ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κατεύθυνσης

Γ΄ Λυκείου

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου

Συγγραφή:	Λοϊζιάς Σωτήρης Ματθαίου Κυριάκος Παπαγιάννης Κωνσταντίνος Σαλονικίδης Ιωάννης Σεργίδης Μάριος Τιμοθέου Σάββας
Συντονιστές:	Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου* Βίδρας Αλέκος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*
Εποπτεία:	Φιλίππου Ανδρέας, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης* Γιασουμής Νικόλας, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης* Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης* Χατζηχρίστου Χρυσούλα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*
Επιμέλεια έκδοσης:	Ιωάννου Άστρα Μαρίνα, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*
Συντονισμός έκδοσης:	Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Α΄ έκδοση 2017

Εκτύπωση: Printco Manufacturing & Trading Ltd

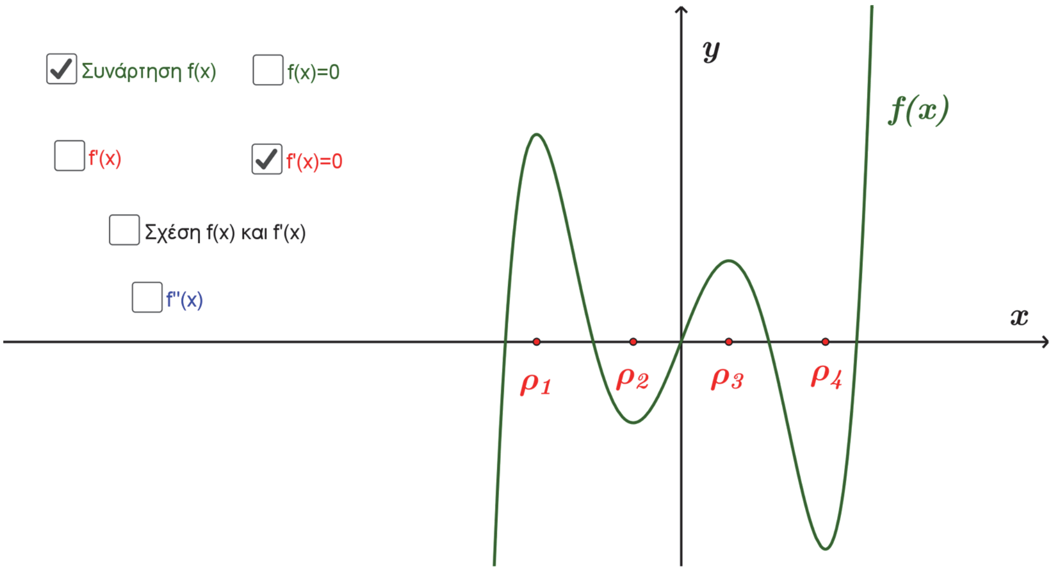
ISBN: 978-9963-54-126-3

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο «*CLyk_En01_Rolle.ggb*»



- ✓ Να επιλέξετε τα ☐ **Συνάρτηση f(x)** και ☐ **f(x)=0** . Εμφανίζεται η γραφική παράσταση της $f(x)$ και τα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$. Πόσες είναι οι λύσεις της $f(x) = 0$;
- ✓ Στη συνέχεια να επιλέξετε το ☐ **f'(x)** και το ☐ **f'(x)=0** . Εμφανίζεται η γραφική παράσταση της παραγώγου $f'(x)$. Πόσες είναι οι λύσεις της $f'(x) = 0$.
- ✓ Να αποεπιλέξετε τα ☐ **Συνάρτηση f(x)** και ☐ **f'(x)** . Ποια είναι η σχέση μεταξύ των λύσεων της ☐ **f(x)=0** και ☐ **f'(x)=0** .
- ✓ Στη συνέχεια να επιλέξετε τα ☐ **Συνάρτηση f(x)** και ☐ **Σχέση f(x) και f'(x)** . Τι παρατηρείτε για τη σχέση μεταξύ των λύσεων της $f'(x) = 0$ και της συνάρτησης $f(x)$;

Ιστορικό Σημείωμα

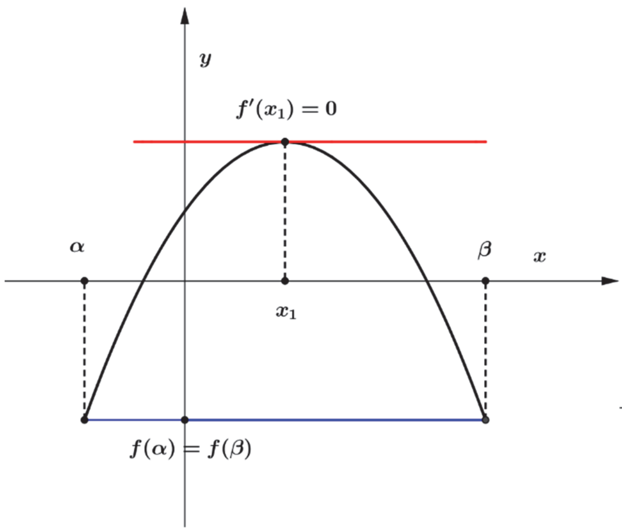
Ο Michel Rolle (1652-1719) ήταν ένας Γάλλος μαθηματικός και μέλος της Βασιλικής Ακαδημίας Επιστημών. Στο κυριότερο έργο του *Traité d'algèbre* καθιέρωσε τον συμβολισμό $\sqrt[\nu]{x}$, ασχολήθηκε με την επίλυση γραμμικών Διοφαντικών εξισώσεων και διατύπωσε το γνωστό ομώνυμο θεώρημα, το οποίο εφάρμοσε σε ρίζες πολυωνύμων. Αν και υπήρξε πολέμιος της Μαθηματικής Ανάλυσης και των υποστηρικτών της, εν τούτοις το θεώρημά του σήμερα είναι βασικό για τη θεμελίωσή της.

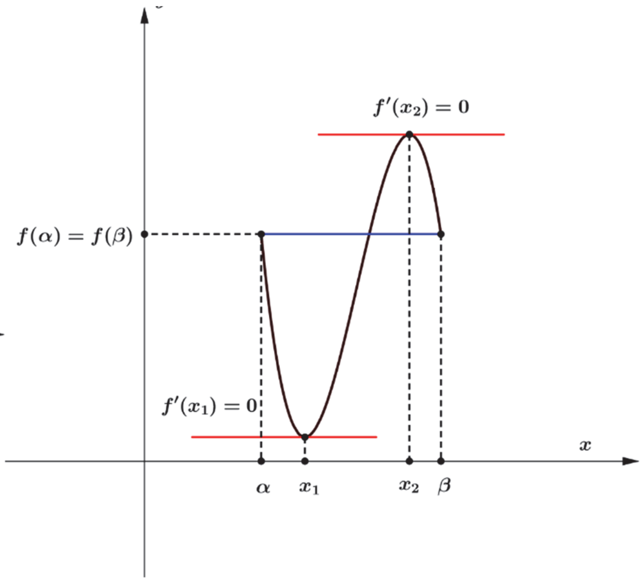
Θεώρημα Rolle

Αν $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι
α) η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,
β) η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και
γ) $f(\alpha) = f(\beta)$,
τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος.

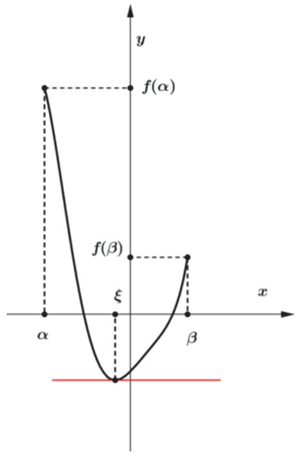
Αν για τη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα των τετμημένων.



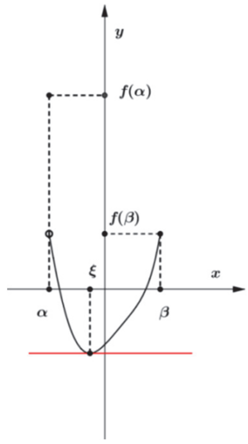


Παρατηρήσεις

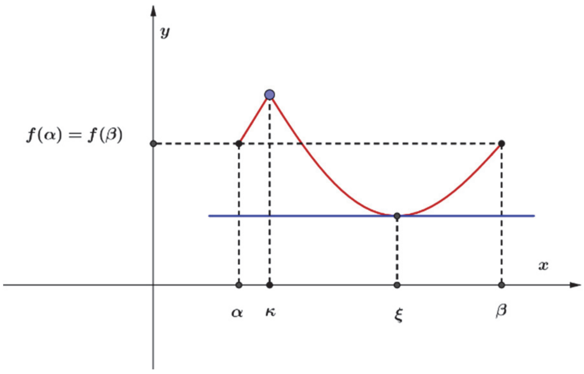
- Αν για μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ισχύει το θεώρημα του Rolle και επιπλέον $f(\alpha)=f(\beta)=0$, δηλαδή αν τα α και β είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$, τότε αυτό που συμπεραίνουμε είναι ότι μεταξύ των δυο λύσεων της $f(x)=0$ υπάρχει τουλάχιστον μια λύση της $f'(x)=0$.
- Το Θεώρημα ισχύει σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.
- Οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle είναι ικανές συνθήκες αλλά όχι αναγκαίες για να ισχύει το συμπέρασμά του. Στα παρακάτω παραδείγματα δεν ικανοποιείται κάποια από τις υποθέσεις, αλλά υπάρχει $\xi \in(\alpha,\beta)$ στο οποίο υπάρχει η $f'(\xi)$ και είναι ίση με 0:
  - Αν $f(\alpha)\neq f(\beta)$



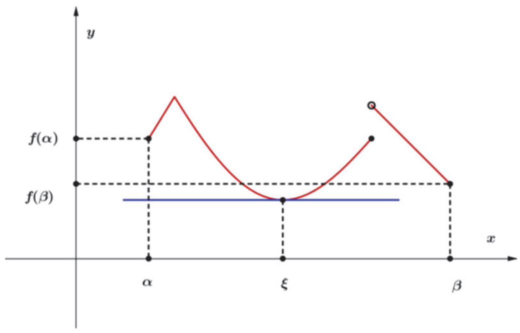
  - Η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.



  - Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=\kappa,\ \kappa\in(\alpha,\beta)$.



  - Η f δεν ικανοποιεί καμία από τις προϋποθέσεις.



Παράδειγμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, x \in [-2,2]$. Να εξετάσετε εάν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle και αν ισχύουν, να βρείτε όλα τα $\xi \in (-2,2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Λύση

Για την $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, x \in [-2,2]$ ισχύουν τα εξής:

- η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-2,2]$,
- η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ και ισχύει
- $f(-2) = f(2) = 0$

Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, σύμφωνα με το οποίο υπάρχει $\xi \in (-2,2)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Η παράγωγος της $f(x)$ δίνεται από τον τύπο $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Είναι $f'(\xi) = 0$ για $\xi = 0$ και αφού $0 \in (-2,2)$, η τιμή $\xi = 0$ είναι δεκτή.

Παράδειγμα 2

Δίνεται συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β).

(α) Να δείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ της $f(x) = 0$, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα (λύση) της εξίσωσης $f'(x) = 0$.

(β) Να δείξετε ότι μεταξύ δύο λύσεων της εξίσωσης $e^x \eta\mu x = 1$, υπάρχει τουλάχιστον μία λύση της $e^x \sigma\upsilon\nu x = -1$.

Λύση

(α) Έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$, με $x_1 < x_2$, ρίζες της $f(x) = 0$. Τότε $f(x_1) = f(x_2) = 0$.
Αφού η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), και $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$, τότε η $f(x)$ είναι:

- συνεχής στο $[x_1, x_2]$,
- παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και
- $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, σύμφωνα με το οποίο υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Κατά συνέπεια υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$ μεταξύ των ριζών $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$.

(β) Η εξίσωση $e^x \eta\mu x = 1$ γράφεται ισοδύναμα:

$$\eta\mu x = e^{-x} \Leftrightarrow \eta\mu x - e^{-x} = 0 \quad (2)$$

Έστω x_1, x_2 δύο λύσεις της (2), με $x_1 < x_2$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη και συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Σύμφωνα με το ερώτημα (α), μεταξύ των ριζών x_1, x_2 της $f(x)$ υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x + e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -e^{-x} \Leftrightarrow e^{x}\sigma\upsilon\nu x = -1$$

'Αρα η εξίσωση $e^{x}\sigma\upsilon\nu x = -1$ έχει μία τουλάχιστον λύση μεταξύ των λύσεων της $e^{x}\eta\mu x = 1$.

Παράδειγμα 3

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα (λύση).

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 5x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Η $f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική.
Επιπλέον ισχύει ότι $f(-1) = -2 < 0$ και $f(1) = 4 > 0$.
Άρα $f(-1)f(1) < 0$ κι έτσι σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει άλλη ρίζα.
Έστω ότι η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο πραγματικές ρίζες τις ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$.
Για το διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ ισχύουν τα εξής:

- η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$,
- η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) και
- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$

Έτσι, το θεώρημα Rolle ισχύει για την $f(x)$ στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$. Επομένως υπάρχει $\xi \epsilon (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Όμως:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 + 5$$

Άρα,

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 15\xi^4 - 15\xi^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow 3\xi^4 - 3\xi^2 + 1 = 0$$

που είναι άτοπο αφού η $3\xi^4 - 3\xi^2 + 1 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες ($\Delta < 0$).
Έτσι, η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες. Επειδή όμως αποδείξαμε προηγουμένως ότι έχει τουλάχιστον μία ρίζα, αυτή θα είναι και η μοναδική.

Δραστηριότητες

1. Δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις. Να εξετάσετε εάν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο δοσμένο διάστημα και να βρείτε, αν υπάρχει, την τιμή του ξ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος.
   α. $f(x) = x^2 - 8x + 15,$ στο $[3,5]$
   β. $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$ στο $[0,4]$
   γ. $f(x) = 1 + \eta\mu 3x$ στο $[0,\pi]$
   δ. $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3)$ στο $[-5,2]$

2. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις ως ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ.

α.	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
β.	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
γ.	Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η G_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε τρία σημεία, τότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
δ.	Αν $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο λύσεις.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει $\xi \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, παρόλο που $f(0) = f(\pi) = 0$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της $f(x)$ με τον άξονα $x'x$ και να δείξετε ότι $f'(\xi) = 0$ για κάποιο ξ ανάμεσα στις τετμημένες αυτές.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \beta x + \gamma, & -2 \leq x < 0 \\ \alpha x^2 + 3x + 3\,, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$.
   Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-2,2]$.

6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 3x + 1 = 0$ έχει ακριβώς μία λύση.

7. Να αποδείξετε ότι:
   α. Η εξίσωση $x^5 - 3x^3 + 5x - 2 = 0$ έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.
   β. Η εξίσωση $2 - lnx = x^2$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1, e)$.

8. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^3 - 3x^2 - 36x + συνθ = 0$, $θ \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0,1)$.

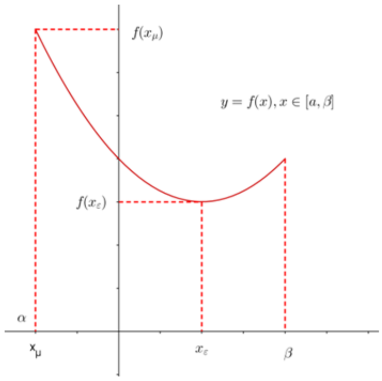
9. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ και ισχύει $f(3) - f(2) = 5$, να δείξετε ότι υπάρχει $ξ \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f'(ξ) = 2ξ$.

10. Να βρείτε τη σχέση των $α$ και $β$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση $f(x) = αx^2 + βlnx$ στο διάστημα $[1, e]$. Να βρείτε την τιμή του $ξ \in (1, e)$ για την οποία επαληθεύεται.

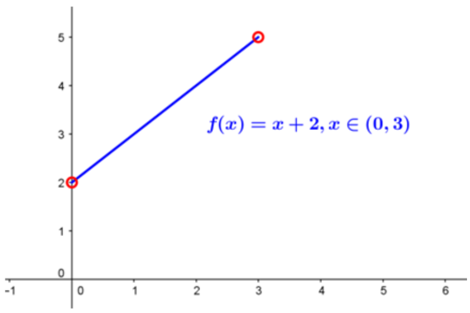
Θεώρημα (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $x_\varepsilon, x_\mu \in [\alpha, \beta]$ στα οποία η f παίρνει την ελάχιστη τιμή $f(x_\varepsilon)$ και τη μέγιστη τιμή $f(x_\mu)$.

Από το πιο πάνω θεώρημα προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[f(x_\varepsilon), f(x_\mu)]$

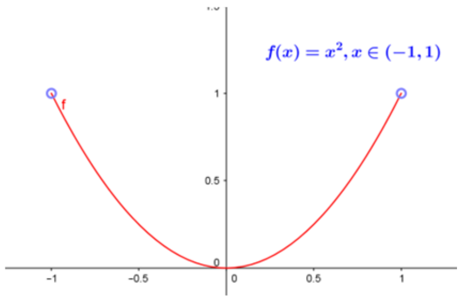
Είναι σημαντική η προϋπόθεση ότι η συνάρτηση f πρέπει να είναι συνεχής, αλλά και να ορίζεται σε κλειστό διάστημα. Αν μία τουλάχιστον από τις δύο συνθήκες δεν ισχύει, τότε δεν ισχύει το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής.



Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x + 2, x \in (0,3)$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0,3)$, αλλά αυτό δεν είναι κλειστό διάστημα. Μπορεί να δείξει κανείς, ότι η f δεν έχει ούτε μέγιστη, αλλά και ούτε ελάχιστη τιμή.



Όμως, η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in (-1,1)$,η οποία ορίζεται πάλι σε ανοικτό διάστημα, έχει ελάχιστη τιμή στο $x_0 = 0$, αλλά δεν έχει μέγιστη τιμή.



Παρατηρήσεις

✓ Όταν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ανοικτό διάστημα (α, β), η ύπαρξη μέγιστης ή ελάχιστης τιμής δεν προκαθορίζεται.

✓ Τα σημεία $(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)$ και $(x_\mu, f(x_\mu)$ είναι και τοπικά και ολικά ακρότατα.

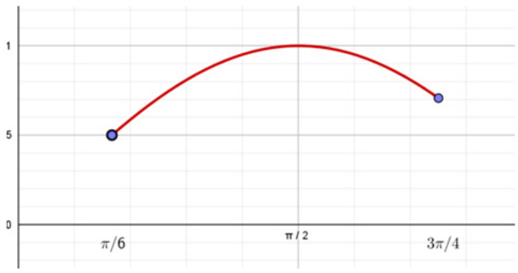
Παράδειγμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ημx$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]$

Να βρείτε τη μέγιστη, την ελάχιστη τιμή της και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

Λύση

Η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα και άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ημx$ στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]$



Παρατηρούμε ότι, στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]$ η συνάρτηση $f(x) = ημx$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της, όταν $x_\mu = \frac{\pi}{2}$: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ και την ελάχιστη τιμή της όταν $x_\varepsilon = \frac{\pi}{6}$: $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Συνεπώς το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $[\frac{1}{2}, 1]$.

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [2,4] \to \mathbb{R}$. Αν m είναι η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της συνάρτησης να αποδείξετε ότι:

$$m \leq \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9} \leq M$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [2,4]$, γιατί m είναι η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της συνεχούς συνάρτησης στο $[2,4]$. Συνεπώς:

$m \leq f(2) \leq M \Leftrightarrow 2m \leq 2f(2) \leq 2M$

$m \leq f(3) \leq M \Leftrightarrow 3m \leq 3f(3) \leq 3M$

$m \leq f(4) \leq M \Leftrightarrow 4m \leq 4f(4) \leq 4M$

Προσθέτουμε τις πιο πάνω σχέσεις και παίρνουμε:

$2m + 3m + 4m \leq 2f(2) + 3f(3) + 4f(4) \leq 2M + 3M + 4M \Leftrightarrow$

$9m \leq 2f(2) + 3f(3) + 4f(4) \leq 9M \Leftrightarrow$

$$m \leq \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9} \leq M$$

Δραστηριότητες

1. Να διατυπώσετε το θεώρημα της «μέγιστης και ελάχιστης τιμής συνάρτησης».

2. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 - 6x + 10$, $x \in [1, 5]$ παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Στη συνέχεια, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f στο διάστημα $[1, 5]$.

3. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
   Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, με ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M, τότε το σύνολο τιμών της $f(A)$ είναι:
   (α) $f(A) = [\alpha, \beta]$
   (β) $f(A) = [\beta, \alpha]$
   (γ) $f(A) = [f(a), f(\beta)]$
   (δ) $f(A) = [m, M]$
   (ε) $f(A) = [f(\beta), f(a)]$

4. Να βρείτε το σύνολο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων, αιτιολογώντας την απάντησή σας:
   (α) $f_1(x) = \ln x, x \in [1, 10]$
   (β) $f_2(x) = 3x + 2, x \in [0, 3]$
   (γ) $f_3(x) = x^2 + x + 1, x \in [-1, 4]$
   (δ) $f_4(x) = \sigma\upsilon\nu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
   (ε) $f_5(x) = e^x, x \in [-1, 0]$

5. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [3,7] \to \mathbb{R}$. Αν m είναι η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της συνάρτησης να αποδείξετε ότι:
$$m \leq \frac{3f(3) + 7f(7)}{10} \leq M$$

6. Να αιτιολογήσετε, δίνοντας κατάλληλο παράδειγμα, γιατί μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό διάστημα δεν έχει πάντοτε σύνολο τιμών που να είναι ανοικτό διάστημα.

Ακολουθούν αποσπάσματα από τα βιβλία

1. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ, Ειδίκευση, Α΄ Τόμος, ΥΑΠ 1997, σ.σ. 30-33 (12-15)

2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ, Άλγεβρα-Ανάλυση, ΥΑΠ 2007, σ.σ. 176-180 (16-20)

§4. Ρυθμός μεταβολής μεγέθους

ς από την κίνηση, που μελετήσαμε σε προηγούμενη παράγραφο, και σε πολλές άλλες περιπτώσεις έχουμε μεγέθη τα οποία μεταβάλλονται με το χρόνο. Είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε τον τρόπο μεταβολής των μεγεθών αυτών.

Ας είναι Α ένα μέγεθος που μεταβάλλεται με το χρόνο και $A = A(t)$ η εξίσωσή του. Αν $A(t_o)$ και $A(t_o + \Delta t)$ είναι οι τιμές του Α κατά τις χρονικές στιγμές t_o και $(t_o + \Delta t)$

τότε το $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t_o + \Delta t) - A(t_o)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = A'(t_o)$$

λέγεται **ρυθμός μεταβολής** του Α κατά τη χρονική στιγμή t.

Γενικά, ο ρυθμός μεταβολής του Α κατά τη χρονική στιγμή t ισούται με $A'(t) = \dfrac{dA}{dt}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. **Η ακτίνα R cm ενός σφαιρικού μπαλονιού μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t sec και δίνεται από τον τύπο $R = 10\,e^{-t}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας του μπαλονιού κατά τη χρονική στιγμή t = 2 sec.**

Λύση

Ζητούμε το $\left.\dfrac{dE}{dt}\right|_{t=2}$ όπου Ε το εμβαδόν της επιφάνειας του σφαιρικού μπαλονιού.

Έχουμε $E = 4\pi R^2$ (1) $R = 10\,e^{-t}$ (2)

και $\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{dE}{dR}\dfrac{dR}{dt}$ (3)

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει: $\dfrac{dE}{dt} = 8\pi R \,.\, (-10\,e^{-t}) = -80\,\pi R e^{-t}$

Άρα $\left.\dfrac{dE}{dt}\right/_{t=2} = -800\,\pi e^{-4} \approx -46\ m^2/sec$

2. Χρωματιστό υγρό πέφτει σε ρούχο και απλώνεται σχηματίζοντας κυκλική κηλίδα της οποίας το εμβαδόν αυξάνει με ρυθμό μεταβολής 5 cm^2/min. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας κατά τη χρονική στιγμή κατά την οποία το εμβαδόν της κηλίδας είναι 36π cm^2.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\frac{dE}{dt} = 5\ cm^2/min$ (1), όπου Ε το εμβαδόν της κηλίδας και ζητούμε το $\frac{dR}{dt}$, όπου R η ακτίνα της κηλίδας.

Έχουμε $E = \pi R^2$ (2) (εμβαδόν κύκλου)

και $\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dR}\frac{dR}{dt}$ (3)

Από τις (1), (2) και (3): $5 = 2\pi R\frac{dR}{dt} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{5}{2\pi R}$ (4)

Όταν το εμβαδόν είναι 36π cm^2, η ακτίνα θα είναι R = 6 cm διότι:

$E = \pi R^2$

$36\pi = \pi R^2 \Rightarrow R = 6\ cm$

Αντικαθιστούμε στην (4) και έχουμε:

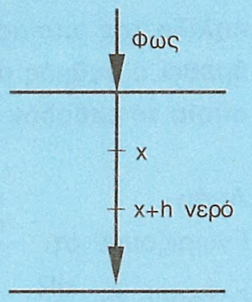
$$\frac{dR}{dt} = \frac{5}{2\pi 6} = \frac{5}{12\pi} \simeq 0{,}13\ cm/min$$

Ασκήσεις 2.2

1. Κινητό κινείται κατά μήκος ευθείας έτσι ώστε η απόσταση του S (σε cm) από σταθερό σημείο Κ να δίνεται από τον τύπο $S = 4t^3 - 3t$ (t σε sec). Να βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα και την επιτάχυνση κατά τη χρονική στιγμή t = 4.

2. Σε μια κίνηση η απόσταση S (σε m) δίνεται από τον τύπο:
$S = 2t^3 - 11t^2 + 12t - 2$ (t σε sec).
Σε ποια χρονική στιγμή μηδενίζεται η ταχύτητα και σε ποια η επιτάχυνση;

3. Όταν το φως εισδύει σε ένα μέσο όπως το νερό, μικραίνει η ένταση του καθώς μεγαλώνει το βάθος. Έστω ότι $I(x)$ είναι η ένταση του φωτός στο βάθος x.
Εξηγήστε τις εκφράσεις $\frac{I(x+h) - I(x)}{h}$ και $I'(x)$

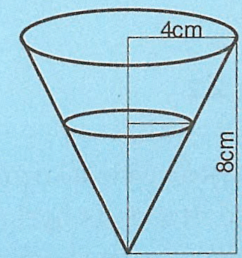


4. Αέριο διαρρέει από σφαιρικό μπαλόνι με ρυθμό 20 cm^3/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας του μπαλονιού κατά τη χρονική στιγμή που η ακτίνα είναι 10 cm.

5. Ο όγκος ενός σφαιρικού μπαλονιού αυξάνει με ρυθμό 100 cm^3/sec. Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνει η επιφάνεια του σφαιρικού μπαλονιού όταν η ακτίνα του είναι 40 cm.

6. Κυλινδρική δεξαμενή με εσωτερική διάμετρο 2 m γεμίζεται με ρυθμό 10000 cm^3/min. Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο ανεβαίνει η επιφάνεια του νερού.

7. Κωνικό αντιστραμμένο δοχείο γεμάτο νερό αδειάζει με ρυθμό 12 cm^3/min. Αν η ακτίνα της βάσης του κώνου είναι 4 cm και το ύψος 8 cm, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο κατεβαίνει η επιφάνεια του νερού κατά τη χρονική στιγμή που το ύψος του είναι 6 cm.



8. Πάσσαλος ο οποίος έχει ύψος 12 m ρίχνει κάποια χρονική στιγμή σκιά μήκους 5 m. Αν την ίδια χρονική στιγμή, ο ήλιος ανεβαίνει με ρυθμό 0,004 rad/min να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του μήκους της σκιάς.

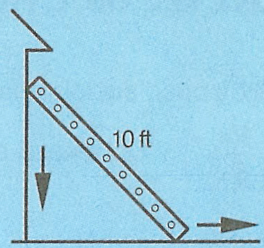
9. Ένα πλοίο Α βρίσκεται 21 Km ανατολικά του Ο και κινείται δυτικά με ταχύτητα 28 Km/h. Το πλοίο Β βρίσκεται 8 Km νότια του Ο και κινείται βόρεια με ταχύτητα 21 Km/h.

α. Σε μια ώρα πλησιάζουν ή απομακρύνονται τα δύο πλοία και με ποιο ρυθμό.

β. Να βρείτε το ίδιο μετά από τρεις ώρες.

10. Σκάλα μήκους 10ft στηρίζεται στον τοίχο ενός σπιτιού όπως δείχνει το σχήμα. Καθώς η βάση της σκάλας απομακρύνεται από το σπίτι η κορυφή της σκάλας γλυστρά προς τα κάτω κατά μήκος του τοίχου στηρίξεως.

Αν η ταχύτητα απομάκρυνσης της βάσης είναι 2 ft/sec να βρείτε την ταχύτητα καθόδου της κορυφής όταν η βάση απέχει από το σπίτι 8 ft.



§12.6 Ανάλυση κλάσματος σε άθροισμα απλών κλασμάτων

Σε μικρότερη τάξη μάθαμε να βρίσκουμε το αλγεβρικό άθροισμα κλασμάτων.

π.χ. $\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{3x-9+5x+10}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{8x+1}{(x+2)(x-3)}$

Πιο κάτω θα δούμε πώς γίνεται η αντίστροφη εργασία. Δηλαδή ένα κλάσμα πώς αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Ανάλυση κλάσματος της μορφής $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, όπου βαθμός f(x) < βαθμός g(x)

Όπως κάθε πολυώνυμο, έτσι και το g(x), αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων των μορφών:

$\alpha x+\beta$, $(\alpha x+\beta)^{\kappa}$,

$\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{\kappa}$ με ρίζες μιγαδικές

Το κλάσμα $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων, σύμφωνα με τους παράγοντες του παρονομαστή, όπως θα δούμε στους πιο κάτω κανόνες.

Κανόνας 1:

> Για κάθε παράγοντα του παρονομαστη της μορφής $\alpha x+\beta$
> η ανάλυση του $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ περιέχει κλάσμα της μορφής $\dfrac{A}{\alpha x+\beta}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να αναλύσετε το $\dfrac{6x-3}{x^2-5x+4}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Λύση:

Έχουμε, $\dfrac{6x-3}{x^2-5x+4}=\dfrac{6x-3}{(x-4)(x-1)}$, δηλαδή ο παρονομαστής αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων της μορφής $\alpha x+\beta$.

Έτσι $\dfrac{6x-3}{x^2-5x+4}=\dfrac{A}{(x-4)}+\dfrac{B}{(x-1)}$ όπου A και B αριθμοί που πρέπει να προσδιοριστούν.

Απαλείφουμε τους παρονομαστές και καταλήγουμε στην ισότητα πολυωνύμων:

$6x-3\equiv A(x-1)+B(x-4)$ Εφ' όσον τα πολυώνυμα είναι ίσα, θα έχουν και ίσες αριθμητικές τιμές για οποιοδήποτε x

Για $x=1$, $3=-3B\Rightarrow B=-1$

Για $x=4$, $21=3A\Rightarrow A=7$

Άρα $\dfrac{6x-3}{x^2-5x+4} = \dfrac{7}{x-4} - \dfrac{1}{x-1}$

Κανόνας 2:

Για κάθε παράγοντα του παρονομαστή της μορφής $(\alpha x+\beta)^\kappa$ η ανάλυση του $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ περιέχει κ κλάσματα της μορφής

$\dfrac{A_1}{\alpha x+\beta}, \dfrac{A_2}{(\alpha x+\beta)^2}, \ldots, \dfrac{A_\kappa}{(\alpha x+\beta)^\kappa}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να αναλύσετε το $\dfrac{8x^2-3x-1}{(x+3)(x-1)^2}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Λύση:

Έχουμε $\dfrac{8x^2-3x-1}{(x+3)(x-1)^2} = \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{\Gamma}{(x-1)^2}$

Απαλείφουμε τους παρονομαστές και καταλήγουμε στην ισότητα πολυωνύμων:

$8x^2-3x-1 \equiv A(x-1)^2 + B(x-1)(x+3) + \Gamma(x+3)$

Για $x=1$, $\quad 4 = 4\Gamma \Rightarrow \Gamma = 1$

Για $x=-3$, $\quad 80 = 16A \Rightarrow A = 5$

Το Β μπορούμε να το βρούμε είτε δίνοντας ακόμα μια τιμή στο x, π.χ $x=0$, είτε εξισώνοντας τους συντελεστές δύο ισοβάθμιων όρων.

Ακολουθώντας την πρώτη μέθοδο:

Για $x=0$, $\quad -1 = A - 3B + 3\Gamma \Rightarrow B = 3.$

Άρα $\dfrac{8x^2-3x-1}{(x+3)(x-1)^2} = \dfrac{5}{x+3} + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$

Κανόνας 3:

Για κάθε παράγοντα του παρονομαστή της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\Delta < 0$ η ανάλυση του $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ περιέχει κλάσμα της μορφής

$\dfrac{Ax+B}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να αναλύσετε το $\dfrac{2x+1}{(x-2)\left(x^2+1\right)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Λύση:

Οι ρίζες του x^2+1 είναι μιγαδικές και έτσι δεν αναλύεται σε γινόμενο.

Έχουμε $\dfrac{2x+1}{(x-2)\left(x^2+1\right)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+\Gamma}{x^2+1}$

Απαλείφουμε τους παρονομαστές και καταλήγουμε στην ισότητα πολυωνύμων:

$2x+1 \equiv A(x^2+1)+Bx(x-2)+\Gamma(x-2)$

Για $x=2$, $\quad 5=5A \Rightarrow A=1$

Για $x=0$, $\quad 1=A-2\Gamma \Rightarrow \Gamma=0$

Εδώ θα ακολουθήσουμε την δεύτερη μέθοδο:

Εξισώνοντας τους συντελεστές του x^2 παίρνουμε $0=A+B \Rightarrow B=-1$

Άρα $\dfrac{2x+1}{(x-2)\left(x^2+1\right)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x}{x^2+1}$

Κανόνας 4:

> Για κάθε παράγοντα του παρονομαστή της μορφής $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^\kappa$ η ανάλυση του $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ περιέχει κ κλάσματα της μορφής
>
> $\dfrac{A_1x+B_1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma},\ \dfrac{A_2x+B_2}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^2},\ \ldots,\ \dfrac{A_\kappa x+B_\kappa}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^\kappa}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να αναλύσετε το $\dfrac{-5x^3+5x^2-5}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Λύση:

Έχουμε $\dfrac{-5x^3+5x^2-5}{(x-2)(x^2+1)^2}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+\Gamma}{x^2+1}+\dfrac{\Delta x+E}{(x^2+1)^2}$

Εργαζόμαστε κατά τα γνωστά και βρίσκουμε

$$A=-1,\ B=1,\ \Gamma=-3,\ \Delta=0,\ E=5.$$

Άρα $\dfrac{-5x^3+5x^2-5}{(x-2)(x^2+1)^2}=-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{x-3}{x^2+1}+\dfrac{5}{(x^2+1)^2}$

Ανάλυση κλάσματος της μορφής $\frac{f(x)}{g(x)}$, όπου βαθμός $f(x) \geq$ βαθμός $g(x)$

Όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή δεν μπορούμε να εργαστούμε όπως στα προηγούμενα παραδείγματα. Στην περίπτωση αυτή εκτελούμε πρώτα τη διαίρεση $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο και $\upsilon(x)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης τότε το κλάσμα γράφεται:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{g(x)}$$

Το κλάσμα $\frac{\upsilon(x)}{g(x)}$ έχει αριθμητή του οποίου ο βαθμός είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή. Έτσι αναλύεται με έναν από τους τέσσερις κανόνες που είδαμε πιο πάνω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να αναλύσετε το $\frac{x^4+1}{x^3+2x}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Λύση:

Επειδή ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή κάνουμε τη διαίρεση $(x^4+1):(x^3+2x)$ και βρίσκουμε πηλίκο x και υπόλοιπο $-2x^2+1$. Έτσι το κλάσμα γράφεται:

$$\frac{x^4+1}{x^3+2x} = x + \frac{-2x^2+1}{x^3+2x}$$

Αναλύουμε κατά τα γνωστά το κλάσμα $\frac{-2x^2+1}{x^3+2x}$ και τελικά βρίσκουμε:

$$\frac{x^4+1}{x^3+2x} = x + \frac{1}{2x} - \frac{5x}{2\left(x^2+2\right)}$$

- Αν δοθεί το κλάσμα $\frac{2x+3}{(x-1)\left(x^2-6x+1\right)}$ είναι προτιμότερο να αναλυθεί στη μορφή $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2-6x+1}$ διότι αν και ο παράγοντας x^2-6x+1 έχει πραγματικές ρίζες, τις $3 \pm 2\sqrt{2}$, η παραγοντοποίησή του όμως είναι χρονοβόρα και ασύμφορη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 12.2

Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων τα πιο κάτω κλάσματα:

1. $\dfrac{x+1}{(x-2)\,(x-1)}$ **2.** $\dfrac{1}{x^2-1}$ **3.** $\dfrac{8x^2-19x+2}{(x+2)\,(x-1)(x-4)}$

4. $\dfrac{x+4}{x^2-3x+2}$ **5.** $\dfrac{5x+7}{2x^2+5x+2}$ **6.** $\dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$

7. $\dfrac{3x-1}{x\,(x-1)^2}$ **8.** $\dfrac{5x^2+4x-7}{(x-3)\,(x+2)^2}$ **9.** $\dfrac{5x^2-x+2}{(x-1)\left(x^2+1\right)}$

10. $\dfrac{3x^2+7x+2}{(x+1)\left(x^2+2x+5\right)}$ **11.** $\dfrac{3x-2}{x^4-16}$ **12.** $\dfrac{4-3x}{(2x-1)\left(x^2+1\right)}$

13. $\dfrac{3x^2+x+2}{x^3-1}$ **14.** $\dfrac{x^2-x+1}{\left(x^2+1\right)(x-1)^2}$ **15.** $\dfrac{x^2+5}{(1-x)\left(1-x^2\right)}$

16. $\dfrac{5x^2-4}{x^4-5x^2+4}$ **17.** $\dfrac{14x-20}{(x-2)\,x^2+4(2-x)}$

18. Αν $\dfrac{x^3-7x^2-13x-15}{x^2-2x-3}=\pi(x)+\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-3}$ να βρείτε το $\pi(x)$ και τους αριθμούς Α και Β.

19. $\dfrac{2x^3-9x^2+7x+7}{x^2-5x+6}$ **20.** $\dfrac{x(x+1)}{(x-1)\,(x-2)}$

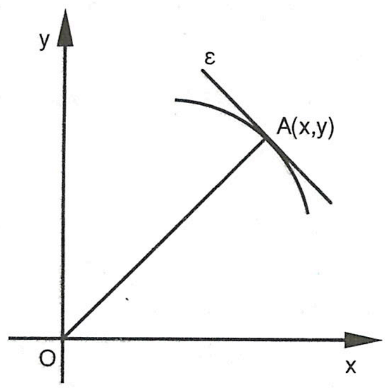
Ακολουθεί απόσπασμα από το βιβλίο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ, Ειδίκευση,
Α΄ Τόμος, ΥΑΠ 1997, σ.σ. 218-226 (22-30)

10. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 1. Εισαγωγή

Πολλά προβλήματα των μαθηματικών, της φυσικής, της βιολογίας και άλλων επιστημών οδηγούν σε σχέσεις οι οποίες περιέχουν μεταβλητά μεγέθη καθώς και τις παραγώγους τους. Τέτοιες σχέσεις λέγονται **διαφορικές εξισώσεις.**



- Για να βρούμε την εξίσωση της καμπύλης της οποίας η εφαπτομένη σε κάθε σημείο Α (x, y) είναι κάθετη στην ΟΑ οδηγούμαστε στη διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{y}{x} = -1$ (διότι $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{OA} = -1$)

- Αν ένα σώμα είναι θερμότερο από το περιβάλλον του η θερμοκρασία του θ, είναι συνάρτηση του χρόνου t, δηλαδή $\theta = f(t)$. Ο ρυθμός μείωσης της θερμοκρασίας του, $\frac{d\theta}{dt}$, είναι ανάλογος προς τη διαφορά της θερμοκρασίας θ του σώματος από τη θερμοκρασία θ_0 του περιβάλλοντος (η θ_0 θεωρείται σταθερά).

Για να βρούμε την εξίσωση $\theta = f(t)$ οδηγούμαστε στη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha\left(\theta - \theta_0\right), \qquad \text{όπου } \alpha \text{ σταθερά.}$$

§ 2. Έννοια διαφορικής εξίσωσης

Μια εξίσωση στην οποία τουλάχιστο ένας όρος περιέχει παράγωγο πρώτης ή ανώτερης τάξης λέγεται διαφορική εξίσωση.

Οι διαφορικές εξισώσεις ταξινομούνται σύμφωνα με την παράγωγο της ανώτερης τάξης που περιέχουν.

Για παράδειγμα,

η $\quad x\dfrac{dy}{dx} + y = x - 1$ $\quad$ είναι διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης,

η $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = e^2$ $\quad$ είναι διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης.

§ 3. Λύση διαφορικής εξίσωσης

Καθε συνάρτηση που επαληθεύει μια διαφορική εξίσωση λέγεται (ειδική) **λύση της διαφορικής εξίσωσης.**

- Η συνάρτηση $y = 4x^3$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $x\dfrac{dy}{dx} = 3y$ διότι την επαληθεύει. Πράγματι:

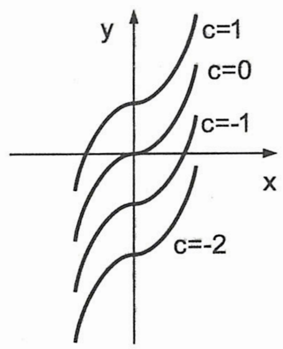
  α′ μέλος $= x\dfrac{dy}{dx} = x \cdot 12x^2 = 12x^3$ $\qquad$ διότι $\dfrac{dy}{dx} = \left(4x^3\right)' = 12x^2$

  β′ μέλος $= 3y = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3$

- Η διαφορική εξίσωση $\dfrac{1}{x^2} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 3$ γράφεται $dy = 3x^2\, dx$. Με ολοκλήρωση βρίσκουμε

$$y = x^3 + c \qquad (1)$$

Για κάθε τιμή του c από την (1) προκύπτει μια συνάρτηση που είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης. Η (1) λέγεται **γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.**



Γραφικά από την (1) για κάθε τιμή του c προκύπτει και μια καμπύλη. Έτσι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης παριστάνει οικογένεια καμπύλων.

§ 4. Διαφορική εξίσωση οικογένειας καμπύλων

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, η λύση της διαφορικής εξίσωσης οδήγησε σε οικογένεια καμπύλων. Αντίστροφα από μια οικογένεια καμπύλων προκύπτει μια διαφορική εξίσωση.

- Ας είναι η οικογένεια καμπύλων $y^2 = 4\alpha x$, όπου α σταθερός αριθμός (παράμετρος).

  Παραγωγίζουμε και παίρνουμε

  $$2y\frac{dy}{dx} = 4\alpha$$

  ή $$\alpha = \frac{y}{2}\frac{dy}{dx}.$$

  Αντικαθιστούμε στη $y^2 = 4\alpha x$ και προκύπτει η διαφορική εξίσωση

  $$y^2 = 4\frac{xy}{2}\frac{dy}{dx}$$

  ή $$y = 2x\frac{dy}{dx}$$

- Ας είναι η οικογένεια καμπύλων $y = Ax^2 + Bx$, όπου A και B παράμετροι.

  Έχουμε, $y = Ax^2 + Bx$

  Παραγωγίζουμε $$\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$$

  $$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A$$

  Για να απαλείψουμε δυο παραμέτρους πρέπει να έχουμε τρεις εξισώσεις. Έτσι παραγωγίζουμε δυο φορές.

  Απαλείφοντας τις παραμέτρους A και B παίρνουμε

  $$x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}x^2\frac{d^2y}{dx^2} = y$$

Παρατηρούμε ότι:

- Από μια οικογένεια καμπύλων με μια παράμετρο προκύπτει διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.
- Από μια οικογένεια καμπύλων με δυο παραμέτρους προκύπτει διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης.
- Η αρχική εξίσωση από την οποία προκύπτει η διαφορική εξίσωση περιέχει τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης, (εκτός ίσως μερικών, αυτό όμως είναι έξω από τους στόχους του βιβλίου αυτού), και είναι η γενική λύση της. Έτσι η γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης έχει μια παράμετρο, ενώ της δεύτερης τάξης έχει δυο παραμέτρους.

Ασκήσεις 10.1

1. Να δείξετε ότι η $y = x + \frac{2}{x}$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $x\frac{dy}{dx} + y = 2x$
2. Να δείξετε ότι η y = ημx + συνx είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.
3. Να δείξετε ότι η $y = Ae^x + Be^{2x}$, όπου A, B σταθερές, είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$.
4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = e^t$ και y = ημt είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$.
5. Να σχηματίσετε μια διαφορική εξίσωση για κάθε οικογένεια καμπύλων

   i) $xy = c^2$ ii) $y = Ae^{2x}$ iii) $y = A\ln x + B$

   iv) $y = Ae^x + Bx$ v) $y^2 = A$συν$2x$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Η εύρεση των λύσεων (η επίλυση) μιας διαφορικής εξίσωσης δεν είναι πάντοτε δυνατή. Μόνο για μερικές κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων είναι γνωστές μέθοδοι επίλυσης. Στις επόμενες παραγράφους θα ασχοληθούμε με την επίλυση μερικών απλών κατηγοριών διαφορικών εξισώσεων πρώτης και δεύτερης τάξης.

§ 5. Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης των οποίων οι μεταβλητές μπορούν να χωριστούν

Οι διαφορικές εξισώσεις που μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

λέγονται διαφορικές εξισώσεις των οποίων οι μεταβλητές μπορούν να χωριστούν (**χωριζόμενες μεταβλητές**). Η επίλυση τους επιτυγχάνεται ολοκληρώνοντας:

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$.

Λύση

Έχουμε $\quad ydy = xdx \Rightarrow$

$$\int ydy = \int xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \Leftrightarrow \qquad y^2 = x^2 + 2c$$

$$y^2 = x^2 + \alpha \qquad \text{Θέσαμε } 2c = \alpha$$

2. Να γραφεί στη μορφή $y = f(x)$ η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = 2y$.

Λύση

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η $y = 0$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Για $\quad y \neq 0 \quad$ έχουμε $\quad \frac{dy}{y} = 2xdx$

$$\int \frac{dy}{y} = 2xdx$$

$$\ell n|y| = x^2 + c$$

$$|y| = e^{x^2 + c}$$

$$y = \pm e^{x^2 + c}$$

$$y = \kappa e^{x^2}, \ \kappa = \pm e^c$$

3. Να βρεθεί η ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\varepsilon\varphi x \frac{dy}{dx} - y = 0$, για την οποία $y = 2$ όταν $x = \frac{\pi}{6}$.

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα τη γενική λύση

Έχουμε $\varepsilon\varphi x \frac{dy}{dx} = y$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} dx$$

$$\ell n|y| = \ell n|\eta\mu x| + \ell n\alpha$$ Θέσαμε $c = \ell n\alpha$

$$\ell n|y| = \ell n\, \alpha\, |\eta\mu x|$$

$$|y| = \alpha\, |\eta\mu x|$$

Θα βρούμε τώρα την ειδική λύση.

Για $x = \frac{\pi}{6}$ το $y = 2$, έτσι, $2 = \kappa\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \kappa = 4$.

Άρα η ζητούμενη ειδική λύση είναι $y = 4\eta\mu x$.

4. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $y = ux$ να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}$. Στη συνέχεια να βρείτε την ειδική λύση για την οποία $y = 1$ όταν $x = 1$.

Λύση

Παραγωγίζουμε ως προς x τη $y = ux$ και παίρνουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} x + u.$$

Αντικαθιστούμε στη διαφορική εξίσωση και έχουμε

$$\frac{du}{dx}x + u = \frac{x^2 + 2u^2x^2}{x^2u}$$

$$\frac{du}{dx}x + u = \frac{x^2\left(1 + 2u^2\right)}{x^2u}$$

$$\frac{du}{dx}x + u = \frac{1 + 2u^2}{u}$$

διαφορική εξίσωση

με χωριζόμενες μεταβλητές

$$\frac{du}{dx}x = \frac{1 + u^2}{u}$$

$$\int \frac{u}{1 + u^2}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1 + u^2\right) = \ln|x| + \ln c$$

$$\ln\left(1 + u^2\right) = \ln c^2x^2$$

$$1 + u^2 = c^2x^2$$

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = c^2x^2$$

$$y^2 = c^2x^4 - x^2$$

Όταν $x = 1$ το $y = 1$, έτσι

$$1 = c^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 2.$$

Η ζητούμενη ειδική λύση είναι η

$$y^2 = 2x^4 - x^2$$

Ασκήσεις 10.2

1. Να βρείτε τη γενική λύση των διαφορικών εξισώσεων

 i) $(1+\eta\mu x)\dfrac{dy}{dx}=\sigma\upsilon\nu x$ ii) $\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x^2+1}$

 iii) $s\dfrac{ds}{dt}-t=1$ iv) $e^{2x+y}\dfrac{dy}{dx}=2$

 v) $\tau\varepsilon\mu x\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{x}{y}=0$ vi) $t\dfrac{dh}{dt}+h=ht$

 vii) $e^{-x^2}\dfrac{dy}{dx}=xy$ viii) $x^2\dfrac{dy}{dx}+\eta\mu^2 y=0$

2. Να γράψετε στη μορφή $y=f(x)$ τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

 i) $\sigma\tau\varepsilon\mu x\dfrac{dy}{dx}=e^{-y}$ ii) $x\dfrac{dy}{dx}=y^2-1$ iii) $\alpha\dfrac{dy}{dx}+\beta y=0,\ \alpha\neq 0$

3. Να γράψετε στη μορφή $y=f(x)$ την ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης

 $x^2\dfrac{dy}{dx}+y=0$ για την οποία $y=e$ όταν $x=1$.

4. Να βρείτε την ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

 i) $\eta\mu x\dfrac{dy}{dx}=\varepsilon\varphi y\,(3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)$, για την οποία $y=\dfrac{\pi}{6}$ όταν $x=\dfrac{\pi}{2}$

 ii) $\left(1+\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\dfrac{dy}{dx}=y\,(y+1)\,\eta\mu 2x$, για την οποία $y=2$ όταν $x=0$

5. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $y=ux$ να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $xy^2\dfrac{dy}{dx}=x^3+y^3$

6. Η κλίση της εφαπτομένης μιας καμπύλης σε κάθε σημείο της Α $(x,\ y)$ ισούται με το γινόμενο των συντεταγμένων του σημείου. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης αν περνά από το σημείο $(0,\ 3)$.

7. Δίνεται η διαφορική εξίσωση $\dfrac{dy}{dx}+y=2x$. Αν $u=2x-y$ να βρείτε το $\dfrac{dy}{dx}$ συναρτήσει του $\dfrac{du}{dx}$

 Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u=2x-y$ να βρείτε την ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης για την οποία $y=0$ όταν $x=0$.

8. Αν $\frac{dy}{dx} = \rho$, να δείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\rho}{dx}$. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\frac{dy}{dx} = \rho$ να λύσετε τη διαφορική εξίσωση

$$\left(1 + x^2\right) \frac{d^2y}{dx^2} = 2x \frac{dy}{dx}.$$

9. Αν $\frac{dy}{dx} = \rho$, να δείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} = \rho \frac{d\rho}{dy}$. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\frac{dy}{dx} = \rho$ να λύσετε τη διαφορική εξίσωση

$$y \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

ΕΝΟΤΗΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1.1 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

Έχουμε μάθει...

- **Σύνολο** είναι μια **καλώς ορισμένη συλλογή διαφορετικών μεταξύ τους αντικειμένων**.

Τα αντικείμενα που αποτελούν ένα σύνολο λέγονται **στοιχεία** του συνόλου.
Όταν ένα στοιχείο α **ανήκει σε ένα σύνολο** A, γράφουμε $\alpha \in A$, ενώ αν το στοιχείο α **δεν ανήκει σε ένα σύνολο** A, γράφουμε $\alpha \notin A$.
Το πλήθος των στοιχείων του συνόλου A λέγεται **πληθικός αριθμός** του συνόλου A και συμβολίζεται ως $\nu(A)$ ή $|A|$.
Ένα σύνολο με πληθικό αριθμό 0 λέγεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται με $\{\ \ \}$ ή $\emptyset$.
Ένα σύνολο με πληθικό αριθμό 1 λέγεται **μονομελές σύνολο**.
Τα αντικείμενα σε ένα σύνολο δεν είναι αναγκαστικά ομοειδή.
Ένα στοιχείο είτε ανήκει είτε δεν ανήκει σε ένα σύνολο.

- Ένα σύνολο μπορούμε να το ορίσουμε:
  - με **απαρίθμηση των στοιχείων** του
  - με **περιγραφή της χαρακτηριστικής ιδιότητας** των στοιχείων του
  - ως **αποτέλεσμα πράξεων σε σύνολα**

Σε ένα σύνολο **δεν επαναλαμβάνουμε** στοιχεία του. Για παράδειγμα, γράφουμε $\{1,2,3\}$ και όχι $\{1,1,2,2,2,3\}$. Επίσης, **δεν ενδιαφέρει η διάταξη** των στοιχείων του, δηλαδή το σύνολο $\{3,1,2\}$ είναι ακριβώς το ίδιο με το σύνολο $\{1,2,3\}$.

Για το κενό σύνολο, έχουμε $\nu(\emptyset)=0$. Αν $\nu(A)=\kappa$, $\kappa \in \mathbb{N}$, τότε το σύνολο A χαρακτηρίζεται ως **πεπερασμένο**, ενώ, αντίθετα, αν $\nu(B)=\infty$, τότε το σύνολο B χαρακτηρίζεται ως **άπειρο σύνολο**.

- Το σύνολο A είναι **υποσύνολο** του B, τότε και μόνο τότε, αν η συνθήκη $x \in A$ συνεπάγεται $x \in B$ και συμβολίζουμε $\boldsymbol{A \subseteq B}$.

  Συμβολικά, γράφουμε
  $$\boldsymbol{A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B}$$
  και διαβάζουμε ότι το A **περιέχεται (ή εγκλείεται)** στο $\boldsymbol{B}$.

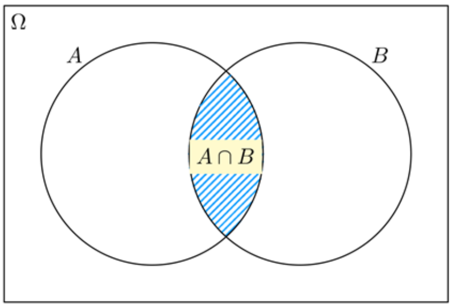
- Δύο σύνολα A και B λέγονται **ίσα** $(A=B)$, όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

  Γενικά, ισχύει:
  $$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A$$

Πράξεις με σύνολα

- Ένα σύνολο που περιέχει όλα τα σύνολα που μελετάμε λέγεται **σύνολο αναφοράς** και το συμβολίζουμε με Ω.

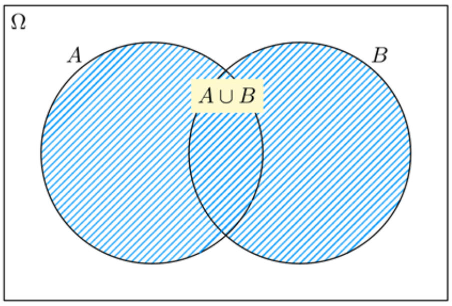
- Αν Ω είναι ένα σύνολο αναφοράς και A, B δύο υποσύνολα του Ω, τότε ορίζουμε **τομή** δύο συνόλων A και B ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα **κοινά** στοιχεία των A και B.
 Συμβολίζουμε με $A \cap B$ και έχουμε ότι:



$$A \cap B = \{x \in \Omega |\, x \in A \text{ και } x \in B\}$$

Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε τα σύνολα A και B λέγονται **ξένα μεταξύ τους ή διαζευκτά**.

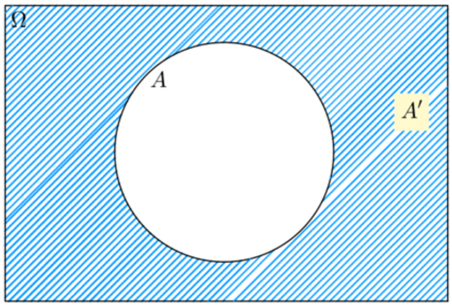
- Αν Ω ένα σύνολο αναφοράς και A, B δύο υποσύνολα του Ω, τότε ορίζουμε **ένωση** δύο συνόλων A και B ένα νέο σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία, τα οποία ανήκουν **σε ένα τουλάχιστον** από τα A και B.
 Συμβολίζουμε με $A \cup B$ και έχουμε ότι:



$$A \cup B = \{x \in \Omega |\, x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

Είναι προφανές ότι $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$. Επίσης, ισχύει $A \cup A = A$ και $A \cup \emptyset = A$.

- Αν Ω ένα σύνολο αναφοράς και A ένα υποσύνολο του Ω, τότε ορίζουμε **συμπλήρωμα** του A ως προς Ω ένα νέο σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία, τα οποία ανήκουν στο Ω και δεν ανήκουν στο A.
 Συμβολίζουμε με A' ή A^c και έχουμε ότι:



$$A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

- Ισχύουν οι ισοδυναμίες:
$$x \in A' \Leftrightarrow x \notin \mathrm{A} \text{ και } x \in A \Leftrightarrow x \notin A'$$
- Ένα στοιχείο του συνόλου αναφοράς Ω είτε θα ανήκει στο A είτε δεν θα ανήκει στο A. Επομένως, ισχύει ότι $A \cup A' = \Omega$.
- Δεν υπάρχει στοιχείο του συνόλου αναφοράς Ω, τέτοιο ώστε να ανήκει στο A και συγχρόνως να μην ανήκει στο A. Επομένως, ισχύει ότι $A \cap A' = \emptyset$.
- Αν ένα στοιχείο του συνόλου αναφοράς Ω δεν ανήκει στο συμπλήρωμα του συνόλου A, τότε ανήκει στο A και αντίστροφα. Επομένως, ισχύει ότι $(A')' = A$.

1.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

Ιδιότητες της σχέσης εγκλεισμού ($\subseteq$)

(α) $A \subseteq A$ για κάθε σύνολο A **(Ανακλαστική)**
(β) $A \subseteq B$ και $B \subseteq A \Longrightarrow A = B$ **(Αντισυμμετρική)**
(γ) ($A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$) $\Longrightarrow A \subseteq \Gamma$ **(Μεταβατική)**

Σχόλια

- Η σχέση $\subset$ του **γνήσιου εγκλεισμού** ικανοποιεί μόνο τη μεταβατική ιδιότητα. Ισχύει δηλαδή ότι: ($A \subset B$ και $B \subset \Gamma$) $\Longrightarrow A \subset \Gamma$
- Για τα βασικά αριθμοσύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ ισχύει: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- Το σύνολο A **που περιέχει όλα τα υποσύνολα του A** λέγεται **δυναμοσύνολο** και συμβολίζεται με $P(A)$. Ισχύει ότι $P(A) = \{X : X \subseteq A\}$, δηλαδή το δυναμοσύνολο ενός συνόλου A είναι ένα σύνολο, το οποίο **έχει ως στοιχεία σύνολα** που είναι υποσύνολα του A.
- Αν το σύνολο A έχει ν στοιχεία, τότε το δυναμοσύνολο του A έχει 2^{ν} στοιχεία.
  Για παράδειγμα, αν $A = \{2, 5\}$, τότε το δυναμοσύνολο του A είναι το σύνολο $P(A) = \{\emptyset,\ \{2\},\ \{5\},\ A\}$ και ισχύει $\nu(A) = 2,\ \nu(P(A)) = 2^2 = 4$.

Ιδιότητες ισότητας συνόλων

(α) $A = A$ για κάθε σύνολο A **(Ανακλαστική)**
(β) $A = B \Longrightarrow B = A$ **(Συμμετρική)**
(γ) ($A = B$ και $B = \Gamma$) $\Longrightarrow A = \Gamma$ **(Μεταβατική)**

Ιδιότητες της πράξης της τομής συνόλων

(α) $A \cap B = B \cap A$ **(Αντιμεταθετική)**
(β) $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$ **(Προσεταιριστική)**
(γ) $A \cap \Omega = A$
(δ) $A \cap \emptyset = \emptyset$
(ε) $A \cap A = A$
(στ) $(A \cap B) \subseteq A$ και $(A \cap B) \subseteq B$
(ζ) $A \subseteq B \Longrightarrow (A \cap \Gamma) \subseteq (B \cap \Gamma)$
(η) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$

Ιδιότητες της πράξης της ένωσης συνόλων

(α) $A \cup B = B \cup A$ **(Αντιμεταθετική)**
(β) $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$ **(Προσεταιριστική)**
(γ) $A \cup \Omega = \Omega$
(δ) $A \cup \emptyset = A$
(ε) $A \cup A = A$
(στ) $A \subseteq (A \cup B)$ και $B \subseteq (A \cup B)$
(ζ) $A \subseteq B \Longrightarrow (A \cup \Gamma) \subseteq (B \cup \Gamma)$
(η) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$

Ιδιότητες που συνδέουν τις πράξεις της ένωσης και της τομής συνόλων

(α) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
Η πράξη της ένωσης είναι επιμεριστική ως προς την πράξη της τομής.

(β) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$
Η πράξη της τομής είναι επιμεριστική ως προς την πράξη της ένωσης.

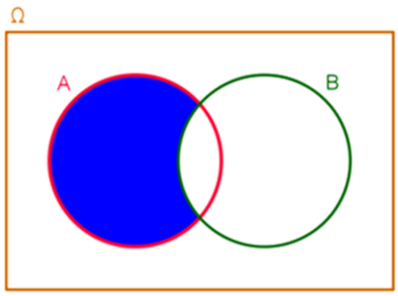
Βασικές σχέσεις σε δύο σύνολα που συνδέουν τις πράξεις της ένωσης, της τομής και του συμπληρώματος είναι γνωστές ως τύποι του De Morgan.

Πρόταση (Τύποι De Morgan)

(α) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(β) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

- Αν Ω ένα σύνολο αναφοράς και A, B δύο υποσύνολα του Ω, τότε ορίζουμε **διαφορά του $\boldsymbol{B}$ από το $\boldsymbol{A}$** ένα νέο σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του A, τα οποία δεν ανήκουν στο B.
  Συμβολίζουμε με $A - B$ και έχουμε ότι:
  $A - B = A \cap B' = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \notin B\}$



Παράδειγμα 1

Δίνονται τα σύνολα $A = \mathbb{Z}$ και $B = \mathbb{N}$. Να ορίσετε τα σύνολα $A - B$ και $B - A$.

Λύση

Το σύνολο $A - B$ περιέχει όλους τους ακέραιους αριθμούς που δεν είναι φυσικοί. Συνεπώς, $A - B = \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}$.
Το σύνολο $B - A$ είναι το κενό σύνολο, γιατί δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί που να μην είναι ακέραιοι. Δηλαδή, $B - A = \emptyset$.

1.3 ΑΡΧΗ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ - ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ

Διερεύνηση 1

(α) Αν A, B είναι δύο πεπερασμένα σύνολα, να εξηγήσετε πότε ισχύει η ισότητα:

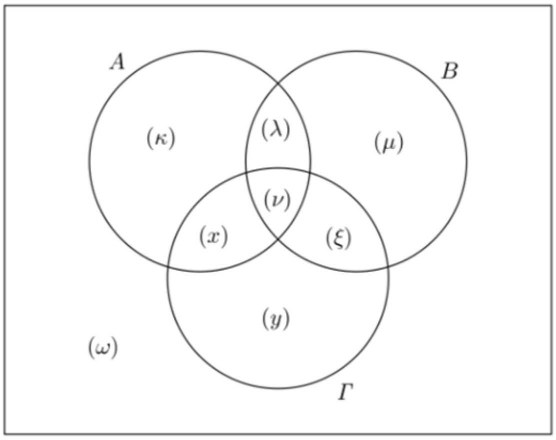
$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$$

(β) Γιατί δεν ισχύει πάντοτε αυτή η ισότητα;

(γ) Ποιος πληθικός αριθμός βελτιώνει την ισότητα για όλα τα πεπερασμένα σύνολα A, B;

Διερεύνηση 2

Τα σύνολα A, B και Γ είναι τρία πεπερασμένα σύνολα στο σύνολο αναφοράς Ω με $\nu(\Omega) = N, N \in \mathbb{N}$, όπως φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα. Οι περιοχές $(\kappa), (\lambda), (\mu), (\nu), (\xi), (x), (y)$ και (ω) δείχνουν το πλήθος των στοιχείων στη συγκεκριμένη περιοχή.



(α) Να αναφέρετε πόσες φορές μετριέται η κάθε περιοχή στο άθροισμα $\nu(A) + \nu(B) + \nu(\Gamma)$.

(β) Να αναφέρετε πόσες φορές μετριέται η κάθε περιοχή στο άθροισμα $\nu(A) + \nu(B) + \nu(\Gamma) - \nu(A \cap B) - \nu(B \cap \Gamma) - \nu(\Gamma \cap A)$.

(γ) Πόσες φορές πρέπει να μετρηθεί η κάθε μία περιοχή εντός των κύκλων, ώστε να υπολογίσουμε τον πληθικό αριθμό της ένωσης των τριών συνόλων A, B, Γ;

(δ) Να χρησιμοποιήσετε το ερώτημα (β), για να βρείτε έναν τύπο για τον πληθικό αριθμό $\nu(A \cup B \cup \Gamma)$.

(ε) Να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο θα υπολογίσετε τον αριθμό $\nu(A' \cap B' \cap \Gamma')$.

Εισαγωγή στην Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

Η αρχή του εγκλεισμού - αποκλεισμού αναφέρεται στο πλήθος των στοιχείων δύο πεπερασμένων συνόλων A και B σε σχέση με το πλήθος των στοιχείων της ένωσης και της τομής των δύο συνόλων.

Όταν έχουμε δύο ξένα και πεπερασμένα σύνολα A, B, είναι προφανές ότι τα δύο σύνολα δεν έχουν κοινά στοιχεία. Έτσι, ισχύει $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \nu(A \cap B) = 0$ και ότι $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$.

Ενδιαφέρον παρουσιάζεται στην περίπτωση όπου τα δύο σύνολα A, B δεν είναι ξένα μεταξύ τους. Αν δηλαδή $A \cap B \neq \emptyset$, ποια είναι η αλγεβρική σχέση που συνδέει το πλήθος των στοιχείων της ένωσης των δύο συνόλων με το πλήθος των στοιχείων των δύο συνόλων;

Είναι προφανές ότι, όταν $A \cap B \neq \emptyset$, αν υπολογίσουμε τον $\nu(A \cup B)$ στο άθροισμα $\nu(A) + \nu(B)$, τότε ο $\nu(A \cap B)$ έχει υπολογιστεί διπλά. Για να διορθωθεί το σφάλμα στον υπολογισμό του $\nu(A \cup B)$, πρέπει να αφαιρεθεί μία φορά ο $\nu(A \cap B)$.

Σε αυτό το σημείο αιτιολογείται και η ονομασία της αρχής (εγκλεισμός – αποκλεισμός), γιατί κατά τον υπολογισμό του αθροίσματος $\nu(A) + \nu(B)$, περιλαμβάνουμε όλα τα στοιχεία της ένωσης που θέλουμε να καταμετρήσουμε (τα εγκλείουμε), αλλά κάποια από αυτά τα στοιχεία (αυτά της τομής των δύο συνόλων) είναι ήδη διπλομετρημένα, οπότε και τα αποκλείουμε.

Έτσι, προκύπτει η αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού για δύο σύνολα, που είναι η αλγεβρική σχέση που συνδέει τους πληθικούς αριθμούς της ένωσης και της τομής των δύο συνόλων.

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

Για δύο πεπερασμένα σύνολα A και B ισχύει:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B)$$

Στηριζόμενοι στην προφανή σχέση $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$, όταν $A \cap B = \emptyset$, μπορούμε να αποδείξουμε βασικές σχέσεις στους πληθικούς αριθμούς, αρκεί να εντοπίζουμε δύο ξένα σύνολα.

Πρόταση

Αν $A, B \subseteq \Omega$ είναι δύο πεπερασμένα σύνολα με $A \cap B \neq \emptyset$, τότε ισχύουν:

(α) $\nu(A') = \nu(\Omega) - \nu(A)$

(β) $\nu(A \cap B') = \nu(A) - \nu(A \cap B)$

(γ) $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B)$,

(δ) $\nu(A' \cap B') = \nu(\Omega) - \nu(A) - \nu(B) + \nu(A \cap B)$

Απόδειξη

(α) Τα σύνολα A και A' είναι ξένα μεταξύ τους. Ισχύει $A \cup A' = \Omega$.
Επομένως:

$$\nu(A \cup A') = \nu(\Omega) \Leftrightarrow \nu(A) + \nu(A') = \nu(\Omega) \Leftrightarrow \nu(A') = \nu(\Omega) - \nu(A)$$

(β) Τα σύνολα $A \cap B$ και $A \cap B'$ είναι ξένα μεταξύ τους. Ισχύει $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$.
Επομένως:
$\nu\big((A \cap B) \cup (A \cap B')\big) = \nu(A) \Leftrightarrow \nu(A \cap B) + \nu(A \cap B') = \nu(A) \Leftrightarrow$
$\nu(A \cap B') = \nu(A) - \nu(A \cap B)$

(γ) Τα σύνολα $A \cap B'$ και B είναι ξένα μεταξύ τους. Ισχύει $A \cup B = (A \cap B') \cup B$.
Επομένως:

$$\nu(A \cup B) = \nu((A \cap B') \cup B) = \nu(A \cap B') + \nu(B) = \nu(A) - \nu(A \cap B)$$

(δ) $\nu(A' \cap B') = \nu((A \cup B)') = \nu(\Omega) - \nu((A \cup B)' = \nu(\Omega) - (\nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B))$
$= \nu(\Omega) - \nu(A) - \nu(B) + \nu(A \cap B)$

Παράδειγμα 1

Σε μια βιβλιοθήκη υπάρχουν 10 βιβλία με περιεχόμενο στις πιθανότητες, 8 βιβλία με περιεχόμενο στην στατιστική και 6 βιβλία με περιεχόμενο και στις πιθανότητες και στην στατιστική. Πόσα βιβλία υπάρχουν με περιεχόμενο τουλάχιστον σε ένα από τα δύο θέματα;

Λύση

Έστω A το σύνολο των βιβλίων με περιεχόμενο στις πιθανότητες. Τότε, $\nu(A) = 10$.
Έστω B το σύνολο των βιβλίων με περιεχόμενο στην στατιστική. Τότε, $\nu(B) = 8$.
Έστω $A \cap B$ το σύνολο των βιβλίων με περιεχόμενο και στις πιθανότητες και στην στατιστική. Τότε, $\nu(A \cap B) = 6$
Το πλήθος των βιβλίων με περιεχόμενο τουλάχιστον σε ένα από τα δύο θέματα είναι ο πληθικός αριθμός $\nu(A \cup B)$.
Με χρήση της σχέσης του εγκλεισμού αποκλεισμού, έχουμε:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(A) - \nu(A \cap B) = 10 + 8 - 6 = 12$$

1.4 Η ΑΡΧΗ DIRICHLET (ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΠΕΡΙΣΤΕΡΟΦΩΛΙΑΣ)

Διερεύνηση 1

(α) Να εξηγήσετε γιατί μεταξύ οποιωνδήποτε 13 ατόμων υπάρχουν τουλάχιστον 2 άτομα, τα οποία έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα του έτους.

(β) Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος ατόμων, ώστε να υπάρχουν μεταξύ τους:

i. τουλάχιστον 3 άτομα, τα οποία να έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα του έτους

ii. τουλάχιστον 6 άτομα, τα οποία να έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα του έτους

Η Αρχή της Περιστεροφωλιάς

Αν 4 περιστέρια τοποθετηθούν σε 3 φωλιές (μη διακεκριμένες), τότε όλες οι περιπτώσεις τοποθέτησής τους (αν επιτρέπεται να μείνει και κάποια φωλιά άδεια) είναι:

- ✓ $4-0-0$
- ✓ $3-1-0$
- ✓ $2-2-0$
- ✓ $2-1-1$

Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση υπάρχει τουλάχιστον μια φωλιά, στην οποία έχουν τοποθετηθεί **τουλάχιστον** 2 περιστέρια. Δεν θα μπορούσε να υπάρξει περίπτωση, κατά την οποία σε κάθε φωλιά να είχαμε αντίθετη πρόταση από την προηγούμενη. Δηλαδή, **δεν μπορεί να έχουμε το πολύ ένα** περιστέρι σε κάθε φωλιά, γιατί τότε μόνο $3 \cdot 1 = 3$ περιστέρια από τα 4 θα τοποθετούσαμε, κάτι που δεν ισχύει.

Η απλή αυτή ιδέα μπορεί να γενικευθεί σε μια αρχή, την οποία διατύπωσε ο μαθηματικός Dirichlet και είναι γνωστή ως Αρχή Περιστεροφωλιάς (ή Περιστερώνα).

Αρχή Περιστεροφωλιάς

Αν τοποθετήσουμε $\nu+1$ περιστέρια σε ν περιστεροφωλιές, τότε υπάρχει **τουλάχιστον** μια περιστεροφωλιά, η οποία θα περιέχει τουλάχιστον 2 περιστέρια.

- ➢ Η απόδειξη της πιο πάνω αρχής γίνεται απλά με τη μέθοδο της *«Εις άτοπον απαγωγής»*. Δηλαδή, θεωρούμε ότι το συμπέρασμα μας δεν ισχύει. Άρα, σε κάθε μία από τις ν περιστεροφωλιές, ο αριθμός των περιστεριών θα είναι το πολύ 1. Σε μια τέτοια περίπτωση τα περιστέρια θα ήταν το πολύ ν, γιατί σε ν φωλιές επί 1 περιστέρι (το πολύ) σε κάθε φωλιά, έχουμε το πολύ $\nu \cdot 1 = \nu$. Αυτό δεν ισχύει (είναι δηλαδή άτοπο), οπότε η παραδοχή μας ότι όλες οι φωλιές έχουν το πολύ 1 περιστέρι δεν ισχύει. Επομένως, θα ισχύει το αρχικό συμπέρασμα που ισχυρίζεται ότι υπάρχει τουλάχιστον μια περιστεροφωλιά, η οποία θα περιέχει τουλάχιστον 2 περιστέρια.

- Σε προβλήματα που θέλουμε να εφαρμόσουμε την αρχή της περιστεροφωλιάς, πρέπει να είμαστε σε θέση να εντοπίσουμε τόσο τις περιστεροφωλιές, όσο και τα περιστέρια.

Παράδειγμα 1

Να αποδείξετε ότι μεταξύ 8 τυχαίων ανθρώπων, υπάρχουν τουλάχιστον 2 που έχουν γεννηθεί την ίδια μέρα της εβδομάδας.

Λύση

1ος τρόπος

Αφού όλες οι μέρες της εβδομάδας είναι 7 (περιστεροφωλιές) και τα άτομα 8 (περιστέρια), τότε από την αρχή της περιστεροφωλιάς θα υπάρχει τουλάχιστον μία μέρα, στην οποία θα έχουν γεννηθεί 2 τουλάχιστον άτομα.

2ος τρόπος

Αν υποθέσουμε ότι σε κάθε μέρα της εβδομάδας έχει γεννηθεί το πολύ ένα άτομο, τότε όλα τα άτομα θα είναι το πολύ $7 \cdot 1 = 7$ (άτοπο), αφού τα άτομα είναι 8. Επομένως, υπάρχουν τουλάχιστον 2 άτομα που έχουν γεννηθεί την ίδια μέρα.

Παράδειγμα 2

Δίνονται 6 τυχαίοι φυσικοί αριθμοί. Να αποδείξετε υπάρχουν δύο τουλάχιστον φυσικοί αριθμοί, ώστε η διαφορά τους να είναι πολλαπλάσιο του 5.

Λύση

Χωρίζουμε όλους τους φυσικούς αριθμούς σε πέντε ομάδες, ανάλογα με το υπόλοιπο που αφήνουν όταν διαιρεθούν με το 5. Δηλαδή, έχουμε πέντε σύνολα, τα οποία είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους και αποτελούν τις «περιστεροφωλιές»:

$\Phi_1 = \{1, 6, 11, 16, 21, \dots\}$, «Αφήνουν υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθούν με το 5»

$\Phi_2 = \{2, 7, 12, 17, 22, \dots\}$, «Αφήνουν υπόλοιπο 2 όταν διαιρεθούν με το 5»

$\Phi_3 = \{3, 8, 13, 18, 23, \dots\}$, «Αφήνουν υπόλοιπο 3 όταν διαιρεθούν με το 5»

$\Phi_4 = \{4, 9, 14, 19, 24, \dots\}$, «Αφήνουν υπόλοιπο 4 όταν διαιρεθούν με το 5»

$\Phi_5 = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$, «Αφήνουν υπόλοιπο 0 όταν διαιρεθούν με το 5»

Τα «περιστέρια» μας είναι οι 6 τυχαίοι φυσικοί αριθμοί. Από την αρχή της περιστεροφωλιάς, θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 φυσικοί αριθμοί, οι οποίοι θα ανήκουν στο ίδιο σύνολο, δηλαδή σε ένα από τα $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5$.

Αφού δύο τέτοιοι φυσικοί αριθμοί, έστω οι μ, ν, θα έχουν το ίδιο υπόλοιπο υ κατά τη διαίρεσή τους με το 5, τότε γράφονται στην μορφή $\mu = 5\kappa_1 + \upsilon$ και $\lambda = 5\kappa_2 + \upsilon$ με $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{N}$ και $\upsilon \in \{0,1,2,3,4\}$.

Επομένως, η διαφορά τους θα είναι ίση με:

$$\kappa - \lambda = (5\kappa_1 + \upsilon) - (5\kappa_2 + \upsilon\,) = 5\kappa_1 - 5\kappa_2 = 5(\kappa_1 - \kappa_2) = \text{πολλαπλάσιο } 5$$

Παράδειγμα 3

Σε ένα σχολείο των 700 μαθητών, πόσοι τουλάχιστον μαθητές υπάρχουν που έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα του έτους;

Λύση

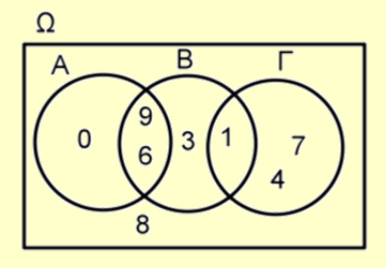
Ένα έτος έχει 12 μήνες. Άρα, σε 12 «φωλιές» θα πρέπει να τοποθετηθούν 700 «περιστέρια». Διαιρώντας το 700 διά του 12, έχουμε πηλίκο 58 και υπόλοιπο 4. Επομένως, ο μικρότερος αριθμός προκύπτει, αν τοποθετήσουμε στις 12 φωλιές από 58 άτομα. Τα 4 άτομα που απομένουν τα τοποθετούμε σε διαφορετικές φωλιές. Οπότε υπάρχουν τουλάχιστον 59 άτομα με τον ίδιο μήνα γέννησης.

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Αν $A \subseteq B$, τότε ισχύει $\nu(A) \leq \nu(B)$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν $x \in (A - B)$, τότε ισχύει ότι $x \notin B$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Ισχύει πάντα ότι $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Ισχύει πάντα ότι $x \in \{x\}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Το κενό σύνολο περιέχει το 0.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Ισχύει πάντα ότι $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	Τα σύνολα $\Omega - A$ και A' είναι ίσα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Στο πιο κάτω διάγραμμα παρουσιάζεται ένα σύνολο αναφοράς Ω και τα υποσύνολά του A, B και Γ.



Να βρείτε τα πιο κάτω σύνολα με αναγραφή των στοιχείων τους:

(α) $A \cap B$ (β) $A \cap \Gamma$ (γ) $A \cup \Gamma$

(δ) $A - B$ (ε) $B - A$ (στ) $(A \cap B)'$

(ζ) $(A \cup \Gamma)'$ (η) $A \cup B \cup \Gamma$ (θ) $A' \cup B'$

(ι) $A' \cap B'$

3. Δίνεται το σύνολο αναφοράς $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και τα υποσύνολά του $A = \{x \in \Omega \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \in \Omega \mid x \text{ άρτιος}\}$.
Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τα πιο κάτω σύνολα:

(α) A' (β) $A \cap B$ (γ) $A \cup B$

(δ) $A - B$ (ε) $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$ (στ) $B - A$

4. Σε ένα σύνολο 20 μαθητών, 10 μαθητές έχουν διαγώνισμα μόνο τη Δευτέρα, 5 μαθητές έχουν διαγώνισμα μόνο την Τρίτη και 3 μαθητές έχουν διαγώνισμα και τις δύο μέρες. Να βρείτε πόσοι από τους 20 μαθητές:
   (α) έχουν διαγώνισμα τη Δευτέρα
   (β) έχουν διαγώνισμα την Τρίτη
   (γ) έχουν ένα μόνο διαγώνισμα αυτές τις δύο μέρες
   (δ) έχουν διαγώνισμα τουλάχιστον σε μια από τις δύο μέρες
   (ε) δεν έχουν διαγώνισμα ούτε τη Δευτέρα ούτε την Τρίτη

5. Σε μια τάξη των 20 παιδιών, οι 12 προτιμούν ως αγαπημένο τους φρούτο το μήλο, ενώ οι 10 προτιμούν το αχλάδι. Αν υπάρχουν 5 παιδιά που δεν προτίμησαν ούτε μήλο, ούτε αχλάδι, πόσα από τα παιδιά προτιμούν και μήλο και αχλάδι;

6. Πόσοι φυσικοί αριθμοί από το 1 μέχρι και το 100 διαιρούνται είτε με το 3 είτε με το 5;

7. Πόσοι φυσικοί αριθμοί από το 1 μέχρι και το 1000 δεν διαιρούνται ούτε με το 5, ούτε με το 7;

8. Να αποδείξετε ότι ανάμεσα σε 5 τυχαία άτομα, υπάρχουν τουλάχιστον 2 που έχουν γεννηθεί την ίδια εποχή του χρόνου.

9. Να αποδείξετε σε ένα σχολείο των 500 μαθητών υπάρχουν τουλάχιστον 71 μαθητές που έχουν γεννηθεί την ίδια ημέρα.

10. Πόσους μαθητές τουλάχιστον πρέπει να έχει ένα σχολείο αν γνωρίζουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 48 παιδιά που έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα;

11. Να αποδείξετε ότι μεταξύ 8 φυσικών αριθμών υπάρχουν τουλάχιστον 2 με διαφορά 7.

12. Αν επιλέξουμε 11 τυχαίους αριθμούς από το σύνολο $\{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$, να αποδείξετε ότι σίγουρα υπάρχουν δύο που είναι πρώτοι μεταξύ τους.