ες καθηγητές/τριες των Μαθηματικών. Αναμένω από τους διδάσκοντες/ουσες να εκφράσουν τις απόψεις τους και να υποβάλουν τις εισηγήσεις τους, τόσο σε σχέση με το περιεχόμενο του βιβλίου και το επίπεδο των ασκήσεων και δραστηριοτήτων όσο και σε σχέση με τον τρόπο προσέγγισης της ύλης.

Όλο το υλικό που παράγεται για το μάθημα των Μαθηματικών αποσκοπεί στη βοήθεια τόσο των μαθητών/τριών, όσο και των καθηγητών/τριών, στην πορεία τους μέσα από τα Εκσυγχρονισμένα Αναλυτικά Προγράμματα, με στόχο το καλύτερο αποτέλεσμα. Είναι εμποτισμένο με τον σύγχρονο τρόπο σκέψης και προσηλωμένο στην προαγωγή και στην ανάδειξη των βασικών δεξιοτήτων των μαθητών/τριών μας, που αποτελεί πρώτιστο μέλημά μας. Η προσπάθεια συνεχίζεται και οι προοπτικές είναι λαμπρές.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τον κύριο Κωνσταντίνο Χρίστου, Καθηγητή στο Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Σάββας Αντωνίου

Αναπληρωτής Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ενότητα

6

Συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$

Εξισώσεις - Ανισώσεις

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- **Να μελετούμε και να κατασκευάζουμε γραφικές παραστάσεις** της μορφής
  - ✓ $f(x) = ax^2, a \neq 0$
  - ✓ $f(x) = \alpha(x+\kappa)^2 + \lambda,\ a \neq 0.$

- Να κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$.

- Να υπολογίζουμε τη **μέγιστη ή ελάχιστη** τιμή της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$.

- Να μελετούμε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ και να λύουμε ανισώσεις δεύτερου βαθμού.

- Να λύουμε ανισώσεις ανώτερου βαθμού και κλασματικές ανισώσεις.

Έχουμε μάθει ...

- ✓ Να **ορίζουμε τη συνάρτηση** και **να την αναπαριστούμε** με πολλαπλούς τρόπους, όπως με **βελοειδές διάγραμμα, με τύπο, με πίνακα τιμών, με γραφική παράσταση και με γράφημα**.

- ✓ Να βρίσκουμε το **Πεδίο Ορισμού και Τιμών** από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

- ✓ Σε κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, (\alpha \neq 0)$ η παράσταση $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, ονομάζεται διακρίνουσα και καθορίζει το είδος των ριζών της εξίσωσης.

  - Αν $\boldsymbol{\Delta < 0}$**,** η εξίσωση **δεν έχει πραγματικές ρίζες.**
  - Αν $\boldsymbol{\Delta > 0}$**,** το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες που δίνονται από τους τύπους: $\boldsymbol{x_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$, $\boldsymbol{x_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$.
  - Αν $\boldsymbol{\Delta = 0}$**,** το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες.

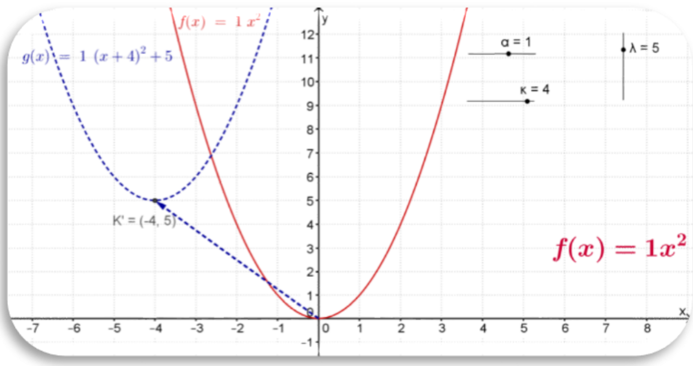
$$\boldsymbol{x_1 = x_2 = \frac{-\beta}{2\alpha}}$$

Μελέτη της συνάρτησης $\boldsymbol{f(x) = a(x+\kappa)^2 + \lambda\,,\ a \neq 0}$

Διερεύνηση

- Να ανοίξετε το αρχείο «Alyk_En08_Paravoli2.ggb ».

✓ Να επιλέξετε τους δρομείς «κ» και «λ» και να δώσετε τις τιμές $\kappa = 0$ και $\lambda = 0$. Να επιλέξετε τον δρομέα «α» και να δώσετε διάφορες τιμές στο α $(a > 0, a < 0)$.



Τι παρατηρείτε για τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)$ ως προς τη μορφή της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$, σε κάθε περίπτωση;

✓ Να δώσετε τις τιμές $\alpha = 1\,, \kappa = 0$ και να μεταβάλετε την τιμή του δρομέα λ $(\lambda > 0, \lambda < 0)$.
Τι παρατηρείτε για τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)$ ως προς τη μορφή της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$, σε κάθε περίπτωση;

✓ Να δώσετε τις τιμές $\alpha = -1\,, \kappa = 0$ και να μεταβάλετε την τιμή του δρομέα λ $(\lambda > 0, \lambda < 0)$.
Τι παρατηρείτε για τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)$ ως προς τη μορφή της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$, σε κάθε περίπτωση;

✓ Να δώσετε τις τιμές $\alpha = 1\,, \lambda = 0$ και να μεταβάλετε την τιμή του δρομέα κ $(\kappa > 0, \kappa < 0)$.
Τι παρατηρείτε για τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)$ ως προς τη μορφή της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$, σε κάθε περίπτωση;

✓ Να δώσετε τις τιμές $\alpha = -1\,, \lambda = 0$ και να μεταβάλετε την τιμή του δρομέα κ $(\kappa > 0, \kappa < 0)$.
Τι παρατηρείτε για τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)$ ως προς τη μορφή της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$, σε κάθε περίπτωση;

✓ Να δώσετε την τιμή $\alpha = 1$. Να μετακινήσετε τους δρομείς κ και λ. Τι παρατηρείτε για τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)$ ως προς τη μορφή της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$, σε κάθε περίπτωση;

Μαθαίνω

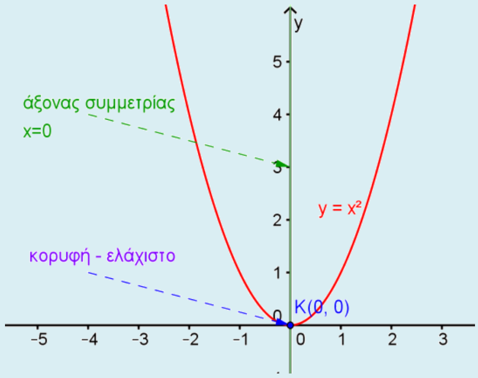
- ✓ Η συνάρτηση $f(x) = ax^2,\ a \neq 0, x \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **παραβολή**.

- ✓ Η συνάρτηση $f(x) = ax^2,\ a \neq 0$, έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα των τεταγμένων, ο οποίος ονομάζεται **άξονας της παραβολής**.

- *Αν $\alpha > 0$, τότε:*

  - Το **Πεδίο Τιμών** της συνάρτησης είναι το $[0\,,+\infty)$.
  - Η **ελάχιστη τιμή της είναι $y = 0$** στο σημείο με συντεταγμένες $(0{,}0)$, το οποίο λέγεται **κορυφή** της παραβολής.
  - Η καμπύλη «πλησιάζει» τον άξονα των y, καθώς το α αυξάνεται

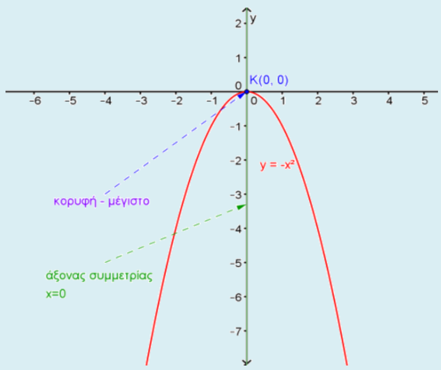
Για παράδειγμα, στο διπλανό σχήμα, η συνάρτηση $y = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή $y_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = 0$.



- Αν $\alpha < 0$, τότε:

  - Το **Πεδίο Τιμών** της συνάρτησης είναι το $(-\infty\,,0]$.
  - Η παραβολή έχει **μέγιστη τιμή την $y = 0$** στο σημείο με συντεταγμένες $(0{,}0)$, το οποίο λέγεται **κορυφή** της παραβολής.
  - Η καμπύλη «πλησιάζει» τον άξονα των y, καθώς το $|\alpha|$αυξάνεται.

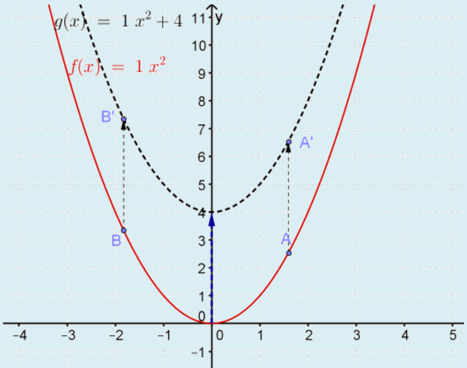
Για παράδειγμα, στο διπλανό σχήμα, η συνάρτηση $y = -x^2, x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή $y_{\mu\varepsilon\gamma} = 0$.



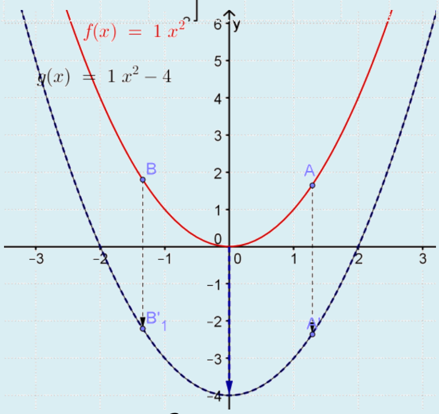
- ✓ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $\boldsymbol{g(x) = \alpha x^2 + \lambda}$ προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = ax^2$ κατά λ μονάδες προς τα πάνω, αν $\lambda > 0$ ή κατά λ μονάδες προς τα κάτω, αν $\lambda < 0$.
  Η γραφική παράσταση της g έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(0, \lambda)$ και άξονα συμμετρίας τη $x = 0$.

Για παράδειγμα:

- ➢ *Η συνάρτηση $g(x) = x^2 + 4$ προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της $f(x) = x^2$, 4 μονάδες προς τα πάνω $(\lambda = 4 > 0)$.*
  Έχει κορυφή το $(0,4)$ και άξονα συμμετρίας τη $x = 0$.



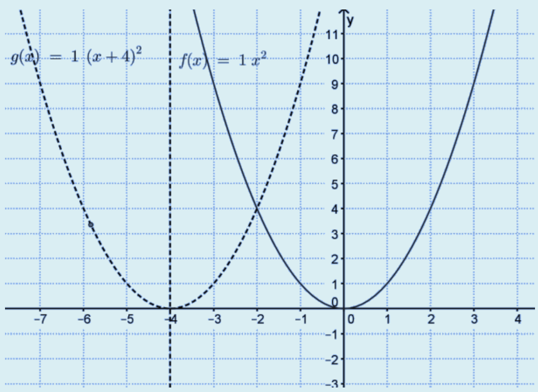
- ➢ *Η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 4$ προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της $f(x) = x^2$, 4 μονάδες προς τα κάτω $(\lambda = -4 < 0)$.*
  Έχει κορυφή το $(0, -4)$ και άξονα συμμετρίας τη $x = 0$.



- ✓ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $\boldsymbol{g(x) = a(x + \kappa)^2}$ προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = ax^2$ κατά κ μονάδες προς τα **αριστερά, αν $\boldsymbol{\kappa > 0}$ ή κατά $\boldsymbol{\kappa}$ μονάδες προς τα δεξιά, αν $\boldsymbol{\kappa < 0}$.**
  Η γραφική παράσταση της g έχει *κορυφή το σημείο με συντεταγμένες* $(-\kappa, 0)$ *και άξονα συμμετρίας τη* $x = -\kappa$.

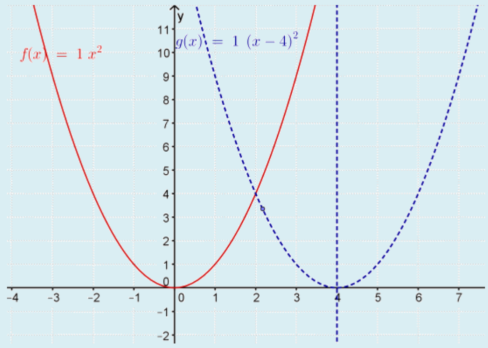
Για παράδειγμα:

- ➢ *Η συνάρτηση $g(x) = (x + 4)^2$ προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της $f(x) = x^2$, 4 μονάδες αριστερά $(\kappa = 4 > 0)$.*
  Έχει κορυφή το $(-4,0)$ και άξονα συμμετρίας τη $x = -4$.



Για παράδειγμα:

- *Η συνάρτηση $g(x) = (x-4)^2$ προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της $f(x) = x^2$, 4 μονάδες δεξιά ($\kappa = -4 < 0$).*
- *Έχει κορυφή το σημείο $(4,0)$ και άξονα συμμετρίας τη $x = 4$.*

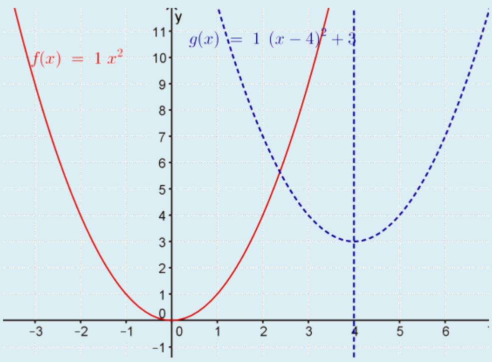


✓ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g, με τύπο $\boldsymbol{g(x) = a(x+\kappa)^2 + \lambda}$ **,** $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = ax^2$, κ μονάδες οριζόντια και λ μονάδες κατακόρυφα.

✓ Η g έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(-\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda})$, άξονα συμμετρίας τη $x = -\kappa$ και ελάχιστη τιμή λ, όταν $\boldsymbol{\alpha > 0}$ ή μέγιστη τιμή λ, όταν $\boldsymbol{\alpha < 0}$.

Για παράδειγμα:

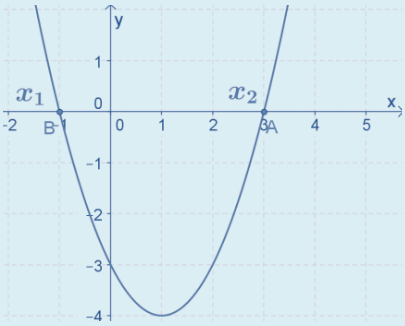
- *Η συνάρτηση $g(x) = (x-4)^2 + 3$ προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$, 4 μονάδες δεξιά και 3 μονάδες προς τα πάνω. Έχει κορυφή το σημείο $(4,3)$ και άξονα συμμετρίας τη $x = 4$.*



✓ Η παραβολή $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0}$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ και κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $\boldsymbol{K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)}$, **με** $\boldsymbol{f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}}$.

Σημείωση:
Η παραβολή $y = ax^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$ τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\gamma})$.

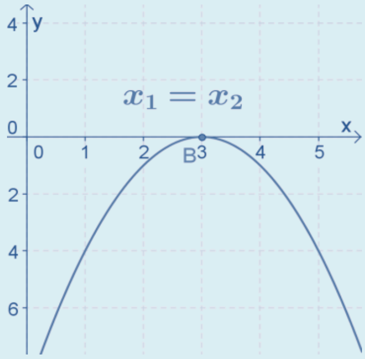
- ✓ **Γραφικά** οι λύσεις της εξίσωσης: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, (\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\ \alpha\neq 0)$ είναι οι τετμημένες των σημείων τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\ \alpha x^2+\beta x+\gamma$ με τον άξονα των τετμημένων.



- ✓ Όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ \alpha x^2+\beta x+\gamma, (\alpha\neq 0)$ τέμνει τον άξονα των τετμημένων σε δύο διαφορετικά σημεία, η εξίσωση

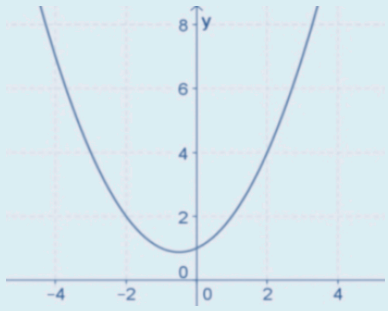
$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,$$

$(\alpha\neq 0)$ έχει $\Delta>0$, δηλαδή έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες ($\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$**).**



- ✓ Όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ \alpha x^2+\beta x+\gamma, (\alpha\neq 0)$ εφάπτεται του άξονα των τετμημένων, η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει $\Delta=0$, δηλαδή έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες

$$\left(\boldsymbol{x_1=x_2=-\frac{\beta}{2\alpha}}\right).$$



- ✓ Όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ \alpha x^2+\beta x+\gamma, \alpha\neq 0$ δεν τέμνει τον άξονα των τετμημένων, η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει $\Delta<0$, δηλαδή δεν έχει πραγματικές ρίζες.

- ✓ Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{S}$ **το άθροισμα** και με $\boldsymbol{P}$ **το γινόμενο** των ριζών x_1, x_2 της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, (\alpha\neq 0)$.

Ισχύει: $\boldsymbol{S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}}$ **και** $\boldsymbol{P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}}$ **(**τύποι του Vietta).

- Κάθε τριώνυμο $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ με δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2, μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στη μορφή:

$$\boldsymbol{\alpha(x-x_1)(x-x_2)}.$$

Ειδικά, αν $\Delta=0\Longrightarrow x_1=x_2=-\frac{\beta}{2\alpha}$, το τριώνυμο παίρνει τη μορφή:

$$\boldsymbol{\alpha(x-x_1)^2=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}.$$

- Μπορούμε να κατασκευάσουμε εξίσωση δεύτερου βαθμού, όταν γνωρίζουμε τις ρίζες x_1, x_2 ή το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της. Μια τέτοια εξίσωση είναι: $\boldsymbol{x^2-Sx+P=0}$

Παραδείγματα

1. Να βρείτε την τιμή (ή τις τιμές) της παραμέτρου λ, ώστε η παραβολή με εξίσωση $y = (6-2\lambda)x^2, x \in \mathbb{R}$, να:
   (α) περνά από το σημείο $(-1,2)$ (β) παρουσιάζει ελάχιστο
   (γ) παρουσιάζει μέγιστο.
   Λύση:
   (α) Οι συντεταγμένες του σημείου $(-1,2)$ επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής:
   $$\left.\begin{matrix} y = (6-2\lambda)x^2 \\ (-1,2) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow 2 = (6-2\lambda)(-1)^2$$
   $$\Longrightarrow 2 = 6 - 2\lambda \Longrightarrow 2\lambda = 4 \Longrightarrow \lambda = 2.$$
   (β) Η παραβολή $y = ax^2$ παρουσιάζει ελάχιστο, όταν $\alpha > 0$. Άρα, $6 - 2\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 3$.
   (γ) Η παραβολή $y = ax^2$ παρουσιάζει μέγιστο, όταν $\alpha < 0$. Άρα, $6 - 2\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 3$.

2. Να αποδείξετε ότι η παραβολή $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0}$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ και κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $\boldsymbol{K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)}$, **με** $\boldsymbol{f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}}$.

Απόδειξη:
Με τη **μέθοδο συμπλήρωσης** του τέλειου τετραγώνου το τριώνυμο:
$\boldsymbol{ax^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0}$ μπορεί να μετασχηματιστεί σε:
$$\boldsymbol{ax^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) = \alpha\left(x^2 + 2\cdot\left(\frac{\beta}{2\alpha}x\right) + \frac{\gamma}{\alpha}\right) =}$$
$$\boldsymbol{\alpha\left[\left(x^2 + 2\cdot\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)x + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right) + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right] = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right] =}$$
$$\boldsymbol{\alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right] = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}}$$

Αφού το τριώνυμο $\boldsymbol{a(x+\kappa)^2 + \lambda}$, έχει άξονα συμμετρίας τη $x = -\kappa$ και κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(\boldsymbol{-\kappa, \lambda})$, τότε το τριώνυμο $\boldsymbol{ax^2 + \beta x + \gamma}$ θα έχει άξονα συμμετρίας

$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ και κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $\boldsymbol{K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)}$, **με** $\boldsymbol{f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}}$.

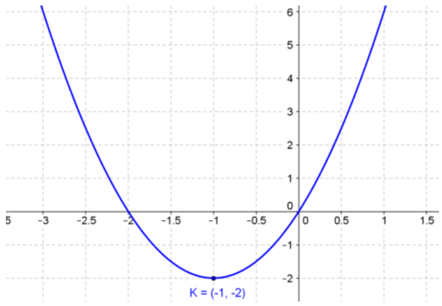
Για παράδειγμα η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x + 8}$ γράφεται με τη μέθοδο συμπλήρωσης του τέλειου τετραγώνου και ως $\boldsymbol{f(x) = (x+1)^2 + 7}$. Άρα, έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $\boldsymbol{x = -1}$ και κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(\boldsymbol{-1, 7})$. Παρατηρούμε ότι $\forall x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x) \geq 7$ και έτσι το Π.Τ. της f είναι: $[7, +\infty)$. Η γραφική παράσταση της $\boldsymbol{f}$ ***προκύπτει*** *από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$, μίας μονάδας αριστερά και 7 μονάδων προς τα πάνω.*

3. Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή της παραβολής $f(x) = 2x^2 + 4x$ και να αναφέρετε το $Π.Τ.$ της.

Λύση:

Η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + 4x$ είναι παραβολή με άξονα συμμετρίας $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -1$ και αντίστοιχη κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $\big(-1, f(-1)\big) = (-1, -2)$.

Επειδή $f(x) \geq -2, \forall x \in \mathbb{R}$, το Π.Τ. της συνάρτησης είναι $[-2, +\infty)$.



4. Να αποδείξετε ότι για την $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με ρίζες x_1, x_2 ισχύει: $\boldsymbol{S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}}$ **και** $\boldsymbol{P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}}$ **(τύποι του Vietta).**

Απόδειξη

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = -\frac{2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{2\alpha} = \frac{\beta^2-\Delta}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

5. Να αναφέρετε το είδος της μετατόπισης (οριζόντια-κατακόρυφη), ώστε η $f(x) = x^2$, να μετατοπιστεί στην καμπύλη με τύπο:

(α) $f_1(x) = x^2 + 2$ (β) $f_2(x) = (x-5)^2$ (γ) $f_3(x) = x^2 + 2x + 3$

Λύση:

(α) $f_1(x) = x^2 + 2$,

Η συνάρτηση f_1 προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της $f(x) = x^2$, 2 μονάδες προς τα πάνω ($\lambda = 2$).

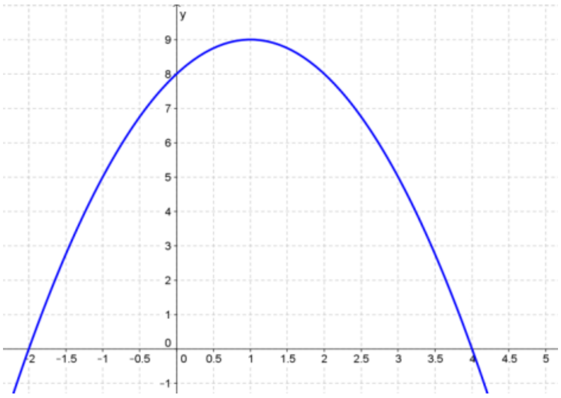
(β) $f_2(x) = (x-5)^2$

Η συνάρτηση f_2 προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της $f(x) = x^2$, 5 μονάδες δεξιά ($κ = -5$).

(γ) $f_3(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$

Η συνάρτηση f_3 προκύπτει από μία μετατόπιση της $f(x) = x^2$, 1 μονάδα αριστερά και 2 μονάδες προς τα πάνω ($κ = 1$, $λ = 2$).

6. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$. Με βάση το σχήμα να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



(α) το πρόσημο του α
(β) την τιμή του γ
(γ) το $\Pi.T.$ της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
(δ) τον άξονα συμμετρίας της
(ε) το μέγιστο ή ελάχιστο της καμπύλης
(στ) Τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$

Λύση:

(α) $\alpha < 0$, γιατί η παραβολή παρουσιάζει μέγιστο.

(β) $\gamma = 8$, γιατί η παραβολή τέμνει τον άξονα των y, στο σημείο $(0,8)$.

(γ) $\Pi.T. = (-\infty, 9]$, γιατί ισχύει $f(x) \leq 9$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(δ) $x = 1$, γιατί τα σημεία $(-2,0)$ και $(4,0)$ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $x = 1$.

(ε) Μέγιστο στο $(1,9)$.

(στ) Η γραφική παράσταση της παραβολή τέμνει τον άξονα των τετμημένων στα σημεία με συντεταγμένες $A(-2,0)$ και $B(4,0)$. Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων τομής των A και B, δηλαδή $x_1 = -2, x_2 = 4$.

7. Να εξετάσετε κατά πόσο η συνάρτηση $f(x) = 3 - 2x - x^2$, $x \in \mathbb{R}$, έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή και να την υπολογίσετε.

Λύση:

1ος τρόπος

Αφού το $\boldsymbol{a = -1 < 0}$, η συνάρτηση θα παρουσιάζει **μέγιστη** τιμή. Για κάθε παραβολή της μορφής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$ η μέγιστη τιμή παρουσιάζεται, όταν $\boldsymbol{x} = -\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{2\alpha}} = \boldsymbol{-1}$.

Επομένως η μέγιστη τιμή θα είναι $f(-1) = 3 - 2(-1) - (-1)^2 = \mathbf{4}$.

$2^{ος}$ τρόπος

Με τη μέθοδο συμπλήρωσης τέλειου τετραγώνου το τριώνυμο $3-2x-x^2$, μπορεί να γραφεί $\mathbf{3-2x-x^2} = -(x^2+2x-3) = -[(x+1)^2-4] = \mathbf{4-(x+1)^2}$. Αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

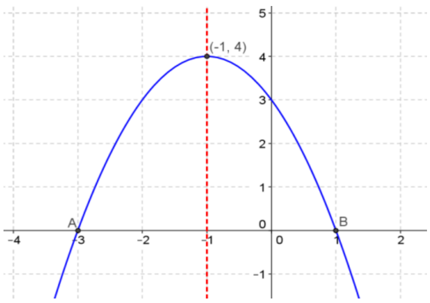
$\mathbf{(x+1)^2 \geq 0} \Leftrightarrow \mathbf{-(x+1)^2 \leq 0} \Leftrightarrow \mathbf{4-(x+1)^2 \leq 4}$ τότε $f(x) \leq 4$,

$\forall x \in \mathbb{R}$. Επομένως η μέγιστη τιμή της f είναι το 4, όταν $(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = -1}$.

$3^{ος}$ τρόπος

Το τριώνυμο $3-2x-x^2$, μπορεί να γραφεί σε παραγοντοποιημένη μορφή: $3-2x-x^2 = (3+x)(1-x)$. Οι τομές της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα των x είναι τα σημεία με συντεταγμένες $A(-3,0)$ και $B(1,0)$, που είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $x = \kappa$ που περνά από το μέσο $M(-1,0)$ των A και B. Επομένως η f θα παρουσιάζει μέγιστη τιμή γιατί $\alpha = -1 < 0$, όταν $x = -1$, με αντίστοιχη μέγιστη τιμή την $f(-1) = \mathbf{4}$.

8. Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\kappa+4)x+\kappa+7=0$. Να βρείτε την τιμή του κ, ώστε η εξίσωση να (α) έχει ρίζα το -3, (β) έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες, (γ) η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2-(\kappa+4)x+\kappa+7$ να εφάπτεται του άξονα των τετμημένων.



Λύση:

(α) $(-3)^2-(\kappa+4)(-3)+\kappa+7=0$ (Το -3 επαληθεύει την εξίσωση).
$\Leftrightarrow 9+3\kappa+12+\kappa+7=0$
$\Leftrightarrow 4\kappa+28=0 \Leftrightarrow \kappa=-7$.

(β) Η εξίσωση $x^2-(\kappa+4)x+\kappa+7=0$.
$\Delta = [-(\kappa+4)]^2-4(\kappa+7)=0 \Leftrightarrow \kappa^2+4\kappa-12=0$ ($\Delta = 0$)
$\Leftrightarrow (\kappa+6)(\kappa-2)=0$
$\Leftrightarrow \kappa_1=-6, \kappa=2$.

(γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-(\kappa+4)x+\kappa+7$, εφάπτεται του άξονα των τετμημένων, όταν $\Delta=0$. Από (β) $\kappa_1=-6, \kappa=2$.

9. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $2x^2-4x-3=0$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $2x_1+2x_2-5x_1x_2$ (β) $\frac{4}{x_1}+\frac{4}{x_2}$,

(γ) $x_1^2+x_2^2$ (δ) $x_1^3+x_2^3$

Λύση:

(α) $2x_1 + 2x_2 - 5x_1x_2 = 2(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 = 2S - 5P$

Για να υπολογίσουμε την αριθμητική τιμή της πιο πάνω παράστασης, υπολογίζουμε το S και το P:

$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} = \frac{4}{2} = 2$ $,P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{3}{2}$.

Άρα, έχουμε: $2x_1 + 2x_2 - 5x_1x_2 = 2S - 5P = 2 \cdot 2 - 5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 4 + \frac{15}{2} = \frac{23}{2}$.

(β) $\frac{4}{x_1} + \frac{4}{x_2} = \frac{4x_2+4x_1}{x_1x_2} = \frac{4(x_1+x_2)}{x_1x_2} = \frac{4S}{P} = \frac{8}{-\frac{3}{2}} = -\frac{16}{3}$.

(γ) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 4 + 3 = 7$

(δ) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$ $(\ a^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)\ )$

$= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]$ $(\ x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\ )$

$= S(S^2 - 3P) = S^3 - 3PS = 8 - 3\left(-\frac{3}{2}\right)2 = 8 + 9 = 17.$

10. Να αποδείξετε ότι

(α) κάθε τριώνυμο $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$ με δύο πραγματικές ρίζες $x_1\,, x_2$, μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στη μορφή: $\boldsymbol{\alpha(x - x_1)(x - x_2)}$.

(β) Να αποδείξετε ότι αν $\Delta = 0$ το τριώνυμο παίρνει τη μορφή:

$\boldsymbol{\alpha(x - x_1)^2 = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}$.

Απόδειξη

(α) Αν $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$

$$P(x) = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) = \alpha\left[x^2 - \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)x + \frac{\gamma}{\alpha}\right]$$
$$= \alpha[\ x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\ ]$$
$$= \alpha[x^2 - xx_1 - x_2x + xx_2] = \alpha[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)]$$
$$= \alpha(x - x_1)(x - x_2).$$

(β) Ειδικά, **αν** $\boldsymbol{\Delta = 0} \Longrightarrow x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}$, τότε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$$
$$= \alpha(x - x_1)^2$$
$$= \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

11. Να δείξετε ότι μια εξίσωση δεύτερου βαθμού, όταν γνωρίζουμε τις ρίζες x_1, x_2 ή το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\boldsymbol{x^2 - Sx + P = 0}$$

Απόδειξη

Αν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, (\alpha \neq 0)$ είναι η ζητούμενη εξίσωση

$x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ (Διαιρούμε με $(\alpha \neq 0)$)

$\Leftrightarrow x^2 — \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 - Sx + P = 0}.$ $\quad (-\frac{\beta}{\alpha} = S = x_1 + x_2 \quad , \frac{\gamma}{\alpha} = P = x_1 x_2).$

12. Να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς με άθροισμα 5 και άθροισμα τετραγώνων 13.

Λύση:

Αν x , y είναι δύο πραγματικοί αριθμοί, με άθροισμα 5 και άθροισμα τετραγώνων 13, τότε

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$y = 5 - x$ **(Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y)**

$x^2 + (5 - x)^2 = 13$ **(Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση)**

$x^2 + (5 - x)^2 = 13 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 0$ **(Απλοποιούμε κάνοντας τις πράξεις)**

$\Leftrightarrow 2(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (x - 2)(x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 , x = 3.$

Οι αντίστοιχες τιμές για τα y είναι: $y = 3$, $y = 2$.

Οι λύσεις του συστήματος είναι: $(2,3), (3,2)$.

Άρα, οι δύο πραγματικοί αριθμοί είναι το 2 και το 3.

13. Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{5\gamma^2 - \gamma - 4}{25\gamma^2 - 16}$

Λύση:

Το τριώνυμο $5\gamma^2 - \gamma - 4$ έχει ρίζες:

$\gamma_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{10} = \frac{1 \pm 9}{10}$, δηλαδή: $\gamma_1 = 1 , \gamma_2 = -\frac{4}{5}$.

Άρα, παραγοντοποιείται ως:

$5(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2) = 5\left(\gamma + \frac{4}{5}\right)(\gamma - 1) = (5\gamma + 4)(\gamma - 1).$

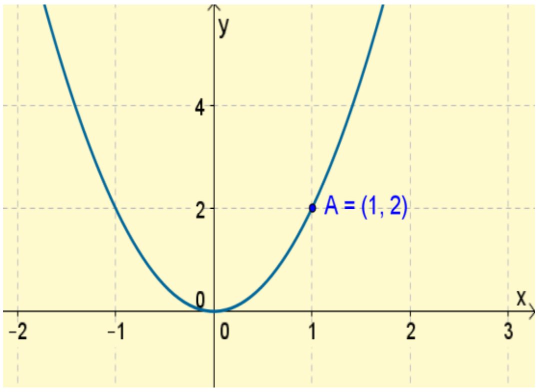
Η παράσταση $25\gamma^2 - 16$ ως διαφορά 2 τετραγώνων παραγοντοποιείται

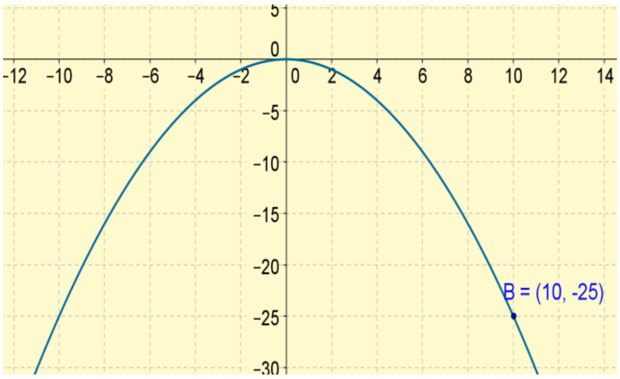
$(5\gamma)^2 - 4^2 = (5\gamma - 4)(5\gamma + 4).$

Επομένως, $\frac{5\gamma^2 - \gamma - 4}{25\gamma^2 - 16} = \frac{(5\gamma + 4)(\gamma - 1).}{(5\gamma - 4)(5\gamma + 4)} = \frac{\gamma - 1}{5\gamma - 4}.$

Δραστηριότητες

1. Στα πιο κάτω διαγράμματα είναι σχεδιασμένες δύο παραβολές με εξίσωση $y = ax^2$. Να βρείτε σε κάθε περίπτωση:
   (α) την τιμή του α
   (β) το σημείο της καμπύλης με τετμημένη -5.

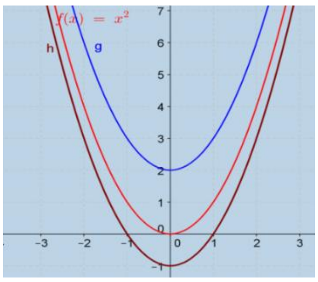




2. Να βρείτε τις πιθανές τιμές του κ, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (-8\kappa + 16)x^2$ να είναι παραβολή που να παρουσιάζει μέγιστο.
3. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ, ώστε η παραβολή με εξίσωση $y = (3\lambda - 12)x^2$, $x \in \mathbb{R}$ να περνά από το σημείο $(2,12)$.
4. Να αναφέρετε δύο ομοιότητες και δύο διαφορές που παρουσιάζουν τα πιο κάτω ζεύγη παραβολών.
   (α) $f(x) = 2x^2$ και $g(x) = 5x^2$
   (β) $f(x) = -x^2$ και $g(x) = -\frac{2x^2}{3}$

5. Ποια είναι η εξίσωση της παραβολής που δημιουργείται σε κάθε περίπτωση, όταν η παραβολή $y = x^2$ μετατοπίζεται κατά:
   (α) 2 μονάδες προς τα κάτω
   (β) 1 μονάδα αριστερά και 2 μονάδες προς τα πάνω
   (γ) 3 μονάδες αριστερά και 1 μονάδα προς τα κάτω
   (δ) 0,5 μονάδα προς τα δεξιά.

6. Στο διάγραμμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και h. Με δεδομένο ότι $f(x) = x^2$, να γράψετε τον τύπο των συναρτήσεων g και h, αν είναι μετατοπίσεις της f.



7. Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή των πιο κάτω παραβολών και να τις παραστήσετε γραφικά:

(α) $f(x) = (x-1)^2 + 3$ (β) $f(x) = -(x+1)^2 + 9$

(γ) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

8. Να υπολογίσετε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή των πιο κάτω συναρτήσεων:
(α) $f(x) = x^2 - 2x + 6$ (β) $g(x) = 4x - x^2$

9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 + 2(\lambda+1)x + \lambda + 4$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για κάθε περίπτωση ξεχωριστά, τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της f:
(α) Να έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$.
(β) Να τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $(0, 2)$.

10. Για ποιες τιμές των α και β η συνάρτηση $g(x) = x^2 + (\beta - 3)x + 2a - 1$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$ και ελάχιστη τιμή το 8;

11. Να περιγράψετε πώς η γραφική παράσταση της $f(x) = -x^2$, με κατάλληλες μετατοπίσεις, θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

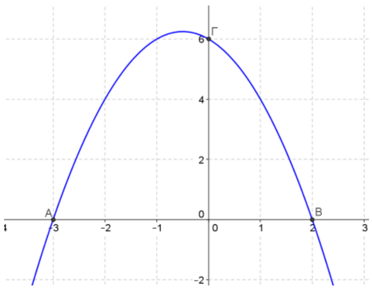
(α) $f_1(x) = -x^2 + 4$ (β) $f_2(x) = 2 + 2x - x^2$ (γ) $f_3(x) = 6x - x^2$

12. Να βρείτε το μέγιστο εμβαδόν ορθογωνίου που έχει σταθερή περίμετρο $400\ m$.

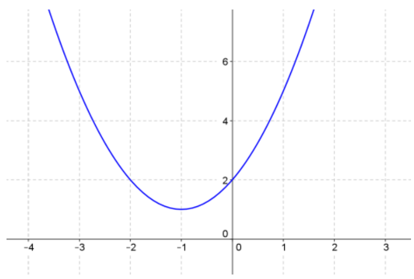
13. Ο τύπος που δίνει το ύψος h (σε m) ενός βέλους σε συνάρτηση με το χρόνο t (t σε sec), όταν το ρίξουμε προς τα πάνω με ταχύτητα $20ms^{-1}$, δίνεται από τον τύπο $h = 20t - 5t^2$. Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο μέγιστο ύψος.

14. Στις πιο κάτω περιπτώσεις δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των παραβολών της μορφής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Να γράψετε για κάθε περίπτωση το πρόσημο της διακρίνουσας Δ, καθώς και τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$.

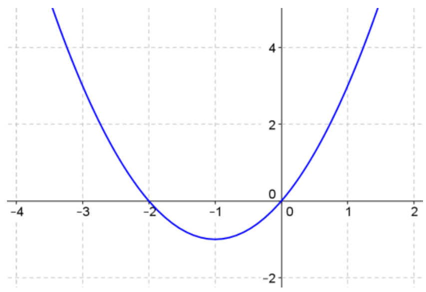
(α)



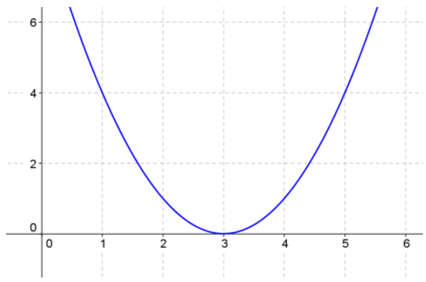
(β)



(γ)



(δ)



15. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει το άξονα των τετμημένων στα σημεία $A(-1{,}0)$ και $B(2{,}0)$.
   (α) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$.
   (β) Να υπολογίσετε τις τιμές των β και γ.
   (γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα των τεταγμένων.

16. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 3x + 1 = 0$
   (α) Να βρείτε το είδος των ριζών της
   (β) Σε πόσα σημεία η παραβολή $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, x \in \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα των τετμημένων;

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 8x + 20$
   (α) Να γράψετε την f στη μορφή $(x + \alpha)^2 + \beta$.
   (β) Να αναφέρετε την ελάχιστη τιμή της f.
   (γ) Να εξηγήσετε πώς η ελάχιστη τιμή της f μπορεί να βοηθήσει στην εύρεση του προσήμου της διακρίνουσας (χωρίς να υπολογίσετε την τιμή της διακρίνουσας) της εξίσωσης $x^2 + 8x + 20 = 0$.

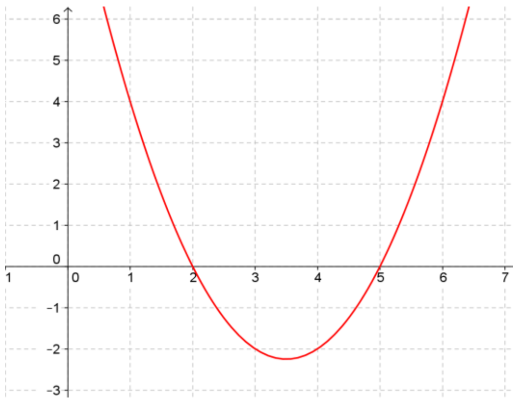
18. Αν η εξίσωση $x^2 - 7x + 3 = 0$ έχει ρίζες x_1, x_2, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

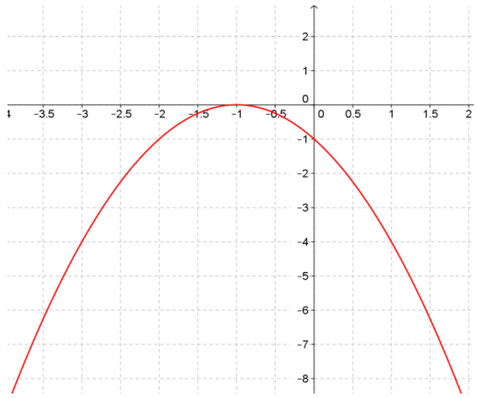
(α) $x_1 + x_2$	(β) $x_1 x_2$	(γ) $3x_1 + 2x_1x_2 + 3x_2$
(δ) $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$	(ε) $(4x_1 + 2)(4x_2 + 2)$	(στ) $x_1^2 + x_2^2$

19. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 2)x + 2\lambda - 8 = 0$. Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει:
   (α) Ρίζα τον αριθμό -2.
   (β) Ρίζες αντίθετες.
   (γ) Ρίζες αντίστροφες.
   (δ) Ρίζες που να έχουν άθροισμα 10.

20. Δίνεται η εξίσωση $4x^2 + 3\mu x + 3\mu - 5 = 0$. Για ποια τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$
 (α) η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες;
 (β) ισχύει $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$.
 (γ) ισχύει $x_1^2 + x_2^2 = \frac{25}{16}$.

21. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, στις πιο κάτω περιπτώσεις
 (α) να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$
 (β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{\gamma}{\alpha}$
 (γ) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{\beta}{\alpha}$
 (δ) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3\gamma - 3\beta}{2\alpha}$.





22. Να λύσετε τα συστήματα:

(α) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}$ (β) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3xy = 5 \end{cases}$

23. Να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς που σε κάθε περίπτωση, να έχουν:
 (α) άθροισμα 8 και γινόμενο 13.
 (β) διαφορά 4 και γινόμενο 21.
 (γ) άθροισμα 2 και άθροισμα τετραγώνων 26.
 (δ) διαφορά 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 74.

24. Να εξετάσετε κατά πόσο η ευθεία $y = 2x + 15$, τέμνει και σε ποια σημεία τις πιο κάτω παραβολές
 (α) $f(x) = x^2$ (β) $f(x) = x^2 + 3x + 20$

25. Να μετατρέψετε σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων τα πιο κάτω τριώνυμα:
 (α) $\alpha^2 - 15\alpha - 16$ (β) $2\gamma^2 - \gamma - 21$ (γ) $y^2 - 2\kappa y + (\kappa^2 - \lambda^2)$

26. Να γράψετε μία εξίσωση δεύτερου βαθμού:

(α) με ρίζες 2 και -3.
(β) με ρίζες το $\frac{1}{3}$ και $-\frac{2}{5}$.
(γ) με ρίζες το -4 και $+4$.
(δ) με ρίζες $7+\sqrt{3}$ και $7-\sqrt{3}$.

27. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

(α) $\frac{\alpha^2+8\alpha-9}{\alpha^2+9\alpha}$ (β) $\frac{3x^2+14x-24}{6x^2-26x+24}$ (γ) $\frac{3x^2-7yx+2y^2}{6x^2-5xy+y^2}$

28. Αν η μία ρίζα της εξίσωσης $\kappa x^2+\lambda x+\mu=0, \kappa,\lambda,\mu\in\mathbb{R}, (\kappa\neq 0)$ είναι διπλάσια της άλλης, να βρείτε τη σχέση που συνδέει του συντελεστές κ,λ,μ.

29. (α) Να αποδείξετε ότι ο άξονας συμμετρίας της παραβολής $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$ μπορεί να πάρει τη μορφή $x=\frac{S}{2}$, όπου S το άθροισμα x_1, x_2 των δύο ριζών της εξίσωσης $ax^2+\beta x+\gamma=0$.
(β) Η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$ τέμνει τον άξονα των τετμημένων στα σημεία $(\kappa,0)$ και $(\lambda,0)$. Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας της συναρτήσει των κ και λ;

30. Να σχηματίσετε εξίσωση δεύτερου βαθμού με ρίζες τις $x_1=3+\sqrt{5}, x_2=3-\sqrt{5}$ και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\left(3+\sqrt{5}\right)^3+\left(3-\sqrt{5}\right)^3$.

31. Αν το τριώνυμο $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2, να αποδείξετε ότι: $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|\alpha|}$.

32. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει: $\Delta>0, P>0$, $S<0$. Να βρείτε το πρόσημο των ριζών της.

Πρόσημο Τιμών τριωνύμου- Ανισώσεις Δεύτερου Βαθμού

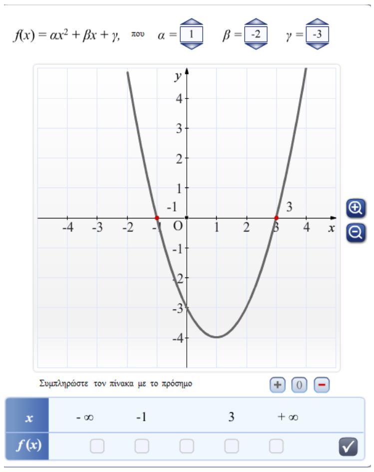
Διερεύνηση

- Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο «ΛΤ_ΜΑΘ_Α_ΨΕΠ07_Πρόσημο τριωνύμου_1.3».
  Να μετακινήσετε τους δρομείς α, β και γ, για να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ώστε:

(α) Να έχει 2 πραγματικές και άνισες ρίζες.

(β) Να έχει 2 πραγματικές και ίσες ρίζες.

(γ) Να μην έχει πραγματικές ρίζες.

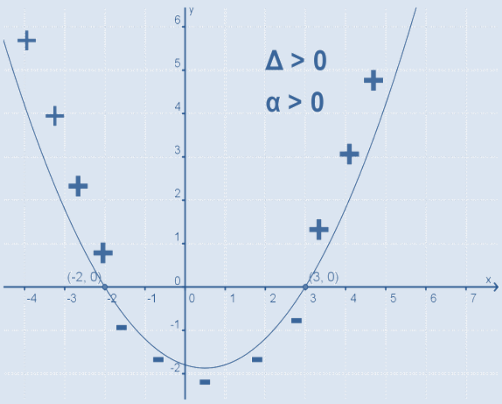


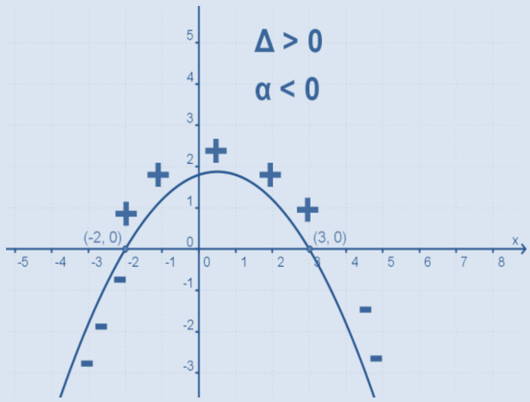
Να μελετήσετε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να γράψετε τα συμπεράσματά σας.

Μαθαίνω

Για το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $(\alpha \neq 0)$, διακρίνουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις:

- ✓ Αν $\boldsymbol{\Delta > 0}$, η γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$ τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία $A(x_1,0)$ και $B(x_2,0)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha \neq 0$.
  - ➢ Η τιμή $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$ είναι **ετερόσημη του $\boldsymbol{\alpha}$**, όταν το x βρίσκεται **μεταξύ των ριζών της** f, δηλαδή όταν $x_1<x<x_2$.
  - ➢ Η τιμή $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$ είναι **ομόσημη του α**, όταν το x βρίσκεται **εκτός των ριζών της** f, δηλαδή όταν $x<x_1$ ή $x>x_2$.





x	$-\infty$		$\boldsymbol{x_1}$		$\boldsymbol{x_2}$		$+\infty$
Πρόσημο $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$		***Ομόσημο α***	ϕ	***Ετερόσημο α***	ϕ	***Ομόσημο α***	

Απόδειξη:

Αν $x \in \mathbb{R}$ και $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$

❖ Για $x<x_1<x_2 \Longrightarrow \begin{cases} x-x_1<0 \\ x-x_2<0 \end{cases} \Longrightarrow (x-x_1)(x-x_2)>0$

τότε το $f(x)=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$ θα είναι ομόσημο του α.

❖ Για $x_1<x<x_2 \Longrightarrow \begin{cases} x-x_1>0 \\ x-x_2<0 \end{cases} \Longrightarrow (x-x_1)(x-x_2)<0$

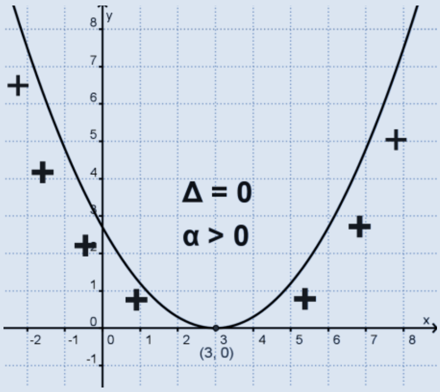
τότε το $f(x)=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$ θα είναι ετερόσημο του α.

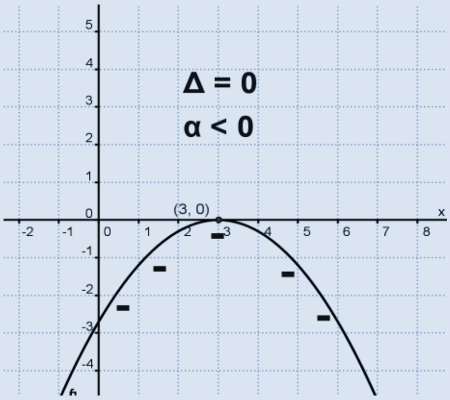
❖ Για $x_1<x_2<x \Longrightarrow \begin{cases} x-x_1>0 \\ x-x_2>0 \end{cases} \Longrightarrow (x-x_1)(x-x_2)>0$

τότε το $f(x)$ θα είναι επίσης ομόσημο του α.

✓ Αν $\boldsymbol{\Delta = 0}$, η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $(\alpha \neq 0)$ εφάπτεται του άξονα των x στο σημείο $A(x_1, 0)$, όπου $x_1 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ είναι η διπλή ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $(\alpha \neq 0)$.

Η τιμή $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ είναι **ομόσημη του $\boldsymbol{\alpha}$** για κάθε $x \in \mathbb{R}$, εκτός από τη διπλή ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.





$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		x_1		$+\infty$
Πρόσημο $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$		***Ομόσημο του α***	ϕ	***Ομόσημο του α***	

Απόδειξη:

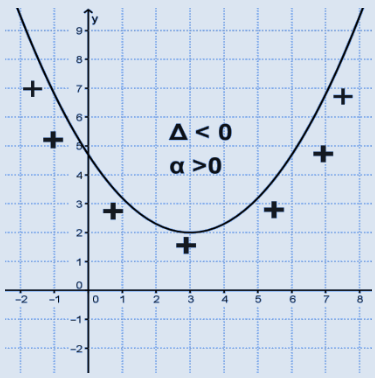
Αν $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)^2$.

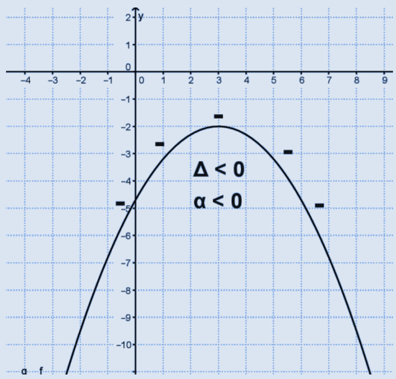
Το $(x - x_1)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα, το πρόσημο του $\alpha(x - x_1)^2$ θα εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του α.

✓ Αν $\boldsymbol{\Delta} < \mathbf{0}$, η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ δεν τέμνει τον άξονα των x σε κανένα σημείο του, αφού η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Η τιμή $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$,($\alpha \neq 0$) είναι **ομόσημη του $\boldsymbol{\alpha}$,** $\forall x \in \mathbb{R}$.





$\boldsymbol{x}$	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Πρόσημο $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$	***Ομόσημο του α***

Απόδειξη:

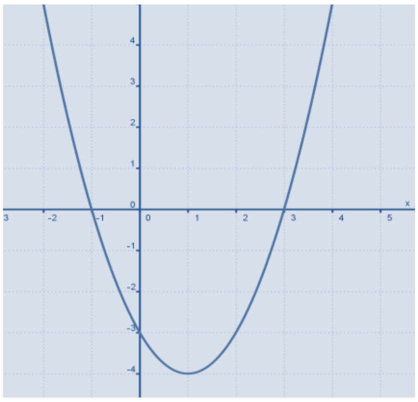
Αν $x \in \mathbb{R}$, με τη μέθοδο συμπλήρωσης του τέλειου τετραγώνου το τριώνυμο γράφεται: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}]$.

Όταν το $\Delta < 0 \Leftrightarrow -\Delta > 0 \Leftrightarrow |\Delta| > 0$ και άρα η $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Επομένως, το πρόσημο του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ θα εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του $\boldsymbol{\alpha}$.

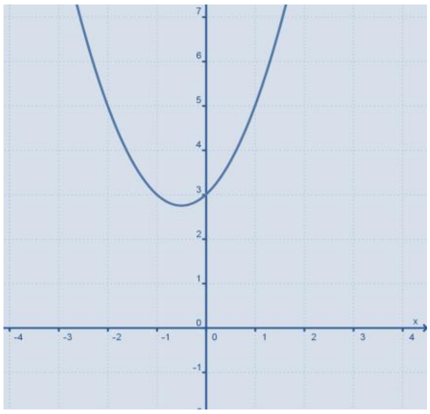
Παραδείγματα

1. Να μελετήσετε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, σε κάθε περίπτωση στις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις, κατασκευάζοντας τον αντίστοιχο πίνακα προσήμου.

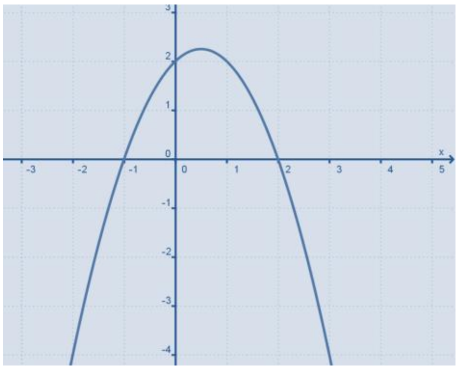
(α)



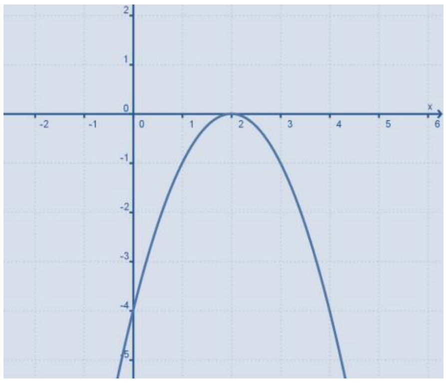
(β)



(γ)



(δ)



Λύση:

(α) Το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, έχει $\alpha > 0$ και δύο πραγματικές και άνισες ρίζες $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, γιατί η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα των τετμημένων στα σημεία $(-1,0)$ και $(3,0)$.

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		$\mathbf{-1}$		$\mathbf{3}$		$+\infty$
Πρόσημο $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

Επομένως, $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ όταν $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ και $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ όταν $x \in (-1, 3)$.

Σημείωση:

Η απάντηση $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, μπορεί να δοθεί και σε μορφή ανισώσεων $x < -1$, $x > 3$. Επίσης για $x \in (-1, 3)$, μπορούμε να γράψουμε $-1 < x < 3$.

(β) Το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, έχει $\alpha > 0$ και δεν τέμνει τον άξονα των τετμημένων.

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Πρόσημο $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$	$+$

Επομένως, $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0\,, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(γ) Το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, έχει $\alpha < 0$ και δύο πραγματικές και άνισες ρίζες $x_1 = -1\,, x_2 = 2$, γιατί η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα των τετμημένων στα σημεία $(-1{,}0)$ και $(2{,}0)$.

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	$\boldsymbol{-1}$		$\boldsymbol{2}$	$+\infty$
Πρόσημο $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$	$-$	$\boldsymbol{0}$	$+$	$\boldsymbol{0}$	$-$

Επομένως, $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ όταν $x \in (-1, 2)$ και $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ όταν $x \in (-\infty, -1) \cup (2\,, +\infty)$.

(δ) Το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, έχει $\alpha < 0$ και έχει δύο ρίζες ίσες γιατί η γραφική παράσταση εφάπτεται με τον άξονα των τετμημένων στο σημείο $(2{,}0)$.

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	$\boldsymbol{2}$	$+\infty$
Πρόσημο: $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$	$-$	$\boldsymbol{0}$	$-$

Επομένως, $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ όταν $x \in (-\infty, 2) \cup (2\,, +\infty)$.

2. Να βρείτε το πρόσημο των πιο κάτω τριωνύμων $\forall x \in \mathbb{R}$.

(α) $x^2+2x+10$ (β) $(x-2)(x+3)$ (γ) $-4x^2+12x-9$

Λύση:

(α) $x^2+2x+10$

Α΄ Τρόπος:

$\alpha = 1 > 0$ και $\Delta = 4-40 = -36 < 0$ (το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες).

x	$-\infty$	$+\infty$
Πρόσημο $x^2+2x+10$	$+$	

Άρα, είναι ομόσημο του α, δηλαδή είναι θετικό για όλες τις τιμές του x.

Β΄ Τρόπος:

Για όλες τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$x^2+2x+10 = (x+1)^2+9 \geq 9 > 0$ (συμπλήρωση τέλειου τετραγώνου).

(β) $(x-2)(x+3)$ (είναι σε παραγοντοποιημένη μορφή)

$\alpha = 1 > 0$ και $x_1 = -3\,, x_2 = 2$ (οι δύο πραγματικές ρίζες)

x	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
Πρόσημο: $(x-2)(x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$(x-2)(x+3) < 0$ $x \in (-3,2)$ (το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών).

$(x-2)(x+3) > 0$, όταν $x \in (-\infty,-3) \cup (2\,,+\infty)$ (το τριώνυμο είναι ομόσημο του α για τις τιμές του x που βρίσκονται εκτός των ριζών).

(γ) **Α΄ Τρόπος:**

$\alpha = -4 < 0$ και $\Delta = 144-144 = 0$ (το τριώνυμο έχει μία διπλή ρίζα).

$x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{12}{-8} = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Πρόσημο: $-4x^2+12x-9$	$-$	0	$-$

Άρα, $-4x^2+12x-9 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ εκτός για $x = \frac{3}{2}$.

Β΄ Τρόπος:

Για το τριώνυμο $-4x^2 + 12x - 9$, ισχύει

$-4x^2 + 12x - 9 = -(4x^2 - 12x + 9) = -(2x - 3)^2 < 0$, για κάθε

$x \in \mathbb{R}$, εκτός για $x = \frac{3}{2}$.

3. Να λύσετε τις ανισώσεις

(α) $x^2 + 2x - 15 < 0$ (β) $(-x + 1)(x - 4) < 0$

(γ) $x^2 - 12x + 36 > 0$

Λύση:

(α) $x^2 + 2x - 15 < 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - 3) < 0$.

$\alpha = 1 > 0$ και $x_1 = -5$, $x_2 = 3$,

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
Πρόσημο: $\boldsymbol{x^2 + 2x - 15}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^2 + 2x - 15 < 0 \Leftrightarrow x \in (-5, 3)$ (Το τριώνυμο γίνεται αρνητικό για όλα τα x που ανήκουν μεταξύ των δύο ριζών του τριωνύμου).

(β) $(-x + 1)(x - 4) < 0$.

Το $\alpha = -1 < 0$ και $x_1 = 1$, $x_2 = 4$,

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		1		4		$+\infty$
Πρόσημο: $\boldsymbol{(-x + 1)(x - 4)}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα, το τριώνυμο γίνεται αρνητικό (ομόσημο του α) για όλα τα x που ανήκουν εκτός των δύο ριζών του τριωνύμου.

$(-x + 1)(x - 4) < 0$ όταν $x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$.

(γ) $x^2 - 12x + 36 > 0 \Leftrightarrow (x - 6)^2 > 0$.

Το $\alpha = 1 > 0$ και $x = 6$ (διπλή ρίζα)

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		6		$+\infty$
Πρόσημο: $x^2 - 12x + 36$		$+$	0	$+$	

Η ανίσωση $x^2 - 12x + 36 > 0$ ισχύει για κάθε $x \in (-\infty, 6) \cup (6, +\infty)$.

4. Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\mu \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $x^2 + (\mu - 2)x + 2\mu - 7$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

Λύση:

Κάθε τριώνυμο διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν $\Delta < 0$.

(Το πρόσημο θα είναι θετικό, γιατί $\alpha = 1 > 0$)

$\Delta = (\mu - 2)^2 - 4(2\mu - 7) = \mu^2 - 12\mu + 32 = (\mu - 4)(\mu - 8)$

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		$\mathbf{4}$		$\mathbf{8}$		$+\infty$
Πρόσημο: $(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{4})(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{8})$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

Επομένως, $\Delta < 0$, όταν $4 < \mu < 8$.

5. Για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa \neq 2$ η εξίσωση: $(\kappa - 2)x^2 - 2\kappa x + 2\kappa - 3 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες;

Λύση:

Αν $\kappa \neq 2$, θα πρέπει για τη δευτεροβάθμια εξίσωση να ισχύει και $\Delta > 0$.

$\Delta = 4\kappa^2 - 4(\kappa - 2)(2\kappa - 3) = -4\kappa^2 + 28\kappa - 24 > 0$

$\Leftrightarrow -4(\kappa^2 - 7\kappa + 6) > 0$

$\Leftrightarrow -4(\kappa - 1)(\kappa - 6) > 0$

$\Leftrightarrow 1 < \kappa < 6$ και $\kappa \neq 2$. Άρα, $\kappa \in (1,2) \cup (2,6)$.

$\boldsymbol{\kappa}$	$-\infty$		$\mathbf{1}$		$\mathbf{6}$		$+\infty$
Πρόσημο: -4 $(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{1})(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{6})$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

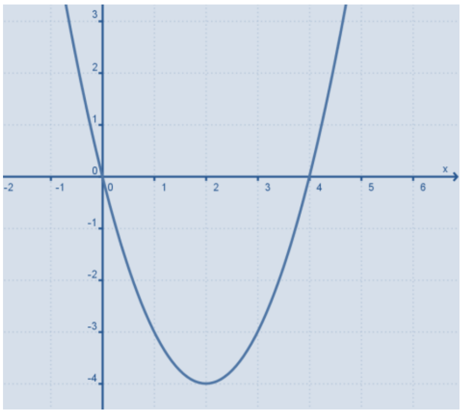
Δραστηριότητες

1. Να βρείτε το πρόσημο των πιο κάτω τριωνύμων για όλες τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$.
   (α) $x^2 - 5x - 6$ (β) $(-x-2)(x-7)$
   (γ) $25 - 4x^2$ (δ) $-x^2 + x - 1$

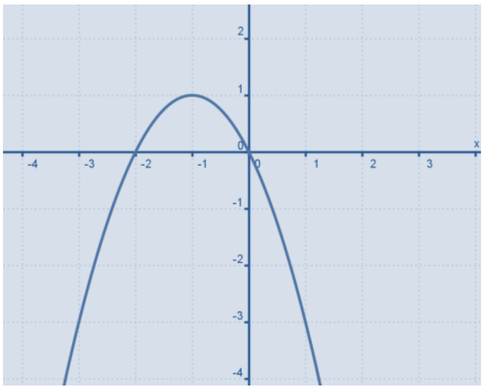
2. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = -2x^2 + \beta x + \gamma$ με ρίζες τους αριθμούς -8 και 2. Να βρείτε το πρόσημο των: $f(-20), f(-7{,}3), f(-8), f(0), f\left(\frac{1}{2013}\right)$ και $f(8)$.

3. Να μελετήσετε τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις της $y = f(x)$ και να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$ σε κάθε περίπτωση.

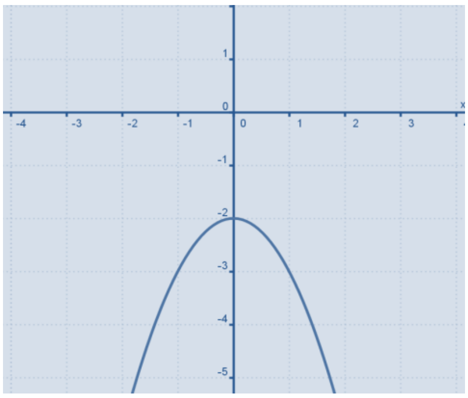
α.



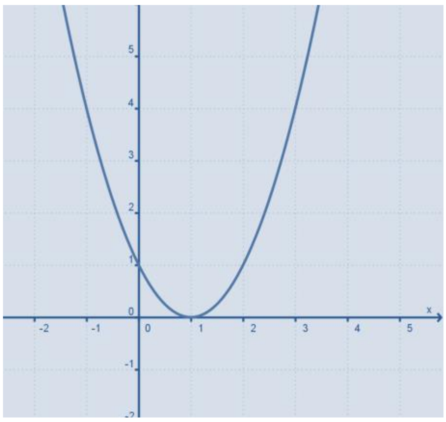
β.



γ.



δ.



4. Για ποιες τιμές του x, $(x \in \mathbb{R})$ αληθεύουν οι πιο κάτω ανισώσεις:
   (α) $x^2 - 36 > 0$ (β) $6x - 3x^2 \geq 0$
   (γ) $(x-2)(x-3) \leq 30$ (δ) $x^2 + 3x + 6 < 0$

5. Να λύσετε την ανίσωση $(x+4)^2 > 4(2x+5)$.

6. Για ποιες τιμές του λ, η εξίσωση $(\lambda-5)x^2-(\lambda-5)x+2=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες;

7. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, το πλήθος των πραγματικών ριζών του τριωνύμου $f(x)=x^2+(\mu+1)x+2\mu-1$.

8. Η εξίσωση $(\kappa-1)x^2+4x+(6-k)=0$, έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

   (α) Να δείξετε ότι το κ επαληθεύει την ανίσωση: $\kappa^2-7\kappa+10>0$.
   (β) Να βρείτε τις πιθανές τιμές του κ, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

9. Δίνεται η εξίσωση $x^2-5\lambda x-1=0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
   (β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης να υπολογίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $(x_1+x_2)^2-18-7(x_1x_2)^{24} \leq 0$.
   (γ) Αν $\lambda=1$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $x_1^2x_2+x_1x_2^2+4$ και $3x_1+3x_2$.

10. Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $x^2+(\lambda-3)x+2\lambda-9$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

11. Να βρείτε το $\Pi.O.$ της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{-x^2-4x+12}$.

12. Ποιοι πραγματικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους;

13. Να βρείτε τις πιθανές τιμές του μήκους ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου, ώστε η περίμετρός του να είναι $20\ m$ και το εμβαδόν του να είναι τουλάχιστον $16m^2$.

14. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=a$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.
    (α) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2+2x+3=a$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
    (β) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση $x^2+2x+3=a$ να έχει διπλή ρίζα και να την προσδιορίσετε.
    (γ) Αν $f(x)=x^2+2x+3$, να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.
    (δ) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2} \leq 2$.

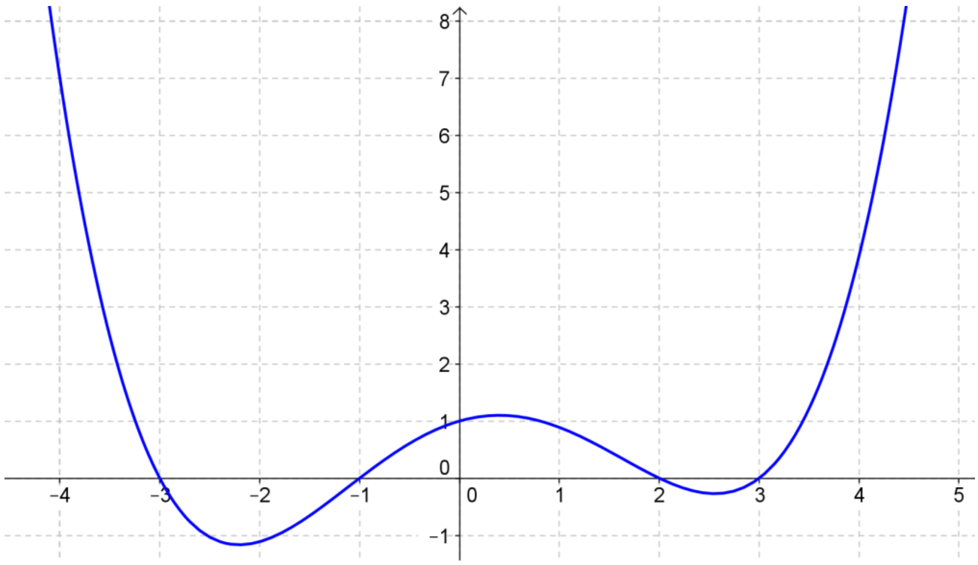
Ανισώσεις ανώτερου βαθμού - Κλασματικές Ανισώσεις

Διερεύνηση

- Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{18}(x+3)(x+1)(x^2-5x+6)$ για όλες τις πραγματικές τιμές του x, συμπληρώνοντας κατάλληλα το αντίστοιχο **πρόσημο** για κάθε όρο του γινομένου στον πιο κάτω πίνακα.

x	$-\infty$ $\quad$ -3	-1	2	3	$+\infty$
$x+3$					
$x+1$					
x^2-5x+6					
$f(x)$					

- Δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{18}(x+3)(x+1)(x^2-5x+6)$.



Να συμπληρώσετε σε κάθε τετραγωνάκι στον πιο κάτω πίνακα το αντίστοιχο πρόσημο με βάση τη γραφική παράσταση.

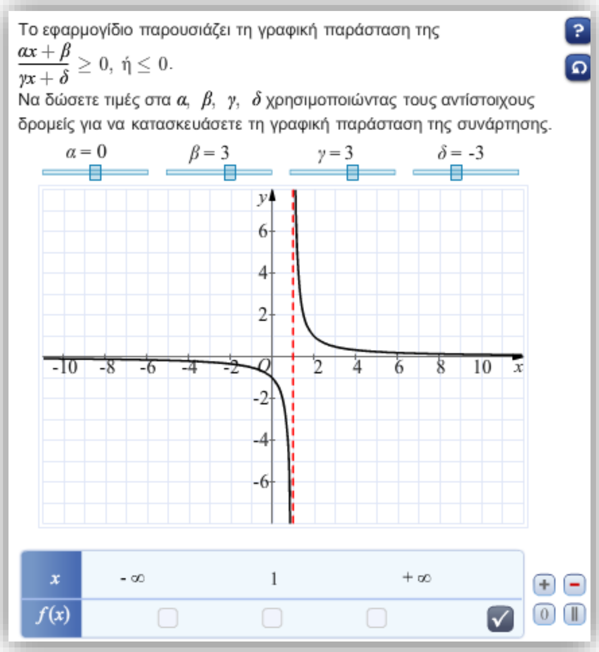
x	$-\infty$ $\quad$ $\mathbf{-3}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$	$+\infty$
$f(x)$					

- Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x)>0$.

Διερεύνηση 2

- Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο *«ΛΤ_ΜΑΘ_Α_ΨΕΠ08_Λύση ανίσωσης β’ βαθμού_1.0»*.

  ✓ Να επιλέξετε την «ΕΝΟΤΗΤΑ 2: «Κλασματικές Ανισώσεις» και να ακολουθήσετε τις οδηγίες των παραγράφων 1.1, 1.2 και 1.3.



Μαθαίνω

- Για να λύσουμε ανισώσεις της μορφής $P(x) < 0$, $P(x) > 0$, $P(x) \leq 0$, $P(x) \geq 0$, όπου $P(x) = A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot A_\nu(x)$, ακολουθούμε τα πιο κάτω βήματα:
  - ❖ Βρίσκουμε, αν υπάρχουν, τις ρίζες των παραγόντων $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_\nu(x)$.
  - ❖ Βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_\nu(x)$.
  - ❖ Βρίσκουμε το πρόσημο του γινομένου.

- Για να λύσουμε κλασματικές ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$, $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$, $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$, $(B(x) \neq 0)$, βρίσκουμε το πρόσημο των όρων $A(x)$, $B(x)$ και στη συνέχεια το πρόσημο του πηλίκου $\frac{A(x)}{B(x)}$.

Παραδείγματα

1. Να λύσετε την ανίσωση: $(x^2-1)(9+x^2)>0$.

   Λύση:

   $(x^2-1)(9+x^2)>0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(9+x^2)>0$

   Βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα και στη συνέχεια το πρόσημο του γινομένου και συμπληρώνουμε τον πιο κάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-1$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$9+x^2$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$(x^2-1)(9+x^2)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

   Μπορούμε να βρούμε την απάντηση χρησιμοποιώντας συνοπτικό πίνακα, όπως φαίνεται πιο κάτω. Τοποθετούμε τις ρίζες του γινομένου κατά αύξουσα τάξη σε άξονα και στη συνέχεια το αντίστοιχο πρόσημο όλου του γινομένου σε κάθε διάστημα.

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		$\mathbf{-1}$		$\mathbf{1}$		$+\infty$
$(x^2-1)(9+x^2)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

   Η ανίσωση $(x^2-1)(9+x^2)>0$ ισχύει όταν, $x<-1$, ή $x>1$.

2. Να λύσετε την ανίσωση: $x^3-36<9x-4x^2$.

   Λύση:

   $x^3-36<9x-4x^2$

   $\Leftrightarrow x^3+4x^2-9x-36<0$

   $\Leftrightarrow x^2(x+4)-9(x+4)<0 \Leftrightarrow (x^2-9)(x+4)<0$ (Παραγοντοποιούμε)

   Οι ρίζες είναι: $\mathbf{-4}$, $\mathbf{-3}$, $\mathbf{+3}$

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	$\mathbf{-4}$		$\mathbf{-3}$		$\mathbf{3}$		$+\infty$
Πρόσημο $\boldsymbol{x^3+4x^2-9x-36}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α) $\frac{x^2-x-6}{x^2+2x-24} > 0$ (β) $\frac{x^2}{x+2} \geq 1$

Λύση:

(α) $\frac{x^2-x-6}{x^2+2x-24} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{(x+6)(x-4)} > 0$ $(x \neq -6$ $, x \neq 4$ και ρίζες $x = 3, x = -2)$

Τοποθετούμε τις ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή κατά αύξουσα τάξη σε άξονα και στη συνέχεια συμπληρώνουμε το αντίστοιχο πρόσημο σε κάθε διάστημα.

x	$-\infty$		-6		-2		+3		+4		$+\infty$
$\frac{x^2-x-6}{x^2+2x-24}$		+	‖	−	0	+	0	−	‖	+	

$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{(x+6)(x-4)} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (-2, \ +3) \cup (4, \ +\infty)$

Σχόλιο

Η διπλή γραμμή ‖ στον πίνακα κάτω από το -6 και το 4 σημαίνει ότι δεν ορίζεται το κλάσμα για $x = -6$, $x = 4$.

(β) $\frac{x^2}{x+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+2} - 1 \geq 0$.

$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-2}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x+2} \geq 0$,$(x \neq -2$ και ρίζες $x = -1, x = 2)$.

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$\frac{x^2-x-2}{x+2}$		−	‖	+	0	−	0	+	

Επομένως , $\frac{x^2}{x+2} \geq 1 \Leftrightarrow x \in (-2, -1] \cup [2, +\infty)$.

4. (α) Να λύσετε την ανίσωση $(3x+2)(x-1)^2 > 0$.

(β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας κάνοντας τη γραφική παράταση της συνάρτησης $f(x) = (3x+2)(x-1)^2$ σε κατάλληλο λογισμικό.

Λύση:

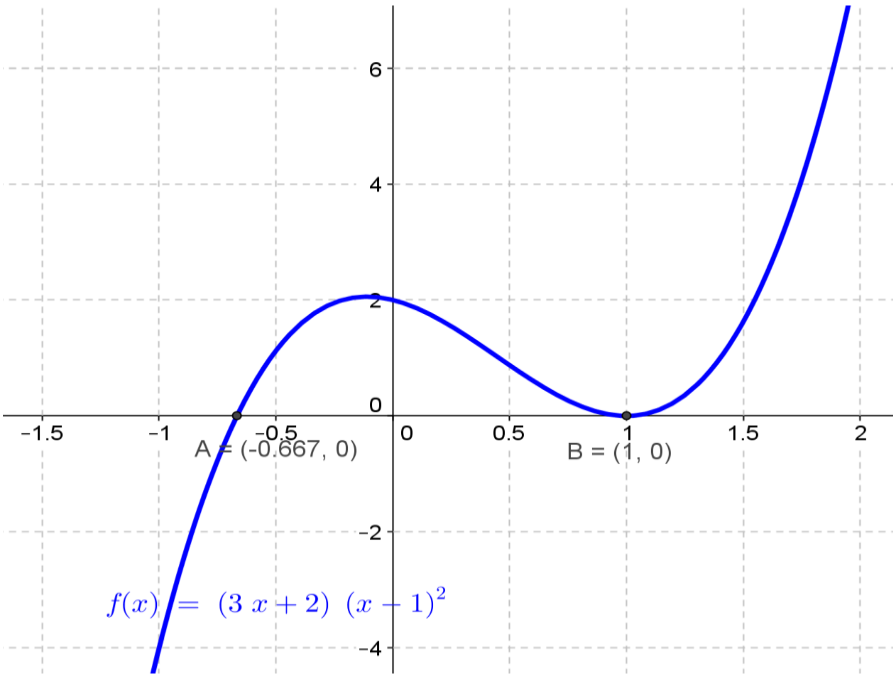
(α) Ρίζες της παράστασης $(3x+2)(x-1)^2$ είναι : $-\frac{2}{3}$, 1 (διπλή ρίζα)

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$(3x+2)(x-1)^2$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Επομένως, $(3x+2)(x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{2}{3}, 1) \cup (1, +\infty)$.

(β) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (3x+2)(x-1)^2$, παρατηρούμε ότι το μέρος της καμπύλης που είναι πάνω από τον άξονα των τετμημένων (δηλαδή ισχύει $f(x) > 0$), αντιστοιχεί στις τετμημένες των σημείων για τα οποία ισχύει $x > -\frac{2}{3}$, εκτός φυσικά από το σημείο για το οποίο ισχύει $x = 1$, γιατί σε αυτό το σημείο ισχύει $f(1) = 0$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε ότι

$(3x+2)(x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{2}{3}, 1) \cup (1, +\infty)$



Δραστηριότητες

1. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου: $P(x) = (x-2)(x^2+2x-8)$.
2. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

   (α) $(x^2+2x)(x^2-25) > 0$ (β) $\frac{x^2}{x-3} \le 0$ (γ) $\frac{x^2-x-12}{7-x} \le 0$

3. Για ποιες τιμές του $x, (x \in \mathbb{R})$ αληθεύουν οι πιο κάτω ανισώσεις:

   (α) $(2x+4)(x^2-2x-15)(x^2-4) < 0$ (β) $6x-6 \ge x^3-x^2$

   (γ) $\frac{2x-1}{x^2-4} \le 1$ (δ) $\frac{4x}{3x-x^2} \ge \frac{1}{2}$

4. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2-(\lambda-3)x+\lambda-5=0$ έχει δύο θετικές ρίζες;
5. (α) Δίνεται η εξίσωση $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$. Αν $P<0$ να δείξετε ότι $\Delta>0$.

   (β) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2-2x+\lambda^3-4\lambda=0$ έχει ρίζες ετερόσημες;

6. Δίνεται η εξίσωση: $x^2-(\lambda-2)x+\lambda-4=0$

   (α) Να αποδείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} \le 2$.

7. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{2x^2+x+9}{-x^2+8x-16}$, $x \ne 4$ παίρνει αρνητικές τιμές $\forall x \in \mathbb{R}, x \ne 4$.
8. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

   (α) $(x^2+5)(4x^2-25) > 0$ (β) $\frac{x}{(x-3)^2} \le 0$ (γ) $\frac{x^2-x-20}{3-x} \le 0$

9. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $x^2-(2\lambda-5)x+4=0$ διατηρεί σταθερό πρόσημο $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Ασκήσεις Ενότητας

1. Να αναφέρετε το πεδίο ορισμού, το πεδίο τιμών, την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας για τις συναρτήσεις $f(x) = 3x^2$ και $g(x) = -2x^2$. Να παραστήσετε τις γραφικές τους παραστάσεις.
2. Για ποιες τιμές του λ η συνάρτηση $y = (\lambda - 3)x^2$ παριστάνει παραβολή που έχει ελάχιστη τιμή;
3. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = (\kappa + 2)x^2$
   (α) Για ποια τιμή του κ , η παραβολή διέρχεται από το σημείο $(2, -4)$;
   (β) Για ποια τιμή του β, η παραβολή $y = -x^2$ διέρχεται από το σημείο $(-3, \beta + 1)$;
4. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = 2x^2$
   (α) Να αναφέρετε τον άξονα συμμετρίας της.
   (β) Να βρείτε το συμμετρικό σημείο της παραβολής $A(3,18)$, ως προς τον άξονα συμμετρίας της.
5. Να αναφέρετε μία διαφορά και δύο ομοιότητες που παρουσιάζουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = \frac{x^2}{2}$.
6. Αν αφεθεί ελεύθερα ένα σώμα από ύψος h (σε m) τότε ο χρόνος t (σε sec) που χρειάζεται για να φτάσει στο έδαφος συνδέεται με τη σχέση $h = 5t^2$. Να υπολογίσετε:
   (α) Το ύψος που αφέθηκε μία μπάλα που χρειάστηκε $2\,sec$ για να φτάσει στο έδαφος.
   (β) Σε πόσο χρόνο θα πέσει στο έδαφος μία μπάλα που αφήνεται από ύψος $80m$;
   (γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h = 5t^2$, αναφέροντας το Πεδίο Ορισμού και Τιμών της.

7. Να βρείτε το Εμβαδόν Ολικής επιφάνειας (E) ενός κύβου που έχει ακμή x και να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E = E(x)$, που εκφράζει το Εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κύβου σε συνάρτηση με το μήκος x της ακμής του.

8. Να αναφέρετε το πεδίο ορισμού, το πεδίο τιμών, την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 2x - 3$ και $g(x) = -x^2 + 4x$ και να τις παραστήσετε γραφικά.

9. Αν η παραβολή $y = ax^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $A(-1,0)$ και $B(9,0)$, να βρείτε τον άξονα συμμετρίας της.

10. Η παραβολή $y = ax^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ τέμνει τον άξονα των x στα σημεία με τετμημένες 3 και 9 και τον άξονα των y στο σημείο με τεταγμένη 27. Να βρείτε:
   (α) Την εξίσωση της παραβολής
   (β) Τον άξονα συμμετρίας της και
   (γ) Τις συντεταγμένες της κορυφής της.

11. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) Αν $\alpha = 2$ και το τριώνυμο f έχει κορυφή το σημείο $K(1, -3)$, τότε

Α. $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ **Β.** $f(x) = 2(x-1)^2 - 3$

Γ. $f(x) = 2(x+1)^2 + 3$ **Δ.** $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$

(β) Αν $f(1) < 0, f(3) > 0$ και $f(5) < 0$, τότε

Α. $\Delta = 0$ και $\alpha > 0$ **Β.** $\Delta > 0$ και $\alpha > 0$ **Γ.** $\Delta > 0$ και $\alpha < 0$

(γ) Αν το τριώνυμο f έχει κορυφή το σημείο $K(1, 2)$ και $\alpha > 0$, τότε

Α. $\Delta > 0$ **Β.** $\Delta = 0$ **Γ.** $\Delta < 0$ **Δ.** $\gamma < 0$

(δ) Αν το τριώνυμο f έχει κορυφή το σημείο $K(1, 0)$, τότε

Α. $\beta = 0$ **Β.** $\Delta < 0$ **Γ.** $\Delta > 0$ **Δ.** $\Delta = 0$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x - 21$.
   (α) Να μετασχηματίσετε τη συνάρτηση f στη μορφή $f(x) = (x - \alpha)^2 + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.
   (β) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της f.
   (γ) Να αναφέρετε τον άξονα συμμετρίας της και την κορυφή της παραβολής $y = x^2 - 4x - 21$.
   (δ) Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή της παραβολής $y = (x - \alpha)^2 + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

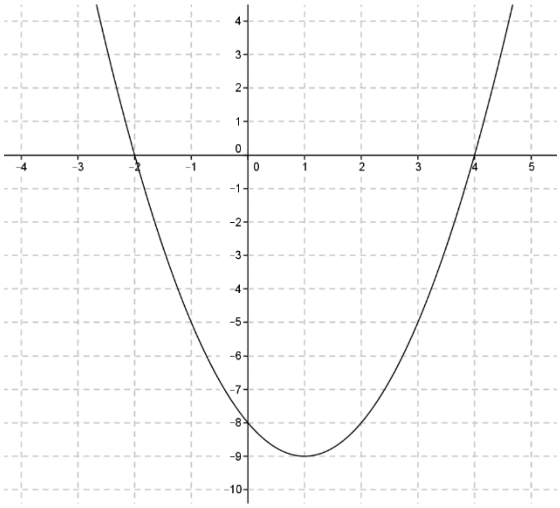
13. Να βρείτε το πεδίο τιμών των παραβολών:
   (α) $f(x) = x^2 + 2x$ (β) $g(x) = 2x^2 - 5x + 2$ (γ) $h(x) = 5 + 4x - x^2$

14. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = 15 + 2x - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

15. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = (x-1)^2 + x^2 + (x+2)^2$.

16. Δίνεται η παραβολή $f(x) = x^2$. Να γράψετε τον τύπο των συναρτήσεων g, h, κ με $g(x) = f(x) + 2$, $h(x) = f(x+2)$ και $\kappa(x) = f(x-2) + 2$ και να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής και τον άξονα συμμετρίας τους.

17. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$.



Να βρείτε:

(α) Το Π.Ο. και το Π.Τ.

(β) Την τιμή του γ

(γ) Τον άξονα συμμετρίας

(δ) Την κορυφή της παραβολής

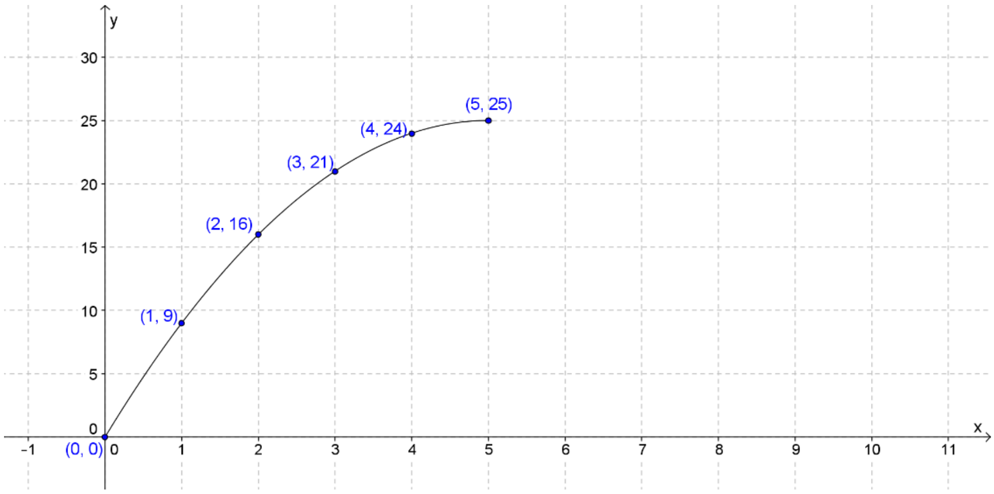
(ε) Τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$

(στ) Τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = -10$

18. Ο πιο κάτω πίνακας τιμών αντιστοιχεί σε παραβολή της μορφής $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ με άξονα συμμετρίας τη $x = 3$ και $Π.Ο.$ το $[0,5]$. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της παραβολής και να βρείτε τον τύπο της.

x	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	-1	0	3

19. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της παραβολής $y = ax^2 + \beta x + \gamma$, αν το σημείο $(5,25)$ είναι η κορυφή της παραβολής.



20. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις.

α.	Η εξίσωση $x^2+x-11=0$ έχει το άθροισμα των ριζών της ίσο με 1.	
β.	Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $3x^2+6x-1=0$ είναι -2.	
γ.	Μία εξίσωση με ρίζες $x_1=2$, $x_2=4$ είναι η $x^2+6x+8=0$.	
δ.	Αν οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+4x-20=0$ είναι x_1 και x_2, τότε η παράσταση $x_1+x_2-x_1\cdot x_2$ ισούται με 16.	
ε.	Η εξίσωση $5x^2+11x+5=0$ έχει ρίζες αντίστροφες.	
στ.	Η εξίσωση $x^2+\lambda x-\mu^2=0$, έχει 2 ρίζες αντίθετες, όταν το $\lambda=0$.	
ζ.	Αν το $\sqrt{\kappa}$, $\kappa>0$ είναι ρίζα του τριωνύμου $x^2+\sqrt{\kappa}\cdot x+\lambda$, τότε $\lambda<0$.	

21. Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους περιττούς αριθμούς, των οποίων το γινόμενο είναι 63.

22. Να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς που έχουν άθροισμα 8 και γινόμενο 15.

23. Αν x_1 , x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-6x-3=0$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2$ (β) $\frac{12}{x_1^2}+\frac{12}{x_2^2}$ (γ) $x_1^4+x_2^4$

24. Να σχηματίσετε εξίσωση δεύτερου βαθμού με ακέραιους συντελεστές που να έχουν ρίζες τα πιο κάτω ζεύγη:

(α) $\frac{1}{4}$ και $-\frac{2}{3}$ (β) $3+\sqrt{3}$ και $3-\sqrt{3}$ (γ) $-\frac{2}{5}$ και $+\frac{2}{5}$

25. Δίνονται οι αριθμοί $A=\frac{1}{5+\sqrt{5}}$, $B=\frac{1}{5-\sqrt{5}}$.

(α) Να δείξετε ότι $A+B=\frac{1}{2}$ και $A\cdot B=\frac{1}{20}$.

(β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B.

26. Η εξίσωση $3x^2 + 6x - 1 = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς x_1 , x_2. Να σχηματίσετε εξίσωση δεύτερου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς: $x_1 + 2x_2$, $x_2 + 2x_1$.

27. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.
    (α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
    (β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες;
    (γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{1}{\sqrt{S-P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2, x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
    (α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$.
    (β) Αν $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.
    (γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο $B(2,0)$, να υπολογίσετε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα των τετμημένων και σε άλλο σημείο.
    (δ) Αν $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα των τετμημένων.

29. Να βρείτε το πρόσημο του πηλίκου: $P(x) = \frac{(x+3)}{(x^2+3x-10)}$ για $x \in \mathbb{R} - \{-5,2\}$.

30. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία τα παρακάτω τριώνυμα έχουν μη αρνητικές τιμές.
    (α) $x^2 - 8x + 12$ (β) $-4y^2 + 12y - 9$

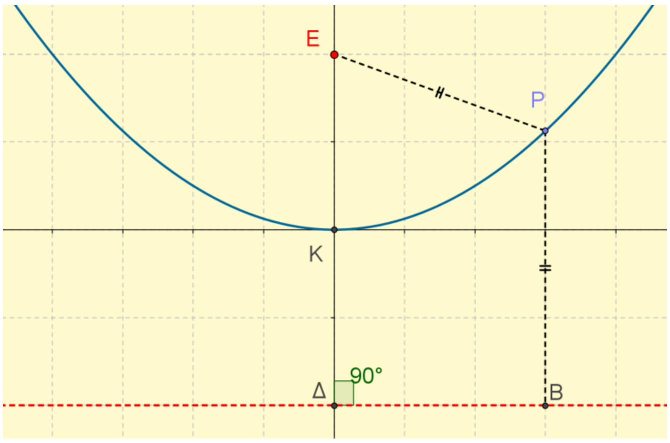
31. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $x^2 + (2\lambda - 3)x - 3\lambda - 7$ δεν έχει πραγματικές ρίζες;

32. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0, \alpha \neq 0$.
    (α) Να αποδείξετε ότι αν $-\frac{5}{2} \leq \alpha \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.
    (β) Να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης, όταν $\alpha = 2$.
    (γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$.

Ασκήσεις Εμπλουτισμού

1. Δίνεται η παραβολή (Π) με τύπο $y = x^2$. Αν A και B είναι σημεία της παραβολής με τετμημένες -2 και $+3$:
   (α) Να βρείτε τις τεταγμένες των σημείων A και B.
   (β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.
   (γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την παραβολή (Π) και την ευθεία AB.

2. Για την παραβολή $y = \frac{x^2}{4}$, το σημείο $E(0, \alpha)$ είναι σταθερό σημείο στον άξονά της. Αν η ΔΒ είναι ευθεία κάθετη στον άξονα της παραβολής με $EP = PB$, $EK = K\Delta$ και το P είναι τυχαίο σημείο της παραβολής:



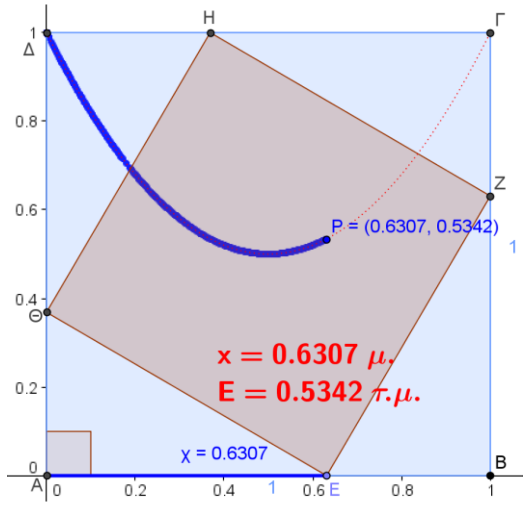
   (α) Να υπολογίσετε την τιμή του α.
   (β) Να βρείτε την αντίστοιχη τιμή του α, αν ο τύπος της παραβολής ήταν $y = x^2$.
   (γ) Να διατυπώσετε λεκτικά την πιο πάνω ιδιότητα της παραβολής.

3. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda + 1 = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η διακρίνουσα της εξίσωσης παίρνει ελάχιστη τιμή και να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της.

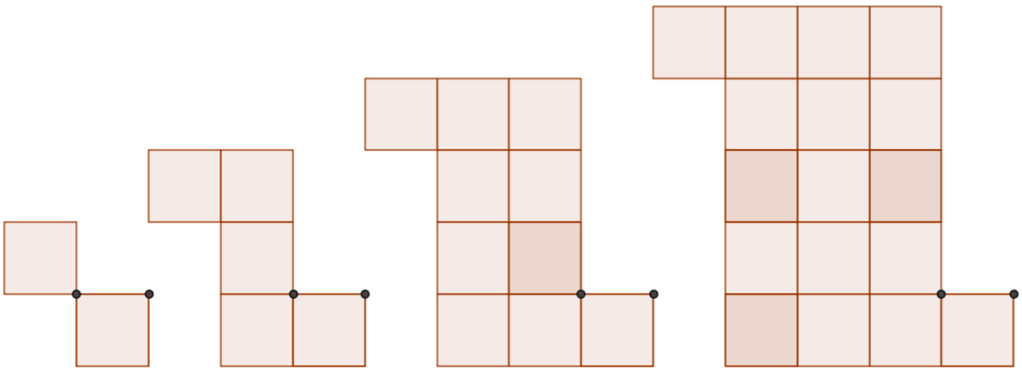
4. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(\kappa + 2, \kappa), \kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ η απόσταση (AB) γίνεται ελάχιστη.

5. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & ,x < 0 \\ x^2 - 2x & ,x \geq 0 \end{cases}$, και από τη γραφική παράσταση να αναφέρετε:
   (α) Τον άξονα συμμετρίας της, αν υπάρχει.
   (β) Τις τομές με τους άξονες.
   (γ) Τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της.
   (δ) Το πεδίο τιμών της.

6. Να ανοίξετε το αρχείο «A_lyk_En08_Emvado tetragonou1.ggb» και να μετακινήσετε το σημείο E της πλευράς AB. Το τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ έχει μήκος πλευράς $1\ cm$. Το σημείο E «κινείται» στην πλευρά AB έτσι ώστε να δημιουργεί το τετράγωνο $ΕΖΗΘ$ μέσα στο αρχικό τετράγωνο $ΑΒΓΔ$. Αν $AE = x$, να βρείτε για ποια τιμή του x, το εμβαδόν του $ΕΖΗΘ$ γίνεται ελάχιστο. Τι δηλώνουν οι συντεταγμένες του σημείου P κατά την κίνηση του σημείου E;



7. Δίνονται τα πιο κάτω σχήματα



Βήμα1 Βήμα2 Βήμα3 Βήμα4

(α) Με βάση το σχήμα να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Βήμα	**1**	**2**	**3**	**4**
Αριθμός τετραγώνων	2			

(β) Να αναφέρετε το μοτίβο που δείχνει την αύξηση στα τετραγωνάκια σε κάθε επόμενο βήμα.

(γ) Να προβλέψετε τον αριθμό των τετραγώνων στα επόμενα τέσσερα βήματα.

(δ) Να υπολογίσετε τον αριθμό των τετραγώνων στο ν βήμα.

8. Για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $x^2 - 3\kappa x + (2\kappa^2 - \kappa + 3)$ μετασχηματίζεται σε διαφορά δύο τετραγώνων;

9. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση:
$A(x) = \sqrt{-x^2 - 4x + 12} - \sqrt{x^2 - 1}$.

10. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 2 και γινόμενο 4.

11. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.
   (α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες;
   (γ) Να υπολογίσετε τις τιμές του λ, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

12. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-8x+12}{x^2-8x+15}$, $x \in \mathbb{R} - \{3,5\}$ δεν μπορεί πάρει τιμές στο διάστημα $(1,4)$.

13. Το κέρδος σε ευρώ ενός τουριστικού γραφείου από μία σχολική εκδρομή x μαθητών δίνεται από τον τύπο $K(x) = (80x - x^2)$.
   (α) να βρείτε πόσοι μαθητές θα πρέπει να πάνε εκδρομή έτσι ώστε το ελάχιστο κέρδος του τουριστικού γραφείου να είναι €975.
   (β) Για ποιον αριθμό μαθητών το γραφείο έχει μέγιστο κέρδος;

14. Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο λογισμικό για να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{8}(x^4 + x^3 - 12x^2 + 4x + 16)$ και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{8}(x^4 + x^3 - 12x^2 + 4x + 16) \leq 0$.

15. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$. Να μετατρέψετε το τριώνυμο στη μορφή $f(x) = (x + \kappa)^2 + \lambda$, εκφράζοντας τα κ και λ συναρτήσει των β και γ.

16. Να αποδείξετε ότι για κάθε x , $y \in \mathbb{R}$, ισχύει:
   (α) $x^2 - xy + y^2 > 0$ (β) $(x - 3y)^2 + 4(3y - x) + 8 < 0$

17. Να διερευνήσετε, για διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, το είδος και το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης:
   (α) $2x^2 - 4x + 3(2\kappa - 1) = 0$.
   (β) $2x(x - \kappa) = \kappa^2$.

18. Δίνεται το τριώνυμο $g(x) = x^2 + (a + 2)x + (a + 2)$. Να αποδείξετε ότι η τιμή $g(a)$ είναι θετική για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

19. (α) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$ και της ευθείας $y = x$.

(β) Από τις γραφικές παραστάσεις να λύσετε τις ανισώσεις $x^2 \geq \frac{1}{x}$ και $\frac{1}{x} < x$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά τα αποτελέσματά σας.

20. Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - \alpha = 0$, να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει $2 - \frac{\alpha}{x_1+2} < \frac{\alpha}{x_2+2}$.

21. Η απόσταση φρεναρίσματος A (σε μέτρα) ενός αυτοκινήτου, που κινείται με ταχύτητα u, υπολογίζεται κατά προσέγγιση από τον τύπο $A = \frac{1}{20}u^2 + u, (u > 0)$. Να προσδιορίσετε τις ταχύτητες που έχουν ως αποτέλεσμα αποστάσεις φρεναρίσματος, μικρότερες από $75\ m$.

22. Να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 1, x \in \mathbb{R}$.

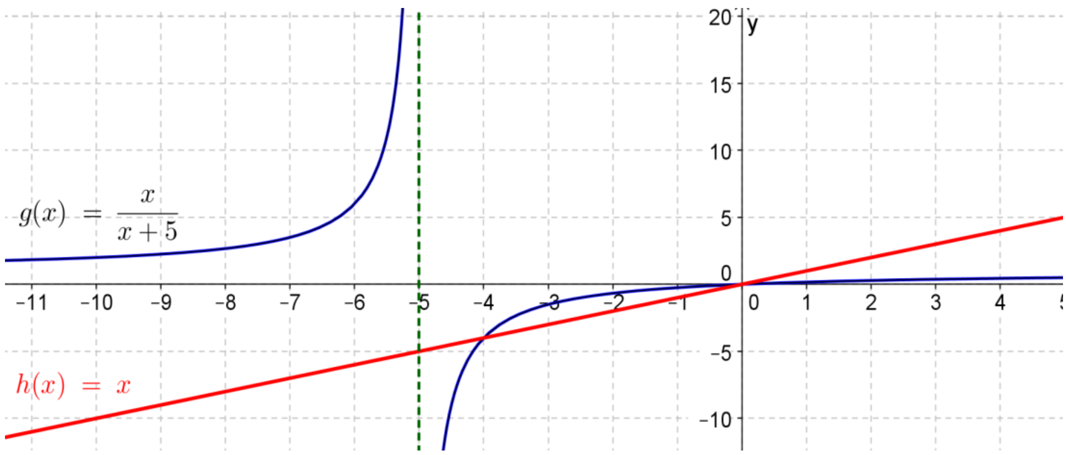
23. (α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από το μικρότερο στο μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια του ερωτήματος (α).

ii. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$.

24. Δίνεται η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $g(x) = \frac{x}{x+5}$ και $h(x) = x$. Να βρείτε τα διαστήματα για τα οποία ισχύει $\frac{x}{x+5} \leq x$.



Ενότητα

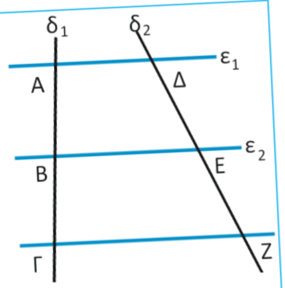
7

Θεώρημα Θαλή - Ομοιότητα

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να αποδεικνύουμε και να εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Θαλή.
- Να εντοπίζουμε πότε δύο σχήματα είναι όμοια και να υπολογίζουμε τον λόγο ομοιότητας δύο σχημάτων.
- Να υπολογίζουμε τα στοιχεία ενός σχήματος, όταν γνωρίζουμε τα στοιχεία ενός άλλου σχήματος όμοιου με αυτό.
- Να αποδεικνύουμε και να υπολογίζουμε τη δύναμη σημείου ως προς κύκλο.
- Να εντοπίζουμε τη θέση ενός σημείου ως προς τον κύκλο.

Έχουμε μάθει …

Λόγος	Λόγος δύο μεγεθών A προς B ονομάζεται το πηλίκο που προκύπτει, όταν το μέτρο του πρώτου μεγέθους A διαιρεθεί με το μέτρο του δεύτερου μεγέθους B. Γράφεται: $\lambda = \frac{A}{B}$
Αναλογία	Αναλογία είναι η ισότητα δύο λόγων και γράφεται $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Τα α και δ ονομάζονται άκροι όροι, ενώ τα β και γ ονομάζονται μέσοι όροι.
Ιδιότητες Αναλογιών	1. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$ 2. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$ 3. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$ 4. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\beta} = \frac{\gamma-\delta}{\delta}$ 5. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \cdots \Leftrightarrow \frac{\alpha+\gamma+\varepsilon+\cdots}{\beta+\delta+\zeta+\cdots}$
Θεώρημα	Αν ευθείες παράλληλες τέμνουν δύο άλλες ευθείες και ορίζουν ίσα τμήματα πάνω στη μία, τότε θα ορίζουν και ίσα τμήματα πάνω στην άλλη. Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ και $AB = B\Gamma$, τότε $\Delta E = EZ$. 

Θεώρημα Θαλή

Διερεύνηση (1)

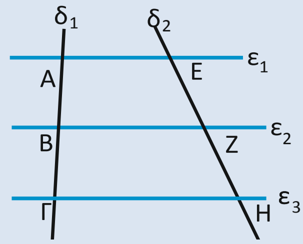
- Να ανοίξετε το αρχείο «Alyk_en8_Θεώρημα Θαλή».
- Να κατασκευάσετε 3 παράλληλες ευθείες ε_1 , ε_2 , ε_3.
- Να κατασκευάσετε ευθεία δ_1 που να τέμνει τις ε_1 , ε_2 , ε_3 στα σημεία A, B, Γ, αντίστοιχα, και να βρείτε τα μήκη $AB, B\Gamma, A\Gamma$.
- Να κατασκευάσετε ευθεία δ_2 που να τέμνει τις ε_1 , ε_2 , ε_3 στα σημεία E, Z, H, αντίστοιχα, και να υπολογίσετε τα μήκη EZ, ZH, EH.
- Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{AB}{EZ}, \frac{B\Gamma}{ZH}, \frac{A\Gamma}{EH}$.
- Ποια σχέση συνδέει τους πιο πάνω λόγους;
- Να μετατοπίσετε παράλληλα μια από τις ευθείες ε_1 , ε_2 , ε_3 και να εξετάσετε κατά πόσον η σχέση που βρήκατε συνεχίζει να ισχύει.
- Να μετακινήσετε μια από τις ευθείες δ_1, δ_2 και να εξετάσετε κατά πόσον η σχέση που βρήκατε συνεχίζει να ισχύει.

Διερεύνηση (2)

- Να ανοίξετε το αρχείο «Alyk_en8_thalis trigono».
- Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{A\Delta}{\Delta B}$ και $\frac{AE}{A\Gamma}$.
- Να μετακινήσετε τα σημεία Δ και E σε διάφορες θέσεις.
- Τι παρατηρείτε, όταν $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{A\Gamma}$;
- Να εξετάσετε κατά πόσον η παρατήρησή σας ισχύει και σε άλλα τρίγωνα.

Μαθαίνω

Θεώρημα Θαλή:
Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη μία ευθεία είναι ανάλογα με τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται πάνω στην άλλη ευθεία.

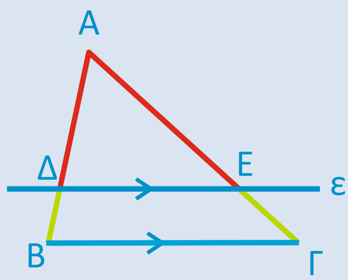


Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$, τότε $\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{A\Gamma}{EH}$.

Αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή:
Θεωρούμε δύο ευθείες δ_1 και δ_2 που τέμνουν δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία A, B και E, Z, αντίστοιχα.
Αν Γ και H είναι σημεία των ευθειών δ_1 και δ_2 αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{EZ}{ZH}$, τότε η ευθεία ΓH είναι παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2.

Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{EZ}{ZH}$, τότε $\Gamma H \parallel \varepsilon_1$ και $\Gamma H \parallel \varepsilon_2$.

Πόρισμα:
Αν μια ευθεία παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ ή τις προεκτάσεις των AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα, τότε οι λόγοι των αντίστοιχων τμημάτων είναι ίσοι.



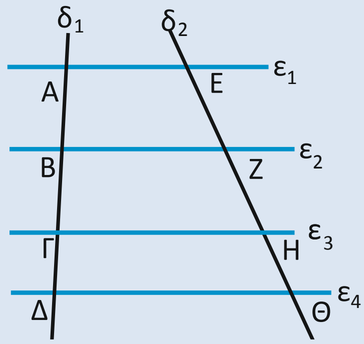
$\Delta E \parallel B\Gamma \Rightarrow \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ και $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma}$.

*Ισχύει και το αντίστροφο του πορίσματος.

Θεώρημα Θαλή

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη μία ευθεία είναι ανάλογα με τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται πάνω στην άλλη ευθεία.

Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$, τότε $\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{A\Gamma}{EH}$.

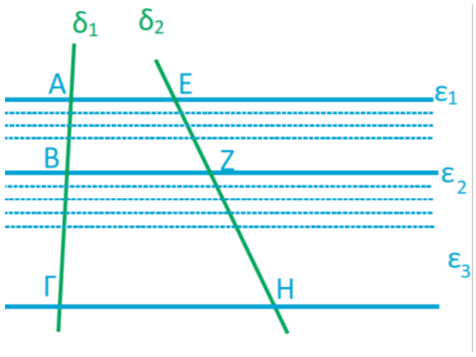


Απόδειξη:

Το AB και το $B\Gamma$ είναι σύμμετρα μεταξύ τους. Δηλαδή υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα α τέτοιο ώστε

$AB = \lambda \cdot \alpha$ και $B\Gamma = \mu \cdot \alpha$ (1)

όπου $\lambda, \mu \in N$.



Δηλαδή μπορούμε και χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB σε λ ίσα μέρη και το $B\Gamma$ σε μ ίσα μέρη έτσι ώστε το κάθε μέρος να έχει μήκος α.

Από τα σημεία της δ_1 που ορίζονται με τον παραπάνω τρόπο φέρουμε ευθείες παράλληλες προς την ε_1, οι οποίες τέμνουν τη δ_2.

Με βάση γνωστό θεώρημα, όταν τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη δ_1 είναι ίσα μεταξύ τους, τότε και τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη δ_2 είναι ίσα μεταξύ τους, και έστω το μήκος του καθενός είναι β.

Τότε θα έχουμε $EZ = \lambda \cdot \beta$ και $ZH = \mu \cdot \beta$ (2).

Από τις *(1)* και *(2)* προκύπτει ότι:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\lambda \cdot \alpha}{\mu \cdot \alpha} = \frac{\lambda}{\mu} \\ \frac{EZ}{ZH} = \frac{\lambda \cdot \beta}{\mu \cdot \beta} = \frac{\lambda}{\mu} \end{array}\right\} \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{EZ}{ZH}.$$

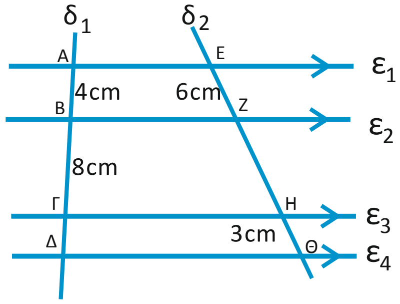
Από την πιο πάνω αναλογία παίρνουμε:

$$\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{AB + B\Gamma}{EZ + ZH} \text{ άρα } \frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{A\Gamma}{EH}$$

Αποδεικνύεται και όταν τα AB και $B\Gamma$ δεν είναι σύμμετρα.

Παραδείγματα

1. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα μήκη $ΓΔ$ και $ΖΗ$.



Λύση:

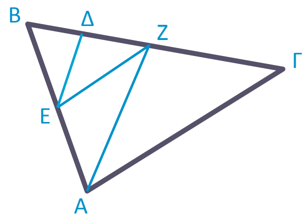
$ε_1 \parallel ε_2 \parallel ε_3 \parallel ε_4$ άρα εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Θαλή, τα αντίστοιχα τμήματα των $δ_1$ και $δ_2$ είναι ανάλογα.

$$\frac{ΑΒ}{ΕΖ} = \frac{ΒΓ}{ΖΗ} = \frac{ΓΔ}{ΗΘ} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{8}{ΖΗ} = \frac{ΓΔ}{3}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{8}{ΖΗ} \Rightarrow 4 \cdot ΖΗ = 6 \cdot 8 \Rightarrow ΖΗ = 12cm$$

$$\frac{4}{6} = \frac{ΓΔ}{3} \Rightarrow 6 \cdot ΓΔ = 3 \cdot 4 \Rightarrow ΓΔ = 2\ cm$$

2. Στο διπλανό σχήμα $ΕΖ \parallel ΑΓ$ και $ΔΕ \parallel ΑΖ$ να δείξετε ότι $\frac{ΒΔ}{ΒΖ} = \frac{ΒΖ}{ΒΓ}$

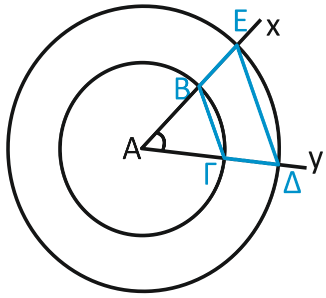


Λύση:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Στο τρίγωνο } ΒΑΓ \text{ ισχύει ότι } ΕΖ \parallel ΑΓ. \text{ Άρα } \dfrac{ΒΖ}{ΒΓ} = \dfrac{ΒΕ}{ΒΑ} \\ \\ \text{Στο τρίγωνο } ΒΖΑ \text{ ισχύει ότι } ΔΕ \parallel ΑΖ. \text{ Άρα } \dfrac{ΒΔ}{ΒΖ} = \dfrac{ΒΕ}{ΒΑ} \end{array}\right\} \dfrac{ΒΔ}{ΒΖ} = \dfrac{ΒΖ}{ΒΓ}$$

3. Δίνεται η γωνία $xΑy$. Με κέντρο το $Α$ κατασκευάζουμε 2 ομόκεντρους κύκλους με τυχαίες ακτίνες $ρ$ και R. Ο κύκλος με ακτίνα $ρ$ τέμνει τις πλευρές $Αx$ και $Αy$ στα σημεία $Β$ και $Γ$ αντίστοιχα, ενώ ο κύκλος με ακτίνα R τις τέμνει στα σημεία $Ε$ και $Δ$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $ΒΓΔΕ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

<u>**Απόδειξη**</u>:



Ο ένας κύκλος έχει ακτίνα $ΑΒ = ΑΓ = ρ$, ενώ ο άλλος κύκλος έχει ακτίνα $ΑΕ = ΑΔ = R$.

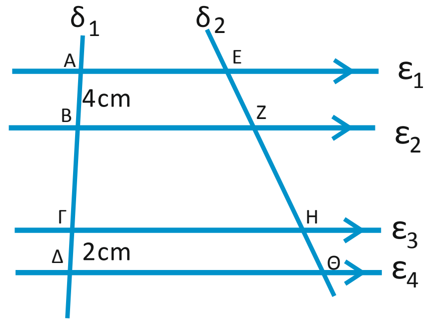
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{ΑΒ}{ΑΕ} = \dfrac{ρ}{R} \\ \\ \dfrac{ΑΓ}{ΑΔ} = \dfrac{ρ}{R} \end{array}\right\} \dfrac{ΑΒ}{ΑΕ} = \dfrac{ΑΓ}{ΑΔ} \Rightarrow ΒΓ \parallel ΕΔ. \text{ Άρα το } ΒΓΔΕ \text{ είναι τραπέζιο.}$$

$ΒΕ = ΓΔ = R - ρ$. Άρα το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

Δραστηριότητες

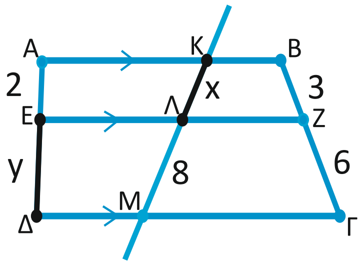
1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι $AB = 4cm$, $ΓΔ = 2cm, AΔ = 12cm, EΘ = 18cm$ και $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \parallel \varepsilon_4$.

   Να υπολογίσετε τα μήκη των $EZ, HΘ$ και EH.



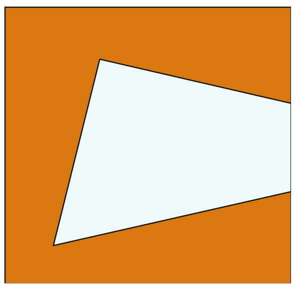
2. Περπατώντας σε έναν ευθύ δρόμο από το σπίτι της Έλενας μέχρι το σπίτι της Αντωνίας συναντούμε το σπίτι του Αβραάμ στα $\frac{2}{3}$ της διαδρομής. Να βρείτε το λόγο της απόστασης μεταξύ των σπιτιών του Αβραάμ και της Αντωνίας προς την απόσταση μεταξύ των σπιτιών του Αβραάμ και της Έλενας.

3. Να υπολογίσετε τα μήκη x και y στο πιο κάτω σχήμα.



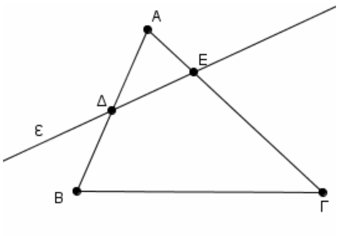
4. Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$. Κατασκευάζουμε μια ευθεία παράλληλη προς την πλευρά $BΓ$ που τέμνει τις πλευρές AB και $AΓ$ στα σημεία $Δ$ και E αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε ευθεία παράλληλη προς τη BE που περνά από το σημείο $Γ$ και τέμνει την AB σε ένα σημείο Z. Να δείξετε ότι $\frac{AΔ}{AB} = \frac{AB}{AZ}$. (Το AB ονομάζεται μέσο ανάλογο των $AΔ$ και AZ).

5. Πάνω σε ένα τραπέζι υπήρχε ένα κομμάτι γυαλί, τριγωνικού σχήματος, από το οποίο όμως έχει κοπεί η μύτη που προεξείχε. Να αναφέρετε τρόπους, με τους οποίους θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τις διαστάσεις του αρχικού γυαλιού.
   Στο σχήμα φαίνεται το τραπέζι και το άσπρο γυαλί που έχει απομείνει.



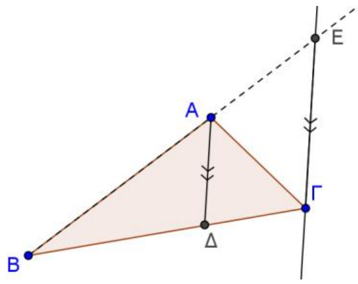
6. Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$. Από ένα σημείο $Δ$ της πλευράς AB φέρουμε $ΔE \parallel BΓ$, όπου E σημείο της $AΓ$. Από το σημείο E φέρουμε $EZ \parallel AB$, όπου Z σημείο της $BΓ$. Από το σημείο Z φέρουμε τη $ZH \parallel ΓA$, όπου H σημείο της AB. Να αποδείξετε ότι $\frac{ΔA}{ΔB} = \frac{HB}{HA}$.

7. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και Δ το μέσο της πλευράς $ΑΒ$. Από το $Δ$ διέρχεται μια τυχαία ευθεία $(ε)$ που τέμνει την πλευρά $ΑΓ$ σε εσωτερικό της, σημείο $Ε$. Η ευθεία $(ε)$ χωρίζει το τρίγωνο $ΑΒΓ$ σε ένα τρίγωνο $ΑΔΕ$ και σε ένα τετράπλευρο $ΒΔΕΓ$.
   α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου $Ε$ ώστε το τετράπλευρο $ΒΔΕΓ$ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
   β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του $ΑΒΓ$ τριγώνου ώστε το τραπέζιο του πιο πάνω ερωτήματος να είναι ισοσκελές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



8. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Από σημείο $Μ$ της διαμέσου $ΑΔ$ φέρουμε παράλληλες προς τις $ΑΒ$ και $ΑΓ$, που τέμνουν τη $ΒΓ$ στα σημεία $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
   (α) $\frac{ΔΕ}{ΔΒ} = \frac{ΔΖ}{ΔΓ}$
   (β) η $ΜΔ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $ΜΕΖ$.

9. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου χωρίζει την απέναντι πλευρά σε μέρη ανάλογα προς τις προσκείμενες σε αυτά πλευρές. Σημείωση: Το πιο πάνω ονομάζεται «Θεώρημα Εσωτερικής Διχοτόμου» και ισχύει και το αντίστροφό του.



   Υπόδειξη: Να φέρετε ευθεία παράλληλη από τη μια κορυφή του τριγώνου προς τη διχοτόμο και να δείξετε ότι $\frac{ΔΓ}{ΔΒ} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$.

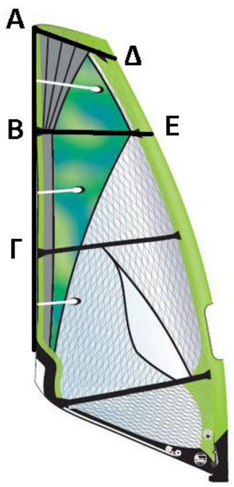
10. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος μιας εξωτερικής γωνίας του τριγώνου τέμνει την προέκταση της απέναντι πλευράς σε ένα σημείο, του οποίου οι αποστάσεις από τα άκρα της πλευράς αυτής είναι ανάλογες προς τις προσκείμενες πλευρές του τριγώνου. Σημείωση: Το πιο πάνω ονομάζεται «Θεώρημα Εξωτερικής Διχοτόμου» και ισχύει και το αντίστροφό του.
    Υπόδειξη: Να φέρετε ευθεία παράλληλη από την κορυφή του τριγώνου προς την εξωτερική διχοτόμο ώστε να τέμνει το τρίγωνο.

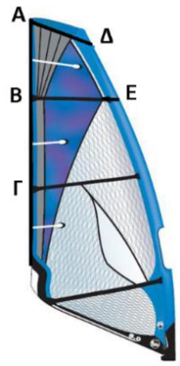
11. Να αποδείξετε ότι αν μια ευθεία παράλληλη προς την πλευρά $ΒΓ$ ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ τέμνει τις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$ στα σημεία $Δ$ και $Ε$ αντίστοιχα, τότε $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$. Σημείωση: Το πιο πάνω είναι πόρισμα του Θεωρήματος του Θαλή και ισχύει και το αντίστροφό του.

Όμοια Ευθύγραμμα σχήματα

Διερεύνηση

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα πανιά δύο ιστιοσανίδων. Τα δύο πανιά είναι όμοια μεταξύ τους. Να μετρήσετε τα μήκη $ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ, ΒΕ$ και τις γωνίες $Β\hat{Α}Δ$ και $Γ\hat{Β}Ε$. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.





Μέτρηση	$\boldsymbol{Πράσινο}$ Πανί	$\boldsymbol{Μπλε}$ Πανί	$\boldsymbol{\dfrac{Μπλε}{Πράσινο}}$
$ΑΔ$			
$ΑΒ$			
$ΒΓ$			
$ΒΕ$			
$Β\hat{Α}Δ$			
$Γ\hat{Β}Ε$			

1. Να κάνετε μια εικασία για τη σχέση που συνδέει το μέτρο των αντίστοιχων γωνιών σε όμοια σχήματα.
2. Αν μια γωνία στο πράσινο σχήμα έχει μέτρο 70^o, ποιο θα είναι το μέτρο της αντίστοιχης γωνίας στο μπλε σχήμα;
3. Να κάνετε μια εικασία για τη σχέση που συνδέει τα μήκη των αντίστοιχων πλευρών σε όμοια σχήματα.
4. Αν το μήκος ενός αντικειμένου στο πράσινο σχήμα είναι $10\ cm$, πόσο πρέπει να είναι το αντίστοιχο μήκος στο μπλε σχήμα;
5. Αν το μήκος ενός αντικειμένου στο μπλε σχήμα είναι $10\ cm$, πόσο πρέπει να είναι το αντίστοιχο μήκος στο πράσινο σχήμα;

Μαθαίνω

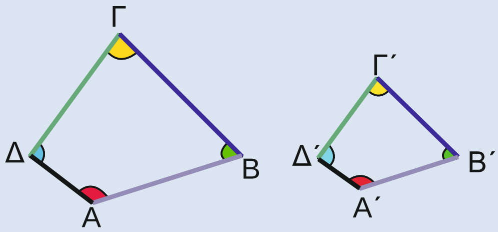
Δύο πολύγωνα λέγονται **όμοια** όταν έχουν **τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες.**
Συμβολίζουμε τη σχέση ομοιότητας δύο πολυγώνων με το σύμβολο ≈

Αν $ΑΒΓΔ \approx Α'Β'Γ'Δ'$, τότε ισχύει

- ✓ $\hat{A} = \widehat{A'}$, $\hat{B} = \widehat{B'}$, $\hat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$, $\hat{\Delta} = \widehat{\Delta'}$

  και

- ✓ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{A\Delta}{A'\Delta'}$



π.χ. $ΑΒΓΔ \approx Α'Β'Γ'Δ'$

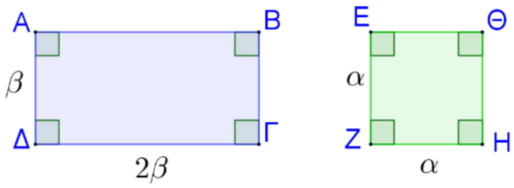
Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε:

- ✓ Οι κορυφές των ίσων γωνιών τους λέγονται ομόλογες, π.χ. A και A'.
- ✓ Οι πλευρές που ορίζονται από ομόλογες κορυφές λέγονται ομόλογες, π.χ. AB και $A'B'$.
- ✓ Ο λόγος ομοιότητας δύο πολυγώνων συνήθως συμβολίζεται με λ και είναι ίσος με τον λόγο δύο ομόλογων πλευρών τους, π.χ. $\lambda = \frac{AB}{A'B'}$.
- ✓ Ο λόγος των περιμέτρων των δύο πολυγώνων είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους, π.χ. $\frac{\Pi_{AB\Gamma\Delta}}{\Pi_{A'B'\Gamma'\Delta'}} = \lambda$.
- ✓ Ο λόγος των εμβαδών των δύο πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, π.χ. $\frac{E_{AB\Gamma\Delta}}{E_{A'B'\Gamma'\Delta'}} = \lambda^2$
- ✓ Όλα τα κανονικά πολύγωνα που έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια μεταξύ τους.

Σημείωση: Στη λύση ασκήσεων σημειώνουμε τα όμοια πολύγωνα με τέτοιο τρόπο ώστε οι κορυφές των ίσων γωνιών στα δύο πολύγωνα να είναι αντίστοιχα ίσες.
Π.χ. Αν γράψουμε $ΑΒΓΔ \approx$ ΚΛΜΝ, αυτό θα σημαίνει ότι $\hat{A} = \hat{K}$, $\hat{B} = \hat{\Lambda}$, $\hat{\Gamma} = \hat{M}$, $\hat{\Delta} = \hat{N}$.

Παράδειγμα

Να εξετάσετε για κάθε ζεύγος πολυγώνων που δίνονται κατά πόσον είναι όμοια. Στην περίπτωση που είναι όμοια, να βρεθεί ο λόγος ομοιότητας.



(α) Γωνίες

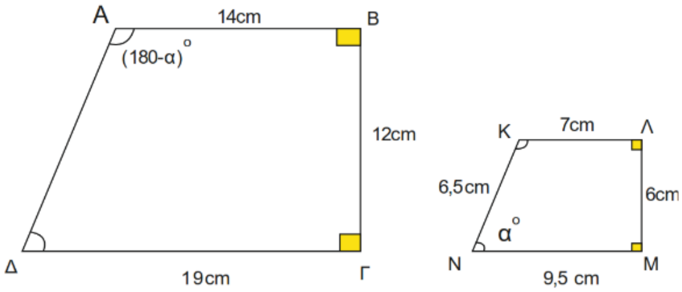
Τα δύο πολύγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία (όλες ορθές).

Λόγοι αντίστοιχων πλευρών $\lambda_1 = \frac{A\Delta}{EZ} = \frac{\beta}{\alpha}$ και $\lambda_2 = \frac{\Delta\Gamma}{ZH} = \frac{2\beta}{\alpha}$

Ο λόγος των αντίστοιχων πλευρών τους δεν είναι ο ίδιος, άρα οι πλευρές δεν είναι ανάλογες.

Για να είναι όμοια τα πολύγωνα, πρέπει και οι γωνίες να είναι ίσες και οι πλευρές τους ανάλογες, άρα τα δύο πολύγωνα δεν είναι όμοια.

(β) Αρχικά εξετάζουμε κατά πόσον τα δύο πολύγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.



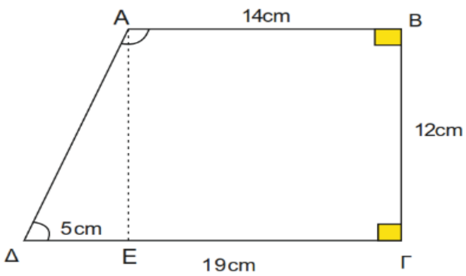
$K\Lambda \parallel NM$ άρα $\widehat{K} + \widehat{N} = 180^o$ (εντός εναλλάξ), δηλαδή $\widehat{K} = (180 - \alpha)^o$.

$AB \parallel \Delta\Gamma$. Άρα $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^o$ (εντός εναλλάξ), δηλαδή $\hat{\Delta} = \alpha^o$.

Τα δύο πολύγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

$\hat{A} = \widehat{K} = (180 - \alpha)^o$, $\hat{\Delta} = \widehat{N} = \alpha^o$, $\hat{B} = \hat{\Lambda} = 90^o$, $\hat{\Gamma} = \widehat{M} = 90^o$.

Στη συνέχεια εξετάζουμε κατά πόσον οι πλευρές τους είναι ανάλογες.



Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ορθογώνιο. Άρα ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα:

$(A\Delta)^2 = (\Delta E)^2 + (AE)^2$

$(A\Delta)^2 = 5^2 + 12^2 = 169$

$(A\Delta) = 13cm$.

$\lambda_1 = \frac{K\Lambda}{AB} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{\Lambda M}{B\Gamma} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = \frac{MN}{\Gamma\Delta} = \frac{9{,}5}{19} = \frac{1}{2}$, $\lambda_4 = \frac{KN}{A\Delta} = \frac{6{,}5}{13} = \frac{1}{2}$

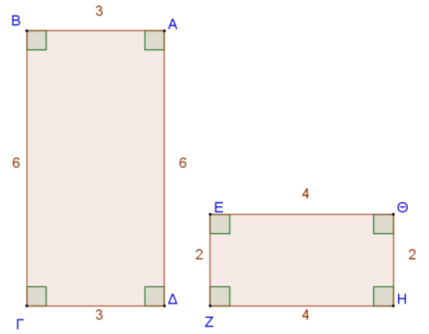
Ο λόγος των αντίστοιχων πλευρών τους είναι ο ίδιος. Άρα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

Τα δύο τραπέζια είναι όμοια $AB\Gamma\Delta \approx K\Lambda MN$, γιατί έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις πλευρές τους ανάλογες. Ο λόγος ομοιότητας είναι $\lambda = \frac{1}{2}$.

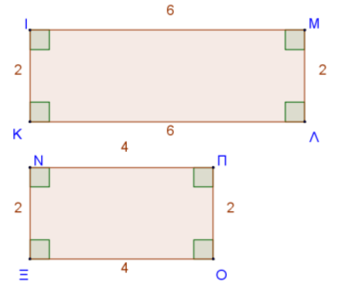
Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε ποια από τα πιο κάτω ζεύγη πολυγώνων είναι όμοια. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

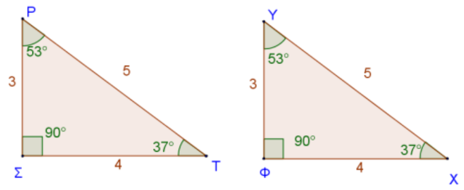
α)



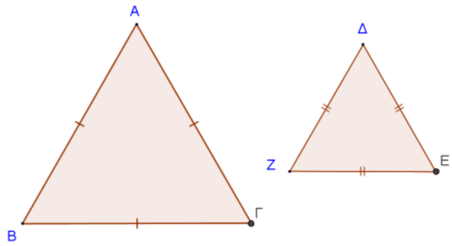
β)



γ)



δ)

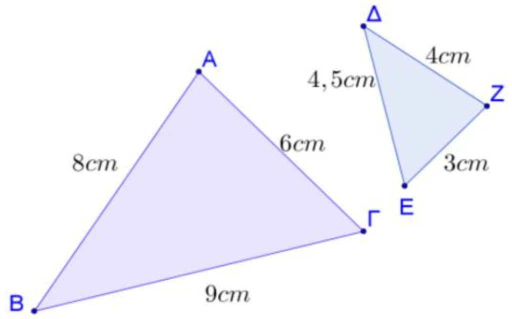


2. Δίνεται ένα ορθογώνιο με διαστάσεις α και β και ένα άλλο με διαστάσεις 2α και 2β. Να δείξετε ότι είναι όμοια και στη συνέχεια να βρείτε:
   (α) τον λόγο των πλευρών τους.
   (β) τον λόγο των περιμέτρων τους.
   (γ) τον λόγο των εμβαδών τους.

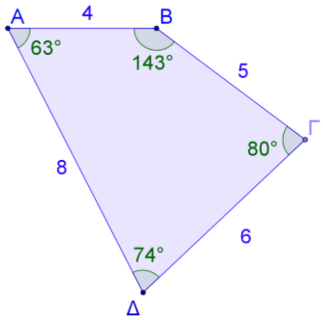
3. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α) Ένα τετράγωνο και ένας ρόμβος είναι πάντοτε όμοια.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β) Ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο είναι πάντοτε όμοια.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ) Δύο κανονικά εξάγωνα με πλευρές 5 cm και 7 m είναι όμοια.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ) Ένα κανονικό πεντάγωνο με πλευρά α και ένα κανονικό εξάγωνο με πλευρά α είναι όμοια.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

4. Στο πιο κάτω σχήμα τα τρίγωνα είναι όμοια. Να σημειώσετε τις ίσες γωνίες τους.



5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$, το οποίο είναι όμοιο με το τετράπλευρο $ΕΖΗΘ$ και ισχύει ότι $\frac{AB}{EZ} = \frac{2}{3}$. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών και τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου $ΕΖΗΘ$.



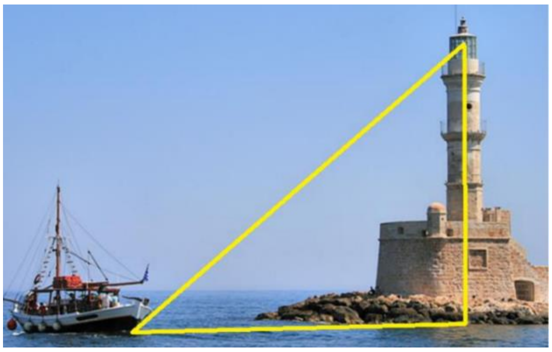
6. Ο λόγος ομοιότητας δύο πολυγώνων είναι $\frac{2}{5}$ και το εμβαδόν του μικρότερου είναι $16\ cm^2$. Να βρείτε το εμβαδόν του άλλου πολυγώνου.

7. Οι πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκος $6\ cm$, $9\ cm$ και $12\ cm$. Να βρείτε το μήκος των πλευρών ενός τριγώνου όμοιου προς αυτό το τρίγωνο, που έχει περίμετρο $36\ cm$.

Ομοια τρίγωνα

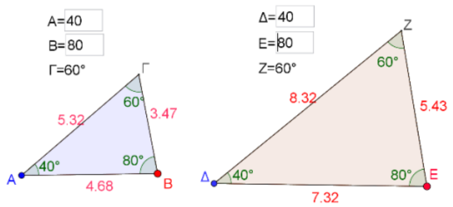
Εξερεύνηση

Ένας παρατηρητής βρίσκεται στην κορυφή του διπλανού φάρου, ο οποίος βρίσκεται σε ύψος 30 m από την επιφάνεια της θάλασσας και παρατηρεί μια ψαρόβαρκα στη θάλασσα.
Έχει στη διάθεσή του ένα χάρακα μήκους 1 m.
Να εξηγήσετε πώς μπορεί ο παρατηρητής να υπολογίσει την απόσταση τηςψαρόβαρκας από το φάρο.



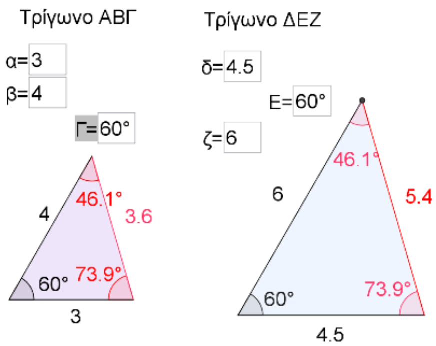
Διερεύνηση (1)

Να ανοίξετε το αρχείο «kritirio 1».
Να επιλέξετε το μέτρο για δύο γωνίες του τριγώνου $ΑΒΓ$.
Να δώσετε το μέτρο για δύο γωνίες του τριγώνου $ΔΕΖ$ έτσι ώστε τα δύο τρίγωνα να έχουν δύο γωνίες τους, αντίστοιχα ίσες.
Να εξετάσετε κατά πόσον τα τρίγωνα είναι όμοια.



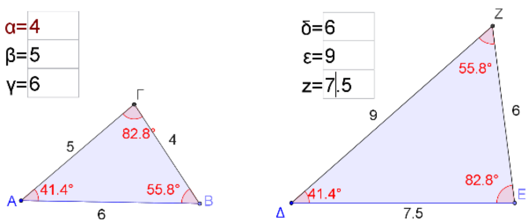
Διερεύνηση (2)

Να ανοίξετε το αρχείο «kritirio 2».
Να επιλέξετε το μήκος για δύο από τις πλευρές του τριγώνου $ΑΒΓ$ και το μέτρο της περιεχόμενής τους γωνίας.
Να επαναλάβετε τη διαδικασία για το τρίγωνο $ΔΕΖ$ ώστε οι δύο πλευρές των τριγώνων να είναι ανάλογες και οι περιεχόμενες γωνία τους ίσες.
Να εξετάσετε κατά πόσον τα τρίγωνα είναι όμοια.



Διερεύνηση (3)

Να ανοίξετε το αρχείο «kritirio 3».
Να επιλέξετε το μήκος για τις τρεις πλευρές του τριγώνου $ΑΒΓ$.
Να επαναλάβετε τη διαδικασία για τις πλευρές του τριγώνου $ΔΕΖ$ ώστε οι τρεις πλευρές των δύο τριγώνων να είναι ανάλογες.
Να εξετάσετε κατά πόσον τα τρίγωνα είναι όμοια.

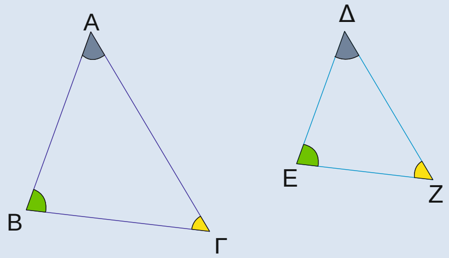


Μαθαίνω

Δύο τρίγωνα που λέγονται όμοια έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες.

Αν $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$

τότε $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$ και $\hat{A} = \hat{\Delta},\ \hat{B} = \hat{E},\ \hat{\Gamma} = \hat{Z}$.



Σε όμοια τρίγωνα με λόγο ομοιότητας λ, απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ανάλογες πλευρές.

Π.χ. Αν $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$ τότε $\lambda = \frac{B\Gamma}{EZ}$.

Απέναντι από ανάλογες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

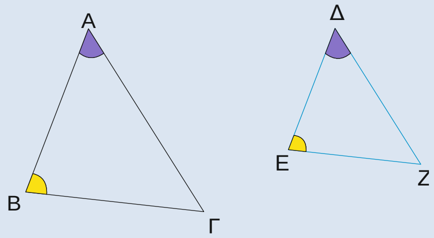
Π.χ. Αν $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$ και $\lambda = \frac{AB}{\Delta E}$ τότε $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.

Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων

1ο Κριτήριο ομοιότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

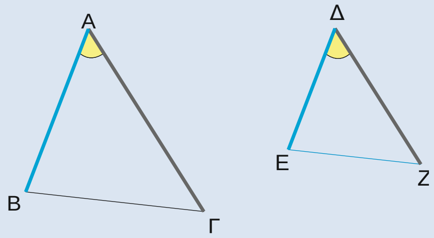
Π.χ. Αν $\hat{A} = \hat{\Delta}\ και\ \hat{B} = \hat{E}$ τότε $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$.



2ο Κριτήριο ομοιότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες και τις περιεχόμενές τους γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

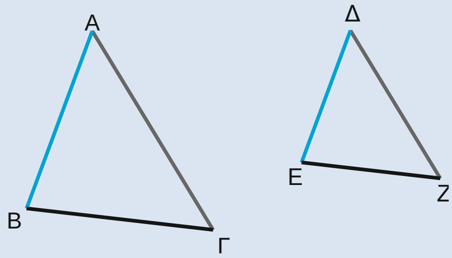
Π.χ. Αν $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$ τότε $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$.



3ο Κριτήριο ομοιότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια.

Π.χ. Αν $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}$ τότε $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$.



1^{o} Κριτήριο ομοιότητας τριγώνων

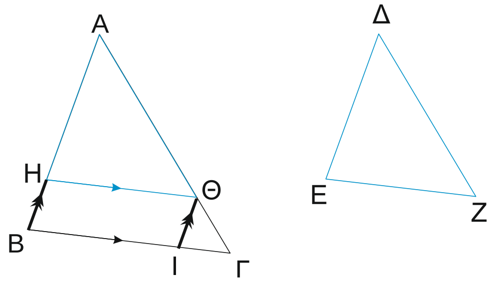
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνιές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη:

Για να αποδείξουμε ότι $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$, θα πρέπει να δείξουμε α) ότι έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και β) ότι έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες.

α) Ίσες γωνίες

Τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες και έστω ότι αυτές είναι $\hat{A} = \hat{\Delta}$ και $\hat{B} = \hat{E}$.



Τα τρίγωνα που έχουν δύο γωνίες ίσες έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες, άρα και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.

β) Ανάλογες πλευρές

Παίρνουμε σημείο H πάνω στην AB τέτοιο ώστε $(AH) = (\Delta E)$. *(1)*

Φέρνουμε $H\Theta \parallel B\Gamma$ και $\Theta I \parallel AB$. Άρα $H\Theta IB$ παραλληλόγραμμο, επομένως $(H\Theta) = (BI)$.

$A\hat{H}\Theta = \hat{B}$ (εντός εκτός επί τα αυτά) και $\hat{B} = \hat{E}$ (δεδομένο), δηλαδή $A\hat{H}\Theta = \hat{E}$ *(2)*.

Συγκρίνω τα τρίγωνα $AH\Theta$ και ΔEZ.

$(AH) = (\Delta E)$ (1) Πλευρά

$A\hat{H}\Theta = \hat{E}$ (2) Γωνία

$\hat{A} = \hat{\Delta}$ $(\delta\varepsilon\delta o\mu\acute{\varepsilon}\nu o)$ Γωνία

Ισχύει το κριτήριο ισότητας «Τα τρίγωνα έχουν μια πλευρά και δύο γωνίες αντίστοιχα ίσες».

Άρα $\overset{\Delta}{AH\Theta} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$

Σε ίσα τρίγωνα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα, δηλαδή

$(A\Theta) = (\Delta Z), (H\Theta) = (EZ), A\hat{\Theta}H = \hat{Z}$.

$\Theta I \parallel AB \Rightarrow \frac{A\Theta}{A\Gamma} = \frac{BI}{B\Gamma} \Rightarrow \frac{A\Theta}{A\Gamma} = \frac{H\Theta}{B\Gamma}$

$H\Theta \parallel B\Gamma \Rightarrow \frac{A\Theta}{A\Gamma} = \frac{AH}{AB}$

$$\frac{A\Theta}{A\Gamma} = \frac{H\Theta}{B\Gamma} = \frac{AH}{AB} \Longrightarrow \frac{\Delta Z}{A\Gamma} = \frac{EZ}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{AB}$$

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία ($\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$)

και τις πλευρές τους ανάλογες $\frac{\Delta Z}{A\Gamma} = \frac{EZ}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{AB}$. Άρα τα τρίγωνα είναι όμοια $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$.

Παρατήρηση: Σε όμοια τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ομόλογες πλευρές και αντίστροφα.

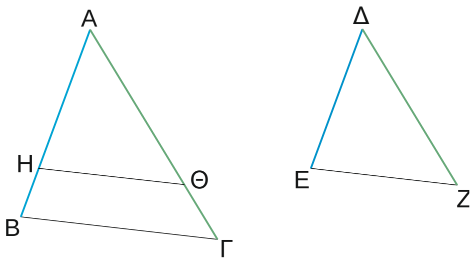
2^o Κριτήριο ομοιότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες και τις περιεχόμενες τους γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη:

Για να αποδείξουμε ότι $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$ αρκεί να δείξουμε ότι έχουν δύο από τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, δηλαδή ισχύει το 1^o κριτήριο ομοιότητας τριγώνων.

Είναι δεδομένο ότι τα τρίγωνα έχουν από μία ίση γωνία και έστω ότι αυτή είναι $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Επίσης, οι πλευρές που περιέχουν τις γωνίες A και Δ είναι ανάλογες, δηλαδή $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$.



Παίρνουμε σημεία H και Θ πάνω στις AB και $A\Gamma$, τέτοια ώστε

$(AH) = (\Delta E)$ και $(A\Theta) = (\Delta Z)$. *(1)*

Η σχέση $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$ γίνεται $\frac{AB}{AH} = \frac{A\Gamma}{A\Theta}$. Έτσι προκύπτει ότι $H\Theta \parallel B\Gamma$. Άρα $A\hat{H}\Theta = \hat{B}$ (εντός εκτός επί τα αυτά μέρη γωνίες). *(2)*

Συγκρίνω τα τρίγωνα $AH\Theta$ και ΔEZ.

$(AH) = (\Delta E)$ (1) Πλευρά

$(A\Theta) = (\Delta Z)$ (1) Πλευρά

$\hat{A} = \hat{\Delta}$ $(\delta\varepsilon\delta o\mu\acute{\varepsilon}\nu o)$ Γωνία

Ισχύει το κριτήριο ισότητας «Τα τρίγωνα έχουν δύο ίσες πλευρές και την περιεχόμενη τους γωνία ίση».

Άρα $\overset{\Delta}{AH\Theta} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$

Σε ίσα τρίγωνα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα, δηλ. $(H\Theta) = (EZ)$, $\hat{\Theta} = \hat{Z}$, $A\hat{H}\Theta = \hat{E}$. *(3)*

$$\left.\begin{array}{ll} A\hat{H}\Theta = \hat{B} & (2) \\ A\hat{H}\Theta = \hat{E} & (3) \end{array}\right\} \quad \hat{B} = \hat{E}.$$

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία ($\hat{A} = \hat{\Delta}$ και $\hat{B} = \hat{E}$). Άρα από το 1^o κριτήριο ομοιότητας τριγώνων συμπεραίνουμε ότι $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$.

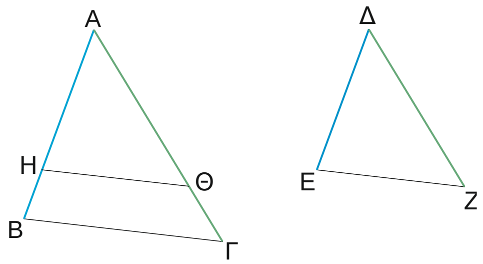
3^{o} Κριτήριο ομοιότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη:

Για να αποδείξουμε ότι $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$, αρκεί να δείξουμε ότι έχουν δύο από τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, δηλαδή ισχύει το 1^{o} κριτήριο ομοιότητας τριγώνων.

Είναι δεδομένο ότι τα τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}$.



Παίρνουμε σημεία H και Θ πάνω στις AB και $A\Gamma$, τέτοια ώστε

$(AH) = (\Delta E)$ και $(A\Theta) = (\Delta Z)$. *(1)*

Η σχέση $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}$ γίνεται $\frac{AB}{AH} = \frac{A\Gamma}{A\Theta} = \frac{B\Gamma}{EZ}$ (2) έτσι προκύπτει ότι $H\Theta \parallel B\Gamma$.
Άρα $A\hat{H}\Theta = \hat{B}$ και $A\hat{\Theta}H = \hat{\Gamma}$ (εντός, εκτός, επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες).

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AH\Theta$ είναι όμοια διότι έχουν δύο γωνίες τους αντίστοιχα ίσες $A\hat{H}\Theta = \hat{B}$ και $A\hat{\Theta}H = \hat{\Gamma}$ δηλ. ισχύει το 1^{o} κριτήριο ομοιότητας τριγώνων.
Άρα $\frac{AB}{AH} = \frac{B\Gamma}{H\Theta}$. *(3)*

$$\left.\begin{array}{l} \text{Σχέση (2)}\ \frac{AB}{AH} = \frac{B\Gamma}{EZ} \\ \text{Σχέση (3)}\ \frac{AB}{AH} = \frac{B\Gamma}{H\Theta} \end{array}\right\} \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{B\Gamma}{H\Theta} \ \text{ άρα } (EZ) = (H\Theta)\ \textit{(4)}$$

Τα τρίγωνα $AH\Theta$ και ΔEZ είναι ίσα γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία.
$(AH) = (\Delta E)$ (1) $(A\Theta) = (\Delta Z)$ (1), $(EZ) = (H\Theta)$ (4)

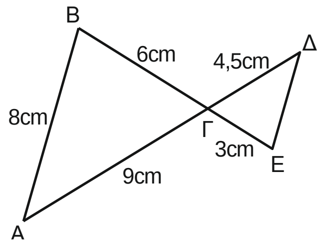
Σε ίσα τρίγωνα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα, δηλ. $\hat{A} = \hat{\Delta}, A\hat{\Theta}H = \hat{Z},\ A\hat{H}\Theta = \hat{E}$. *(5)*

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{H}\Theta = \hat{B} \quad (2) \\ A\hat{H}\Theta = \hat{E} \quad (5) \end{array}\right\} \hat{B} = \hat{E}$$

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία ($\hat{A} = \hat{\Delta}$ και $\hat{B} = \hat{E}$). Άρα από το 1^{o} κριτήριο ομοιότητας τριγώνων συμπεραίνουμε ότι $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$.

Παραδείγματα

1. Στο διπλανό σχήμα $AB \parallel \Delta E$ και Γ είναι το σημείο τομής των BE και $A\Delta$. Αν $B\Gamma = 6cm, A\Gamma = 9cm, \Gamma\Delta = 4{,}5cm$ και $\Gamma E = 3cm$ να υπολογίσετε το μήκος ΔE.



Λύση:
Συγκρίνω τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$.
$A\hat{\Gamma}B = \Delta\hat{\Gamma}E$ (κατακορυφήν γωνίες ίσες)
Βρίσκουμε το λόγο των αντίστοιχων πλευρών (που περιέχουν τις ίσες γωνίες).

Λόγος των μικρότερων πλευρών $\lambda_1 = \frac{E\Gamma}{B\Gamma} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

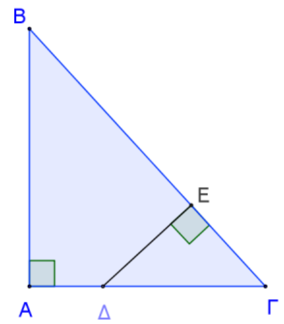
Λόγος μεγαλύτερων πλευρών $\lambda_2 = \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma} = \frac{4{,}5}{9} = \frac{1}{2}$

Ο λόγος των αντίστοιχων πλευρών είναι ο ίδιος $\frac{1}{2}$, δηλαδή τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες.

Άρα από το 2ο κριτήριο ομοιότητας, τα τρίγωνα είναι όμοια $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta E Z}$.

Άρα $\lambda_3 = \frac{E\Delta}{BA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\Delta E}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta E = 4\ cm$.

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A} = 90^o)$. Από ένα τυχαίο σημείο Δ της $A\Gamma$ κατασκευάζουμε $\Delta E \perp B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
   (α) $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{E\Delta\Gamma}$
   (β) $(A\Gamma)(E\Delta) = (AB)(E\Gamma)$.



Λύση:
(α) $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{E\Delta\Gamma}$
Συγκρίνω τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$.

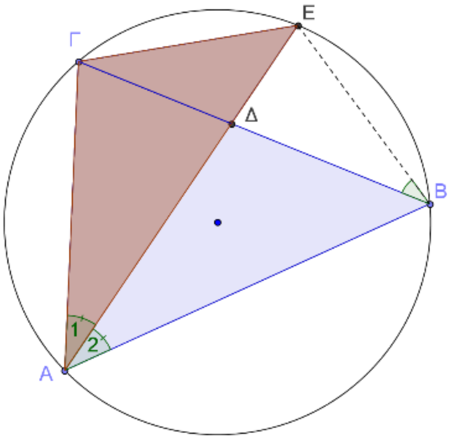
Η γωνία Γ είναι κοινή.
$\hat{A} = \hat{E} = 90^o$ $(\hat{A} = 90^o$ δεδομένο και $\Delta E \perp B\Gamma)$

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ έχουν δύο γωνίες αντίστοιχα ίσες $(\hat{A} = \hat{E},\ \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma})$. Άρα από το 1ο κριτήριο ομοιότητας προκύπτει ότι τα τρίγωνα είναι όμοια $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{E\Delta\Gamma}$.

(β) $(A\Gamma)(E\Delta) = (AB)(E\Gamma)$
Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta\Gamma$ είναι όμοια. Άρα και οι πλευρές τους είναι ανάλογες.
Απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ανάλογες πλευρές.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{E}\\ \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\\ \hat{B} = \hat{\Delta}\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\Gamma B}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{E\Delta} = \frac{A\Gamma}{E\Gamma} \Longrightarrow (A\Gamma)(E\Delta) = (AB)(E\Gamma)$$

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας A, η οποία συναντά την πλευρά $B\Gamma$ στο Δ και τον κύκλο στο E. Να αποδειχθεί ότι:
   (α) $(AB)(A\Gamma) = (A\Delta)(AE)$
   (β) $(EB)^2 = (EA)(E\Delta)$.



Λύση:

(α) $(AB)(A\Gamma) = (A\Delta)(AE)$

Συγκρίνω τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$.

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (AE διχοτόμος)
$\hat{E} = \hat{B}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $A\Gamma$)

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν δύο γωνίες αντίστοιχα ίσες. Άρα από το 1^o κριτήριο ομοιότητας προκύπτει ότι είναι όμοια, δηλαδή έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.
Οι ανάλογες πλευρές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες.

$$\left.\begin{array}{r}\widehat{A_2} = \widehat{A_1}\\ \hat{B} = \hat{E}\\ \hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{B\Delta}{E\Gamma} = \boxed{\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB}{AE}}$$

$$\boxed{\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB}{AE}} \Longrightarrow (AB)(A\Gamma) = (A\Delta)(AE)$$

(β) $(EB)^2 = (EA)(E\Delta)$
Συγκρίνω τα τρίγωνα EAB και $EB\Delta$.

$\Gamma\hat{B}E = \widehat{A_1}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΓE)
$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (AE διχοτόμος)
$\Gamma\hat{B}E = \widehat{A_2}$

Τα τρίγωνα EAB και $EB\Delta$ έχουν δύο γωνίες αντίστοιχα ίσες ($\Gamma\hat{B}E = \widehat{A_2}$ και $\hat{E}$ κοινή γωνιά). Άρα από το 1^o κριτήριο ομοιότητας προκύπτει ότι είναι όμοια $\overset{\Delta}{EAB} \approx \overset{\Delta}{EB\Delta}$, δηλαδή έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.
Οι ανάλογες πλευρές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες.

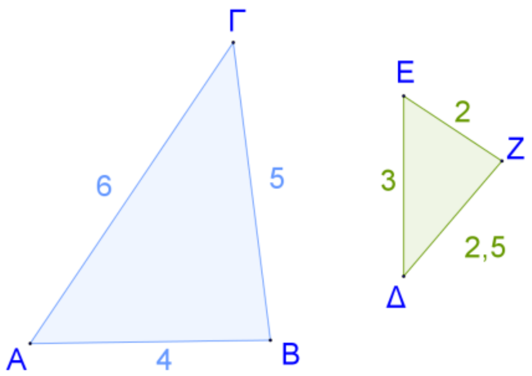
$$\left.\begin{array}{r}\hat{E} = \hat{E}\\ \widehat{A_2} = \Delta\hat{B}E\\ A\hat{B}E = B\hat{\Delta}E\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{AB}{\Delta B} = \boxed{\frac{EB}{E\Delta} = \frac{AE}{EB}}$$

$$\boxed{\frac{EB}{E\Delta} = \frac{AE}{EB}} \Longrightarrow (EB)^2 = (EA)(E\Delta)$$

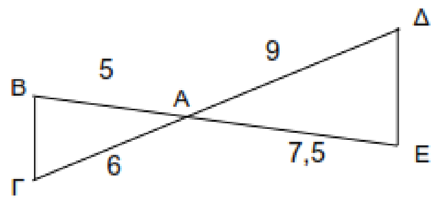
Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε κατά πόσον τα τρίγωνα, σε κάθε ζεύγος τριγώνων, είναι όμοια μεταξύ τους. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

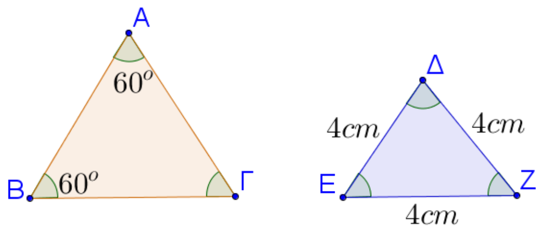
(α)



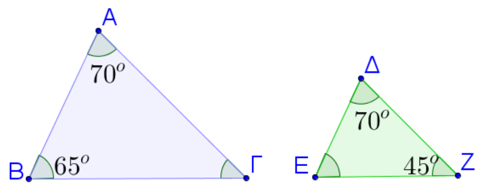
(β)



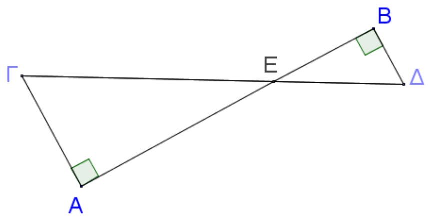
(γ)



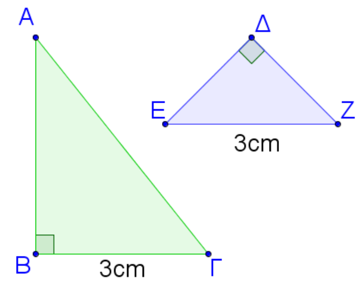
(δ)



(ε)



(ζ)



2. Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ με $ΒΓ = 6\ cm$ και $ΑΓ = 9\ cm$. Φέρουμε τη $ΒΕ$ κάθετη στην $ΑΓ$ (Το $Ε$ είναι σημείο της $ΑΓ$). Να υπολογίσετε το $ΓΕ$.

3. Ο Χαράλαμπος έχει ύψος 1,70 m. Αν η σκιά του είναι 2 m και η σκιά ενός ανεμόμυλου την ίδια στιγμή είναι 7 m, να βρείτε το ύψος του ανεμόμυλου. (Είναι γνωστό από τη φυσική ότι οι ακτίνες του ήλιου είναι παράλληλες).

4. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ φέρουμε τα ύψη $ΑΔ$ και $ΒΕ$. Αν $Η$ είναι το ορθόκεντρο (σημείο τομής των υψών), να δείξετε ότι:

   (α) $(ΗΑ)(ΗΔ) = (ΗΒ)(ΗΕ)$ (β) $(ΓΑ)(ΓΕ) = (ΓΒ)(ΓΔ)$.

5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^o$. Να φέρετε το ύψος $A\Delta$ και από το Δ να φέρετε τη ΔE κάθετη στην $A\Gamma$ (E σημείο τομής με την $A\Gamma$). Να δείξετε ότι:

   (α) $\overset{\triangle}{\Gamma\Delta E} \approx \overset{\triangle}{\Gamma B A}$

   (β) $(A\Delta)^2 = (AB)(\Delta E)$

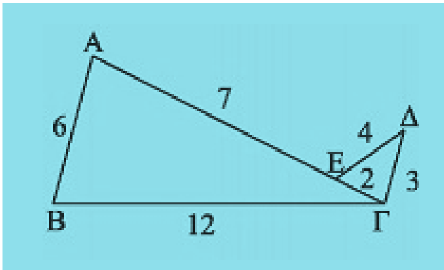
6. Η AB είναι διάμετρος κύκλου και η $A\Gamma$ χορδή του. Από τυχαίο σημείο Δ της $A\Gamma$ φέρουμε την ΔE κάθετη στην AB. Αν η προέκταση της $B\Gamma$ τέμνει την εφαπτομένη του κύκλου στο A στο σημείο Z, να δείξετε ότι:

   (α) $\overset{\triangle}{AZ\Gamma} \approx \overset{\triangle}{BA\Gamma}$

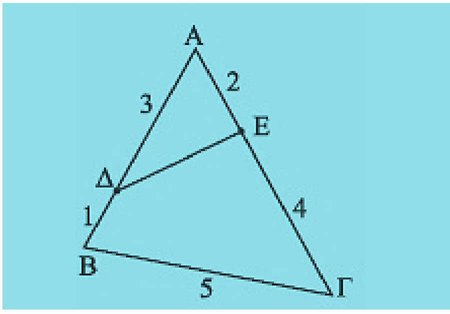
   (β) $(AE)(BZ) = (A\Delta)(AZ)$.

7. Δίνεται κύκλος (K, ρ) και σημείο A του κύκλου. Από το A φέρουμε κάθετη $A\Delta$ σε διάμετρο $B\Gamma$ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι $(A\Gamma)^2 = (B\Gamma)\cdot(\Delta\Gamma)$.

8. Στο σχήμα δίνεται ότι $AB = 6, B\Gamma = 12$, $A\Gamma = 9, E\Gamma = 2, \Delta\Gamma = 3 \; και \; E\Delta = 4$. Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$.

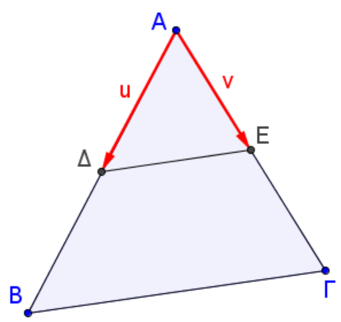


9. Να βρεθεί το μήκος ΔE.



10. Στο σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$. Αν $\overrightarrow{A\Delta} = u$ και $\overrightarrow{AE} = v$ να υπολογίσετε συναρτήσει του u και v τα πιο κάτω (το σχέδιο δεν είναι σε κλίμακα).

   (α) $\overrightarrow{\Delta E}$ (β) $\overrightarrow{AB}$ (γ) $\overrightarrow{B\Gamma}$



11. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{A} = 90^o)$ φέρουμε το ύψος $ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις, οι οποίες είναι γνωστές ως **μετρικές σχέσεις σε ορθογώνιο τρίγωνο**.

    (α) $(ΑΔ)^2 = (ΔΓ)(ΔΒ)$

    (β) $(ΑΒ)^2 = (ΒΔ)(ΒΓ)$

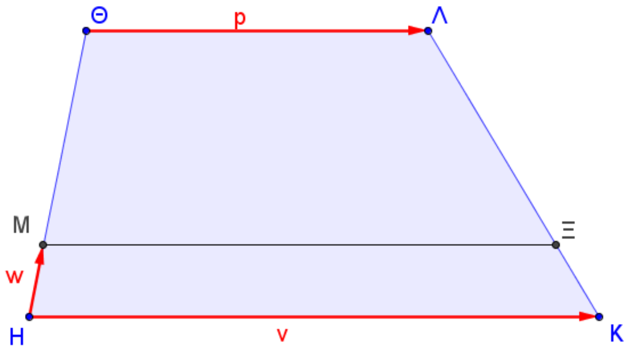
    (γ) $(ΑΓ)^2 = (ΓΔ)(ΓΒ)$

    (δ) $(ΑΔ)(ΒΓ) = (ΑΓ)(ΑΒ)$

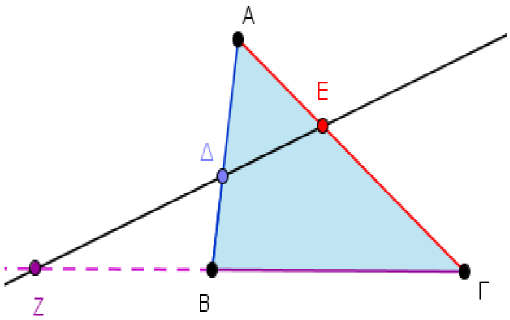
    (ε) $(ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 = (ΒΓ)^2$

12. Δύο χορδές $ΑΒ$ και $ΔΕ$ ενός κύκλου είναι παράλληλες. Στο σημείου $Β$ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου που τέμνει την προέκταση της $ΔΕ$ στο σημείο $Γ$. Να αποδείξετε ότι
$(ΒΔ)^2 = (ΒΑ)(ΔΓ)$.

13. Στο σχήμα δίνεται τραπέζιο $ΘΛΚΗ$ με $ΘΛ \parallel ΗΚ$ με $Μ$ και $Ν$ μέσα των $ΗΘ$ και $ΛΚ$. Αν
$\overrightarrow{ΘΛ} = p$, $\overrightarrow{ΗΚ} = v$, $\overrightarrow{ΗΜ} = w$, $ΞΚ = 2cm$ και $ΚΛ = 6cm$, να δείξετε ότι $\overrightarrow{ΜΞ} = \frac{3v+\rho}{4}$.



14. Να αποδείξετε το Θεώρημα Μενελάου: Αν μια ευθεία τέμνει τους φορείς των πλευρών $ΒΓ$, $ΓΑ$ και $ΑΒ$ ενός τριγώνου στα σημεία $Ζ$, $Ε$, $Δ$ αντίστοιχα, τότε ισχύει: $\frac{ΒΔ}{ΔΑ} \cdot \frac{ΑΕ}{ΕΓ} \cdot \frac{ΓΖ}{ΖΒ} = 1$.



Υπόδειξη: Να φέρετε $ΒΘ \parallel ΔΕ$

Δύναμη σημείου ως προς κύκλο

Διερεύνηση

Να κατασκευάσετε έναν κύκλο (K, R). Από σημείο Σ εκτός κύκλου να κατασκευάσετε τέμνουσα, η οποία να περνά από τα σημεία A και B του κύκλου.

Να ανοίξετε το αρχείο “DinamiSimiou”.

1) Να μετρήσετε τις αποστάσεις ΣA και ΣB.

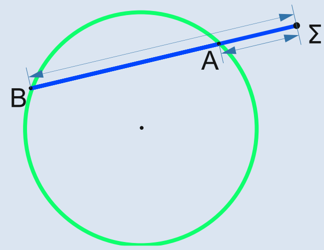
2) Να υπολογίσετε το γινόμενο $(\Sigma A).(\Sigma B)$.

Θέση Σ ως προς τον κύκλο	(ΣA)	(ΣB)	$(\Sigma A).(\Sigma B)$

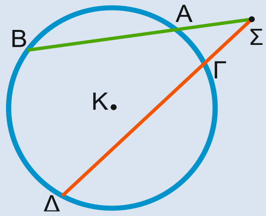
α. Να μετακινήσετε το σημείο B, σε διάφορες θέσεις, και να συμπληρώσετε τον πιο πάνω πίνακα.
β. Να μετακινήσετε το σημείο B ώστε να συμπίπτει με το σημείο A.
γ. Τι παρατηρείτε για το γινόμενο $(\Sigma A) \cdot (\Sigma B)$;

3) Να μετακινήσετε το σημείο Σ εντός του κύκλου και να επαναλάβετε την πιο πάνω διαδικασία.

Μαθαίνω

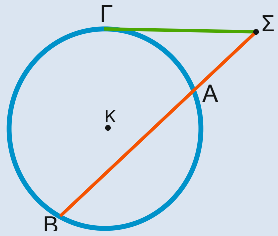


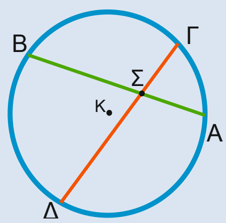
Θεώρημα: Για κάθε ευθεία που περνά από σταθερό σημείο Σ και τέμνει τον κύκλο στα σημεία A και B, το γινόμενο $(\Sigma A)(\Sigma B)$ είναι σταθερό.



Αν ΣAB και $\Sigma\Gamma\Delta$ είναι δύο τυχαίες τέμνουσες του κύκλου, τότε:

$$(\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)(\Sigma\Delta).$$



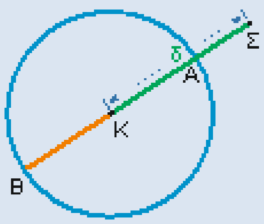


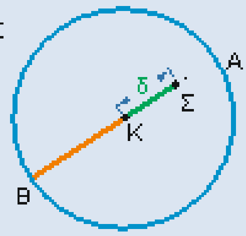
Πόρισμα 1: Αν ΣAB είναι μια τέμνουσα του κύκλου και $\Sigma\Gamma$ είναι ένα εφαπτόμενο τμήμα που άγεται από το Σ, τότε:

$$(\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)^2.$$

Πόρισμα 2: Θεωρούμε κύκλο (K, R) και ένα σταθερό σημείο Σ. Ονομάζουμε δ την απόσταση του σημείου Σ από το κέντρο K, δηλαδή $\delta = \Sigma K$.

α) Αν το σημείο Σ βρίσκεται έξω από τον κύκλο, τότε ισχύει η σχέση $(\Sigma A)(\Sigma B) = \delta^2 - R^2$.





β) Αν το σημείο Σ βρίσκεται μέσα στον κύκλο, τότε ισχύει η σχέση $(\Sigma A)(\Sigma B) = R^2 - \delta^2$.

Δύναμη σημείου ως προς κύκλο ονομάζεται ο σταθερός αριθμός $\delta^2 - R^2$ και συμβολίζεται ως $\Delta_\kappa(\Sigma)$, δηλαδή $\Delta_\kappa(\Sigma) = \delta^2 - R^2$.

Θέση σημείου ως προς κύκλο

Με τη δύναμη σημείου ως προς κύκλο μπορούμε να καθορίσουμε και τη θέση του σημείου σε σχέση με τον κύκλο.

Αν δ είναι η απόσταση ενός τυχαίου σημείου Σ από το κέντρο κύκλου που έχει ακτίνα R, τότε:

Το σημείο Σ βρίσκεται έξω από τον κύκλο, αν ισχύει $\Delta_\kappa(\Sigma) > 0$.

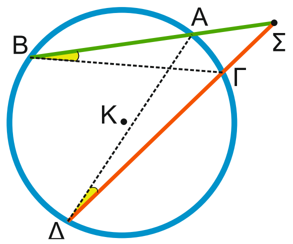
Το σημείο Σ βρίσκεται πάνω στον κύκλο, αν ισχύει $\Delta_\kappa(\Sigma) = 0$.

Το σημείο Σ βρίσκεται μέσα στον κύκλο, αν ισχύει $\Delta_\kappa(\Sigma) < 0$.

Θεώρημα: Αν ΣAB και $\Sigma\Gamma\Delta$ δύο τυχαίες τέμνουσες του κύκλου, τότε ισχύει ότι:

$$(\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)(\Sigma\Delta).$$

Απόδειξη



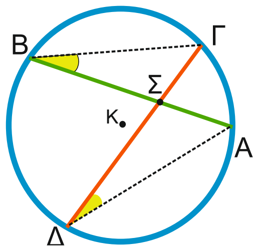
Περίπτωση 1: Αν το σημείο Σ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\Sigma A\Delta$ και $\Sigma\Gamma B$.
$\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}$ (κοινή γωνία)
$\hat{\Delta} = \hat{B}$ (εγγεγραμμένες που αντιστοιχούν στο τόξο $A\Gamma$)

Τα τρίγωνα $\Sigma A\Delta$ και $\Sigma\Gamma B$ έχουν δύο γωνίες αντίστοιχα ίσες. Άρα από το 1ο κριτήριο ομοιότητας προκύπτει ότι τα τρίγωνα είναι όμοια ($\overset{\Delta}{\Sigma A\Delta} \approx \overset{\Delta}{\Sigma\Gamma B}$).

Σε όμοια τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ανάλογες πλευρές.

$$\left.\begin{matrix} \hat{B} = \hat{\Delta} \\ \hat{\Gamma} = \hat{A} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\Sigma\Gamma}{\Sigma A} = \frac{\Sigma B}{\Sigma\Delta} \Leftrightarrow (\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)(\Sigma\Delta)$$



Περίπτωση 2: Το σημείο Σ βρίσκεται μέσα στον κύκλο.

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\Sigma A\Delta$ και $\Sigma\Gamma B$.
$\Delta\hat{\Sigma}A = B\hat{\Sigma}\Gamma$ (κατακορυφήν γωνίες)
$\hat{\Delta} = \hat{B}$ (εγγεγραμμένες που αντιστοιχούν στο τόξο $A\Gamma$)

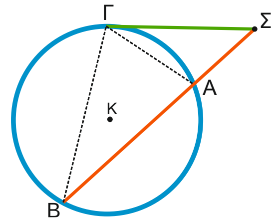
Τα τρίγωνα $\Sigma A\Delta$ και $\Sigma\Gamma B$ έχουν δύο γωνίες αντίστοιχα ίσες. Άρα από το 1ο κριτήριο ομοιότητας προκύπτει ότι τα τρίγωνα είναι όμοια ($\overset{\Delta}{\Sigma A\Delta} \approx \overset{\Delta}{\Sigma\Gamma B}$).

Σε όμοια τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ανάλογες πλευρές.

$$\left.\begin{matrix} \hat{B} = \hat{\Delta} \\ \hat{\Gamma} = \hat{A} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\Sigma\Gamma}{\Sigma A} = \frac{\Sigma B}{\Sigma\Delta} \Leftrightarrow (\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)(\Sigma\Delta)$$

Πόρισμα 1: Αν $ΣΑΒ$ είναι μια τέμνουσα του κύκλου και $ΣΓ$ είναι ένα εφαπτόμενο τμήμα που άγεται από το $Σ$, τότε $(ΣΑ)(ΣΒ) = (ΣΓ)^2$.

Απόδειξη:



Συγκρίνω τα τρίγωνα $ΣΑΓ$ και $ΣΓΒ$.
$\hat{Σ} = \hat{Σ}$ (κοινή γωνία)
$Σ\hat{Γ}Α = \hat{Β}$ (Θεώρημα Χορδής Εφαπτομένης)

Τα τρίγωνα $ΣΑΓ$ και $ΣΓΒ$ έχουν δύο γωνίες αντίστοιχα ίσες. Άρα από το 1ο κριτήριο ομοιότητας προκύπτει ότι τα τρίγωνα είναι όμοια ($\overset{Δ}{ΣΑΓ} \approx \overset{Δ}{ΣΓΒ}$).

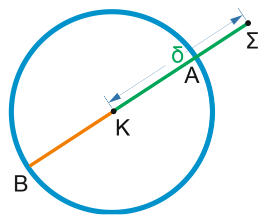
Σε όμοια τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ανάλογες πλευρές.

$$\left.\begin{array}{l} Σ\hat{Α}Γ = Σ\hat{Γ}Β \\ Σ\hat{Γ}Α = Σ\hat{Β}Γ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ΣΓ}{ΣΒ} = \frac{ΣΑ}{ΣΓ} \Leftrightarrow (ΣΑ)(ΣΒ) = (ΣΓ)^2$$

Πόρισμα 2: Θεωρούμε κύκλο $(Κ, R)$ και ένα σταθερό σημείο $Σ$. Ονομάζουμε $δ$ την απόσταση του σημείου $Σ$ από το κέντρο $Κ$, δηλαδή $δ = ΣΚ$.

(α) Αν το σημείο $Σ$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο, τότε ισχύει η σχέση $(ΣΑ)(ΣΒ) = δ^2 - R^2$.
(β) Αν το σημείο $Σ$ βρίσκεται μέσα στον κύκλο, τότε ισχύει η σχέση $(ΣΑ)(ΣΒ) = R^2 - δ^2$.

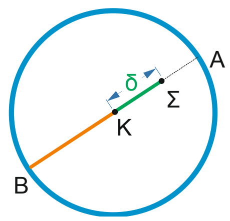
Απόδειξη (α):



Αν το σημείο $Σ$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο, τότε ισχύει $(ΣΑ) = (ΣΚ - ΑΚ)$ και $(ΣΒ) = (ΣΚ + ΚΒ)$.

Αν αντικαταστήσουμε στο $(ΣΑ)(ΣΒ)$, θα έχουμε:
$(ΣΑ)(ΣΒ) = (ΣΚ - ΚΑ)(ΣΚ + ΚΒ) = (δ - R)(δ + R) = δ^2 - R^2$.

Απόδειξη (β):

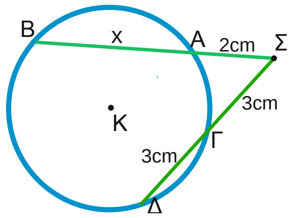


Αν το σημείο $Σ$ βρίσκεται μέσα στον κύκλο, τότε ισχύει $(ΣΑ) = (ΑΚ - ΣΚ)$ και $(ΣΒ) = (ΚΒ + ΚΣ)$.

Αν αντικαταστήσουμε στο $(ΣΑ)(ΣΒ)$, θα έχουμε:
$(ΣΑ)(ΣΒ) = (ΑΚ - ΣΚ)(ΚΒ + ΣΚ) = (R - δ)(R + δ) = R^2 - δ^2$.

Παραδείγματα

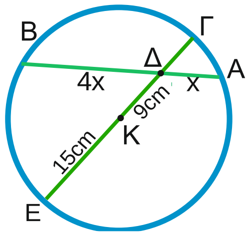
1. Από σημείο Σ εκτός κύκλου φέρνουμε τις τέμνουσες ΣAB και $\Sigma\Gamma\Delta$. Αν $AB = x$, $\Sigma A = 2\ cm$, $\Sigma\Gamma = \Gamma\Delta = 3\ cm$. Να υπολογίσετε το μήκος του AB.
Λύση:



$(\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)(\Sigma\Delta)$

$2 \cdot (x + 2) = 3 \cdot 6 \Rightarrow$
$2x + 4 = 18 \Rightarrow$
$2x = 14 \Rightarrow\ x = 7cm$

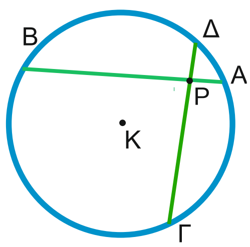
2. Δίνεται κύκλος με ακτίνα $15\ cm$. Φέρνουμε χορδή AB που περνά από σημείο Δ που απέχει
$9\ cm$ από το κέντρο του κύκλου έτσι ώστε $(B\Delta) = 4(A\Delta)$. Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής AB.



Λύση:

<u>Α’ Τρόπος</u>
$(\Delta A)(\Delta B) = R^2 - \delta^2$
$(4x)(x) = 15^2 - 9^2 \Rightarrow$
$4x^2 = 144 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6\ cm$
<u>Β΄ Τρόπος</u>
$\Delta\Gamma = 15 - 9 = 6cm$
$\Delta E = 15 + 9 = 24cm$
$(\Delta A)(\Delta B) = (\Delta\Gamma)(\Delta E)$
$(4x)(x) = 6 \cdot 24 \Rightarrow$
$4x^2 = 144 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6cm$

3. Θεωρούμε κύκλο (O, R) και τις χορδές του $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται στο P. Αν ισχύει η σχέση $\frac{PA}{PB} = \frac{P\Delta}{P\Gamma}$, να αποδείξετε ότι οι χορδές $AB, \Gamma\Delta$ είναι ίσες.
Λύση:



$(PA)(PB) = (P\Gamma)(P\Delta) \Rightarrow \frac{PA}{P\Delta} = \frac{P\Gamma}{PB}$ (1)

Δεδομένο $\frac{PA}{PB} = \frac{P\Delta}{P\Gamma} \Rightarrow \frac{PA}{P\Delta} = \frac{PB}{P\Gamma}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) $\frac{P\Gamma}{PB} = \frac{PB}{P\Gamma} \Rightarrow PB^2 = P\Gamma^2 \Longrightarrow PB = P\Gamma$

$(PA)(PB) = (P\Gamma)(P\Delta) \Longrightarrow (PA)(\cancel{P\Gamma}) = (\cancel{P\Gamma})(P\Delta) \Longrightarrow PA = P\Delta$

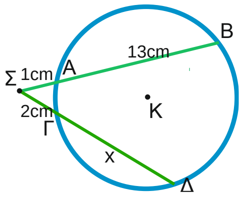
$AB = PA + PB = P\Delta + P\Gamma = \Gamma\Delta$. Άρα οι χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι ίσες.

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε την τιμή του αγνώστου στις πιο κάτω περιπτώσεις:

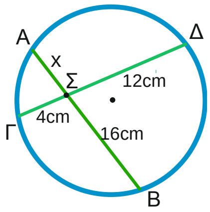
<table>
<tr>
<td>

α) $x =;$



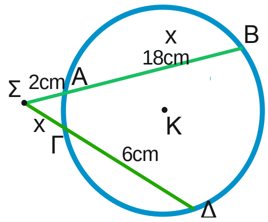
</td>
<td>

β) $x =;$



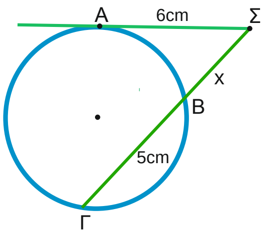
</td>
<td>

γ) $x =;$

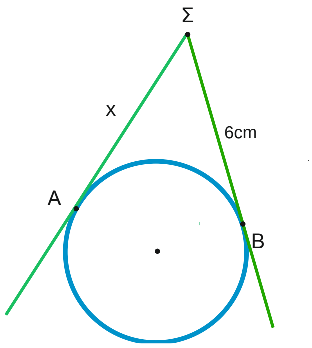


</td>
</tr>
<tr>
<td>

δ) $x =;$



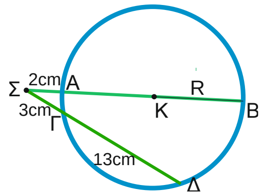
</td>
<td>



ε) $x =;$

</td>
<td>

στ) $ακτίνα\ R =;$



</td>
</tr>
</table>

2. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Ο κύκλος, ο οποίος διέρχεται από το σημείο $Α$ και τα μέσα $Μ, Ν$ των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα, εφάπτεται της $ΒΓ$ στο σημείο $Δ$. Να αποδείξετε ότι
   (α) Το σημείο τομής των $ΜΝ$ και $ΑΔ$ είναι μέσο της $ΑΔ$
   (β) $(ΑΔ)^2 = (ΔΒ) \cdot (ΔΓ)$.

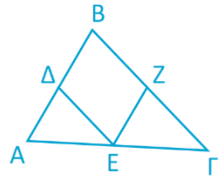
3. Πάνω στην προέκταση της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων παίρνουμε ένα σημείο $Σ$. Από το $Σ$ φέρουμε εφαπτόμενα τμήματα $ΣΑ$ και $ΣΒ$ προς τους δύο κύκλους. Να αποδείξετε ότι $ΣΑ = ΣΒ$.

4. Πάνω στη διάμετρο $ΝΛ$ κύκλου παίρνουμε δύο σημεία $Ρ$ και $Σ$ που ισαπέχουν από το κέντρο $Κ$. Από σημείο $Μ$ της περιφέρειας φέρουμε τις τέμνουσες $ΜΡΑ$ και $ΜΣΒ$. Να δείξετε ότι $\frac{ΜΡ}{ΜΣ} = \frac{ΣΒ}{ΡΑ}$.

5. Δύο κύκλοι $(Κ, R)$ και $(Λ, ρ)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο $Τ$. Από ένα τυχαίο σημείο $Σ$ της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των δύο κύκλων $Κ$ και $Λ$ φέρουμε τέμνουσες $ΣΑΒ$ και $ΣΓΔ$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $(ΣΑ)(ΣΒ) = (ΣΓ)(ΣΔ)$.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ δίνονται: $ΔΕ \parallel ΒΓ$ και $ΕΖ \parallel ΑΒ$. Αν $ΑΒ = 15\ m$, $ΑΔ = 10\ m$ και $ΒΓ = 20\ m$, να υπολογίσετε το μήκος του $ΒΖ$ (το σχέδιο δεν είναι υπό κλίμακα).



2. Στη διαγώνιο $ΒΔ$ ενός παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ παίρνουμε σημείο $Ρ$ ώστε το $ΒΡ$ να είναι τετραπλάσιο του $ΔΡ$. Αν η ευθεία $ΓΡ$ τέμνει την $ΑΔ$ στο σημείο $Ε$, να δείξετε ότι $(ΕΡ) = \frac{1}{5}(ΕΓ)$.

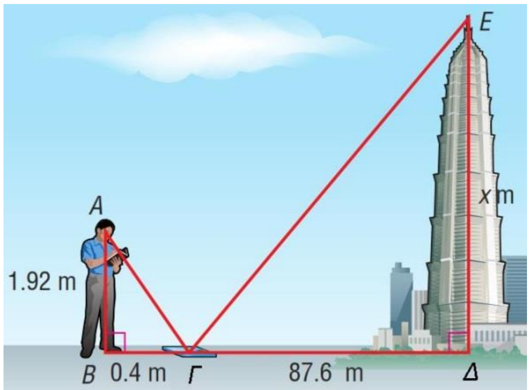
3. Αν οι γωνίες $Α$ και $Δ$ τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ είναι ορθές και οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα, να αποδείξετε ότι $(ΑΔ)^2 = (ΔΓ)(ΑΒ)$.

4. Δίνεται τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν η $ΑΚ$ είναι η κάθετη από το $Α$ στη $ΒΔ$ και επιπλέον $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{ΓΔ}{ΚΒ}$, να δείξετε ότι η $ΑΓ$ είναι διάμετρος.

5. Ένας κύκλος $(Ο, ρ)$ διέρχεται από το Κέντρο κύκλου $(Κ, R)$. Αν η εφαπτομένη του κύκλου $(Κ, R)$ σε ένα σημείο του $Μ$ τέμνει τον κύκλο $(Ο, ρ)$ σε σημεία $Α$ και $Β$, να δείξετε ότι το γινόμενο $(ΚΑ) \cdot (ΚΒ)$ είναι σταθερό.

6. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι κορυφές τριγώνου όμοιου με το $ΑΒΓ$ και να βρείτε το λόγο ομοιότητας των δύο τριγώνων.

7. Ο Λίνος παρατηρεί μέσα από έναν καθρέφτη την κορυφή ενός κτηρίου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε το ύψος του κτηρίου.



8. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Από την κορυφή $Α$ φέρουμε ευθεία που τέμνει τη $ΔΓ$ στο $Ζ$ και την προέκταση της $ΒΓ$ στο $Ε$. Να δείξετε ότι:
   (α) $(ΖΑ)(ΖΓ) = (ΖΔ)(ΖΕ)$
   (β) $(ΑΕ)(ΑΔ) = (ΒΕ)(ΑΖ)$.

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Από τυχαίο σημείο $Δ$ της $ΒΓ$ φέρουμε τη $ΔΕ$ κάθετη στην $ΑΒ$ και τη $ΔΖ$ κάθετη στην $ΑΓ$. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $ΔΕΒ$ και $ΔΖΓ$ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία των πλευρών τους.

10. Οι διαγώνιοι $ΑΓ$ και $ΒΔ$ του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ συναντιούνται στο $Ε$. Αν $ΑΒ = 4\ cm$, $ΒΔ = 8\ cm$ και $ΓΔ = 12\ cm$, να υπολογίσετε το μήκος της $ΒΕ$.

11. Από σημείο $Μ$ που βρίσκεται στην προέκταση της διαμέτρου $ΒΑ$ κύκλου $(Κ, R)$ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα $ΜΓ$. Η κάθετος πάνω στη $ΜΑ$ στο σημείο $Μ$ τέμνει την $ΑΓ$ στο $Ε$. Να δείξετε ότι $(ΜΑ)^2 - (ΜΓ)^2 = (ΑΓ)(ΑΕ)$.

12. Από σημείο $Μ$ που βρίσκεται έξω από κύκλο φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα $ΜΑ$ και τέμνουσα $ΜΒΓ$. Να αποδείξετε ότι $(ΜΓ)(ΑΒ)^2 = (ΜΒ)(ΑΓ)^2$.

13. Δίνεται κύκλος $(Ο, R)$ και η χορδή του $ΑΒ$. Φέρουμε τις εφαπτόμενες $Αx$, $Βy$ στα σημεία $Α$ και $Β$. Από ένα σημείο $Γ$ του μικρότερου τόξου φέρουμε παράλληλες προς την $Αx$ και $Βy$ που τέμνουν την $ΑΒ$ στα $Δ$ και $Ε$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:
(α) Τα τρίγωνα $ΑΓΔ$ και $ΓΕΒ$ είναι όμοια (β) $(ΓΕ)^2 = (ΑΔ)(ΒΕ)$.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να αποδείξετε τα πιο κάτω:
   (α) Ο λόγος των ομόλογων υψών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους.
   (β) Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους.
   (γ) Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

2. Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$. Από το $Γ$ φέρουμε τη $ΓΕ \perp ΒΔ$ ($Ε$ σημείο της $ΒΔ$). Η προέκταση της $ΓΕ$ τέμνει την $ΑΒ$ στο $Η$ και την προέκταση της $ΔΑ$ στο $Ζ$. Να αποδείξετε ότι:
   (α) $\frac{ΒΕ}{ΕΗ} = \frac{ΕΖ}{ΕΔ}$ (β) $(ΓΕ)^2 = (ΕΗ)(ΕΖ)$

3. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ = 2α$ και $ΒΓ = α$. Από το $Α$ φέρουμε κάθετη στη διαγώνιο $ΒΔ$ που τέμνει τη $ΔΓ$ στο $Ε$.
   Να δείξετε ότι $(ΔΓ) = 4(ΔΕ)$.

4. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η διχοτόμος $ΑΔ$ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Τ, έτσι ώστε $(ΑΔ)^2 = (ΔΒ) \cdot (ΔΓ)$. Να αποδείξετε ότι $(ΑΤ)^2 = 2(ΤΓ)^2$.

5. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η διάμεσος $Α$Μ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Τ, έτσι ώστε $β^2 + γ^2 = 2α^2$. Να αποδείξετε ότι $6(ΜΤ) = α\sqrt{3}$.

6. Οι διάμεσοι $ΒΔ$ και $ΓΕ$ ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ τέμνονται στο $Ο$. Να αποδείξετε ότι:
   (α) $(ΒΟ) = 2 \cdot (ΔΟ)$ (β) $\frac{ΓΕ}{ΓΟ} = \frac{3}{2}$

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($Α = 1\text{L}$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $(Ο, R)$. Κατασκευάζουμε το ύψος του τριγώνου $ΑΔ$. Ευθεία που διέρχεται από το $Γ$ τέμνει το ύψος $ΑΔ$ σε ένα σημείο $Τ$ και τον κύκλο στο σημείο $Ρ$. Να αποδείξετε ότι $(ΓΤ) \cdot (ΓΡ) = (ΓΑ)^2$.

8. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Κατασκευάζουμε τη διχοτόμο $ΑΔ$, και τη διάμεσο $ΑΜ$, έτσι ώστε ο κύκλος $(Κ)$ να είναι περιγεγραμμένος του τριγώνου $ΑΔΜ$. Αν $Ε, Ζ$ είναι τα σημεία τομής των $ΑΒ$ και $ΑΓ$ με τον κύκλο$(Κ)$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $(ΒΕ) = (ΓΖ)$.

9. Θεωρούμε κύκλο $(Ο, R)$ και τις χορδές του $ΑΒ$, $ΓΔ$ που τέμνονται στο $Ρ$. Αν ισχύει ότι $(ΡΑ) \cdot (ΡΔ) = (ΡΒ) \cdot (ΡΓ)$, να αποδείξετε ότι οι χορδές $ΑΒ$, $ΓΔ$ είναι ίσες.

10. Να αποδείξετε ότι η προέκταση της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων διχοτομεί κάθε κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους.

Ενότητα

8

Στατιστική

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να αποδεικνύουμε βασικές ιδιότητες της Μέσης Τιμής και να τις χρησιμοποιούμε σε προβλήματα.
- Να υπολογίζουμε τον σταθμισμένο Μέσο Όρο.
- Να υπολογίζουμε και να ερμηνεύουμε Μέτρα Διασποράς.

Έχουμε μάθει ...

- Να ορίζουμε τη μεταβλητή και να τη διακρίνουμε σε ποιοτική ή ποσοτική.
- Να παρουσιάζουμε και να παριστούμε με κατάλληλα διαγράμματα, στατιστικά δεδομένα.
- Να ορίζουμε και να υπολογίζουμε τα τρία βασικά μέτρα θέσης:
  - ✓ Μέση τιμή
  - ✓ Διάμεσος
  - ✓ Επικρατούσα τιμή.

Μέτρα Θέσης και Διασποράς

Διερεύνηση (1)

Οι βαθμοί του Αντρέα σε 4 διαγωνίσματα στα Μαθηματικά ήταν $15, 18, 18, 17$. Για τα ίδια διαγωνίσματα, ο Βασίλης είχε πάρει 2 μονάδες περισσότερες **σε κάθε** διαγώνισμα από τον Αντρέα, ο Γιάννης είχε πάρει 4 μονάδες λιγότερες από τον Αντρέα σε κάθε διαγώνισμα, ενώ ο Δημήτρης είχε πάρει σε κάθε διαγώνισμα μία μονάδα περισσότερη από το μισό των βαθμών του Αντρέα.

(α) Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών του κάθε παιδιού.
(β) Να επεξηγήσετε πως εργαστήκατε και να αναφέρετε πώς συνδέονται οι μέσοι όροι της βαθμολογίας των παιδιών.

Διερεύνηση (2)

Ένας καθηγητής θέλει να συγκρίνει τα δύο τμήματά του A' και B' στα οποία διδάσκει Μαθηματικά. Όταν υπολόγισε τα δύο βασικά μέτρα θέσης (μέσο όρο και διάμεσο), δεν ήταν σε θέση να διακρίνει ποιο τμήμα ήταν καλύτερο. Στη συνέχεια, όμως, μπόρεσε παρατηρώντας τους βαθμούς των δύο τμημάτων να πάρει κάποια απόφαση ως προς τα τμήματά του.

Τμήμα A'	**13**	**13**	**14**	**15**	**15**	**15**	**15**	**16**	**16**	**18**
Τμήμα B'	**10**	**13**	**14**	**14**	**15**	**15**	**15**	**16**	**18**	**20**

(α) Μπορεί, κατά τη γνώμη σας, η μέση τιμή από μόνη της να δώσει σαφή εικόνα για την κατανομή των βαθμών;
(β) Ποια παρατήρηση πιθανόν να έκανε ο καθηγητής, για να μπορέσει να πάρει απόφαση ως προς την εικόνα των τμημάτων του;

Μαθαίνω

- Αν $x_1, x_2, , \ldots, x_\nu$ είναι ν −τιμές μιας μεταβλητής X με μέση τιμή $\bar{x}$, τότε η μέση τιμή $\bar{y}$ των παρατηρήσεων $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ μιας μεταβλητής Y, για τις οποίες ισχύει $y_i = a x_i + \beta, i = 1,2, \ldots, \nu$, και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι $\boldsymbol{\bar{y} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta}$.

  Για παράδειγμα, αν ο μέσος όρος του μηνιαίου μισθού των υπαλλήλων ενός εργοστασίου πέρυσι ήταν €850 και φέτος σε κάθε υπάλληλο γίνει αύξηση €50, τότε ο νέος μέσος όρος των μισθών θα είναι $€850 + €50 = €900$.

- Αν στις τιμές $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$ δίνεται διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους **συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας)** $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$, τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον **σταθμισμένο μέσο (weighted average)** που δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_\nu x_\nu}{w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu}.$$

  Για παράδειγμα, με τον νέο θεσμό των τετραμήνων στα Λύκεια ο βαθμός σε ένα εξεταζόμενο μάθημα στο τέλος του χρόνου συνυπολογίζεται από τους βαθμούς των δύο τετραμήνων με βαρύτητα 35% στο κάθε τετράμηνο και 30% στην τελική εξέταση.
  Αν ένας μαθητής είχε στα Μαθηματικά 13 στο Α' τετράμηνο, 13 στο Β' τετράμηνο και στην τελική εξέταση ο βαθμός του ήταν 2, τότε ο τελικός του βαθμός θα είναι

  $\bar{x} = \frac{0,35 \times 13 + 0,35 \times 13 + 0,30 \times 2}{0,35 + 0,35 + 0,3} = 9,70$, *ενώ ο απλός μέσος όρος (χωρίς βαρύτητα) θα ήταν* $\bar{x} = \frac{13+13+2}{3} = 9,33$.

  <u>Παρατήρηση</u>
  Ο απλός μέσος όρος είναι ειδική περίπτωση του σταθμισμένου μέσου με ίσα βάρη $w_1 = w_2 = w_3 \ldots = w_\nu = 1$.

- **Μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας** είναι τα μέτρα που εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής, γύρω από τα κεντρικά μέτρα θέσης.

- Το πιο απλό μέτρο διασποράς είναι το **εύρος των τιμών (Range).** Συμβολίζεται με R και υπολογίζεται πολύ απλά ως:
  "εύρος" $\boldsymbol{= R = x_{max} - x_{min}}$
  (μεγαλύτερη παρατήρηση−μικρότερη παρατήρηση).

- **Η διακύμανση ή διασπορά** ν μεταβλητών $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$ ορίζεται ως ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των μεταβλητών από τον μέσο όρο. Συμβολίζεται με s^2 και ισχύει:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_\nu - \bar{x})^2}{\nu}$$

- Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς λέγεται **τυπική απόκλιση (standard deviation)** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{s}$. Η Τυπική Απόκλιση *πλεονεκτεί* έναντι της διασποράς, γιατί εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης με την οποία εκφράζονται και οι παρατηρήσεις. Η τυπική αποκλιση δίνεται από τον τύπο:

$$s = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_\nu-\bar{x})^2}{\nu}}$$

- Το μέτρο που μας βοηθάει στη σύγκριση ομάδων τιμών (με ίδιες ή διαφορετικές μονάδες μέτρησης) που ενδεχομένως να έχουν σημαντικά διαφορετικές τιμές, λέγεται **συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας** (CV) και ισχύει:

$$\boldsymbol{CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}}}.$$

- Ο συντελεστής μεταβλητότητας **είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης** και εκφράζεται συνήθως ως ποσοστό.
  Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι **μικρότερος από $\boldsymbol{20\%}$,** λέγεται ότι τα δεδομένα παρουσιάζουν **ομοιογένεια.**

Παραδείγματα

1. Αν $x_1, x_2, , \ldots, x_\nu$ είναι ν τιμές μιας μεταβλητής X με μέση τιμή $\bar{x}$, να **αποδείξετε** ότι η μέση τιμή $\bar{y}$ των παρατηρήσεων $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ μιας μεταβλητής Y, για τις οποίες ισχύει $y_i = \alpha x_i + \beta, i = 1,2, \ldots, \nu$, και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι $\boldsymbol{\bar{y} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta}$.

   Λύση:

   $\bar{y} = \frac{y_1+y_2+\ldots+y_\nu}{\nu} = \frac{(\alpha x_1+\beta)+(\alpha x_2+\beta)+\ldots+(\alpha x_\nu+\beta)}{\nu} =$

   $= \frac{\alpha(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)+(\beta+\beta+\ldots+\beta)}{\nu}$

   $= \alpha \cdot \frac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu} + \frac{\nu\beta}{\nu} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta.$

   Επομένως $\bar{y} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta$.

2. Στον πιο κάτω πίνακα υπάρχουν τρεις μεταβλητές X, Y και Z.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Z	507	607	707	807	907	1007	1107	1207	1307

   (α) Να βρείτε τη μέση τιμή της μεταβλητής X.
   (β) Να εκφράσετε τη μεταβλητή Y και Z συναρτήσει της μεταβλητής X.
   (γ) Να βρείτε τη μέση τιμή της μεταβλητής Y και της μεταβλητής Z.

(α) $\bar{x} = \frac{1+2+3+\ldots+9}{9} = \frac{45}{9} = 5.$

(β) $Y = 10X$ και $Z = 100X + 407.$

(γ) $\bar{y} = 10 \cdot \bar{x} = 10 \cdot 5 = 50,\ \bar{z} = 100 \cdot \bar{x} + 407 = 100 \cdot 5 + 407 = 907.$

3. Να βρείτε τη διακύμανση και την Τυπική Απόκλιση των δεδομένων του πίνακα.

Λύση:
Βρίσκουμε πρώτα τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων:

$Αριθμός\ Παιδιών\ x_i$	$Οικογένειες\ f_i$
0	5
1	10
2	7
3	4
4	3
5	2
6	1
$ΣΥΝΟΛΟ$	**32**

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 5 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1}{32} = \frac{64}{32} = 2$$

Η διακύμανση s^2, ως ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των μεταβλητών από τον μέσο όρο, υπολογίζεται:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_\nu - \bar{x})^2}{\nu}$$

$$s^2 = \frac{1}{32} \cdot [\,(0-2)^2 \cdot 5 + (1-2)^2 \cdot 10 + (2-2)^2 \cdot 7 + (3-2)^2 \cdot 4 + (4-2)^2 \cdot 3 + (5-2)^2 \cdot 4 + (6-2)^2 \cdot 1] =$$

$$\frac{20 + 10 + 0 + 4 + 12 + 16 + 16}{32} = \frac{78}{32} \approx 2{,}44$$

Η Τυπική Απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{(2{,}44)^2} \approx 1{,}56.$
Τα πιο πάνω αποτελέσματα μπορούν να γίνουν και με τη βοήθεια ενός πίνακα.

$Αριθμός\ Παιδιών\ x_i$	$Οικογένειες\ f_i$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
0	5	$(0-2)^2 \cdot 5$
1	10	$(1-2)^2 \cdot 10$
2	7	$(2-2)^2 \cdot 7$
3	4	$(3-2)^2 \cdot 4$
4	3	$(4-2)^2 \cdot 3$
5	2	$(5-2)^2 \cdot 2$
6	1	$(6-2)^2 \cdot 1$
$ΣΥΝΟΛΟ$	**32**	**80**

Άρα, $s^2 = \frac{78}{32} \approx 2{,}44$ και $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{(2{,}44)^2} \approx 1{,}56.$

4. Ο μέσος μισθός των υπαλλήλων μιας εταιρείας Α είναι $\overline{x_A} = €2200$ και η αντίστοιχη Τυπική Απόκλιση είναι $s_A = €270$, ενώ ο μέσος μισθός μιας εταιρείας B είναι $\overline{x_B} = €1100$ και η αντίστοιχη Τυπική Απόκλιση είναι $s_B = €220$. Σε ποια από τις δύο εταιρείες υπάρχει ομοιογένεια μισθών;

   Λύση:
   Υπολογίζουμε τον συντελεστή μεταβλητότητας των μισθών για κάθε εταιρεία $CV_A = \frac{s_A}{\overline{x_A}} = \frac{270}{2200} = 12{,}2\%$,$CV_B = \frac{s_B}{\overline{x_B}} = \frac{220}{1100} = 20\%$.
   Παρατηρούμε ότι αν και η Τυπική Απόκλιση μισθών στην εταιρεία A είναι μεγαλύτερη από την Τυπική Απόκλιση μισθών στην εταιρεία B, ο συντελεστής μεταβλητότητας στην εταιρεία A είναι μικρότερος. Αυτό μάς δείχνει ότι στην εταιρεία A υπάρχει μεγαλύτερη ομοιογένεια μισθών από ό,τι στην εταιρεία B.

Δραστηριότητες

1. Να διακρίνετε ποια από τα ακόλουθα είναι μέτρα θέσης ή μέτρα διασποράς: διάμεσος, εύρος, διακύμανση, μέση τιμή, επικρατούσα τιμή, τυπική απόκλιση και σταθμισμένος μέσος.

2. Η βαθμολογία 16 μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν: $8, 15, 13, 20, 9, 13, 17, 19, 20, 9, 10, 10, 15, 13, 14, 17$. Να υπολογίσετε:
   (α) Τα τρία βασικά μέτρα θέσης (μέση τιμή, διάμεσο, επικρατούσα τιμή)
   (β) Το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.

3. Αν η τιμή 12 έχει βαρύτητα $0{,}2$, η τιμή 14 έχει βαρύτητα $0{,}3$ και η τιμή 17 έχει βαρύτητα $0{,}5$, να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πιο πάνω τιμών.

4. Η μέση επίδοση στο μάθημα των Μαθηματικών 17 αγοριών και 13 κοριτσιών μιας τάξης είναι 16,8. Η μέση επίδοση των κοριτσιών είναι 15,6. Να βρείτε τη μέση επίδοση των αγοριών.

5. Ένας φοιτητής πήρε σε 5 διαφορετικά μαθήματα για το πρώτο εξάμηνο τους βαθμούς $7, 8$,$9, 10$ και 6. Ποια θα είναι η τελική του βαθμολογία, αν τα μαθήματα έχουν βαρύτητα ανάλογη με τις περιόδους διδασκαλίας του κάθε μαθήματος, που είναι αντίστοιχα $2, 3, 1, 4$ και 5;

6. Τα μήκη 5 διαφορετικών τιμών x σε mm είναι: $210, 220, 230, 240$ $και$ 250
   (α) Να βρείτε τη μέση τιμή των μηκών x.
   (β) Να βρείτε τη μέση τιμή των μηκών y, z, ω, αν $y = \frac{x}{10}$, $z = x - 200$ και $\omega = \frac{x-200}{10}$.

7. Η τυπική απόκλιση ενός δείγματος με ν παρατηρήσεις είναι ίση με μηδέν. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τις παρατηρήσεις;

8. Στις τρεις πιο κάτω λίστες δεδομένων ο Μέσος Όρος είναι ο αριθμός 50. Χωρίς να κάνετε τις σχετικές πράξεις, να αναφέρετε σε ποια από τις τρεις λίστες υπάρχει η μικρότερη και σε ποια η μεγαλύτερη διασπορά των παρατηρήσεων, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

$Λίστα 1$	0	20	40	50	60	80	100
$Λίστα 2$	0	48	49	50	51	52	100
$Λίστα 3$	0	1	2	50	98	99	100

9. Η μέση τιμή 6 διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι 7,5. Να υπολογίσετε την τυπική τους απόκλιση.

10. Η μέση τιμή ηλικίας των υπαλλήλων μιας εταιρείας είναι 32 χρόνια. Ποια θα είναι η μέση τιμή ηλικίας των ίδιων υπαλλήλων ύστερα από τρία χρόνια;

11. Για τον τελικό βαθμό, στο μάθημα της Στατιστικής, ένας φοιτητής βαθμολογείται με 10% για τη συμμετοχή του στην τάξη, με 40% για ενδιάμεση εξέταση και με 50% για την τελική εξέταση. Ποιος θα είναι ο τελικός βαθμός ενός φοιτητή που βαθμολογήθηκε με 87 από τα 100 για τη συμμετοχή του στην τάξη, με 72 από τα 100 στην ενδιάμεση εξέταση και με 47 από τα 100 στην τελική εξέταση;

12. Αν σε ένα δείγμα ο μέσος όρος είναι $\bar{x} = 15$ και ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι $CV = 20\%$, να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση του δείγματος.

13. Αν στον διπλανό πίνακα η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 7{,}5$,
   (α) να συμπληρώσετε τον πίνακα και να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των τιμών.
   (β) να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας.

$Τιμές\ x_i$	$Συχνότητα\ f_i$
5	3
6	5
7	12
8	9
9	…
10	3
$ΣΥΝΟΛΟ$	**32**

14. Από ένα δείγμα 30 μαθητών της Β΄ Γυμνασίου ο μέσος όρος του βάρους τους ήταν $\overline{x_1} = 48Kg$ με τυπική απόκλιση $s_1 = 7Kg$, ενώ από ένα δεύτερο δείγμα 40 μαθητών Γ΄ Λυκείου ο μέσος όρος του βάρους τους ήταν $\overline{x_2} = 76Kg$ με τυπική απόκλιση $s_2 = 7Kg$. Να εξετάσετε κατά πόσον τα δύο δείγματα έχουν τον ίδιο ή διαφορετικό συντελεστή μεταβλητότητας.

15. Σε ένα διαγώνισμα η μέση τιμή της βαθμολογίας για το τμήμα A' ήταν $16{,}5$ και η τυπική απόκλιση $3{,}2$.
   (α) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβλητότητας.
   (β) Να συγκρίνετε την ομοιογένεια των βαθμών του τμήματος A' με τους αντίστοιχους βαθμούς του τμήματος B' που είχε τον ίδιο μέσο όρο, αλλά η τυπική απόκλισή του ήταν 1,5.

16. Αν σε μία τάξη, ο μέσος όρος της βαθμολογίας ν_1αγοριών είναι $\bar{x}$ και ο μέσος όρος της βαθμολογίας ν_2κοριτσιών είναι $\bar{y}$,
   (α) να αποδείξετε ότι ο μέσος όρος της βαθμολογίας όλων των παιδιών της τάξης είναι $\frac{\nu_1 \cdot \bar{x} + \nu_2 \cdot \bar{y}}{\nu_1 + \nu_2}$
   (β) Να βρείτε το μέσο όρο της βαθμολογίας μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα στο μάθημα των Μαθηματικών, αν τα 11 κορίτσια είχαν μέσο όρο 16,7 και τα 9 αγόρια είχαν μέσο όρο 13,7.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις.

   (α) Ο μέσος όρος και η διάμεσος των τιμών: 1,2,3,4,5,6,7 συμπίπτουν.

   (β) Η τυπική απόκλιση σε ένα δείγμα με ν παρατηρήσεις αλλάζει όταν σε κάθε τιμή προσθέσουμε 2 μονάδες.

   (γ) Αν $\bar{x} = 4$ και $C.V = 50\%$, τότε η τυπική απόκλιση είναι 2.

   (δ) Η διάμεσος τιμή 11 διαφορετικών τιμών αλλάζει, αν αφαιρέσουμε την μεγαλύτερη και την μικρότερη τιμή.

   (ε) Αν η κάθε τιμή μιας μεταβλητής X πολλαπλασιασθεί επί 5, τότε και η νέα μέση τιμή θα πολλαπλασιασθεί επί 5.

   (στ) Αν η κάθε τιμή μιας μεταβλητής X πολλαπλασιασθεί επί 5, τότε και η νέα διασπορά θα πολλαπλασιασθεί επί 5.

2. Αν η μέση τιμή σε ένα δείγμα των παρατηρήσεων $5, 8, 9, \alpha$ και 16 είναι 10, να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση στο δείγμα.

3. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση σε εξέταση ενός μαθήματος σε Παγκύπριες εξετάσεις είναι $10{,}5$ και $3{,}8$ αντίστοιχα. Έχει αποφασιστεί να δοθούν σε όλους τους μαθητές 2 επιπλέον μονάδες, γιατί είχε δοθεί μία άσκηση με λανθασμένα δεδομένα, που δεν μπορούσε να λυθεί και είχαν βαθμολογηθεί όλοι με μηδέν. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η νέα Μέση Τιμή θα είναι 12,5 και η Τυπική Απόκλιση στο μάθημα θα παραμείνει η ίδια. Να εξετάσετε κατά πόσο, είναι ορθός ο ισχυρισμός του μαθητή.

4. Ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα $80Km/h$ από την πόλη A στην πόλη B και επιστρέφει από την πόλη B στην πόλη A με σταθερή ταχύτητα $120Km/h$. Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου για όλη τη διαδρομή.

5. Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X και οι αντίστοιχες συχνότητές τους. Από τον πίνακα απουσιάζουν η 2η και η 3η συχνότητα.

$Τιμές\ x_i$	$Συχνότητα\ f_i$
7	16
8	;
9	;
10	26
$\boldsymbol{ΣΥΝΟΛΟ}$	**100**

   (α) Να προσδιορίσετε τις τιμές των συχνοτήτων που απουσιάζουν, αν $\bar{x} = 8{,}63$

   (β) Να υπολογίσετε την Τυπική Απόκλιση.

6. Σε ένα Λύκειο υπάρχουν 500 μαθητές. Η A' τάξη του Λυκείου έχει 200 μαθητές με Μέσο Όρο ηλικίας 15,7 χρόνια, ενώ η B' τάξη έχει 180 μαθητές με Μέσο Όρο ηλικίας 16,9 χρόνια. Οι υπόλοιποι μαθητές της Γ΄ Λυκείου έχουν Μέσο Όρο ηλικίας 17,7 χρόνια. Να υπολογίσετε τον Μέσο Όρο ηλικίας όλων των μαθητών του σχολείου.

7. Αν $x_1, x_2, , \dots, x_\nu$ είναι ν-παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$ και Τυπική Απόκλιση s_x και $\kappa > 0$ είναι μια σταθερά, να βρείτε τον Μέσο Όρο και την Τυπική Απόκλιση των παρατηρήσεων $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ συναρτήσει των s_x και κ και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα, όταν:

   (α) $y_1 = x_1 + \kappa, y_2 = x_2 + \kappa, \dots \ , y_\nu = x_\nu + \kappa$
   (β) $y_1 = x_1 - \kappa, y_2 = x_2 - \kappa, \dots \ , y_\nu = x_\nu - \kappa$
   (γ) $y_1 = x_1 \cdot \kappa, \ y_2 = x_2 \cdot \kappa, \dots \ , \ y_\nu = x_\nu \cdot \kappa$

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να αποδείξετε ότι η Τυπική Απόκλιση πέντε διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι $\sqrt{2}$.

2. Η μέση τιμή 22 παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X είναι 64. Διαπιστώθηκε ότι οι μισές παρατηρήσεις είχαν υπερεκτιμηθεί κατά 6 μονάδες η καθεμιά και ότι δέκα από τις υπόλοιπες παρατηρήσεις είχαν υποεκτιμηθεί κατά 11 μονάδες η καθεμιά. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων με τα ορθά δεδομένα.

3. Σε ένα δείγμα 5 παρατηρήσεων το άθροισμα των 5 τιμών είναι 30 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 200. Να υπολογίσετε τη Μέση Τιμή και την Τυπική Απόκλιση του δείγματος.

4. Να αποδείξετε ο τύπος $s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_\nu-\bar{x})^2}{\nu}$, που δίνει τη Διασπορά για ν τιμές σε ένα δείγμα μπορεί να γραφεί και ως $s^2 = \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_\nu^2}{\nu} - (\bar{x})^2$.

5. Ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X έχει μέση τιμή $\bar{x} = 15$ και διασπορά $s_x^2 = 16$. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά ενός δείγματος μιας άλλης μεταβλητής Y , αν σε κάθε τιμή της y_i ισχύει $y_i = 3x_i + 10$, $i = 1,2,\ldots,\nu$.

6. Η μέση τιμή 5 τιμών είναι 4 και η διασπορά τους είναι 10.
   Αν για τις 4 τιμές ισχύει $(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+(x_4-\bar{x})^2 = 14$, να υπολογίσετε την 5η τιμή x_5.

7. Να ανοίξετε το αρχείο «ALyk_En_11_Ypologistis Stat.ggb». Να συμπληρώσετε τους βαθμούς για κάθε τμήμα στην κατάλληλη θέση (Δεδομένα (x)) και στη συνέχεια να πατήσετε το κουμπί (Υπολογισμός μέτρων), για να πάρετε όλα τα μέτρα θέσης και διασποράς. Να συγκρίνετε τα δύο τμήματα.

Τμήμα A'	**13**	**13**	**14**	**15**	**15**	**15**	**15**	**16**	**16**	**18**
Τμήμα B'	**10**	**13**	**14**	**14**	**15**	**15**	**15**	**16**	**18**	**20**

Συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$
Εξισώσεις - Ανισώσεις

Δραστηριότητες

Σελίδα 20

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $\alpha = 2,\ \alpha = -\frac{1}{4}$ (β) $(-5, 50)$, $(-5, -\frac{25}{4})$.
2.	$\kappa > 2$
3.	$\lambda = 5$
5.	(α) $y = x^2 - 2$. (β) $y = (x+1)^2 + 2$. (γ) $y = (x+3)^2 - 1$. (δ) $y = (x - \frac{1}{2})^2$.
6.	$g(x) = x^2 + 2$, $h(x) = x^2 - 1$
7.	(α) Άξονας συμμετρίας: $x = 1$, Κορυφή: $(1,3)$ (β) Άξονας συμμετρίας: $x = -1$, Κορυφή: $(-1,9)$ (γ) Άξονας συμμετρίας: $x = 2$, Κορυφή: $(2,-1)$
8.	(α) $y_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = 5$ (β) $y_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma} = 4$
9.	(α) $\lambda = -3$ (β) $\lambda = -2$
10.	$\alpha = 5$, $\beta = 5$
11.	(α) Μετατόπιση 4 μονάδων προς τα πάνω. (β) Μετατόπιση 1 μον. δεξιά και 3 μον. προς τα πάνω. (γ) Μετατόπιση 3 μον. δεξιά και 9 μον. προς τα πάνω.
12.	$E_{\mu\varepsilon\gamma} = 10000\ m^2$
13.	$2\ sec$
14.	(α) $\Delta > 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ (β) $\Delta < 0$ δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες (γ) $\Delta > 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ (δ) $\Delta = 0, x_1 = x_2 = 3$
15.	(α) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ (β) $\beta = -2$, $\gamma = -4$ (γ) $(0, -4)$

16.	(α) Δύο ρίζες πραγματικές και άνισες (β) Σε δύο σημεία		
17.	(α) $f(x) = (x+4)^2 + 4$ (β) $f_{ελαχ} = 4$		
18.	(α) 7 (β) 3	(γ) 27 (δ) $\frac{7}{3}$	(ε) 108 (στ) 43
19.	(α) $\lambda = 2$ (β) $\lambda = 2$	(γ) $\lambda = \frac{9}{2}$ (δ) $\lambda = 12$	
20.	(α) $\mu = 3$ (β) $\mu = \frac{5}{6}$ (γ) $\mu = \frac{5}{3}, \mu = 1$		
21.	(α) (i) $x_1 = 2, x_2 = 5$ (β) (i) 10 (γ) (i) -7 (δ) (i) $\frac{9}{2}$	(ii) $x_1 = x_2 = -1$ (ii) 1 (ii) 2 (ii) $\frac{9}{2}$	
22.	(α) $(2,-1), \left(\frac{41}{19}, -\frac{28}{19}\right)$ (β) $\left(\frac{5}{3}, 1\right), \left(-\frac{1}{3}, -5\right)$		
23.	(α) $4+\sqrt{3}\ ,\ 4-\sqrt{3}$ (β) $7\ ,3$ ή $-7\ ,-3$ (γ) $\sqrt{12}+1\ ,\ 1-\sqrt{12}$ (δ) $7\ ,5$ ή $-7\ ,-5$		
24.	(α) Η ευθεία τέμνει την παραβολή στα σημεία: $(-3,9)$ και $(5,25)$ (β) Η ευθεία δεν τέμνει την παραβολή.		
25.	(α) $(a-16)(a+1)$ (β) $(2\gamma-7)(\gamma+3)$ (γ) $(y-\kappa+\lambda)(y-\kappa-\lambda)$		
26.	(α) $x^2 + x - 6 = 0.$ (β) $15x^2 + x - 2 = 0$ (γ) $x^2 - 16 = 0$ (δ) $x^2 - 14x + 46 = 0$		
27.	(α) $\frac{a-1}{a}$	(β) $\frac{x+6}{2(x-3)}$	(γ) $\frac{x-2y}{2x-y}$
28.	$2\lambda^2 = 9\kappa\mu$		
29.	(β) $x = \frac{\kappa+\lambda}{2}$		
30.	$x^2 - 6x + 4 = 0\ ,$	144	
32.	Η εξίσωση έχει δύο αρνητικές ρίζες.		

Σελίδα 34 Δραστηριότητες: Πρόσημο Τιμών Τριωνύμου-Ανισώσεις 2ου Βαθμού

Δραστηριότητες	Απαντήσεις
1.	(α) $x^2-5x-6>0$ για $x<-1$ ή $x>6$ $x^2-5x-6<0$ για $-1<x<6$ (β) $(-x-2)(x-7)>0$ για $-2<x<7$ $(-x-2)(x-7)<0$ για $x<-2$ ή $x>7$ (γ) $25-4x^2>0$ για $-\frac{5}{2}<x<\frac{5}{2}$ $25-4x^2<0$ για $x<-\frac{5}{2}$ ή $x>\frac{5}{2}$ (δ) $-x^2+x-1<0, \forall x\in\mathbb{R}$.
2.	$f(-20)<0, f(-7{,}3)>0, f(-8)=0, f(0)>0,$ $f\left(\frac{1}{2013}\right)>0, f(8)<0.$
3.	(α) $x\leq 0$, ή $x\geq 4$. (β) $-2\leq x\leq 0$. (γ) Αδύνατη. (δ) $x\in\mathbb{R}$.
4.	(α) $x\leq -6$ ή $x>6$ (β) $0\leq x\leq 2$ (γ) $-3\leq x\leq 8$ (δ) Αδύνατη ανίσωση.
5.	$x<-2$ ή $x>2$
6.	$5<\lambda<13$
7.	Για $1<\mu<5$ η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες. Για $\mu<1, \mu>5$ η εξίσωση έχει 2 πραγματικές ρίζες, (άνισες) Για $\mu=1, \mu=5$ η εξίσωση έχει 2 πραγματικές ρίζες, (ίσες)
8.	(β) $\kappa<2$, ή $\kappa>5$
9.	(β) $-1\leq\lambda\leq 1$ (γ) Για $\lambda=1$, $x_1^2x_2+x_1x_2^2+4<3x_1+3x_2$
10.	$5<\lambda<9$
11.	Π.Ο: $[-6{,}2]$
12.	$0<x<1$
13.	$2\leq Μήκος\leq 8$
14.	(α) $a\geq 2$ (β) Για $a=2$, $x_1=x_2=-1$ (γ) $f(x)=(x+1)^2+2\geq 2, \forall x\in\mathbb{R}$ (δ) $-3\leq x\leq 1$

Σελίδα 41 Ανισώσεις Ανώτερου Βαθμού-Κλασματικές Ανισώσεις

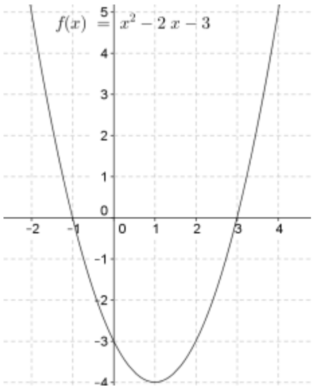
Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$P(x) > 0$ για $x \in (-4,2) \cup (2,+\infty)$ $P(x) < 0$ για $x \in (-\infty,-4)$
2.	(α) $x \in (-\infty,-5) \cup (-2,0) \cup (5,+\infty)$. (β) $x \in (-\infty,3)$. (γ) $x \in [-3,4] \cup (7,+\infty)$
3.	(α) $x \in (-\infty,-3) \cup (2,5)$ (β) $x \in (-\infty,-\sqrt{6}] \cup [1,\sqrt{6}]$ (γ) $x \in (-\infty,-2) \cup [-1,2) \cup [3,+\infty)$. (δ) $x \in [-5,0) \cup (0,3)$
4.	$\lambda > 3$
5.	(β) $-2 < \lambda < 0,\ \lambda > 2$
6.	(β) $\lambda < 4,\ \lambda \geq 6$
8.	(α) $x < -\frac{5}{2}\ ,x > \frac{5}{2}$. (β) $x \leq 0$ (γ) $-4 \leq x < 3,\ x \geq 5$.
9.	$\frac{1}{2} < \lambda < \frac{9}{2}$

Σελίδα 42 Δραστηριότητες Ενότητας

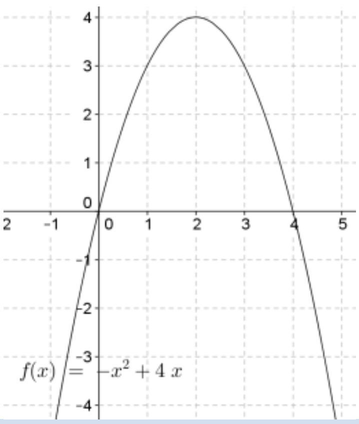
Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	Για τη συνάρτηση f : Π.Ο.: $\mathbb{R}$, Π.Τ:$[0,+\infty)$, Κορυφή: $(0,0)$, Άξονας συμμετρίας $x = 0$. Για τη συνάρτηση g: Π.Ο.: $\mathbb{R}$, Π.Τ:$(-\infty,0]$, Κορυφή: $(0,0)$, Άξονας συμμετρίας $x = 0$.
2.	Για $\lambda < 3$
3.	(α) Για $\kappa = -3$ (β) $\beta = -10$
4.	(α) $x = 0$ (β) $(-3,18)$
5.	Διαφορά: Η f είναι πιο «κλειστή» ως προς τον άξονα συμμετρίας Ομοιότητες: Έχουν την ίδια κορυφή $(0,0)$ και τον ίδιο άξονα συμμετρίας $x = 0$
6.	(α) $20m$ (β) $4\ sec$ (γ) Π.Ο: $[0\ ,\infty)$, Π.Τ: $[0\ ,\infty)$

7. $E_{ολ} = 6x^2\,, x > 0$

8. Η f έχει Π.Ο: $\mathbb{R}$, Π.Τ: $[-4, \infty)$, Κορυφή $(1, -4\,)$



Η g έχει Π.Ο: $\mathbb{R}$, Π.Τ: $(-\infty\,,\ 4]$, Κορυφή $(2, 4\,)$



9. Άξονας Συμμετρίας: $x = 4$

10.
(α) $y = x^2 - 12x + 27$
(β) $x = 6$
(γ) $(6, -9)$

11.
(α) B
(β) Γ
(γ) Γ
(δ) Δ

12.
(α) $y = (x-2)^2 - 25$
(γ) $x = 2$
(δ) *Άξονας συμμετρίας:* $x = \alpha$ *, Κορυφή:* (α, β)

13.
(α) Π.Τ: $[1, +\infty)$
(β) Π.Τ: $[-\frac{9}{8}, +\infty)$
(γ) Π.Τ: $(-\infty\,, 9]$

14. $f_{μεγ} = 16$

15. $f_{ελαχ} = \frac{14}{3}$

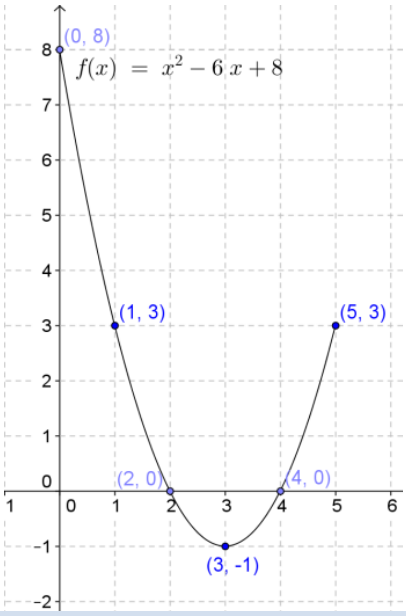
16.

$g(x) = x^2 + 2,\ K(0{,}2),\ x = 0$
$h(x) = (x+2)^2\ , K(-2{,}0),\ x = -2.$
$\kappa(x) = (x-2)^2 + 2, K(2{,}2),\ x = 2.$

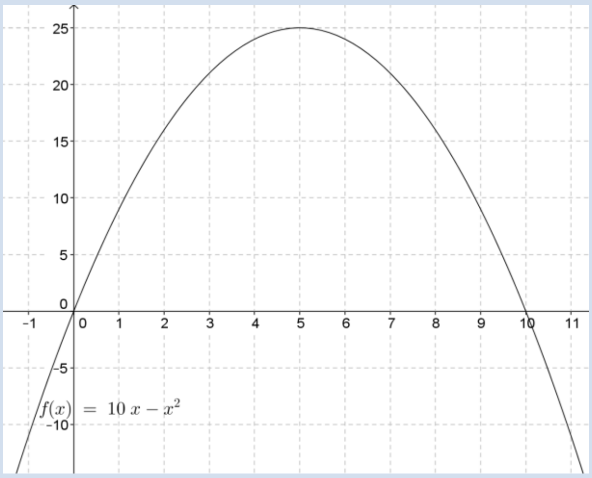
17.

(α) Π.Ο.: $\mathbb{R}$, Π.Τ:$[-9, +\infty)$,
(β) $\gamma = -8$
(γ) Άξονας συμμετρίας $x = 1$.
(δ) Κορυφή: $(1, -9)$.
(ε) $x_1 = -2\ , x_2 = 4$
(στ) Δεν υπάρχουν πραγματικές λύσεις

18. $f(x) = x^2 - 6x + 8\ \ , x \in [0{,}5]$



19.



20.

(α) ΛΑΘΟΣ
(β) ΛΑΘΟΣ

(γ) ΛΑΘΟΣ
(δ) ΣΩΣΤΟ
(ε) ΣΩΣΤΟ
(στ) ΣΩΣΤΟ
(ζ) ΣΩΣΤΟ

21. $7, 9$ ή $-9, -7$

22. $3, 5$

23.
(α) 54
(β) 14
(γ) 1746

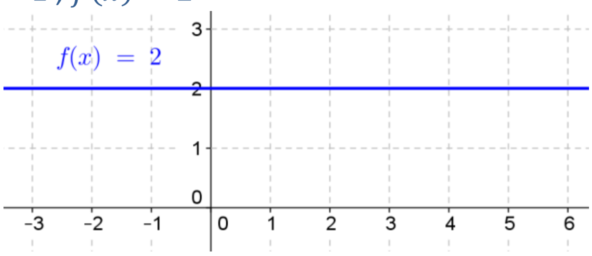
24.
(α) $12x^2 + 5x - 2 = 0$
(β) $x^2 - 6x + 6 = 0$
(γ) $25x^2 - 4 = 0$

25. (β) $20x^2 - 10x + 1 = 0$

26. $3x^2 + 18x + 23 = 0$

27.
(α) $\Delta = (2\lambda - 1)^2$
(β) $\lambda = \frac{1}{2}$

28.
(β) Αν $\lambda = -1$, $f(x) = 2$



(γ) $\lambda = -2$, $(-1,0)$

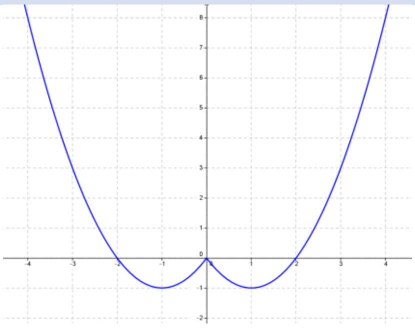
29.
$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-5, -3] \cup (2, +\infty)$
$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -5) \cup [-3, 2)$

30.
(α) $x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$
(β) $y = \frac{3}{2}$

31. Για καμία τιμή του λ

32.
(β) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$
(γ) $x = 1$

Σελίδα 47-48 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $y_A = 4, y_B = 9.$ (β) $y = x + 6$
2.	(α) $a = 1$ (β) $a = \frac{1}{4}$
3.	$\lambda = 3,\ \Delta_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = -12$
4.	Για $\kappa = 1$.
5.	 (α) $x = 0$ (β) $(-2,0), (0,0), (2,0)$ (γ) Ελάχιστη τιμή: -1 (δ) Π.Τ.: $[-1, +\infty)$.
6.	✓ Για $x = \frac{1}{2}$. ✓ $P(x, E(x))$, όπου $E(x)$ η συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν του τετραγώνου για $0 \le x \le 1$.
7.	(α) Αριθμός τετραγώνων: $2,5,10,17, \dots$ (β) Αύξηση στα τετραγωνάκια: $3,5,7,9, \dots$ (γ) $26, 37, 50, 65, \dots$ (δ) $\nu^2 + 1$.
8.	$\kappa \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$
9.	Π.Ο.: $[-6, -1] \cup [1,2]$
11.	(α) $\Delta = (2\lambda - 1)^2 \ge 0$ (β) $\lambda = \frac{1}{2}$ (γ) Για καμία τιμή του λ
13.	(α) *15 μαθητές.* (β) *40*
14.	$-5 \le x \le -1$

15.		$f(x)=\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2-\frac{\beta^2}{4}+\gamma$
17.	(α)	Για $\kappa<\frac{1}{2}$ ρίζες πραγματικές αρνητικές και άνισες Για $\kappa=\frac{1}{2}$ μία ρίζα ίση με 0 και η άλλη θετική Για $\frac{1}{2}<\kappa<\frac{5}{6}$ δύο ρίζες πραγματικές θετικές και άνισες Για $\kappa=\frac{5}{6}$ ρίζες πραγματικές θετικές και ίσες Για $\kappa>\frac{5}{6}$ δεν έχει πραγματικές ρίζες
	(β)	Για $\kappa\neq 0$ δύο πραγματικές ετερόσημες ρίζες Για $\kappa=0$ ρίζες πραγματικές και ίσες με 0.
19.		$x\in(0,1)$
20.	$\frac{20}{9}<a<10$	
21.	$0<u<30$	
22.	Π.Τ.: $[-3,+\infty)$	
23.	(α)	$x\in(0,1)$
	(β)	$0<\alpha^2<\alpha<\sqrt{\alpha}<1$
24.	$x\geq 0$, ή $-5<x\leq -4$	

Θεώρημα Θαλή - Ομοιότητα

Σελίδα 57

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$EZ = 6\ cm, H\Theta = 3\ cm, EH = 15\ cm$
2.	 $\lambda = \frac{1}{2}$
3.	$x = 4, y = 4$
7.	(α) Ε μέσο ΑΓ (β) Ισοσκελές ή ισόπλευρο τρίγωνο

Σελίδα 61

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$(\alpha), (\gamma), (\delta)$
2.	(α) $\frac{1}{2}$ (β) $\frac{1}{2}$ (γ) $\frac{1}{4}$
3.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΛΑΘΟΣ (γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΛΑΘΟΣ
4.	$A = Z, B = \Delta, \Gamma = E$
5.	$EZ = 6, ZH = 7{,}5, H\Theta = 9, \Theta E = 12,$ $E = 63°, Z = 143°, H = 80°, \Theta = 74°$
6.	$100\ cm^2$
7.	$8\ cm, 12cm, 16\ cm$

Σελίδα 70

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) Όμοια – Πλευρές ανάλογες (β) Όμοια – Δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες (γ) Όμοια – Ίσες γωνίες (δ) Όμοια – Ίσες γωνίες (ε) Όμοια – Ίσες γωνίες (ζ) Δεν είναι όμοια
2.	$ΓΕ = 4\ cm$
3.	$5{,}95\ m$
9.	$ΔΕ = 2{,}5 cm$
10.	$ΔΕ = -u + v,\quad AB = 3u\ , BΓ = -3u + 3v$

Σελίδα 78

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $x = 5\ cm$ (β) $x = 3\ cm$ (γ) $x = 4\ cm$ (δ) $x = 4\ cm$ (ε) $x = 6\ cm$ (στ) $R = 11\ cm$

Σελίδα 79 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$BZ = \frac{40}{3}\ cm$
6.	$\lambda = \dfrac{1}{2}$
7.	$18{,}25m$
9.	$\dfrac{ΔΕ}{ΔΖ} = \dfrac{ΔΒ}{ΔΓ} = \dfrac{ΕΒ}{ΖΓ}$
10.	$BE = 2\ cm$

Στατιστική

Σελίδα 88

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	Μέτρα θέσης: Διάμεσος, Μέση Τιμή, Επικρατούσα τιμή, Σταθμισμένος Μέσος Μέτρα Διασποράς: Εύρος, Διακύμανση, Τυπική Απόκλιση.
2.	(α) Μέση Τιμή=13,88 Διάμεσος= 13,5 Επικρατούσα Τιμή= 13. (β) $Εύρος = 12$ Τυπική απόκλιση= 3,85 Συντελεστής μεταβολής: $C.V = 27{,}78\%$
3.	Μέση Τιμή= 15,1
4.	Μέση επίδοση αγοριών: 17,72
5.	Τελική βαθμολογία: 7,8
6.	(α) Μέση Τιμή: $\bar{x} = 230$. (β) $\bar{y} = 23$, $\bar{z} = 30$, $\bar{\omega} = 3$.
7.	Όλες οι τιμές πρέπει να συμπίπτουν με τη μέση τιμή, δηλαδή $(x_1 = x_2 = \ldots = x_\nu = \bar{x})$.
8.	Μικρότερη Διασπορά: Λίστα2 Μεγαλύτερη Διασπορά: Λίστα 3
9.	1,71
10.	35 χρόνια
11.	61
12.	Τυπική απόκλιση: 3
13.	(α) Αντίστοιχη Συχνότητα: 1 (β) $C.V = 17{,}68\%$
14.	$C.V_1 > C.V_2$
15.	(α) $C.V = 19{,}39\%$ (β) $C.V_B = 9{,}09\%$ Μεγαλύτερη ομοιογένεια βαθμών στο τμήμα Β.
16.	(β) 15,295

Σελίδα 90 Δραστηριότητες Ενότητας	
Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ (γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΣΩΣΤΟ (ε) ΣΩΣΤΟ (στ) ΛΑΘΟΣ
2.	3,74
3.	Ο ισχυρισμός είναι ΟΡΘΟΣ
4.	$96\ Km/h$
5.	(α) 31 , 27 (β) $s = 1{,}04$
6.	16,61
7.	(α) Μέση Τιμή: $\bar{x} + \kappa$, Τυπική απόκλιση: s_x (β) Μέση Τιμή: $\bar{x} - \kappa$, Τυπική απόκλιση: s_x (γ) Μέση Τιμή: $\kappa \cdot \bar{x}$, Τυπική απόκλιση: $\kappa \cdot s_x$

Σελίδα 92 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού	
Δραστηριότητα	Απαντήσεις
2.	61,5
3.	Μέση Τιμή 6, Τυπική απόκλιση= 2
5.	Μέση Τιμή: 55 , Τυπική απόκλιση: $s_Y = 144$.
6.	$x_5 = 11$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

$\in$	ανήκει
$\notin$	δεν ανήκει
$\forall$	για κάθε
$\exists$	υπάρχει
$\cup$	ένωση συνόλων
$\cap$	τομή συνόλων
$\subset$	γνήσιο υποσύνολο
$\subseteq$	υποσύνολο
$\emptyset$ ή $\{\ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
$\neq$	άνισο
$\equiv$	ταυτοτικά ίσο
$\cong$	κατά προσέγγιση ίσο
$\mathbb{N}$	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{N}_0$	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{Z}$	ακέραιοι αριθμοί $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\dots\}$
$\mathbb{Z}^+$	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{Z}^-$	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1,-2,-3,-4,\dots\}$
$\mathbb{Q}$	ρητοί αριθμοί $\{α/β:\ α,β\in Z \text{ και } β\neq0\}$
$\mathbb{Q}^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{Q}_0^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
$\mathbb{Q}^-$	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{R}$	πραγματικοί αριθμοί
$\Rightarrow$	απλή συνεπαγωγή
$\Leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
$\perp$	κάθετες
$\parallel$	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή

=		Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)
.		Υποδιαστολή
EXP		Εκθέτης δύναμης με βάση το 10
Ans		Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος
$x^{\square}$	ή x^y ή ^	Δύναμη
		Ποντίκι (Mouse)
SHIFT	ή 2^{nd} F	Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί
AC		Επανεκκίνηση υπολογιστικής
DEL		Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή
Abs		Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)
(-)		Εισαγωγή Προσήμου –
a b/c	ή $\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$	Κλάσμα
S⇔D	ή a b/c	Μετατροπή Κλάσματος ⇔ Δεκαδικό
CLR		Σβήσιμο μνήμης
M+		Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη
M-		Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη
M		Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3+4$	3 + 4 =	3+4 7
2,34 – 1,1	2 · 3 4 – 1 · 1 =	2.34 – 1.1 1.24
$3 \cdot 2$	3 x 2 =	$3X2$ 6
2^5	2 x^y 5 =	2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$	5 EXP 3 =	$5E3$ ή $5X103$ 5000
$\frac{3}{4}$	a b/c 3 ↓ 4 → = ή 3 a b/c 4 =	$\frac{3}{4}$ 3⌟4
$2\frac{3}{4}$	SHIFT $\frac{\square}{\square}$ 2 → 3 ↓ 4 = ή 2 a b/c 3 a b/c 4 =	$2\frac{3}{4}$ 2 ⌟3 ⌟4
$\sqrt{4}$	√ 4 =	$\sqrt{4}$ 2
5^2	5 X² =	5^2 25
$2 \cdot (7-3)$	2 x (7 – 3) =	$2X(7-3)$ 8
$2 \cdot (7-3)$	7 – 3 = 2 x Ans =	$2XAns$ 8
$2-(-3)$	2 – ((-) 3) =	$2-(-3)$ 5
$\lvert -3 \rvert$	Abs (-) 3 =	$\lvert -3 \rvert$ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης	S⇔D ή SHIFT a b/c	$\frac{1}{4}$
$9-6:2$	Υπολογισμός και αποθήκευση 9 – 6 ÷ 2 = M+	9 – 6 : 2 M + 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9-6:2) - 6:(9-6:2)$	3 X M – 6 ÷ M =	3 X M – 6 : M 17

Τριγωνομετρικοι Αριθμοι Γωνιων 1°- 89°

Γωνία	ημω	συνω	εφω
1°	0,017	0,999	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,395	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,348
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
28°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
38°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000

Γωνία	ημω	συνω	εφω
46°	0,720	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,470	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,748
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,333
78°	0,978	0,203	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	0,999	0,018	57,290