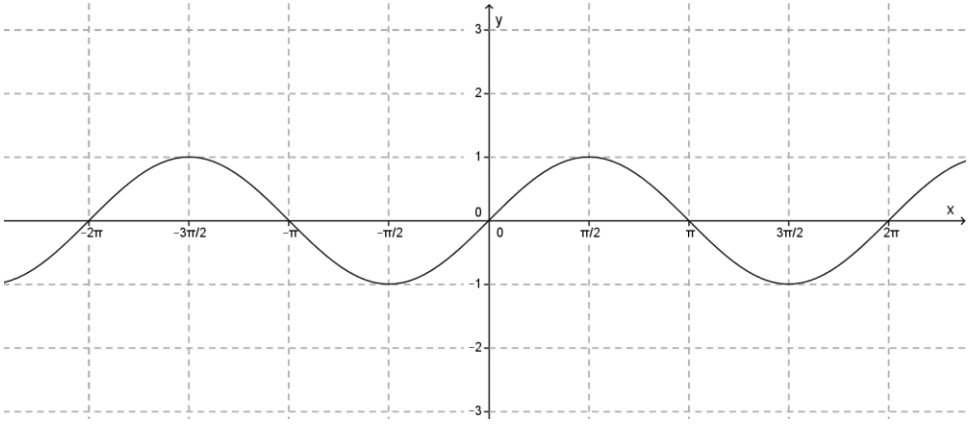
Φύλλο Εργασίας

ΤΑΞΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ Κατεύθυνσης

ΕΝΟΤΗΤΑ 10: Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις – Τόξο ημίτονο

Δραστηριότητα 1:

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to [-1,1]$ με τύπο $f(x) = ημx$.



1. Να βρείτε τρεις διαφορετικές τιμές του x για τις οποίες η συνάρτηση έχει την ίδια τιμή.

2. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = ημx$, $x \in \mathbb{R}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Να δώσετε δύο παραδείγματα διαστημάτων στα οποία η συνάρτηση με τύπο $f(x) = ημx$ είναι ένα προς ένα.

➢ Εφόσον $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$, η συνάρτηση f είναι επί. Περιορίζοντας το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ η συνάρτηση είναι ένα προς ένα, συνεπώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτησή της.

4. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το σύνολο τιμών της αντίστροφής της;

Η αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = ημx, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, συμβολίζεται με $τοξημ$ (τόξο ημίτονο).

Επεξήγηση $y = τοξημx$:

Ψάχνουμε εκείνη τη γωνιά y (τόξο σε ακτίνια) στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, της οποίας το ημίτονο της είναι ίσο με x (όπου $x \in [-1,\ 1]$).

- Το $τοξημx$ δηλώνει το τόξο του μοναδιαίου κύκλου στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, του οποίου το ημίτονο ισούται με x.

Ισχύει ότι:

$\boldsymbol{y = ημx}$ **με** $\boldsymbol{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ **και** $\boldsymbol{y \in [-1,\ 1]} \Leftrightarrow \boldsymbol{x =}$ ..... **όπου** $\boldsymbol{x \in}$ ..... **και** $\boldsymbol{y \in}$ ..... .

Δραστηριότητα:

Με τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, να βρείτε το:

- $τοξημ\left(\frac{1}{2}\right)$
- το $ημ\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Να εξηγήσετε γιατί η υπολογιστική μηχανή δεν έδωσε ως απάντηση ότι $τοξημ\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5\pi}{6} rad$;

Ορισμός: Έστω η συνάρτηση $f(x) = ημx$ με πεδίο ορισμού το $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και σύνολο τιμών το $[-1,\ 1]$.

Τότε, η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}: ..... → ..... που συμβολίζεται με ..... .

Η τιμή της συνάρτησης $f^{-1}(x) = τοξημx$ είναι ένα τόξο που ανήκει στο διάστημα .....

και συγκεκριμένα εκείνο το τόξο που έχει ημίτονο ίσο με $x \in$ ..... .

Εφαρμογές

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $τοξημ\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $συν\left(τοξημ\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.