ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Γυμνασίου

Α΄ Τεύχος

Αναθεωρημένη Έκδοση

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Γυμνασίου

Α΄ τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ Τεύχος

Συγγραφή: Αθανασίου Ανδρέας
Αντωνιάδης Μάριος
Γιασουμής Νικόλας
Έλληνα Αγγέλα
Ματθαίου Κυριάκος
Μουσουλίδου – Νικολαΐδου Μαριλένα
Παπαγιάννης Κωνσταντίνος
Τιμοθέου Σάββας
Φιλίππου Ανδρέας

Συντονιστής: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*

Εποπτεία: Θεοφίλου Στέλιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Κωστή Αντώνιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παντελή Παντελής, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*

Γλωσσική επιμέλεια: Παλάτου – Χριστόφια Μαριάννα, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Σχεδιασμός εξωφύλλου: Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης: Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Α΄ έκδοση 2012
Β΄ έκδοση 2013
Γ΄ έκδοση 2014

Εκτύπωση: Ariagraf & ΣΙΑ ΕΕ

ISBN: 978-9963-0-4738-3

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε δύο τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Στην αρχή κάθε ενότητας γίνεται παράθεση των στόχων και οι μαθητές/τριες προϊδεάζονται ως προς το τι «… θα μάθουμε». Ακολουθεί, στο «Έχουμε μάθει …», η παρουσίαση της αναγκαίας προϋπάρχουσας γνώσης που οι μαθητές/τριες πρέπει να διαθέτουν, κάτι που βοηθά τους/τις εκπαιδευτικούς στον καταρτισμό καλύτερης διαγνωστικής και διαμορφωτικής αξιολόγησης. Στη συνέχεια, οι νέες μαθηματικές έννοιες διερευνώνται με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών/τριών, όπως ορίζουν οι αρχές των Εκσυγχρονισμένων Αναλυτικών Προγραμμάτων των Μαθηματικών. Η προσπάθεια κλιμακώνεται με παραδείγματα και διαβαθμισμένες δραστηριότητες, με έμφαση στη λύση προβλήματος και στην ανάδειξη της τεχνολογίας ως αναπόσπαστου μέρους της Μαθηματικής εκπαίδευσης.

Όλες οι εκδόσεις για τα Μαθηματικά των τελευταίων χρόνων βρίσκονται υπό συνεχή αξιολόγηση, διαμόρφωση και βελτίωση στη βάση της ανατροφοδότησης και των παρατηρήσεων που προέρχονται και από τους/τις μάχιμους/ες καθηγητές/τριες των Μαθηματικών. Αναμένω από τους διδάσκοντες/ουσες να εκφράσουν τις απόψεις τους και να υποβάλουν τις εισηγήσεις τους, τόσο σε σχέση με το περιεχόμενο του βιβλίου και το επίπεδο των ασκήσεων και δραστηριοτήτων όσο και σε σχέση με τον τρόπο προσέγγισης της ύλης.

Όλο το υλικό που παράγεται για το μάθημα των Μαθηματικών αποσκοπεί στη βοήθεια τόσο των μαθητών/τριών, όσο και των καθηγητών/τριών, στην πορεία τους μέσα από τα Εκσυγχρονισμένα Αναλυτικά Προγράμματα, με στόχο το καλύτερο αποτέλεσμα. Είναι εμποτισμένο με τον σύγχρονο τρόπο σκέψης και προσηλωμένο στην προαγωγή και στην ανάδειξη των βασικών δεξιοτήτων των μαθητών/τριών μας, που αποτελεί πρώτιστο μέλημά μας. Η προσπάθεια συνεχίζεται και οι προοπτικές είναι λαμπρές.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τον κύριο Κωνσταντίνο Χρίστου, Καθηγητή στο Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Σάββας Αντωνίου

Αναπληρωτής Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

Επανάληψη

… από την Α΄ και Β΄ Γυμνασίου

Επανάληψη από την Α΄ και Β΄ Γυμνασίου

Δραστηριότητες

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(-2)\cdot(-3)$ (β) $(-2)\ +(-3)$

(γ) $(-2)-(-3)$ (δ) $-2+5-3$

(ε) $-3+4-|-5|$ (στ) $(-3-5):(-4)$

(ζ) $(-3)-(-5)\cdot(+4)$ (η) $(-3):(-1)+(-5)\cdot(+4)$

(θ) $(-3)^3+(-5)^2-(-1)^4$ (ι) $(-5):(-4+3)^2$

2. Να χαρακτηρίσετε τον καθένα από τους πιο κάτω αριθμούς, ως ρητό ή άρρητο αριθμό:

$\sqrt{21}$, $\frac{3}{5}$, $\sqrt[3]{8}$, $-\frac{1}{3}$, π, $\sqrt{9}$, -2, $\sqrt[3]{9}$

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $\sqrt{81}-\sqrt[3]{27}$ (β) $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$

(γ) $\sqrt{5-\sqrt{16}}$ (δ) $\sqrt{81}\cdot\sqrt{16}$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $8\alpha-2\alpha$ (β) $-2x+3x-5x-x$

(γ) $-2xy-7xy+4xy$ (δ) $(-5x^2)\cdot(-4x)$

(ε) $(-2x^2)^2$ (στ) $(2\alpha\beta^2)\cdot(-6\alpha^2\beta^5)$

(ζ) $(30x^6):(-5x^2)$ (η) $(-18y^2\omega^2):(-6\omega y^2)$

(θ) $(-2\alpha^2)\cdot(-\alpha^2)+5\alpha^4$ (ι) $6\alpha^4\beta^3-(-2\alpha^3\beta)\cdot(3\alpha\beta^2)$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $2x(3x+5)$ (β) $-3y^2(2y-1)$

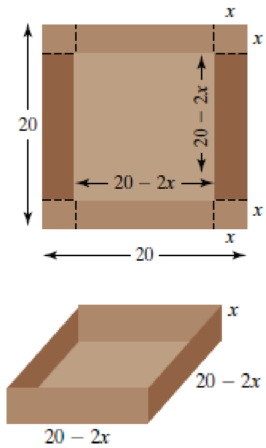
(γ) $(\alpha-2)(\alpha+2)$ (δ) $(2\alpha+3)(\ \alpha+2)$

(ε) $(4x^2-5)(2x-1)$ (στ) $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta-\gamma)$

(ζ) $(3x-1)(x-2)-10x$ (η) $3\alpha(\alpha-2\beta)-3\beta(2\beta-\alpha)$

(θ) $3y^2(-2y+3)-(2-y)$ (ι) $-2(3\alpha^2+4\alpha-2)+(2\alpha-1)$

6. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση: $A = 3(x - 2y) - 2x + 5(y + 1)$.
   (α) Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση στην πιο απλή της μορφή.
   (β) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης, αν $x = 2$ και $y = -1$.
   (γ) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης, αν $x - y = 15$.



7. Ένα κουτί κατασκευάζεται από ένα τετράγωνο κομμάτι χαρτόνι με πλευρά 20 cm. Κόβουμε τα τετράγωνα από κάθε γωνία του και συμβολίζουμε με x το μήκος της πλευράς τους, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
   (α) Για ποιες τιμές του x μπορεί να κατασκευαστεί το κουτί;
   (β) Να γράψετε ένα πολυώνυμο, συναρτήσει του x, που να δίνει τον όγκο του κουτιού (να γίνει διάταξη του πολυωνύμου κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x).
   (γ) Να υπολογίσετε τον όγκο του κουτιού, αν τα τετράγωνα που θα αφαιρέσουμε από τις γωνίες του αρχικού χαρτονιού έχουν πλευρά 4 cm.

8. Να κάνετε τις διαιρέσεις:
   (α) $(8\alpha^2 - 10\alpha) : (2\alpha)$ (β) $(9y^8 - 6y^6) : (-3y^3)$
   (γ) $(9x^3\omega - 24x\omega^5) : (-3x\omega)$ (δ) $\frac{x^4y^5 - 4x^3y^2 + 2xy}{2xy}$
   (ε) $(\alpha^2 - 4\alpha) : (a - 4)$
   (στ) $(x^2 - x - 12) : (x - 4)$
   (ζ) $(25x^2 + 10x + 4) : (5x + 1)$

9. Δίνονται τα πολυώνυμα:
   $A = 4x^4 - x^3 - x + 7$, $B = -x^4 + 5x^2 - 5$ και $\Gamma = x^2 + 1$
   Να κάνετε τις πράξεις:
   (α) $\Gamma - B + A$ (β) $(A + B) - 2\Gamma$

10. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 7x^2 - 5x + 4$ και $Q(x) = -3x^2 + 5x - 9$. Να υπολογίσετε:
   (α) $P(-1)$ (β) $Q(+2)$
   (γ) $A(x) = P(x) + Q(x)$ (δ) $A(-2)$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $2x-6=4x-2$ (β) $3(x-1)+3=3x$

(γ) $3x-5(x+1)=2x-3$ (δ) $5(x+2)-3(1-x)=8x+6$

(ε) $x-\frac{1}{2}=\frac{2x-1}{3}+\frac{3}{2}$ (στ) $\frac{2(\omega+1)}{4}-\frac{\omega-1}{2}=1+\frac{\omega}{6}$

12. Δίνεται ορθογώνιο του οποίου το μήκος είναι κατά $3\,cm$ μεγαλύτερο από το πλάτος του. Αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $46\,cm$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

13. Να λύσετε τα συστήματα:

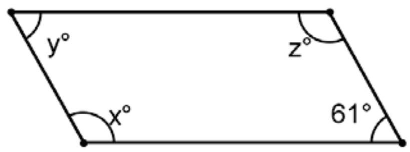
(α) $\begin{array}{l} x-y=-1 \\ 2x+y=4 \end{array}$ (β) $\begin{array}{l} x+2y=3 \\ 3x+4y=7 \end{array}$

14. Να εξετάσετε ποιες ιδιότητες ισχύουν για καθένα από τα πιο κάτω τετράπλευρα, σημειώνοντας «✓».

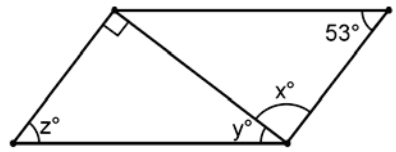
ΙΔΙΟΤΗΤΑ	Παραλληλόγραμμο	Ορθογώνιο	Τετράγωνο	Ρόμβος
Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.				
Οι διαγώνιοι είναι ίσες.				
Οι πλευρές είναι ίσες.				
Οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα.				
Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.				
Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.				
Οι γωνίες του είναι $90°$.				
Δυο διαδοχικές γωνίες είναι παραπληρωματικές.				
Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.				
Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του.				

15. Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y, z στα πιο κάτω παραλληλόγραμμα:

(α)



(β)



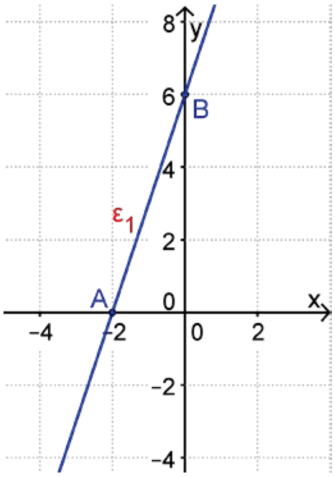
16. Ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει διαστάσεις διπλάσιες από τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου ΚΛΜΝ. Να συγκρίνετε:
   (α) το εμβαδόν των δύο ορθογωνίων,
   (β) την περίμετρο των δύο ορθογωνίων.

17. Δίνεται η ευθεία ε_1 με εξίσωση $y = 2x$.
   (α) Να εξετάσετε κατά πόσο τα σημεία $(2,1)$ και $(-2,-4)$ ανήκουν στην ευθεία ε_1.
   (β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε_1 με τους άξονες.
   (γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ευθείας ε_1.
   (δ) Στο ίδιο ορθογώνιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις ευθείες ε_2: $x = 2$ και ε_3: $y = -1$.

18. Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ περνά από τα σημεία $A(0,-4)$ και $B(1,-2)$.
   (α) Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β.
   (β) Να παραστήσετε γραφικά την πιο πάνω ευθεία.
   (γ) Να βρείτε την κλίση της ευθείας.

19. Δίνεται η συνάρτηση $-5x + 6y = 30$.
   (α) Αν K και Λ είναι τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες x και y αντίστοιχα, να βρεθούν οι συντεταγμένες των K και Λ.
   (β) Να παραστήσετε γραφικά την πιο πάνω ευθεία.
   (γ) Αν M είναι η αρχή των αξόνων να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $MK\Lambda$.

20. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ευθείας ε_1.
    (α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε_1.
    (β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1.
    (γ) Στο ίδιο ορθογώνιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε την ευθεία ε_2: $y = 6 - 3x$.
    (δ) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου B το σημείο τομής της ε_2 με τον άξονα των x.

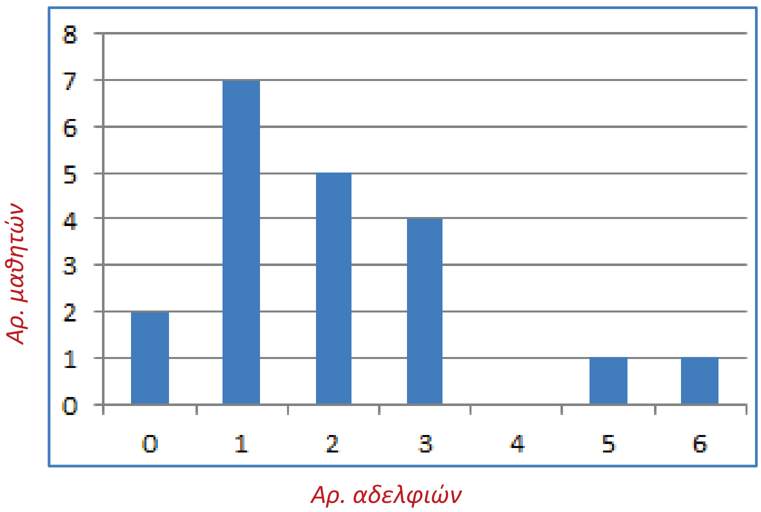


21. Σε ένα λύκειο θέλουμε να εξετάσουμε την επίδοση 10 μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών στο τέλος του β΄ τετραμήνου. Πήραν τις ακόλουθες βαθμολογίες:

$$15 , 11 , 10 , 10 , 14 , 16 , 19 , 18 , 13 , 17$$

    Να βρείτε:
    (α) τη μέση τιμή της βαθμολογίας των 10 μαθητών,
    (β) τη διάμεσο της βαθμολογίας των 10 μαθητών,
    (γ) το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό μικρότερο από τη μέση τιμή της βαθμολογίας.

22. Το διάγραμμα που ακολουθεί δείχνει πόσα αδέλφια έχουν οι μαθητές μιας τάξης.



    Να υπολογίσετε:
    (α) τη μέση τιμή,
    (β) τη διάμεσο,
    (γ) την επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων.

23. Ρίχνουμε δύο ζάρια. Αφού καταγράψετε τον δειγματικό χώρο, να βρείτε την πιθανότητα:
    A: το άθροισμα των δύο ενδείξεων να είναι μικρότερο του 6,
    Β: η ένδειξη και στα δύο ζάρια να είναι 5,
    Γ: το γινόμενο των δύο ενδείξεων να είναι άρτιος αριθμός,
    Δ: η μια τουλάχιστον ένδειξη να είναι 4,
    Ε: τα ζάρια να μην έχουν την ίδια ένδειξη.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Διανύσματα

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε το διάνυσμα.
- Να ορίζουμε τις σχέσεις μεταξύ διανυσμάτων (παράλληλα, ομόρροπα, αντίρροπα, ίσα και αντίθετα διανύσματα).
- Να προσθέτουμε και να αφαιρούμε διανύσματα.

Λύση προβλήματος

ΔΥΝΑΜΗ ΤΟΥ ΑΝΕΜΟΥ

Στην πόλη Ζετάουν σκέφτονται να εγκαταστήσουν ανεμογεννήτριες για την παραγωγή ηλεκτρισμού. Το συμβούλιο της Ζετάουν συνέλεξε πληροφορίες σχετικά με το ακόλουθο μοντέλο ανεμογεννήτριας:

Μοντέλο:	E-82
Ύψος του πύργου:	138 μέτρα
Αριθμός ελίκων:	3
Μήκος έλικα:	40 μέτρα
Μέγιστη ταχύτητα περιστροφής:	20 στροφές ανά λεπτό
Κόστος κατασκευής:	3 200 000 ζετς
Έσοδα:	0,10 ζετς ανά kWh που παράγεται
Κόστος συντήρησης:	0,01 ζετς ανά kWh που παράγεται
Αποδοτικότητα:	97% του χρόνου σε λειτουργία

Σημείωση: Η κιλοβατώρα (kWh) είναι μονάδα μέτρησης της ηλεκτρικής ενέργειας.

Ερώτηση 1:

Να αποφασίσετε κατά πόσο οι πιο κάτω δηλώσεις για τις ανεμογεννήτριες E-82 προκύπτουν από τις πληροφορίες που παρέχονται. Να βάλετε σε κύκλο "Ναι" ή "Όχι" για κάθε δήλωση.

Δήλωση	Η δήλωση προκύπτει από τις πληροφορίες που παρέχονται;
Το κόστος κατασκευής τριών ανεμογεννητριών θα είναι συνολικά μεγαλύτερο από 8 000 000 ζετς.	Ναι / Όχι
Το κόστος συντήρησης της ανεμογεννήτριας αντιστοιχεί περίπου στο 5% των εσόδων που αποφέρει η ανεμογεννήτρια.	Ναι / Όχι
Το κόστος συντήρησης της ανεμογεννήτριας εξαρτάται από τον αριθμό των kWh που παράγονται.	Ναι / Όχι
Ακριβώς 97 μέρες τον χρόνο, η ανεμογεννήτρια είναι εκτός λειτουργίας.	Ναι / Όχι

Ερώτηση 2:

Η Ζετάουν θέλει να υπολογίσει το κόστος και το κέρδος που θα δημιουργηθεί από την εγκατάσταση ανεμογεννητριών. Ο δήμαρχος της πόλης προτείνει τον ακόλουθο τύπο για τον υπολογισμό του οικονομικού οφέλους, Κ σε ζετς, για μία περίοδο y χρόνων, αν εγκατασταθεί το μοντέλο ανεμογεννήτριας Ε-82.

$$\mathbf{K = \underbrace{400\,000\,y}_{\text{Κέρδος από την ετήσια παραγωγή ηλεκτρισμού}} - \underbrace{3\,200\,000}_{\text{Κόστος εγκατάστασης της ανεμογεννήτριας}}}$$

Με βάση τον τύπο που προτείνει ο δήμαρχος, ποιος είναι ο ελάχιστος χρόνος λειτουργίας της ανεμογεννήτριας, ώστε να καλυφθεί το κόστος εγκατάστασής της;

Α. *6 χρόνια*

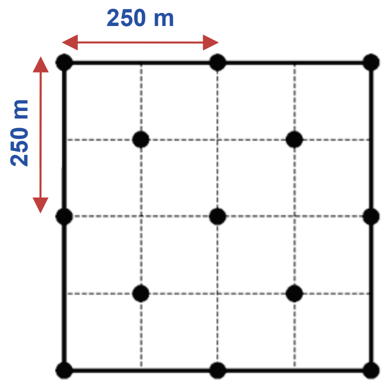
Β. *8 χρόνια*

Γ. *10 χρόνια*

Δ. *12 χρόνια*

Ερώτηση 3:

Η Ζετάουν αποφάσισε να αναγείρει μερικές ανεμογεννήτριες Ε-82 σε ένα τετράγωνο οικόπεδο (μήκος = πλάτος = 500 m).
Σύμφωνα με τους κανονισμούς κατασκευής, η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα στους πύργους δύο ανεμογεννητριών αυτού του μοντέλου, πρέπει να είναι πέντε φορές το μήκος του περιστρεφόμενου έλικα.
Η πρόταση του δημάρχου της πόλης για τον τρόπο τοποθέτησης των ανεμογεννητριών παρουσιάζεται στο διάγραμμα.



● = *πύργος ανεμογεννήτριας*
Σημείωση: Το διάγραμμα δεν είναι υπό κλίμακα.

Να εξηγήσετε για ποιο λόγο η εισήγηση του δημάρχου δεν πληροί τις προδιαγραφές. Να υποστηρίξετε τα επιχειρήματά σας με υπολογισμούς.

Ερώτηση 4:

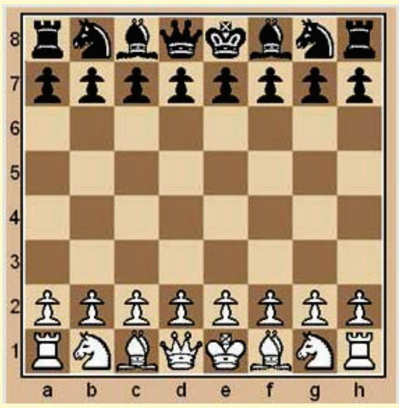
Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα με την οποία κινούνται τα άκρα των περιστρεφόμενων ελίκων των ανεμογεννητριών; Να περιγράψετε την πορεία εργασίας σας και να δώσετε την απάντησή σας σε χιλιόμετρα ανά ώρα (km/h). Να αξιοποιήσετε τις πληροφορίες για το μοντέλο Ε-82.

PISA 2012

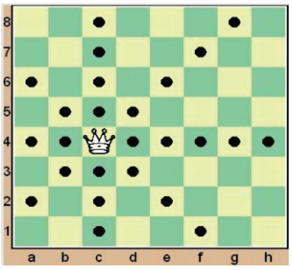
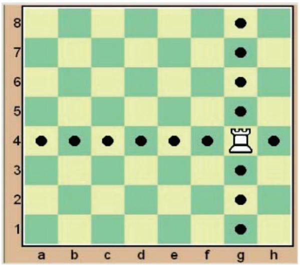
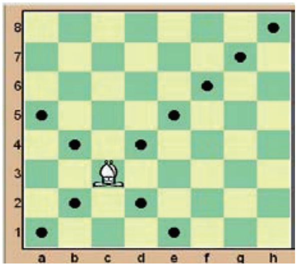
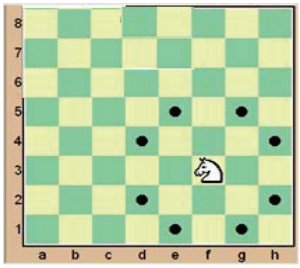
Η Έννοια του Διανύσματος

Διερεύνηση (1)

Το παιχνίδι του σκακιού παίζεται μεταξύ δύο αντιπάλων που κινούν εναλλάξ τα κομμάτια τους πάνω σε μια τετράγωνη επιφάνεια που λέγεται «σκακιέρα». Ο παίκτης με τα λευκά κομμάτια αρχίζει το παιχνίδι.
Ο στόχος κάθε παίκτη είναι να «επιτεθεί» στον Βασιλιά του αντιπάλου του με τέτοιο τρόπο, ώστε ο αντίπαλος να μην έχει κίνηση.
Στο ξεκίνημα του παιχνιδιού ο ένας παίκτης έχει 16 ανοιχτόχρωμα κομμάτια (τα «λευκά» κομμάτια) και ο άλλος έχει 16 σκουρόχρωμα κομμάτια (τα «μαύρα» κομμάτια).

ΚΟΜΜΑΤΙΑ	ΣΥΜΒΟΛΟ	ΑΡΧΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΤΗ ΣΚΑΚΙΕΡΑ
Βασιλιάς	♔ ♚	
Βασίλισσα	♕ ♛	
Πύργος	♖ ♜	
Αξιωματικός	♗ ♝	
Άλογο	♘ ♞	
Πιόνι	♙ ♟	

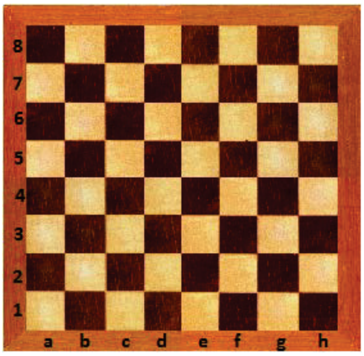
Το κάθε κομμάτι μπορεί να κινηθεί σε μια νέα θέση σύμφωνα με συγκεκριμένους κανόνες που διέπουν το σκάκι. Στα πιο κάτω σχήματα φαίνονται οι τρόποι που κινούνται η βασίλισσα, ο πύργος, το άλογο και ο αξιωματικός.

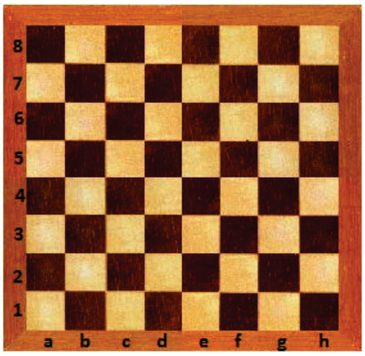
Η βασίλισσα κινείται σε οποιοδήποτε τετράγωνο οριζόντια, κατακόρυφα και διαγώνια, ο πύργος κινείται σε οποιοδήποτε τετράγωνο οριζόντια και κατακόρυφα, ο αξιωματικός κινείται σε οποιοδήποτε τετράγωνο διαγώνια και το άλογο κινείται σε ένα από τα πλησιέστερα τετράγωνα από αυτό που βρίσκεται αλλά όχι στην ίδια οριζόντια ή κατακόρυφη ή διαγώνιο.

- ✓ Στη σκακιέρα A να τοποθετήσετε μια βασίλισσα στη θέση $(f,7)$. Να περιγράψετε την κίνηση της βασίλισσας σε τρεις διαφορετικές θέσεις.
- ✓ Στη σκακιέρα B να τοποθετήσετε ένα άλογο στη θέση $(d,4)$. Να περιγράψετε την κίνηση του πύργου σε τρεις διαφορετικές θέσεις.
- ✓ Στη σκακιέρα Γ να τοποθετήσετε έναν πύργο στη θέση $(c,3)$. Να περιγράψετε την κίνηση του πύργου σε τρεις διαφορετικές θέσεις.
- ✓ Στη σκακιέρα Δ να τοποθετήσετε έναν αξιωματικό στη θέση $(e,6)$. Να περιγράψετε την κίνηση του αξιωματικού σε τρεις διαφορετικές θέσεις.

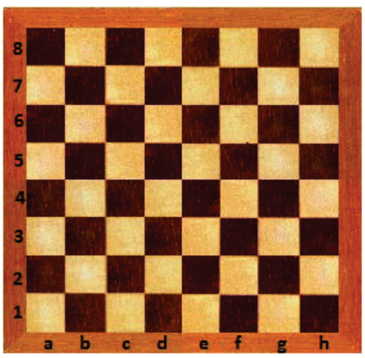
A



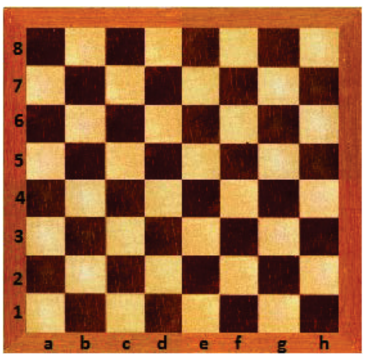
B



Γ

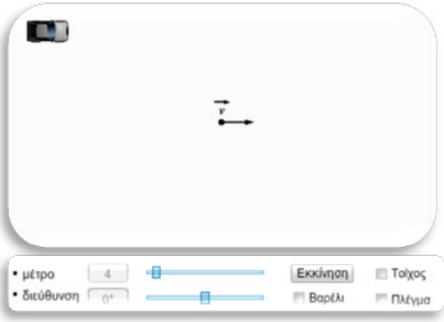


Δ



Διερεύνηση (2)

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο «ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ13_Έννοιες διανυσμάτων και πράξεις με διανύσματα_1.1»



- *Να επιλέξετε το εικονίδιο «Εκκίνηση», για να αρχίσει το αυτοκίνητο να κινείται με ορισμένη ταχύτητα και προς ορισμένη κατεύθυνση. Με το εικονίδιο «Εκκίνηση» μπορείτε να σταματήσετε το αυτοκίνητο.*

- *Με τον δρομέα «Μέτρο» μεταβάλλεται η ταχύτητα με την οποία κινείται το αυτοκίνητο και με το δρομέα «Διεύθυνση» περιστρέφεται το αυτοκίνητο και καθορίζεται η πορεία που θα ακολουθήσει.*

- *Να επιλέξετε τα εικονίδια, «Τοίχος» και «Βαρέλι» και να οδηγήσετε το αυτοκίνητο ώστε να συγκρουστεί με το βαρέλι, αποφεύγοντας τους τοίχους.*

✓ Να περιγράψετε την κίνηση του αυτοκινήτου σε κάθε περίπτωση.

Μαθαίνω

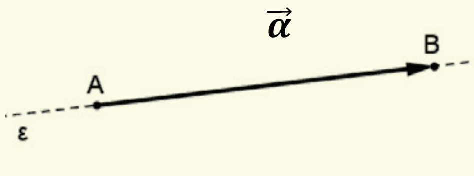
- **Μονόμετρο μέγεθος** λέγεται κάθε μέγεθος που χαρακτηρίζεται μόνο από το μέτρο του.

  Παράδειγμα:
  Το μήκος, η μάζα, η θερμοκρασία είναι μονόμετρα μεγέθη.

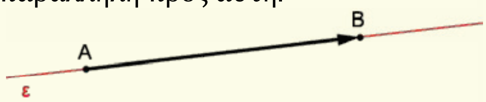
- **Διανυσματικό μέγεθος** λέγεται κάθε μέγεθος που έχει μέτρο και κατεύθυνση.

  Παράδειγμα:
  Η ταχύτητα, η δύναμη, κ.λπ. είναι διανυσματικά μεγέθη.

- Τα διανυσματικά μεγέθη παριστάνονται με **διανύσματα** τα οποία συμβολίζονται με βέλη έχοντας ένα σημείο A που είναι η **αρχή** και λέγεται σημείο εφαρμογής του διανύσματος και ένα σημείο B το **τέλος** του διανύσματος. Το διάνυσμα το συμβολίζουμε με $\overrightarrow{AB}$ ή με $\vec{\alpha}$.

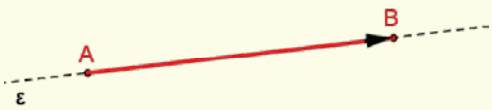


- Ένα διάνυσμα έχει τα εξής στοιχεία:
  - τη **διεύθυνση**, που είναι η ευθεία ε που ορίζουν τα άκρα A, B ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη προς αυτή.



  - τη **φορά**, που καθορίζεται από το αν το διάνυσμα έχει αρχή το A και τέλος το B ($\overrightarrow{AB}$) ή αρχή το B και τέλος το A ($\overrightarrow{BA}$).

  - το **μέτρο**, που είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB, το οποίο συμβολίζουμε με $|\overrightarrow{AB}|$. Το μέτρο είναι πάντοτε θετικός αριθμός ή μηδέν.

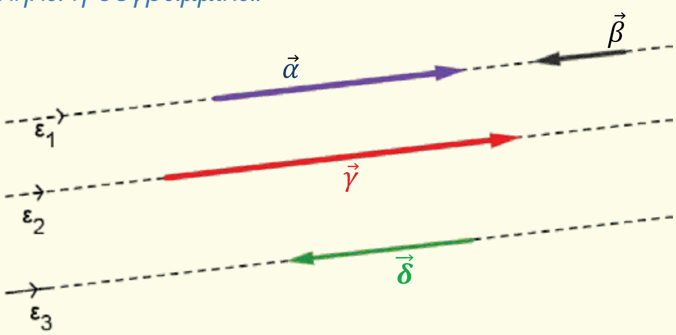


*Η διεύθυνση μαζί με τη φορά καθορίζουν την **κατεύθυνση** ενός διανύσματος.*

- Ένα διάνυσμα λέγεται **μηδενικό,** όταν η αρχή και το τέλος του συμπίπτουν. Το συμβολίζουμε με $\vec{\mathbf{0}}$ και έχει μέτρο μηδέν.

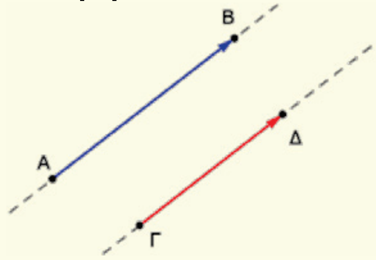
- **Παράλληλα** ή **συγγραμμικά** ονομάζονται τα μη-μηδενικά διανύσματα τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση**.**

Παράδειγμα:
Τα πιο κάτω διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ είναι μεταξύ τους παράλληλα ή συγγραμμικά.



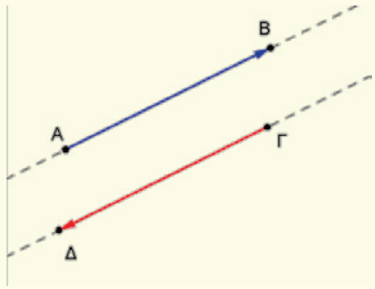
- Τα παράλληλα διανύσματα διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:
  - Τα **ομόρροπα** τα οποία έχουν την **ίδια φορά.**

    Παράδειγμα:
    Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ομόρροπα.



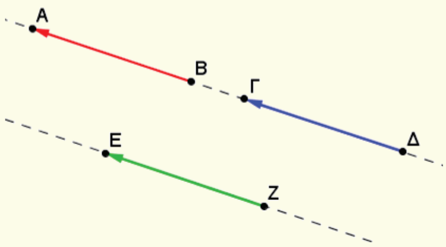
  - Τα **αντίρροπα** τα οποία έχουν **αντίθετη φορά.**

    Παράδειγμα:
    Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίρροπα.



- **Ίσα** είναι τα διανύσματα τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση (δηλαδή ανήκουν στην ίδια ευθεία ή σε παράλληλη), την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο.
  Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο ίσα διανύσματα τότε γράφουμε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

Παράδειγμα:
Στο σχήμα τα διανύσματα έχουν όλα το ίδιο μέτρο.

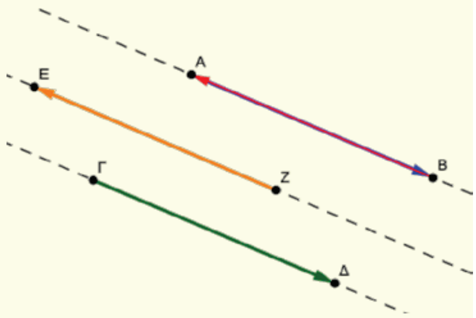


Ισχύει:

- *Τα διανύσματα $\overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ είναι ίσα, δηλαδή $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.*
- *Τα διανύσματα $\overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{ZE}$ είναι ίσα, δηλαδή $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{ZE}$.*

- **Αντίθετα** είναι δύο διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση, το ίδιο μέτρο, αλλά αντίθετη φορά.

Παράδειγμα:
Στο σχήμα τα διανύσματα έχουν όλα το ίδιο μέτρο.



Ισχύει:

- *Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BA}$ είναι αντίθετα, δηλαδή $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.*
- *Τα διανύσματα $\overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα, δηλαδή $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.*
- *Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{ZE}$ είναι αντίθετα, δηλαδή $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{EZ}$*

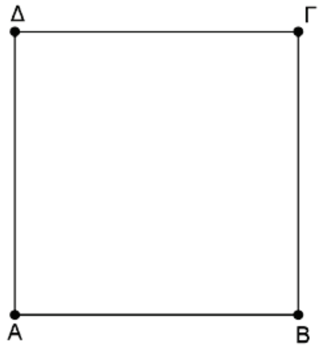
Παραδείγματα

1. Δίνεται το τετράγωνο $ΑΒΓΔ$.

   (α) Να γράψετε δύο διανύσματα τα οποία έχουν ως αρχή το σημείο $Β$.

   (β) Να γράψετε ένα διάνυσμα που να είναι ίσο με το διάνυσμα $\overrightarrow{ΔΓ}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

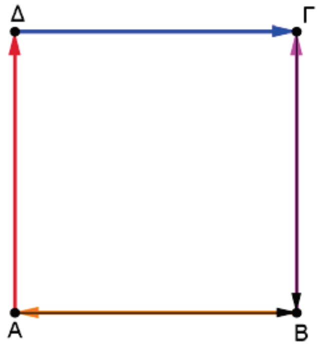
   (γ) Να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{ΓΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΔ}$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση:

(α) *Τα διανύσματα* $\overrightarrow{ΒΑ}$ *και* $\overrightarrow{ΒΓ}$ *έχουν ως αρχή το σημείο* $Β$.

(β) *Το διάνυσμα* $\overrightarrow{ΑΒ}$ *είναι ίσο με το* $\overrightarrow{ΔΓ}$, *γιατί έχουν την ίδια διεύθυνση ως απέναντι πλευρές τετραγώνου, την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο ως πλευρές τετραγώνου.*



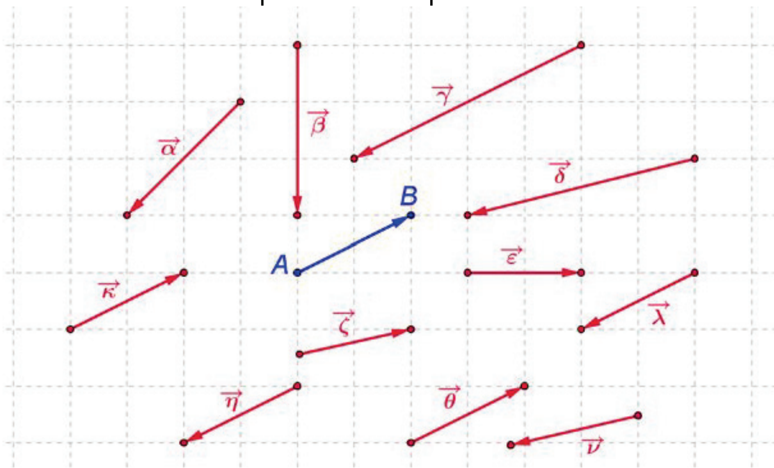
(γ) *Τα διανύσματα* $\overrightarrow{ΓΒ}$ *και* $\overrightarrow{ΑΔ}$ *είναι αντίθετα γιατί έχουν την ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά, δηλαδή είναι αντίρροπα και έχουν το ίδιο μέτρο.*

Δραστηριότητες

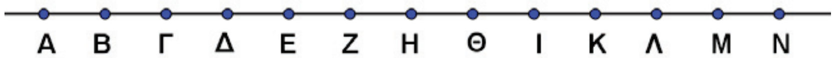
1. Ποια από τα πιο κάτω μεγέθη είναι διανυσματικά; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α) Θερμοκρασία	(β) Ταχύτητα
(γ) Χρόνος	(δ) Μάζα
(ε) Εμβαδόν	(στ) Απόσταση
(ζ) Μετατόπιση	(η) Πλήθος λεμονιών σε ένα καλάθι

2. Να βρείτε διανύσματα:
   (α) που είναι ίσα με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$
   (β) που είναι αντίθετα με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.



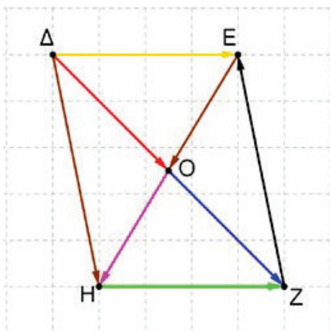
3. Στο σχήμα οι αποστάσεις μεταξύ όλων των διαδοχικών σημείων είναι ίσες με 1 cm.



   (α) Να υπολογίσετε το μέτρο των διανυσμάτων: $\overrightarrow{\Delta E}$, $\overrightarrow{\Delta Z}$, $\overrightarrow{\Delta \Theta}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{BZ}$, $\overrightarrow{K\Theta}$, $\overrightarrow{NI}$
   (β) Ποια από τα πιο πάνω διανύσματα είναι μεταξύ τους ίσα και ποια αντίθετα;
   (γ) Να γράψετε ένα διάνυσμα που είναι αντίρροπο του $\overrightarrow{\Gamma E}$ και έχει μέτρο τριπλάσιο από το μέτρο του $\overrightarrow{\Gamma E}$.

4. Να χαρακτηρίσετε με ΟΡΘΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

   Στο παραλληλόγραμμο ΔEZH τα διανύσματα:



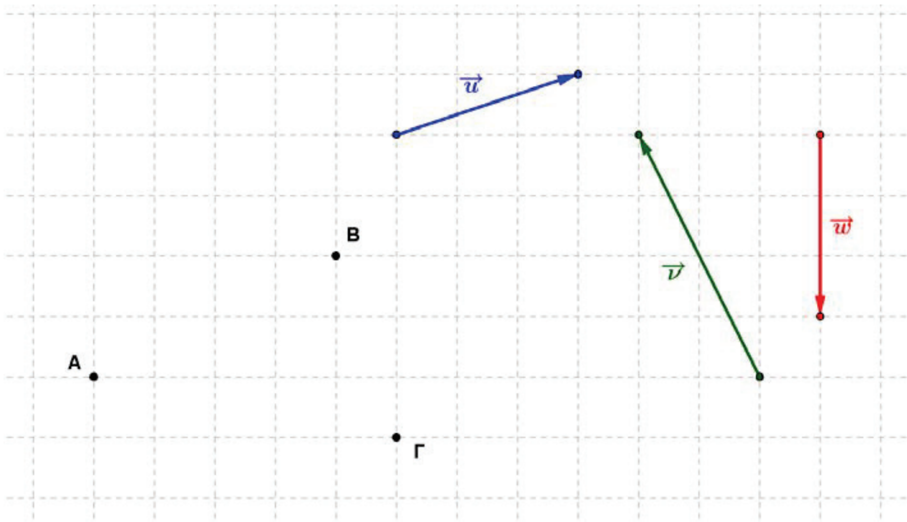
(α)	$\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{HZ}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$\overline{\mathrm{EO}} = \overline{\mathrm{OH}}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$\overrightarrow{\Delta H} = \overrightarrow{EZ}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\overrightarrow{\Delta O} = -\overrightarrow{OE}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	$\overrightarrow{\Delta Z} = \overrightarrow{EH}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

5. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει: $|\vec{\alpha}| = 3$ και $|\vec{\beta}| = 3$. Ο Αλέξης ισχυρίζεται ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό του.

6. Αν M είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB και N είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AM, να δείξετε ότι:
(α) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$,
(β) $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BM}$

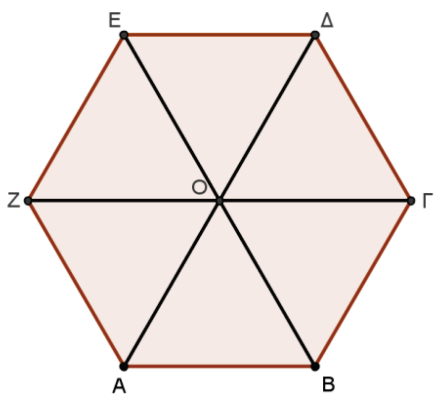
7. Να σχεδιάσετε στο πιο κάτω σχήμα, ένα διάνυσμα που:

(α) είναι ίσο με το $\vec{u}$ και αρχίζει από το A.
(β) είναι αντίθετο του $\vec{v}$ και αρχίζει από το B.
(γ) έχει μέτρο ίσο με το μέτρο του $\vec{w}$, χωρίς να είναι ίσο με το $\vec{w}$ και αρχίζει από το Γ.



8. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ με όλες τις πλευρές ίσες με $2\ cm$ και τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Αν $Z\Gamma \parallel E\Delta$, $A\Delta \parallel ZE$, $EB \parallel \Delta\Gamma$, να γράψετε δύο διανύσματα που:

(α) είναι ίσα
(β) είναι αντίθετα
(γ) είναι παράλληλα με το $\overrightarrow{B\Gamma}$
(δ) είναι αντίρροπα με το $\overrightarrow{EZ}$
(ε) έχουν μέτρο $4\ cm$.



Πράξεις με Διανύσματα

Διερεύνηση

Δύο παιδιά έχουν δέσει ένα καροτσάκι με δύο σχοινιά, όπως φαίνεται στην εικόνα. Θα τραβήξουν ταυτόχρονα τα σχοινιά, για να το μετακινήσουν.

✓ Προς ποια κατεύθυνση θα κινηθεί το καροτσάκι;

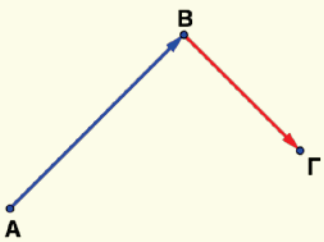
- *Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο* «ΛΤ ΜΑΘ Β ΨΕΠ13 Έννοιες διανυσμάτων και πράξεις με διανύσματα 3.1»
- *Αφού επιλέξετε το εικονίδιο*  *να παρακολουθήσετε την κίνηση του καροτσιού σε διαδοχικά βήματα.*

✓ Να περιγράψετε την κίνηση του καροτσιού.

Μαθαίνω

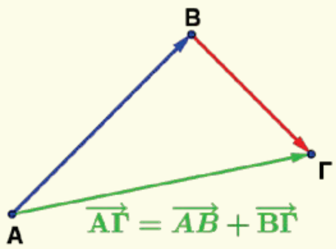
- Δύο διανύσματα λέγονται **διαδοχικά διανύσματα,** όταν το τέλος του πρώτου διανύσματος είναι η αρχή του δεύτερου.

  Παράδειγμα:
  Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ *και* $\overrightarrow{B\Gamma}$ *είναι διαδοχικά.*



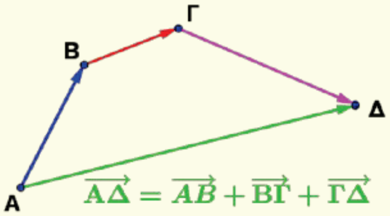
- **Άθροισμα δύο διαδοχικών διανυσμάτων** είναι το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και τέλος το τέλος του δεύτερου διανύσματος.

  Παράδειγμα:
  Το άθροισμα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ *και* $\overrightarrow{B\Gamma}$ *είναι το διάνυσμα* $\overrightarrow{A\Gamma}$ *και γράφεται* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$



- Αν έχουμε να προσθέσουμε περισσότερα από δύο διανύσματα, τα οποία είναι ανά δύο διαδοχικά, όπως φαίνεται στο σχήμα, τότε το άθροισμά τους έχει αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και τέλος το τέλος του τελευταίου.

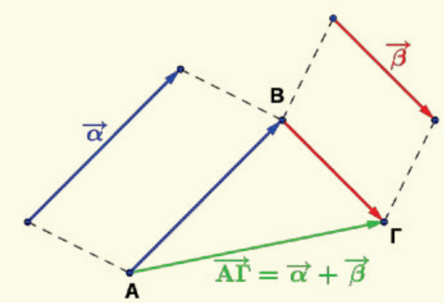
Παράδειγμα:
Το άθροισμα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta}$ και γράφεται:
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta}$



- Για να προσθέσουμε δύο **μη διαδοχικά** διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$ τα οποία είναι διαδοχικά.

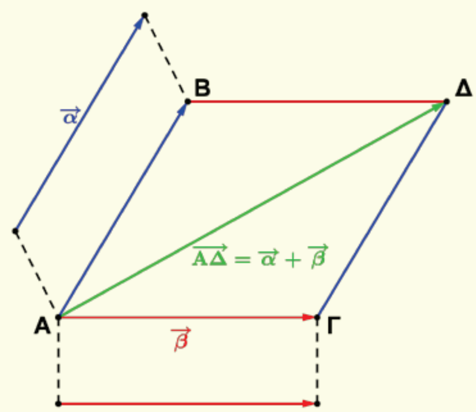
Το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι:

$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$.



Σημείωση:
*Για να προσθέσουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη **μέθοδο του παραλληλογράμμου** και εργαζόμαστε ως εξής:*

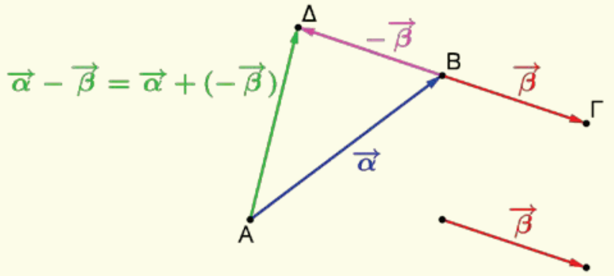
- *Σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, τα οποία έχουν κοινή αρχή.*
- *Σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο που έχει πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΓ.*
- *Το διάνυσμα το οποίο έχει ως αρχή την κοινή αρχή των δύο διανυσμάτων, Α και τέλος την απέναντι κορυφή του παραλληλογράμμου, Δ, είναι το άθροισμα των δύο διανυσμάτων.*



- **Διαφορά δύο διανυσμάτων**

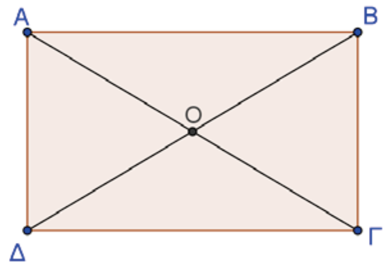
Η διαφορά του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και ορίζεται ως το άθροισμα του $\vec{\alpha}$ με το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{\beta}$.

Δηλαδή,
$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$.



Παραδείγματα

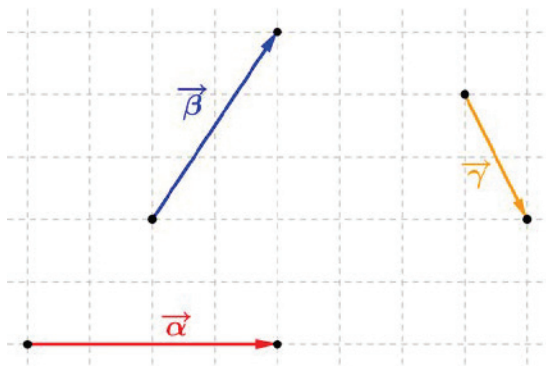
1. Δίνεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Να βρείτε το διάνυσμα που είναι ίσο με:
   (α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$
   (β) $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta A}$
   (γ) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{O\Delta}$
   (δ) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{O\Delta}$
   (ε) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}$



Λύση:

(α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$
(β) $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta A}=\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$
(γ) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{B\Delta}$
Μετατρέπουμε τη διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ *σε άθροισμα με το αντίθετο διάνυσμα του* $\vec{\beta}$.
(δ) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{AO}+\left(-\overrightarrow{O\Delta}\right)=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$
(ε) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{\Gamma B}$

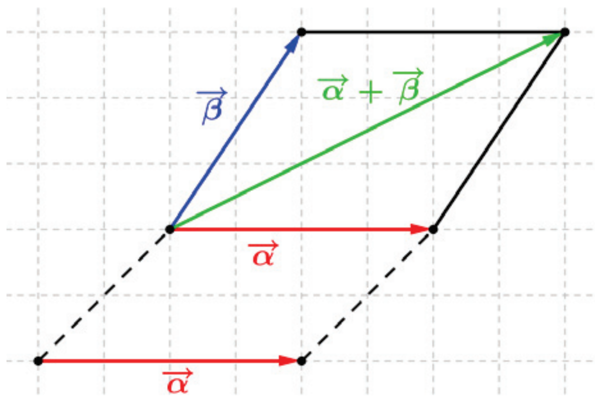
2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα στο διπλανό σχήμα:
   (α) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$
   (β) $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$



Λύση:

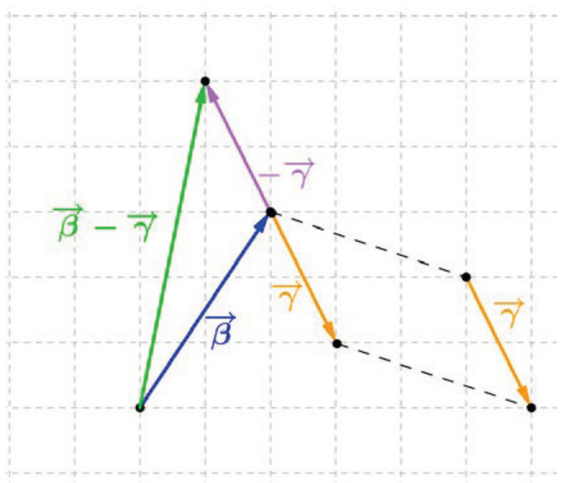
(α) *Τα διανύσματα* $\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\beta}$ *δεν είναι διαδοχικά.*
Σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ *ώστε να έχει κοινή αρχή με το διάνυσμα* $\vec{\beta}$.

Με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου σχηματίζουμε το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ *το οποίο είναι το διάνυσμα που έχει αρχή την κοινή αρχή των δύο διανυσμάτων και τέλος την απέναντι κορυφή του παραλληλογράμμου.*



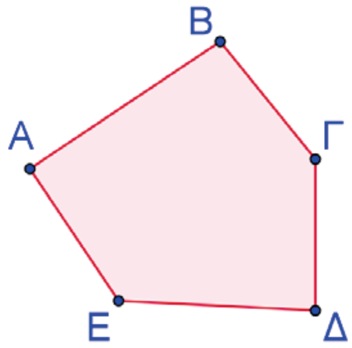
(β) *Σχεδιάζουμε το διάνυσμα* $\vec{\gamma}$ *ώστε να έχει αρχή το τέλος του διανύσματος* $\vec{\beta}$. *Στη συνέχεια σχηματίζουμε το αντίθετο διάνυσμα του* $\vec{\gamma}$ *ώστε να έχει κοινή αρχή με το* $\vec{\gamma}$.

Τα διανύσματα $\vec{\beta}$ *και* $-\vec{\gamma}$ *είναι διαδοχικά, οπότε σχηματίζουμε το άθροισμα* $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$, *το οποίο είναι το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή του διανύσματος* $\vec{\beta}$ *και τέλος το τέλος του* $-\vec{\gamma}$.
Ισχύει: $\vec{\beta}+(-\vec{\gamma}) = \vec{\beta}-\vec{\gamma}$



Δραστηριότητες

1. Στο σχήμα δίνεται το πολύγωνο $ΑΒΓΔΕ$. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω ισότητες, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

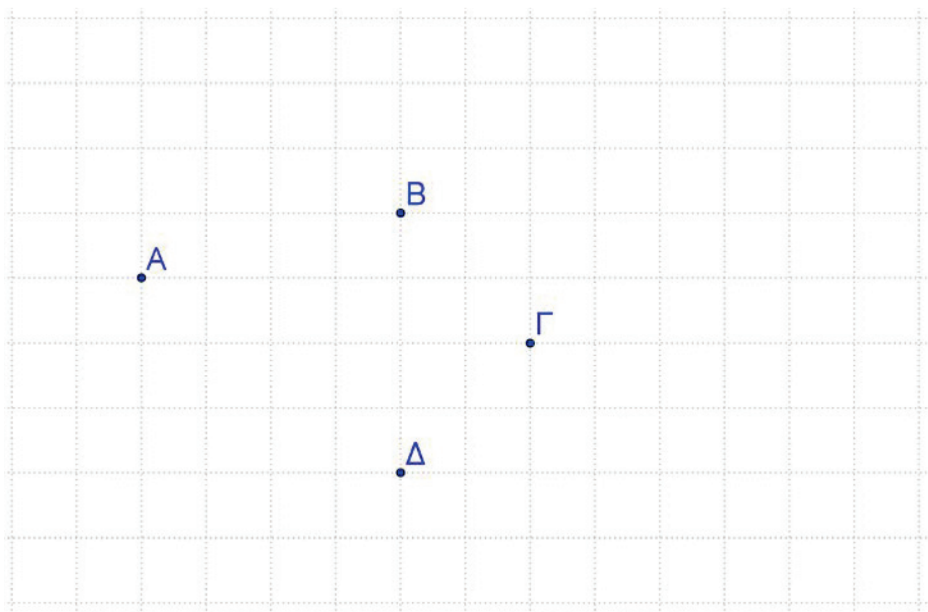


(α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma A}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{A\Delta}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{E\Delta}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{E\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{AB}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

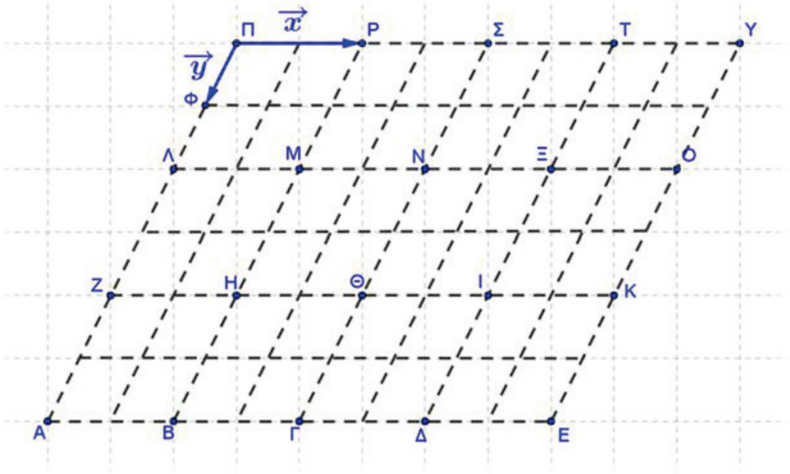
2. Στο σχήμα να σχεδιάσετε ένα διάνυσμα που να είναι ίσο με:

(α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}$ (β) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma A}$ (γ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

(δ) $\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta A}$ (ε) $\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ (στ) $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B}$



3. Στο σχήμα δίνονται δύο διανύσματα $\overrightarrow{ΠΡ} = \vec{x}$ και $\overrightarrow{ΠΦ} = \vec{y}$.

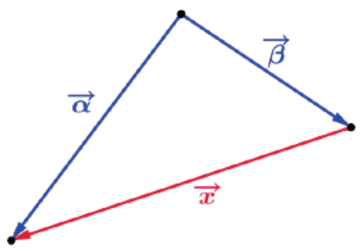


Να σχεδιάσετε στο πιο πάνω σχήμα τρία διαφορετικά διανύσματα που είναι ίσα με:

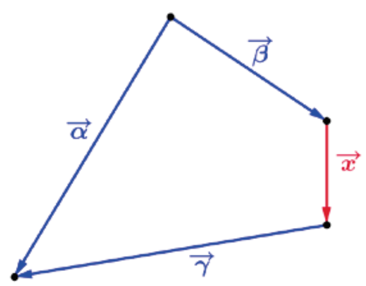
(α) $\vec{x} + \vec{y}$ (β) $\vec{x} - \vec{y}$ (γ) $\vec{y} - \vec{x}$

4. Για καθένα από τα πιο κάτω σχήματα, να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως άθροισμα ή διαφορά των άλλων διανυσμάτων που δίνονται:

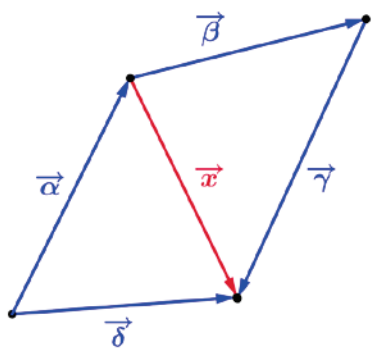
(α)



(β)

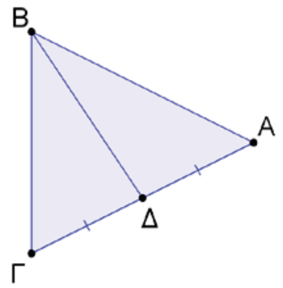


(γ)

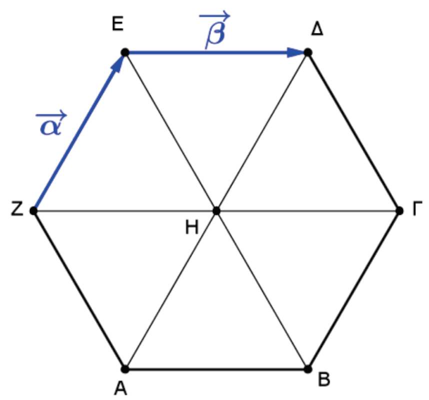


5. Να σχεδιάσετε ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και να βρείτε ένα διάνυσμα ίσο με:
   (α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BΓ} + \overrightarrow{ΓB}$
   (β) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BΓ} + \overrightarrow{ΓA}$
   (γ) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AΓ}$
   (δ) $\overrightarrow{ΓA} - \overrightarrow{ΓB}$

6. Στο διπλανό σχήμα η $BΔ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $ΑΒΓ$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{BΓ} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BΔ}$.



7. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το εξάγωνο $ΑΒΓΔΕΖ$ με όλες τις πλευρές ίσες και τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Αν $ΖΓ \parallel ΕΔ$, $ΑΔ \parallel ΖΕ$, $ΕΒ \parallel ΔΓ$ και $\overrightarrow{EΔ} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{ZE} = \vec{\alpha}$,να εκφράσετε τα πιο κάτω διανύσματα ως άθροισμα ή διαφορά των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.



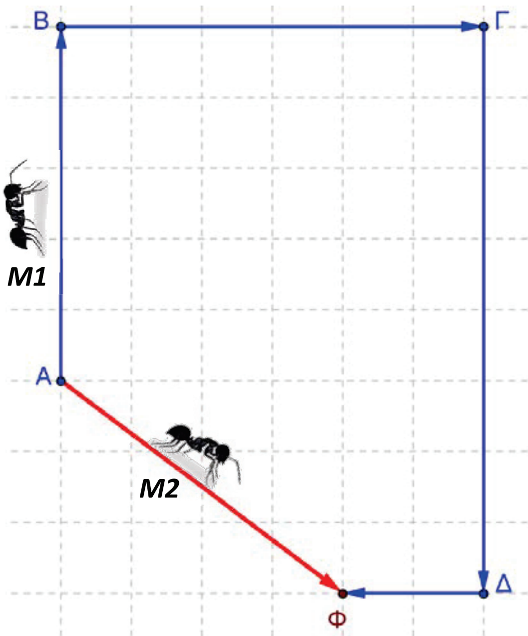
(α) $\overrightarrow{BA}$ (β) $\overrightarrow{ZΓ}$ (γ) $\overrightarrow{HΔ}$ (δ) $\overrightarrow{EH}$
(ε) $\overrightarrow{ΔΓ}$ (στ) $\overrightarrow{BE}$ (ζ) $\overrightarrow{ZΔ}$ (η) $\overrightarrow{ΓA}$

Δραστηριότητες Ενότητας

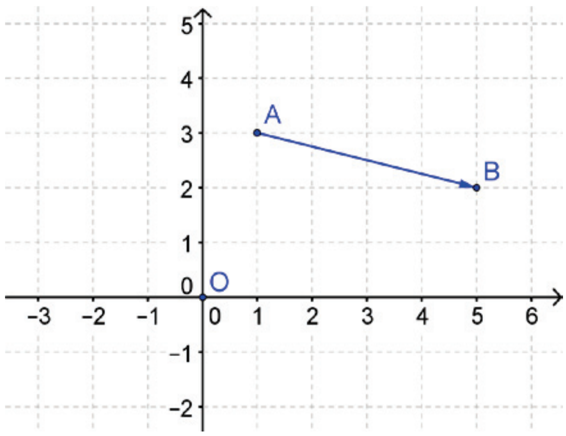
1. Ποια από τις πιο κάτω προτάσεις περιγράφει μονόμετρο και ποια διανυσματικό μέγεθος;
   (α) Ένα καρπούζι ζυγίζει $8\ Kg$.
   (β) Το πλοίο κινείται με ταχύτητα 80 ναυτικά μίλια την ώρα νοτιοανατολικά του λιμανιού.
   (γ) Η μοτοσυκλέτα μου μπορεί να τρέξει μέχρι $80\ km/h$.
   (δ) Ο πυρετός μου έφθασε τους 39°C.
   (ε) Η απόσταση του σπιτιού του Αντρέα, από το σχολείο του είναι 1,5 Km.
   (στ) Το σπίτι του φίλου μου του Αντρέα, βρίσκεται 1,5 Km Δυτικά από το δικό μου.
   (ζ) Κοιμήθηκα 4 ώρες χθες.

Το ναυτικό μίλι (nm) είναι η μονάδα μέτρησης μήκους (απόστασης) που χρησιμοποιείται στη ναυτιλία.
Είναι ίσο με:
$1\ nm = 1852\ m$

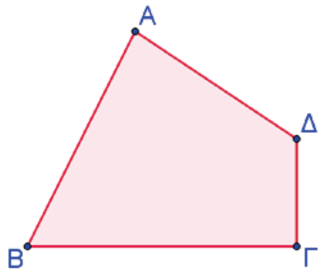
2. Ένα μυρμήγκι ($M1$) ξεκίνησε από ένα σημείο A, κάνοντας την εξής διαδρομή: Διάνυσε $5\ cm$ βόρεια φθάνοντας στο σημείο B, $6\ cm$ ανατολικά φθάνοντας στο σημείο Γ, $8\ cm$ νότια φθάνοντας στο σημείο Δ και τέλος $2\ cm$ δυτικά φτάνοντας στη φωλιά του Φ. Ένα δεύτερο μυρμήγκι ($M2$) ξεκίνησε από το σημείο A και πήγε νοτιοανατολικά στη φωλιά του στο σημείο Φ.
   (α) Πόση απόσταση διάνυσε συνολικά κάθε μυρμήγκι;
   (β) Πού βρίσκεται η φωλιά Φ των μυρμηγκιών ως προς το αρχικό σημείο A;
   (γ) Να αναφέρετε διαφορές και ομοιότητες των διαδρομών που ακολούθησαν τα δύο μυρμήγκια.



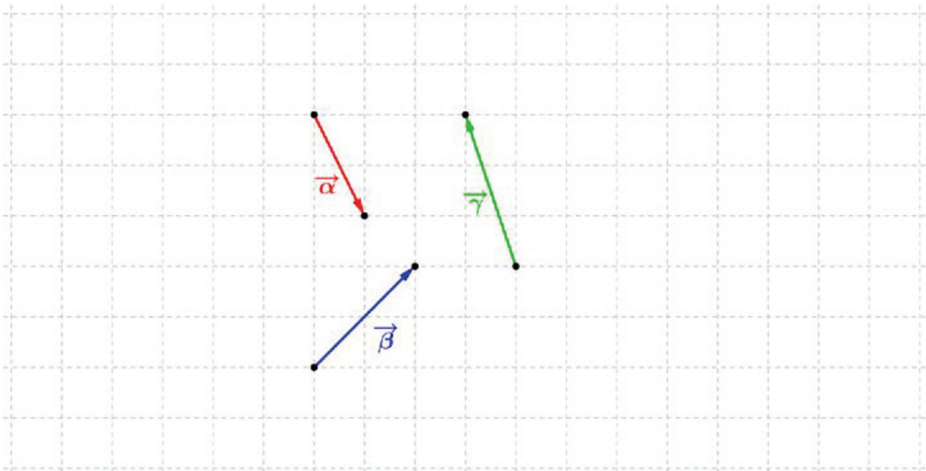
3. Στο σχήμα το σημείο Ο είναι η αρχή των αξόνων. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.



4. Δίνεται τυχαίο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$. Να αποδείξετε ότι:
$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ΓΒ} = \overrightarrow{ΑΔ} - \overrightarrow{ΓΔ}$.



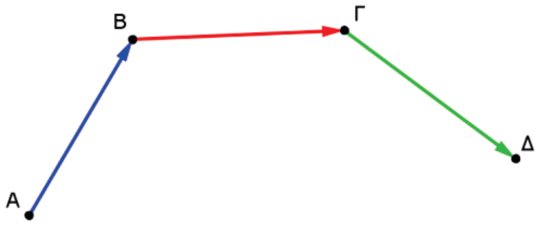
5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, όπως φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα.



(α) Να υπολογίσετε το μέτρο των πιο πάνω διανυσμάτων.
(β) Να σχεδιάσετε τα πιο κάτω διανύσματα σε τετραγωνισμένο χαρτί, επεξηγώντας τη μέθοδο που ακολουθήσατε.

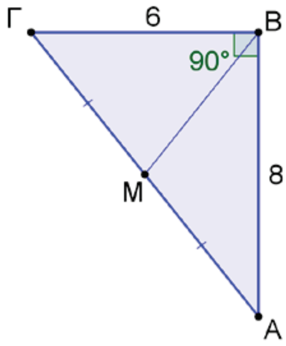
i. $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
ii. $\vec{\alpha} + \vec{\alpha} + \vec{\alpha}$
iii. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$
iv. $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$
v. $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
vi. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$

6. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BΓ}$ και $\overrightarrow{ΓΔ}$, όπως φαίνονται στο σχήμα.

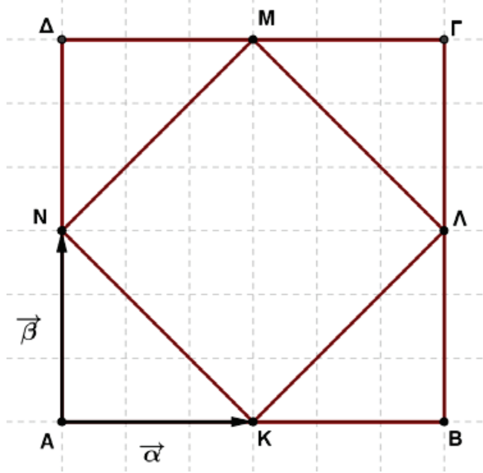


Να <u>αποδείξετε</u> ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BΓ} + \overrightarrow{ΓΔ} = \overrightarrow{ΑΔ}$, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία υπολογισμού του αθροίσματος δύο διαδοχικών διανυσμάτων.

7. Στο διπλανό σχήμα η BM είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$.
   (α) Να υπολογίσετε το $|\overrightarrow{MA}|$
   (β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{M\Gamma}$.
   (γ) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{M\Gamma}$.



8. Στο σχήμα δίνονται δύο τετράγωνα τα $AB\Gamma\Delta$ και $K\Lambda MN$, όπου K, Λ, M, N είναι τα μέσα των $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, A\Delta$, αντίστοιχα. Αν $\overrightarrow{AK} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AN} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{\Gamma M}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{M\Lambda}$ σε συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Δυο διανύσματα που έχουν αντίθετες φορές και την ίδια διεύθυνση έχουν άθροισμα ίσο με $\vec{0}$. Να βρείτε τρία διαδοχικά διανύσματα που να έχουν την ίδια διεύθυνση και άθροισμα ίσο με $\vec{0}$.

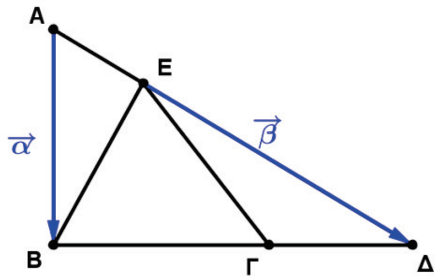
2. Να εξετάσετε κατά πόσο ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στην πρόσθεση διανυσμάτων ($\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$).

3. Ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει διεύθυνση και φορά προς τη δύση και ένα άλλο $\vec{\beta}$ προς την ανατολή. Να περιγράψετε τις πιθανές διευθύνσεις που μπορεί να έχει το άθροισμά τους.

4. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το τρίγωνο $AB\Delta$, με $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}=\frac{3}{2}$, $\frac{AE}{E\Delta}=\frac{1}{3}$ και $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{E\Delta}=\vec{\beta}$.

(α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ σε συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(β) Να δείξετε ότι το $\overrightarrow{E\Gamma}=\frac{1}{15}\left(6\vec{\alpha}+7\vec{\beta}\right)$.



ΕΝΟΤΗΤΑ

2

Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε και να εφαρμόζουμε τις ταυτότητες:
  - $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
  - $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
  - $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$
  - $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
  - $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
- Να αποδεικνύουμε αλγεβρικά και γεωμετρικά (όπου είναι δυνατόν) τις ταυτότητες.
- Να μοντελοποιούμε και να επιλύουμε προβλήματα με χρήση ταυτοτήτων.

Λύση Προβλήματος

Ο Jean Baptiste, φωτογράφος ζώων, στη διάρκεια μιας εξόρμησης που διήρκησε έναν χρόνο, τράβηξε πολλές φωτογραφίες πιγκουίνων και των νεοσσών τους.
Το ενδιαφέρον του επικεντρώθηκε στην ανάπτυξη του μεγέθους διαφορετικών αποικιών πιγκουίνων.

Ερώτηση 1:
Υπό κανονικές συνθήκες, ένα ζευγάρι πιγκουίνων παράγει δύο αυγά κάθε χρόνο. Συνήθως επιζεί ο νεοσσός του μεγαλύτερου από τα δύο αυγά. Στους πιγκουίνους "Ροκχόπερ" (Rockhopper), το πρώτο αυγό ζυγίζει περίπου 78 g και το δεύτερο αυγό ζυγίζει περίπου 110 g.

Πόσα τοις εκατό, κατά προσέγγιση, είναι βαρύτερο το δεύτερο αυγό σε σχέση με το πρώτο αυγό;

Α. 29% Β. 32%

Γ. 41% Δ. 71%

Ερώτηση 2:
Ο Jean υπολογίζει ότι η αποικία θα συνεχίσει να αναπτύσσεται με τον ακόλουθο τρόπο:

- *Στην αρχή κάθε έτους, η αποικία αποτελείται από ίσο αριθμό αρσενικών και θηλυκών πιγκουίνων, οι οποίοι γίνονται ζευγάρια.*
- *Κάθε ζεύγος πιγκουίνων γεννά έναν νεοσσό την άνοιξη κάθε χρόνου.*
- *Με το τέλος του χρόνου το 20% όλων των πιγκουίνων (ενήλικες και νεοσσοί) θα πεθάνουν.*
- *Οι πιγκουίνοι ηλικίας ενός έτους γεννούν, επίσης, νεοσσούς.*

Με βάση τις πιο πάνω υποθέσεις, ποιος από τους πιο κάτω τύπους περιγράφει τον συνολικό αριθμό των πιγκουίνων Π, μετά από 7 χρόνια;

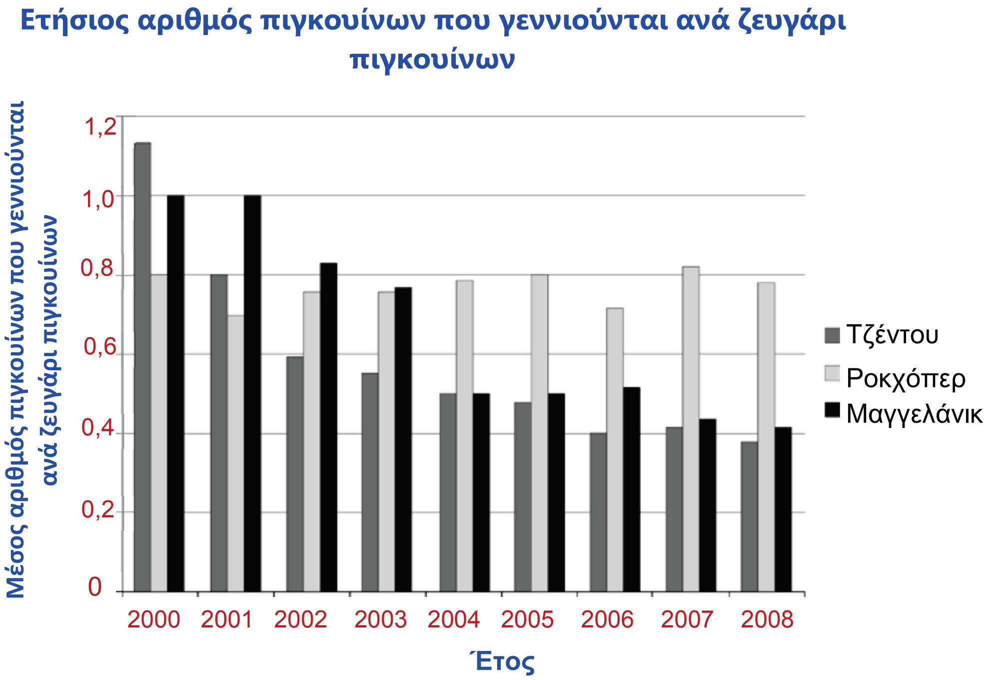
Α. $\Pi = 10000 \cdot (1{,}5 \cdot 0{,}2)^7$ Β. $\Pi = 10000 \cdot (1{,}5 \cdot 0{,}8)^7$

Γ. $\Pi = 10000 \cdot (1{,}2 \cdot 0{,}2)^7$ Δ. $\Pi = 10000 \cdot (1{,}2 \cdot 0{,}8)^7$

Ερώτηση 3:

Επιστρέφοντας από το ταξίδι του, ο Jean Baptiste, αναζήτησε στο διαδίκτυο πληροφορίες για τον αριθμό των νεοσσών που γεννά κατά μέσο όρο ένα ζευγάρι πιγκουίνων.

Βρήκε το πιο κάτω ραβδόγραμμα για τρία είδη πιγκουίνων: Τζέντου (Gentoo), Ροκχόπερ (Rockhopper) και Μαγγελάνικ (Magellanic).



Με βάση το πιο πάνω ραβδόγραμμα, να εξετάσετε κατά πόσο οι ακόλουθες δηλώσεις για τα τρία είδη πιγκουίνων είναι ορθές ή λανθασμένες. Να βάλετε σε κύκλο "Ορθό" ή "Λάθος" για κάθε δήλωση.

Δήλωση	
Ο μέσος αριθμός νεοσσών που γεννήθηκαν το 2000 ανά ζευγάρι πιγκουίνων ήταν μεγαλύτερος από 0,6.	Ορθό / Λάθος
Το 2006, κατά μέσο όρο, λιγότερο από το 80% των πιγκουίνων γέννησε έναν νεοσσό.	Ορθό / Λάθος
Γύρω στο 2015 αυτά τα τρία είδη πιγκουίνων θα εξαφανιστούν.	Ορθό / Λάθος
Ο μέσος αριθμός των νεοσσών πιγκουίνων Μαγγελάνικ (Magellanic) που γεννήθηκαν από κάθε ζευγάρι μειώθηκε μεταξύ 2001 και 2004.	Ορθό / Λάθος

PISA 2012

Έχουμε μάθει …

- Ιδιότητες δυνάμεων:
  - $\boldsymbol{\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}}$
  - $\boldsymbol{\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}}$
  - $\boldsymbol{(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\cdot\nu}}$
  - $\boldsymbol{(\alpha\cdot\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}}$
  - $\boldsymbol{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}}$, $\beta \neq 0$
  - $\boldsymbol{\alpha^{-\mu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}}}$, $\alpha \neq 0$

- Ιδιότητες ριζών:
  - $\boldsymbol{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha}$, $\alpha \geq 0$
  - $\boldsymbol{\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3 = \alpha}$, $\alpha \geq 0$
  - $\boldsymbol{\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}}$, $\alpha, \beta \geq 0$
  - $\boldsymbol{\sqrt[3]{\alpha\cdot\beta} = \sqrt[3]{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\beta}}$, $\alpha, \beta \geq 0$
  - $\boldsymbol{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}}$, $\alpha \geq 0,\ \beta > 0$
  - $\boldsymbol{\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}}}$, $\alpha \geq 0,\ \beta > 0$

- **Μονώνυμο** ονομάζεται μια αλγεβρική παράσταση που περιλαμβάνει μόνο την πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ αριθμού και μεταβλητών και οι μεταβλητές της έχουν εκθέτη μη αρνητικό ακέραιο αριθμό.

  Παραδείγματα: $-3x$, x^2 , -5 , $\frac{4}{3}\alpha\beta$, $-x^2y^3$, $\frac{\alpha^3\beta^2}{7}$

- Σε ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας ονομάζεται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο των μεταβλητών του ονομάζεται **κύριο μέρος.** Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή, ενώ βαθμός του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του.

  Παραδείγματα: $-2x^2y$ *Συντελεστής:* -2 *Κύριο μέρος:* x^2y
  Το μονώνυμο $-2x^2y$ είναι 2ου βαθμού ως προς x, 1ου βαθμού ως προς y και 3ου βαθμού ως προς x και y

- Τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος ονομάζονται **όμοια μονώνυμα**. Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται **ίσα μονώνυμα** ενώ τα όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές λέγονται **αντίθετα μονώνυμα**.

  Παράδειγμα:
  Τα μονώνυμα $-8\alpha^3\beta$ και $2\alpha^3\beta$ είναι όμοια, γιατί έχουν το ίδιο κύριο μέρος ($\alpha^3\beta$).
  Τα μονώνυμα $-2x^2y$ και $+2x^2y$ είναι αντίθετα.

- **Άθροισμα μονωνύμων**

  Για να υπολογίσουμε το άθροισμα δύο ή περισσότερων μονωνύμων πρέπει τα μονώνυμα να είναι **όμοια**.

  Το άθροισμα **όμοιων** μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους. Η πρόσθεση όμοιων μονωνύμων ονομάζεται **αναγωγή ομοίων** όρων.

  Παράδειγμα: $3xy^2 - 7xy^2 = (3-7)xy^2 = -4xy^2$

- **Πολλαπλασιασμός μονωνύμων**

  Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο που έχει ως συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και ως κύριο μέρος το γινόμενο των κύριων μερών τους.

  Παράδειγμα:
  $(-2\alpha^2)\cdot(3\alpha\beta^4) = (-2\cdot 3)\cdot \alpha^2\cdot\alpha\cdot\beta^4 = -6\alpha^{2+1}\beta^4 = -6\alpha^3\beta^4$

- **Διαίρεση μονώνυμων**

  Για να διαιρέσουμε δύο μονώνυμα, διαιρούμε τους συντελεστές τους και διαιρούμε και τα κύρια μέρη τους.

  Παράδειγμα: $(8\alpha^5\gamma) : (4\alpha^2\gamma^3) = \frac{8\alpha^5\gamma}{4\alpha^2\gamma^3} = \frac{8}{4}\cdot\alpha^{5-2}\cdot\gamma^{1-3} = 2\alpha^3\gamma^{-2} = \frac{2\alpha^3}{\gamma^2}$

- **Πολυώνυμο** ονομάζουμε την αλγεβρική παράσταση που είναι άθροισμα μη όμοιων μονωνύμων. Τα μονώνυμα που αποτελούν το πολυώνυμο λέγονται **όροι** του πολυωνύμου.

  Παράδειγμα: Η αλγεβρική παράσταση $2x^2 - 5 + 2x$ είναι ένα πολυώνυμο. Οι όροι του πολυωνύμου είναι: $2x^2$, -5 και $2x$.

- **Βαθμός** ενός πολυωνύμου ως προς μια ή περισσότερες μεταβλητές, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

  Παράδειγμα:
  $-3x^2 + 2x$ $\quad 2^{ου}$ *βαθμού,* $\qquad 3xy - 2x^3 + 3$ $\quad 3^{ου}$ *βαθμού*

- **Πρόσθεση πολυωνύμων**

  Το άθροισμα δύο ή περισσότερων πολυωνύμων είναι ένα νέο πολυώνυμο με όρους τα αθροίσματα των όμοιων όρων των δοσμένων πολυωνύμων.

  Παράδειγμα: $(2x^2 - 5x + 2) - (x^2 - 4x + 1) = 2x^2 - 5x + 2 - x^2 + 4x - 1$
  $= 2x^2 - x^2 - 5x + 4x + 2 - 1$
  Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων $\quad = x^2 - x + 1$

- **Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου με πολυώνυμο**

  Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πολυώνυμα, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

  Παράδειγμα:
  $$\begin{aligned}(\alpha - 2)\cdot(\alpha + 4) &= \alpha\cdot(\alpha + 4) - 2\cdot(\alpha + 4)\\ &= \alpha^2 + 4\alpha - 2\alpha - 8\\ &= \alpha^2 + 2\alpha - 8\end{aligned}$$

Αξιοσημείωτες ταυτότητες $(\alpha \pm \beta)^2$

Διερεύνηση (1)

Σε ένα τηλεπαιχνίδι μαθηματικών για ταλαντούχους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου, η Νεφέλη, μπόρεσε σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα να υπολογίσει προφορικά τις πιο κάτω δυνάμεις:

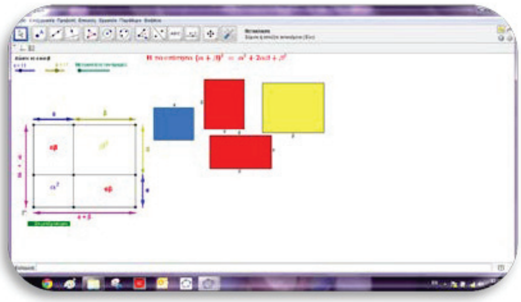
- 41^2
- 101^2
- 999^2
- 105^2

Με το τέλος της διαδικασίας, η Νεφέλη εξήγησε στους συμμαθητές της τον τρόπο που εργαζόταν. Αρχικά μετέτρεπε τη βάση της δύναμης σε άθροισμα ή διαφορά δύο αριθμών και ακολούθως εφάρμοζε τον τύπο που ανακάλυψε ότι ισχύει για $(\alpha+\beta)^2$ και $(\alpha-\beta)^2$.

✓ Να εξετάσετε ποιος τύπος ισχύει για το ανάπτυγμα των $(\alpha+\beta)^2$ και $(\alpha-\beta)^2$.

✓ Να εξετάσετε κατά πόσο το πιο πάνω συμπέρασμα ισχύει για οποιοδήποτε ζεύγος αριθμών, δίνοντας ένα παράδειγμα.

Να ανοίξετε το αρχείο [«C_En1_Tautotites.ggb»]() για να διερευνήσετε και γεωμετρικά το συμπέρασμά σας.



✓ Πώς νομίζετε ότι ανέλυσε τις πιο πάνω δυνάμεις η Νεφέλη, για να υπολογίσει εύκολα και γρήγορα το αποτέλεσμα;

$41^2 = (\ldots \quad \ldots)^2 =$

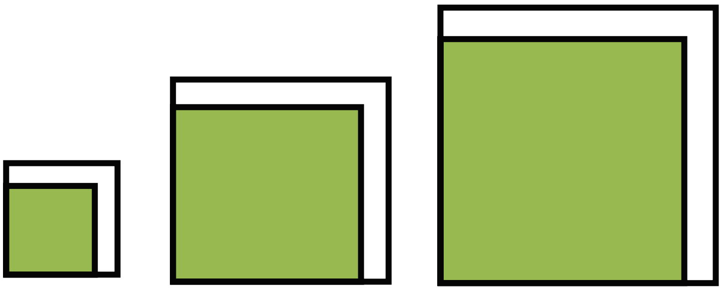
$101^2 = (\ldots \quad \ldots)^2 =$

$999^2 = (\ldots \quad \ldots)^2 =$

$105^2 = (\ldots \quad \ldots)^2 =$

Διερεύνηση (2)

Σε μια δεύτερη δοκιμασία οι κριτές έδωσαν τις ακόλουθες οδηγίες στους διαγωνιζόμενους:
«Κάθε φορά θα σας δίνεται ένα τετράγωνο με συγκεκριμένη πλευρά (π.χ. 45 cm, 105 cm, 567 cm, …). Στη συνέχεια το μήκος της πλευράς του τετραγώνου θα αυξάνεται κατά μία μονάδα. Εσείς θα καλείστε να υπολογίσετε πόσο μεγαλύτερο θα είναι το εμβαδόν του νέου τετραγώνου».



Ο Χρίστος έλυσε με ευκολία τη δοκιμασία και σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα. Ανακάλυψε έναν τρόπο για να υπολογίζει την αύξηση του εμβαδού, χωρίς να υπολογίζει κάθε φορά ξεχωριστά τα δύο εμβαδά και ακολούθως να υπολογίζει τη διαφορά τους.

- ✓ Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα και να προσπαθήσετε να βρείτε τον κανόνα που ανακάλυψε ο Χρίστος.
  (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την υπολογιστική σας για τους υπολογισμούς)

Πλευρά αρχικού τετράγωνου	Πλευρά νέου τετραγώνου	Διαφορά των δύο εμβαδών
1	2	3
3		
5		
10		
501		

- ✓ Πώς μπορούμε να αποδείξουμε τον κανόνα που σκέφτηκε ο Χρίστος για να μπορεί να υπολογίζει γρήγορα την κάθε διαφορά για οποιαδήποτε πλευρά τετραγώνου του δοθεί.

Μαθαίνω

- **Αλγεβρική ταυτότητα** είναι κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών.

  Παράδειγμα:
  $\omega(x+y) = \omega \cdot x + \omega \cdot y$

- Κάποιες από τις πιο αξιοσημείωτες ταυτότητες είναι:
  - **Τετράγωνο αθροίσματος δύο όρων**: Το τετράγωνο του αθροίσματος δύο όρων είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο όρων αυξημένων κατά το διπλάσιο του γινομένου αυτών.

    Δηλαδή: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

    Παραδείγματα:

    $(\alpha+3)^2 = \alpha^2 + 2\cdot\alpha\cdot 3 + 3^2$
    $= \alpha^2 + 6\alpha + 9$

    $32^2 = (30+2)^2 = 30^2 + 2\cdot 30\cdot 2 + 2^2$
    $= 900 + 120 + 4$
    $= 1024$

Ανάπτυγμα μιας ταυτότητας είναι το αποτέλεσμα που προκύπτει ύστερα από την εκτέλεση όλων των πράξεων.

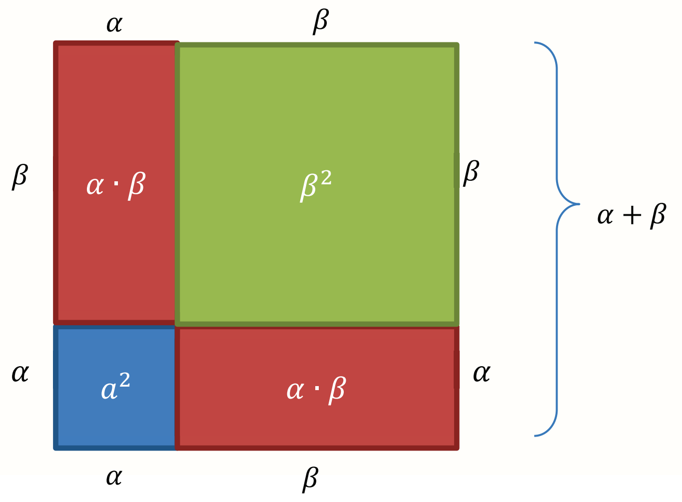
Δηλαδή το **ανάπτυγμα** του $(\alpha+\beta)^2$ είναι η παράσταση: $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Απόδειξη:
Ονομάζουμε το αριστερό μέλος της ισότητας ως «Α΄ μέλος» και το δεξιό μέλος της ισότητας ως «Β΄ μέλος». Θα κάνουμε τις πράξεις στο Α΄ μέλος και θα οδηγηθούμε με διαδοχικά βήματα στο Β΄ μέλος.

Α΄ μέλος $= (\alpha+\beta)^2$
$= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$ Εκτελούμε τις πράξεις
$= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2$
$= \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2$
$= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
$=$ Β΄ μέλος

Άρα $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Γεωμετρική ερμηνεία: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$



Το αριστερό μέλος της ισότητας το ονομάζουμε ως «Α΄ μέλος» και το δεξιό μέλος της ισότητας ως «Β΄ μέλος».

Όταν έχουμε να αποδείξουμε μια ταυτότητα μπορούμε να ξεκινήσουμε από το ένα μέλος και να καταλήξουμε στο άλλο.

$\boldsymbol{A_{μέλος}} = \ldots = \boldsymbol{B_{μέλος}}$
$\boldsymbol{B_{μέλος}} = \cdots = \boldsymbol{A_{μέλος}}$

Μπορούμε, επίσης, να προχωρήσουμε και τα δύο μέλη έως ένα σημείο και να διαπιστώσουμε την ισότητά τους, δηλαδή:
$\boldsymbol{A_{μέλος}} = \boldsymbol{\Gamma}$
$\boldsymbol{B_{μέλος}} = \boldsymbol{\Gamma}$ $\boldsymbol{A_{μέλος}} = \boldsymbol{B_{μέλος}}$

➢ **Τετράγωνο διαφοράς δύο όρων:** Το τετράγωνο της διαφοράς δύο όρων είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο όρων, μειωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο αυτών.

Δηλαδή: $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Παραδείγματα:

$$(\alpha-3)^2=\alpha^2-2\cdot\alpha\cdot3+3^2$$
$$=\alpha^2-6\alpha+9$$

$$19^2=(20-1)^2=20^2-2\cdot20\cdot1+1^2$$
$$=400-40+1$$
$$=361$$

Απόδειξη:

$$\text{Α΄ μέλος}=(\alpha-\beta)^2$$
$$=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)$$ Εκτελούμε τις πράξεις
$$=\alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2$$
$$=\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\beta+\beta^2$$
$$=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$
$$=\text{Β΄ μέλος}$$

Άρα $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

(α) $(x+2)^2$ (β) $(2x-3\psi)^2$

(γ) $\left(\frac{x}{2}-2\right)^2$ (δ) $\left(\sqrt{5}+2\right)^2$

Λύση:

Εφαρμόζουμε τα αναπτύγματα των ταυτοτήτων:

(α) $(x+2)^2=x^2+2\cdot x\cdot2+2^2=x^2+4x+4$

(β) $(2x-3\psi)^2=(2x)^2-2\cdot2x\cdot3\psi+(3\psi)^2=4x^2-12x\psi+9\psi^2$

(γ) $\left(\frac{x}{2}-2\right)^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2-2\cdot\frac{x}{2}\cdot2+2^2=\frac{x^2}{4}-2x+4$

(δ) $\left(\sqrt{5}+2\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2+2\cdot\sqrt{5}\cdot2+2^2=5+4\sqrt{5}+4=9+4\sqrt{5}$

Ισχύει:
$\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$

2. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+1)^2-1=\alpha(\alpha+2)$

Λύση:

Α΄ τρόπος:

Ξεκινάμε από το Α΄ μέλος για να φθάσουμε στο Β΄ μέλος.

$$A'\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma=(\alpha+1)^2-1$$ *Αναπτύσσουμε την ταυτότητα.*
$$=(\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot1+1^2)-1$$
$$=\alpha^2+2\alpha+1-1$$ *Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.*
$$=\alpha^2+2\alpha$$
$$=\alpha(\alpha+2)$$ *Εφαρμόζουμε το αντίστροφο της επιμεριστικής ιδιότητας.*
$$=B'\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma$$

ή ***Β΄ τρόπος:***

Αναπτύσσω και τα δύο μέλη της ισότητας

$$\begin{aligned} A'\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma &= (\alpha+1)^2-1 \\ &= (\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot1+1^2)-1 \\ &= \alpha^2+2\alpha+1-1 \\ &= \alpha^2+2\alpha \end{aligned}$$

Αναπτύσσω την ταυτότητα.
Κάνω αναγωγή ομοίων όρων.

$$\begin{aligned} B'\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma &= \alpha(\alpha+2) \\ &= \alpha^2+2\alpha \end{aligned}$$

Εφαρμόζω την επιμεριστική ιδιότητα.

Άρα, $A'\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma = B'\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma$. *Επομένως ισχύει* $(\alpha+1)^2-1=\alpha(\alpha+2)$

3. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+3$, αν οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι.

Λύση:

Οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι. Άρα, ισχύει $\alpha+\beta=0$.

Η παράσταση $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ *είναι ανάπτυγμα τέλειου τετραγώνου. Άρα,*

$$\begin{aligned} \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+3 &= (\alpha+\beta)^2+3 \\ &= 0^2+3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω ισότητες είναι ταυτότητες, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

Ισότητα		
(α)	$x=5$	Είναι / Δεν είναι ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ
(β)	$6x=4x+2x$	Είναι / Δεν είναι ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ
(γ)	$0x=0$	Είναι / Δεν είναι ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ
(δ)	$x=1+y$	Είναι / Δεν είναι ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ
(ε)	$\alpha\cdot\beta=0$	Είναι / Δεν είναι ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ
(στ)	$2(\alpha+\beta)=2\alpha+\beta$	Είναι / Δεν είναι ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ

2. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

(α) $(\alpha+1)^2$	(β) $(y-3)^2$	(γ) $(7-\mu)^2$
(δ) $(6+x)^2$	(ε) $(4\kappa-1)^2$	(στ) $(3x+2)^2$
(ζ) $(5x-\psi^2)^2$	(η) $\left(5+\sqrt{2}\right)^2$	(θ) $(2\omega^2+y^3)^2$
(ι) $\left(\frac{x}{4}-3\right)^2$	(ια) $\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$	(ιβ) $\left(\frac{x-3}{5}\right)^2$

3. Ο Αλέξης έκανε βιαστικά τις πιο κάτω πράξεις και δεν είχε χρόνο να τις ελέγξει. Να ελέγξετε τις πράξεις του και να διορθώσετε τυχόν λάθη.

$(x-2)^2 = x^2 + 4$

$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16^2$

$(x-5)^2 = x^2 + 10 - 25$

$(3x+2)^2 = 9x^2 + 4 + 12x$

4. Να κάνετε τις πράξεις:
   (α) $(\kappa-1)^2+(\kappa+1)^2$ (β) $(2x+1)^2-2x(2-x)$
   (γ) $(2a+3)^2-(1-2a)^2$ (δ) $(2\beta-3)^2+(\beta-1)(\beta-1)$

5. Να συμπληρώσετε τα τετράγωνα, ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω ταυτότητες:
   (α) $(y+\square)^2=y^2+4x+4$ (β) $(x+\square)^2=9+6x+x^2$
   (γ) $(\square+\square)^2=25+x^2+10x$ (δ) $(\square-\square)^2=-20y+4y^2+25$
   (ε) $(5-\square)^2=\square+16\beta^2-40\beta$ (στ) $(\square+\square)^2=y^6+x^4+\square$

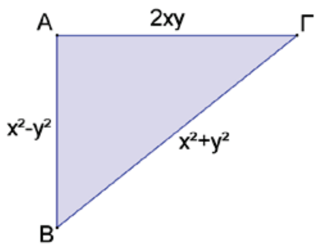
6. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω παραστάσεις είναι τέλεια τετράγωνα:
   (α) x^2-4x+4 (β) $9x^2+6x+1$
   (γ) $4x^2+4x+25$ (δ) $x^2+8x-16$
   (ε) $\alpha^2-6\alpha+3$ στ) $\omega^2-2\omega+1$

Τέλειο τετράγωνο ονομάζουμε το ανάπτυγμα των $(\alpha\pm\beta)^2$

7. Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:
   (α) $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ αν $\alpha+\beta=5$
   (β) $\kappa^2-2\kappa\lambda+\lambda^2$ αν $\kappa-\lambda=2$
   (γ) $x^2+6xy+9y^2$ αν $x+2y=1-y$

8. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:
   (α) $(\omega-2)^2-(\omega+2)^2=-8\omega$
   (β) $(x+y)^2-4xy=(x-y)^2$
   (γ) $(\alpha^2+\beta^2)^2-(\alpha^2-\beta^2)^2=4\alpha^2\beta^2$
   (δ) $\left(y-\frac{1}{y}\right)^2+2=\left(y+\frac{1}{y}\right)^2-2$
   (ε) $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

9. Να εξετάσετε κατά πόσο το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A}=90^o$).

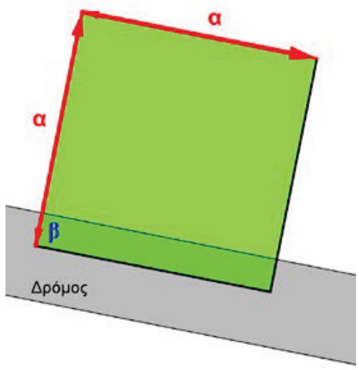


10. Δίνεται η παράσταση $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)^2$.
   (α) Να δείξετε ότι η παράσταση είναι ανεξάρτητη του α.
   (β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left(\frac{12}{34}+\frac{34}{12}\right)^2-\left(\frac{34}{12}-\frac{12}{34}\right)^2$.

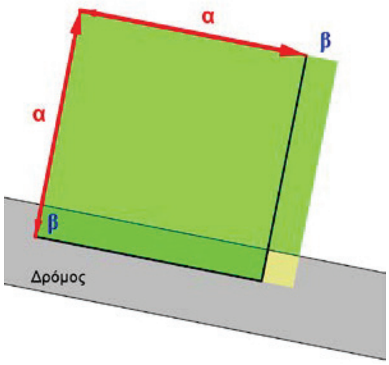
Αξιοσημείωτη ταυτότητα
$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\cdot(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})$

Διερεύνηση

Ο κύριος Γιάννης έχει ένα οικόπεδο, σχήματος τετραγώνου το οποίο εφάπτεται του αυτοκινητόδρομου Λευκωσίας – Λεμεσού. Λόγω της διαπλάτυνσης που θα γίνει στον δρόμο θα πρέπει να παραχωρηθεί ένα ορθογώνιο μέρος του οικοπέδου πλάτους β, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



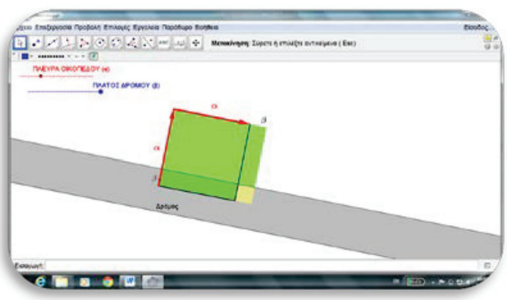
Η αρμόδια υπηρεσία του πρότεινε να του παραχωρήσει ένα ορθογώνιο κομμάτι γης πλάτους β από το γειτονικό κρατικό τεμάχιο.



- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο η πρόταση αυτή συμφέρει τον κύριο Γιάννη.

- ✓ Ποιο θα είναι το εμβαδόν του νέου οικοπέδου;

Να ανοίξετε το αρχείο [«C_En1_oikopedo.ggb»](), να μεταβάλετε τις τιμές των διαστάσεων α και β και να εξετάσετε κατά πόσο το πιο πάνω συμπέρασμά σας ισχύει για κάθε τιμή του μήκους και του πλάτους.



- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο η ισότητα $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$, ισχύει για διαφορετικές τιμές των α και β.

- ✓ Να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$.

Μαθαίνω

- **Γινόμενο του αθροίσματος επί τη διαφορά δύο όρων:**
  Το γινόμενο του αθροίσματος δύο όρων επί τη διαφορά τους, είναι ίσο με τη διαφορά των τετραγώνων των δύο όρων.
  Δηλαδή: $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$

Παραδείγματα:

$$\begin{aligned}(\alpha-3)(\alpha+3)&=\alpha^2-3^2\\&=\alpha^2-9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}32\cdot 28&=(30+2)(30-2)\\&=30^2-2^2\\&=900-4\\&=896\end{aligned}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}\text{Α΄ μέλος}&=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\\&=\alpha^2+\alpha\beta-\beta\alpha-\beta^2\\&=\alpha^2-\beta^2\\&=\text{Β΄ μέλος}\end{aligned}$$

Άρα, $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$

Παραδείγματα

1. Να κάνετε τις πράξεις:
   (α) $(a-5)(a+5)$ (β) $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$
   (γ) $(2-\omega)(\omega+2)$ (δ) $2\kappa^2-(\kappa-1)(\kappa+1)$

Λύση:

Αναπτύσσουμε τις ταυτότητες:

(α) $(a-5)(a+5)=a^2-5^2=a^2-25$

(β) $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=4-3=1$

(γ) $$\begin{aligned}(2-\omega)(\omega+2)&=(2-\omega)(2+\omega)\\&=2^2-\omega^2\\&=4-\omega^2\end{aligned}$$ *Αντιμεταθετική Ιδιότητα.*

Αρχικά υπολογίζουμε το γινόμενο, το οποίο είναι ταυτότητα:

(δ) $2\kappa^2 - (\kappa - 1)(\kappa + 1) = 2\kappa^2 - (\kappa^2 - 1)$
$= 2\kappa^2 - \kappa^2 + 1$
$= \kappa^2 - 1$

Απαλείφουμε παρενθέσεις και κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

(α) $(x-3)(x+3)$ (β) $(2x-1)(2x+1)$

(γ) $(\alpha\beta - 1)(\alpha\beta + 1)$ (δ) $(x^3 - 2\omega)(x^3 + 2\omega)$

(ε) $\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)\left(\kappa + \frac{1}{2}\right)$ (στ) $(5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})$

(ζ) $(3a-1)(1+3a)$ (η) $(3y+5)(5-3y)$

2. Να συμπληρώσετε τα τετράγωνα, ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω ταυτότητες.

(α) $(4a - \square)(\square + 1) = \square - 1$

(β) $(\psi - \square)(\square + 8) = \psi^2 - \square$

(γ) $(2\beta + \square)(\square - \square) = 64\alpha^4 - \square$

(δ) $(\square - \square)(\square + 5\alpha^3) = \frac{\psi^2}{9} - \square$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(v-3)(v+3)(v^2+9)$ (β) $(x+2)(x-2)+3x-5$

(γ) $(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha^2+1)-1$ (δ) $(4x-1)(4x+1)+(4x+2)^2$

(ε) $2x^2-(2x+3)(2x-3)$ (στ) $x(x-1)(1+x)-x^3$

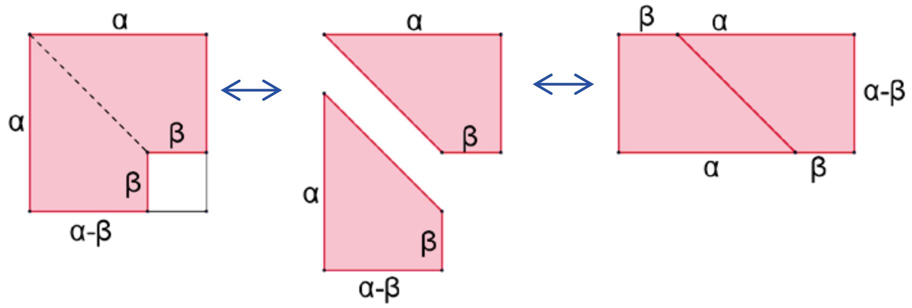
4. Να εφαρμόσετε τις ταυτότητες, για να κάνετε πιο εύκολα τις πράξεις:

(α) 103^2 (β) $29 \cdot 29$

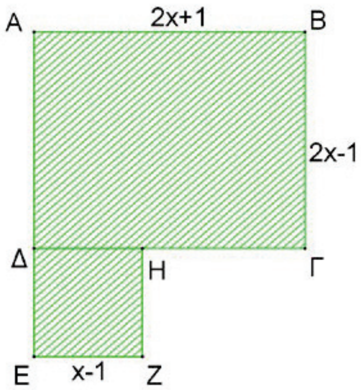
(γ) $101 \cdot 99$ (δ) $198 \cdot 202$

5. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:
   (α) $(\alpha - 1)^2 + 2\alpha = (\alpha - 1)(\alpha + 1) + 2$
   (β) $(x - y)(x + y) + 2y^2 = (x - y)^2 + 2xy$
   (γ) $(\beta - 1)(\beta + 1)(\beta^2 + 1)(\beta^4 + 1) - \beta^8 = -1$
   (δ) $[(\alpha - 3\beta)^2 + 6\alpha\beta](\alpha^2 - 9\beta^2) = \alpha^4 - 81\beta^4$

6. Να εξηγήσετε την πιο κάτω γεωμετρική ερμήνεια της απόδειξη της ταυτότητας $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$:



7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος, αν το $ΔΗΖΕ$ είναι τετράγωνο πλευράς $x - 1$ και το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο διαστάσεων $2x + 1$ και $2x - 1$.



8. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $A = (3\alpha + 1)^2 + (\alpha - 3)^2 + 10(1 - \alpha)(1 + \alpha)$ είναι σταθερό.

9. Αν $xy = 1$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:
   $A = (x - y)^2 - (x - 3)(x + 3) - y^2$

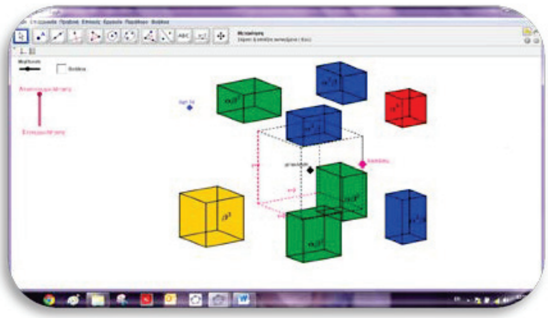
Αξιοσημείωτες Ταυτότητες
$(\alpha+\beta)^3$ και $(\alpha-\beta)^3$

Διερεύνηση

Ο Νικόλας και ο Μιχάλης προσπαθούν να προβλέψουν ποιο θα είναι το ανάπτυγμα της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^3$.

✓ Εσείς ποιο νομίζετε ότι είναι το ανάπτυγμα $(\alpha+\beta)^3$;

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο [«C En1 (a+b)^3.ggb»], για να διερευνήσετε γεωμετρικά το ανάπτυγμα του $(\alpha+\beta)^3$.



✓ Να αποδείξετε την ταυτότητα και αλγεβρικά.

✓ Ποιο είναι το ανάπτυγμα $(\alpha-\beta)^3$;

Μαθαίνω

- **Κύβος αθροίσματος:**

$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned}(2+\beta)^3 &= 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot\beta + 3\cdot 2\cdot\beta^2 + \beta^3\\ &= 8 + 12\beta + 6\beta^2 + \beta^3\end{aligned}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} A_{μέλος} = (α+β)^3 &= (α+β)\cdot(α+β)^2 \\ &= (α+β)\cdot(α^2+2αβ+β^2) \\ &= α^3+2α^2β+αβ^2+βα^2+2αβ^2+β^3 \\ &= α^3+3α^2β+3αβ^2+β^3 \\ &= B_{μέλος} \end{aligned}$$

Άρα, $(α+β)^3 = α^3+3α^2β+3αβ^2+β^3$

- **Κύβος διαφοράς:**

$$(\boldsymbol{α}-\boldsymbol{β})^3 = \boldsymbol{α}^3 - 3\boldsymbol{α}^2\boldsymbol{β} + 3\boldsymbol{α}\boldsymbol{β}^2 - \boldsymbol{β}^3$$

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} (α-5)^3 &= α^3 - 3\cdot α^2\cdot 5 + 3\cdot α\cdot 5^2 - 5^3 \\ &= α^3 - 15α^2 + 75α - 125 \end{aligned}$$

Απόδειξη:

Α' τρόπος:

$$\begin{aligned} A_{μέλος} = (α-β)^3 &= (α-β)\cdot(α+β)^2 \\ &= (α-β)\cdot(α^2-2αβ+β^2) \\ &= α^3-2α^2β+αβ^2-βα^2+2αβ^2-β^3 \\ &= α^3-3α^2β+3αβ^2-β^3 \\ &= B_{μέλος} \end{aligned}$$

Β' τρόπος:

$$\begin{aligned} A_{μέλος} = (α-β)^3 &= \left(α+(-β)\right)^2 \\ &= α^3+3α^2(-β)+3α(-β)^2+(-β)^3 \\ &= α^3-3α^2β+3αβ^2-β^3 \\ &= B_{μέλος} \end{aligned}$$

Άρα, $(α-β)^3 = α^3-3α^2β+3αβ^2-β^3$

Παραδείγματα

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

   (α) $(κ+3λ)^3$

   (β) $\left(2x-\frac{1}{3}\right)^3$

Λύση:

(α) *Εφαρμόζουμε το ανάπτυγμα του κύβου αθροίσματος:*

$$\begin{aligned} (κ+3λ)^3 &= (κ)^3 + 3\cdot(κ)^2\cdot(3λ) + 3\cdot(κ)\cdot(3λ)^2 + (3λ)^3 \\ &= κ^3 + 3\cdot κ^2\cdot(3λ) + 3\cdot(κ)\cdot(9λ^2) + 27λ^3 \\ &= κ^3 + 9κ^2λ + 27κλ^2 + 27λ^3 \end{aligned}$$

(β) *Εφαρμόζουμε το ανάπτυγμα του κύβου αθροίσματος:*

$$\left(2x-\frac{1}{3}\right)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right) + 3\cdot(2x)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3$$
$$= 8x^3 - 3\cdot(4x^2)\cdot\left(\frac{1}{3}\right) + 3\cdot(2x)\cdot\left(\frac{1}{9}\right) - \frac{1}{27}$$
$$= 8x^3 - 4x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{27}$$

2. Αν $P(x) = x^3 - 5x^2 - 1$ και $Q(x) = 4x - 5$, να βρείτε τα πολυώνυμα: $P(x) + 1$ και $P(x+1)$.

Λύση:

$$P(x) + 1 = x^3 - 5x^2 - 1 + 1$$
$$= x^3 - 5x^2$$

$$P(\boldsymbol{x}) \quad = \quad \boldsymbol{x}^3 \quad - \quad 5\boldsymbol{x}^2 \quad - 1$$

$P(\boldsymbol{x+1}) = (\boldsymbol{x+1})^3 - 5(\boldsymbol{x+1})^2 - 1$ *Αναπτύσσουμε τις ταυτότητες:*

$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 5(x^2 + 2x + 1) - 1$$
$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 5x^2 - 10x - 5 - 1$$
$$= x^3 - 2x^2 - 7x - 5$$

3. Αν $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 5$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων: $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ και $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}$

Αν $A = B$ τότε $A^\nu = B^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$

Λύση:

Αφού ισχύει $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 5$, *τότε:*

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 = 5^2$$
$$\alpha^2 + 2\cdot\alpha\cdot\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 25$$
$$\alpha^2 + 2 + \frac{1}{\alpha^2} = 25$$
$$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = 25 - 2$$

Άρα, $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = 23$

Αφού ισχύει $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 5$, *τότε:*

$$3\cdot\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = 3\cdot 5$$

Άρα, $3\alpha + \frac{3}{\alpha} = 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = 15$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = 5^3$$
$$\alpha^3 + 3\cdot\alpha^2\cdot\frac{1}{\alpha} + 3\cdot\alpha\cdot\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} = 125$$
$$\alpha^3 + 3\alpha + \frac{3}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} = 125$$
$$\alpha^3 + 15 + \frac{1}{\alpha^3} = 125$$

Άρα, $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = 125 - 15 = 110$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:
   (α) $(x+3)^3$ (β) $(2-x)^3$
   (γ) $(x+3)^3$ (δ) $(\alpha-3\beta)^3$
   (ε) $(2x-1)^3$ (στ) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$

Επαληθεύσετε τις απαντήσεις σας!

GeoGebra
→Παράθυρο CAS
(Calculate Algebra System)
- Να ανοίξετε το λογισμικό
- Από τις “ *Επιλογές*” να κάνετε κλικ στο “*Παράθυρο CAS*”
- Εδώ μπορείτε να αναπτύξετε οποιαδήποτε ταυτότητα ή αλγεβρική παράσταση θέλετε!

2. Να κάνετε τις πράξεις:
   (α) $(x-2)^3-(x-3)(x+3)+4x^2$
   (β) $(1+x)^3-2x(2x+1)^2$
   (γ) $(x-2)^3+x(2x-3)(3+2x)$

3. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:
   (α) $(x+2)^3-2=6(x+1)^2+x^3$
   (β) $(x-1)^3+x(3x-7)=x(x-2)(x+2)-1$

4. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:
   $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ και
   $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$.
   Στη συνέχεια να υπολογίσετε τις παραστάσεις $\alpha^2+\beta^2$ και $\alpha^3+\beta^3$, αν $\alpha+\beta=2$ και $\alpha\beta=-8$.

5. Αν $x+y=3$ και $xy=2$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
   (α) x^2+y^2 (β) x^3+y^3
   (γ) $(x-y)^2$

6. Αν στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει ότι το άθροισμα των δύο κάθετων πλευρών είναι 5 και το εμβαδόν του 3. Να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας.

7. Το άθροισμα των τετραγώνων δύο αριθμών είναι ίσο με 64, ενώ το άθροισμα των ίδιων αριθμών είναι ίσο με 10. Να βρείτε το γινόμενό τους.

8. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
   $$\sqrt{\frac{2016^3-3\cdot2016^2+3\cdot2016-1}{2015}}$$

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(2x+5)^2$ (β) $\left(\frac{1}{a}+a\right)^2$

(γ) $(2-y^2)^2$ (δ) $\left(2-\sqrt{7}\right)^2$

(ε) $(a+3)(a+3)$ (στ) $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$

(ζ) $(\alpha+\beta)(\beta-a)$ (η) $(y^2-\omega)(y^2+\omega)$

(θ) $(a-5)^3$ (ι) $(2-3\beta)^3$

(ια) $(1+\beta)(\beta^4+1)(\beta-1)(1+\beta^2)$

2. Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

(α) $\square+\square+\beta^2=(x+\square)^2$

(β) $25x^2+1+\square=(\square+\square)^2$

(γ) $\square+\square+25y^2=(4x+\square)^2$

(δ) $(\square+9x)\cdot(\square-\square)=4y^2-\square$

(ε) $\alpha^2-\square=(\square-\square)\cdot\left(\square+\frac{1}{2}\right)$

(στ) $(3\alpha^2-\square)\cdot(\square+\square)=\square-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$

(ζ) $\omega^2-\omega+\square=(\square-\square)^2$

(η) $y^4+8y^2+\square=(\square+\square)^2$

(θ) $\alpha^2+\frac{9}{\beta^2}+\square=(\square+\square)^2$

(ι) $27x^3+1+\square+\square=(\square+\square)^3$

3. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

(α) $(x+y)^2-(x+z)^2=2x(y-z)+(y-z)(y+z)$

(β) $(a+\beta)^3-(\alpha-\beta)^3=2\beta(\beta^2+3\alpha^2)$

(γ) $\left(\frac{x+y}{3}\right)^2-\left(\frac{x-y}{3}\right)^2=\frac{4xy}{9}$

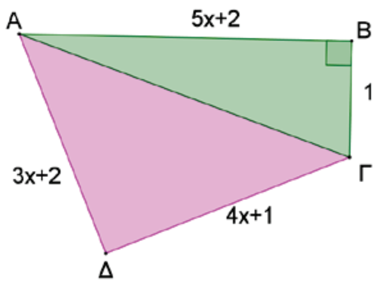
(δ) $(a-\beta+1)^2=(\alpha-\beta)^2+2(\alpha-\beta)+1$

4. Σκεφτείτε δύο αριθμούς διαφορετικούς από το μηδέν:
   - *Βρείτε το τετράγωνο του αθροίσματός τους.*
   - *Βρείτε το τετράγωνο της διαφοράς τους.*
   - *Αφαιρέστε από το τετράγωνο του αθροίσματός το τετράγωνο της διαφοράς.*
   - *Διαιρέστε το τελικό αποτέλεσμα με το γινόμενο των δύο αριθμών που αρχικά σκεφτήκατε.*
   - *Το αποτέλεσμα που βρήκατε είναι ο αριθμός* 4 *ανεξάρτητα από τους αριθμούς που επιλέξατε.*

   Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί ισχύει για οποιουσδήποτε αριθμούς επιλέξετε;

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
   $A = 2015^2 - 2014^2$ και
   $B = 1{,}61^2 - 1{,}6^2$

6. Αν στο σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, να αποδείξετε ότι και το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο.



7. Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = -2x^2 + 2x + 80$.
   (α) Να βρείτε το $P(x-1)$.
   (β) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{P}(x) - \mathrm{P}(x-1) = 4 - 4x$.
   (γ) Με τη βοήθεια του πιο πάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $\mathrm{P}(100) - \mathrm{P}(99)$.

8. Αν $\alpha + \beta = 2$ και $\alpha\beta = -3$, να αποδείξετε ότι:
   (α) $\alpha^2 + \beta^2 = 10$
   (β) $\alpha^3 + \beta^3 = 26$
   (γ) $(\alpha - \beta)^2 = 16$

9. Να δείξετε ότι οι αριθμοί $\mu^2 - \nu^2$, $2\mu \cdot \nu$ και $\mu^2 + \nu^2$ αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα, όταν μ, ν φυσικοί αριθμοί με $\mu, \nu \neq 0$ και $\mu \neq \nu$.

Πυθαγόρεια τριάδα είναι μια τριάδα φυσικών αριθμών ($0 < \alpha < \beta < \gamma$) που συνδέονται με τη σχέση $\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2}$.

10. Δίνεται η παράσταση: $A = (x-1)^3 - x(x^2-4x-2) + 7$,

(α) Να αποδείξετε ότι $A = x^2 + 5x + 6$.

(β) Αν $B = 5x + 7$, να αποδείξετε ότι $A - B = (x-1)(x+1)$.

11.

Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει:	Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:
$\alpha\beta = 9$	$\left(\frac{5\alpha-\beta}{3}\right)^2 - \left(\frac{5\alpha+\beta}{3}\right)^2$
$\alpha = \frac{1}{\beta}$	$(3\alpha-\beta)^2 - (3\alpha-2)(3\alpha+2) - \beta^2$
$\alpha + \beta = -3$	$(\alpha+1)^2 + (\beta+1)^2 - (\alpha-\beta)^2 - 2\alpha\beta$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $(x+5)^2 = (3-x)^2 + 24$

(β) $3(x-3)^2 + 2(x-3)(x+3) = 5(2x-1)^2 - 15x^2$

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Αν $\alpha = 2 - \sqrt{15}$ και $\beta = \sqrt{6} - \sqrt{10}$:
   (α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\alpha^2 - \beta^2$,
   (β) Να δείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{3}}$ και $\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{3}}$ είναι αντίστροφοι.

2. Να αποδείξετε ότι η παράσταση:
   $\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)^2 - \frac{(\alpha^2-\alpha)(\alpha+\alpha^2)}{4} - \frac{(1-\alpha)}{2} \cdot \frac{(1+\alpha)}{2}$ είναι ίσο με το μηδενικό πολυώνυμο.

3. Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου:
   $A = 2015x^{10} + x^2(2x^3 - 2016)^5$

4. Το διπλανό «τρίγωνο» είναι γνωστό ως ***τρίγωνο του Πασκάλ*** και πήρε το όνομά του από τον Γάλλο μαθηματικό ***Blaise Pascal (1623 – 1662).***

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

   (α) Να βρείτε τις επόμενες σειρές αριθμών. Ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς του τριγώνου;
   (β) Να παρατηρήσετε τα αναπτύγματα των:
   $(\alpha + \beta)^n, όπου\ n \in \mathbb{N}_0$

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)^0 &= 1\\
(\alpha+\beta)^1 &= 1\alpha + 1\beta\\
(\alpha+\beta)^2 &= 1\alpha^2 + 2\alpha\beta + 1\beta^2\\
(\alpha+\beta)^3 &= 1\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 1\beta^3\\
(\alpha+\beta)^4 &= 1\alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + 1\beta^4\\
(\alpha+\beta)^5 &= \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots\\
(\alpha+\beta)^6 &= \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots
\end{aligned}
$$

   Μπορείτε να ανακαλύψετε τη σχέση των αριθμητικών παραγόντων των όρων με τους αριθμούς στο τρίγωνο του Πασκάλ;
   (γ) Να βρείτε τα αναπτύγματα $(\alpha + \beta)^5$ και $(\alpha + \beta)^6$.
   Ποιο θα είναι το ανάπτυγμα του $(\alpha - \beta)^6$;

Μπορείτε να βρείτε άλλες ιδιότητες που κρύβουν οι αριθμοί του τριγώνου του Πασκάλ;

5. Σ' ένα περιοδικό για αυτοκίνητα χρησιμοποιείται ένα σύστημα βαθμολόγησης για την αξιολόγηση των νέων αυτοκινήτων. Το αυτοκίνητο με τους περισσότερους βαθμούς παίρνει το βραβείο «Το Αυτοκίνητο της Χρονιάς». Αξιολογήθηκαν πέντε καινούρια αυτοκίνητα και η βαθμολογία τους δίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

Αυτοκίνητο	Κριτήρια Ασφαλείας (S)	Αποδοτικότητα Βενζίνης (F)	Εξωτερική Εμφάνιση (E)	Εσωτερικά Αξεσουάρ (T)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Η βαθμολογία έχει ως εξής:
3 Βαθμοί = Τέλειο   2 Βαθμοί = Καλό   1 Βαθμός = Μέτριο

Για να υπολογιστεί το σύνολο των βαθμών ενός αυτοκινήτου, το περιοδικό χρησιμοποιεί τον παρακάτω κανόνα, ο οποίος είναι το σταθμισμένο άθροισμα των επί μέρους βαθμών:

$$\textbf{Τελική βαθμολογία} = 3 \times \boldsymbol{S} + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}$$

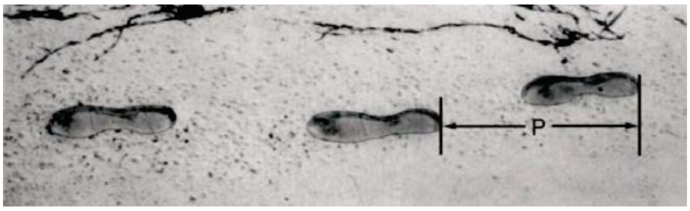
(α) Να υπολογίσετε την τελική βαθμολογία του αυτοκινήτου «Ca».

(β) Ο κατασκευαστής του αυτοκινήτου «Ca» σκέφτηκε ότι ο κανόνας για τον υπολογισμό της τελικής βαθμολογίας δεν είναι δίκαιος. Να γράψετε έναν κανόνα υπολογισμού της τελικής βαθμολογίας έτσι ώστε το αυτοκίνητο «Ca» να είναι ο νικητής. Ο κανόνας σας πρέπει να περιέχει και τις τέσσερις μεταβλητές και πρέπει να τον γράψετε, συμπληρώνοντας με θετικούς αριθμούς τα τέσσερα διαστήματα της παρακάτω εξίσωσης.

$$\textbf{Τελική βαθμολογία} = \cdots \times \boldsymbol{S} + \cdots \times \boldsymbol{F} + \cdots \times \boldsymbol{E} + \cdots \times \boldsymbol{T}$$

PISA 2003

6. Στην πιο κάτω φωτογραφία βλέπετε τα πατήματα ενός άνδρα. Η απόσταση από τη φτέρνα του πατήματος μέχρι τη φτέρνα του άλλου αποτελεί το μήκος ενός βήματος, το οποίο ονομάζουμε P.



Ο βηματισμός των ανδρών εκφράζεται από τον τύπο, $\frac{V}{P} = 140$
Ο τύπος δείχνει κατά προσέγγιση τη σχέση ανάμεσα στο V και στο P, όπου

V = το πλήθος των βημάτων που κάνει ένας άνδρας ανά λεπτό, και

P = το μήκος σε μέτρα (m) του βήματος του άνδρα.

(α) Ο Γιάννης κάνει 70 βήματα ανά λεπτό. Ποιο είναι το μήκος του βήματός του;

(β) Το μήκος βήματος του Θανάση είναι $0{,}80\ m$. Να υπολογίσετε την ταχύτητα βαδίσματος του Θανάση, σε μέτρα ανά λεπτό και σε χιλιόμετρα ανά ώρα, χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο τύπο. *PISA 2003*

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Παραγοντοποίηση Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να εξετάζουμε κατά πόσο ένα πολυώνυμο είναι παράγοντας ενός άλλου πολυωνύμου.
- Να υπολογίζουμε τον άλλο παράγοντα ενός πολυωνύμου, όταν δίνεται ο ένας παράγοντάς του.
- Να μετατρέπουμε αλγεβρικές παραστάσεις σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, εφαρμόζοντας διάφορες τεχνικές.
- Να υπολογίζουμε τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη (ΜΚΔ) και το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) αλγεβρικών παραστάσεων.
- Να επιλύουμε εξισώσεις δεύτερου και ανώτερου βαθμού.
- Να υπολογίζουμε τις τιμές για τις οποίες ορίζονται ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.
- Να εκτελούμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.
- Να επιλύουμε εξισώσεις που περιλαμβάνουν ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.

Λύση Προβλήματος

Ρυθμός Πτώσης Σταγόνων

Ο ενδοφλέβιος ορρός χρησιμοποιείται για τη χορήγηση υγρών και φαρμάκων σε ασθενείς. Οι νοσηλεύτριες χρειάζεται να υπολογίσουν τον ρυθμό πτώσης των σταγόνων D, του ενδοφλέβιου ορρού σε σταγόνες ανά λεπτό.

Χρησιμοποιούν τον τύπο $\boldsymbol{D} = \frac{\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{V}}{\mathbf{60} \cdot \boldsymbol{n}}$, όπου:

$\boldsymbol{d}$: *είναι ο συντελεστής ροής και η μονάδα μέτρησής του είναι σταγόνες ανά χιλιοστόλιτρο (mL)*

$\boldsymbol{V}$: *είναι ο όγκος σε mL του ενδοφλέβιου ορρού στη συσκευή έκχυσης*

n: *είναι ο αριθμός των ωρών που χρειάζεται, για να αδειάσει η συσκευή.*

Ερώτηση 1:
Μία νοσηλεύτρια θέλει να διπλασιάσει τον χρόνο που χρειάζεται για να αδειάσει η συσκευή. Να περιγράψετε με ακρίβεια πώς αλλάζει το D, όταν διπλασιαστεί το n, ενώ τα d και V δεν αλλάζουν.

Ερώτηση 2:
Οι νοσηλεύτριες χρειάζεται, επίσης, να υπολογίζουν τον όγκο του ορρού στη συσκευή V, με βάση τον ρυθμό πτώσης D. Μία σύριγγα με ρυθμό πτώσης 50 σταγόνες ανά λεπτό, πρέπει να χορηγηθεί σε έναν ασθενή για 3 ώρες. Για αυτή τη σύριγγα, ο παράγοντας πτώσης είναι 25 σταγόνες ανά χιλιοστόλιτρο (mL). Ποιος είναι ο όγκος του ορρού σε mL;

PISA 2012

Έχουμε μάθει …

- **Διαίρεση πολυωνύμου με μονώνυμο**

  Για να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με ένα μονώνυμο διαιρούμε τον κάθε όρο του πολυωνύμου με το μονώνυμο και προσθέτουμε τα πηλίκα που προκύπτουν. Δηλαδή, εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα της διαίρεσης.

  Παράδειγμα:

  $$(9a^7 - 6a^5) : 3a^3 = (9a^7 : 3a^3) - (6a^5 : 3a^3) = 3a^4 - 2a^2$$

- **Διαίρεση πολυωνύμου με πολυώνυμο**

  Αν έχουμε δύο πολυώνυμα $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ και κάνουμε τη διαίρεση $\Delta(x) : \delta(x)$ τότε υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, για τα οποία ισχύει:

  $\boldsymbol{\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)}$, όπου το $\upsilon(x)$ μπορεί ή να είναι ίσο με μηδέν ή να έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του $\delta(x)$.

  Παράδειγμα:

  $$\begin{array}{r|l} 6x^2 + 5x + 3 & 2x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^2 - 3x} \quad\quad & 3x + 1 \\ +2x + 3 & \\ \underline{-2x - 1} & \\ +2 & \end{array}$$

  Άρα, το πηλίκο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = 3x + 1$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x) = 2$.

  Ισχύει,

  $$6x^2 + 5x + 3 = (2x + 1)(3x + 1) + 2$$

- Υπολογισμό του **Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη (ΜΚΔ)** δύο ή περισσότερων αριθμών.

  Για βρούμε τον **ΜΚΔ** δύο ή περισσότερων αριθμών σχηματίζουμε το γινόμενο των **κοινών** πρώτων παραγόντων τους με εκθέτη καθενός τον **μικρότερο** από τους εκθέτες του.

  Παράδειγμα:
  Αναλύουμε τους αριθμούς 84 και 120 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής:
  $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$
  $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

  $ΜΚ\Delta(84,120) = 2^2 \cdot 3 = 12$

- Υπολογισμό του **Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλάσιου (ΕΚΠ)** δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών.

  Για να βρούμε το **ΕΚΠ** δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών σχηματίζουμε το γινόμενο όλων των πρώτων παραγόντων τους με εκθέτη καθενός τον **μεγαλύτερο** από τους εκθέτες του.

  Παράδειγμα:
  Αναλύουμε τους αριθμούς 6 και 8 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής:
  $6 = 2 \cdot 3$
  $8 = 2^3$

  $ΕΚΠ(6,8) = 2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$

- Επίλυση εξισώσεων πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο.

  Παράδειγμα:

$4x + 3 = 5x - 5 - 3x$	*Χωρίζουμε τους γνωστούς όρους από τους άγνωστους.*
$\Leftrightarrow\ 4x + 3 = 5x - 5 - 3x$	
$\Leftrightarrow\ 4x - 5x + 3x = -5 - 3$	
$\Leftrightarrow\ 2x = -8$	*Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.*
$\Leftrightarrow\ \frac{2x}{2} = \frac{-8}{2}$	*Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου όρου.*
$\Leftrightarrow\ x = -4$	*Λύση της εξίσωσης.*

Εισαγωγή στην Παραγοντοποίηση Πολυωνύμων

Διερεύνηση

Ο Δημοσθένης έχει λερώσει το τετράδιό του με μελάνι. Να τον βοηθήσετε να ξαναγράψει σωστά τις ισότητες και να απαντήσει στο ερώτημα:
Ποια από τα πιο κάτω πολυώνυμα έχουν ως παράγοντα το $x-2$;

Να εξετάσετε ποια από τα πιο κάτω πολυώνυμα έχουν ως παράγοντα το $x-2$.

(α) $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$

(β) $2x^2-4x+3=2x(x-2)+3$

(γ) $3x^2-12x+12=3(x-2)^2$

(δ) $x^2-4=(x-2)(x$ [illegible]$)$

(ε) $x^2+2x-9=(x-2)(x$ [illegible]

- ✓ Πώς θα μπορούσαμε να εξετάσουμε αν το $x-2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $x^3-6x^2+12x-8$;

- ✓ Να εξηγήσετε πώς εξετάζουμε κατά πόσο ένα πολυώνυμο είναι παράγοντας ενός άλλου πολυωνύμου.

Παρατήρηση:

Ο συντελεστής του ΜΚΔ δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστά-σεων είναι ίσος με τον ΜΚΔ των συντελεστών των παραγόντων του.

Στο διπλανό παράδειγμα ΜΚΔ(12,24,36)=12

Μαθαίνω

- **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)** δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται το γινόμενο των **κοινών παραγόντων** τους με εκθέτη του καθενός τον μικρότερο από τους εκθέτες του.

Παραδείγματα:
Ο ΜΚΔ των ακόλουθων παραστάσεων είναι:
(α) $ΜΚΔ\ (12x^3y^2, 24x^2y^3\omega, 36x^4y) = 12x^2y$
(β) $ΜΚΔ\ (4(x-y)(x+y),\ 6(x+y)^2\ ,\ 2(x+y)) = 2(x+y)$

- Αν έχουμε δύο πολυώνυμα $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ και κάνουμε τη διαίρεση $\Delta(x) : \delta(x)$ τότε υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, για τα οποία ισχύει:

$$\boldsymbol{\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)}$$

(Ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης)

όπου το $\upsilon(x)$ μπορεί ή να είναι ίσο με μηδέν ή να έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του $\delta(x)$.

➢ Όταν $\upsilon(x) = 0$, η διαίρεση $\Delta(x) : \delta(x)$ είναι **τέλεια** και το πολυώνυμο $\delta(x)$ είναι **παράγοντας** του πολυωνύμου $\Delta(x)$.

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{r|l} x^2-6x+8 & x-4 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2+4x} & x-2 \\ -2x+8 & \\ \underline{2x-8} & \\ 0 & \end{array}$$

Η διαίρεση είναι τέλεια διότι $\upsilon(x) = 0$.

Ισχύει: $\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$
Άρα, $(x^2-6x+8) = (x-4)(x-2)$.
Άρα, το πολυώνυμο $x-4$ *είναι παράγοντας του πολυωνύμου* x^2-6x+8.

Παραδείγματα

1. Αν ο ένας παράγοντας του πολυωνύμου $9x^3+2-7x$ είναι ο $3x-2$, να βρείτε τον άλλο παράγοντα του πολυωνύμου.

Λύση:
Για να βρούμε τον άλλο παράγοντα πρέπει να διαιρέσουμε το πολυώνυμο $9x^3+2-7x$ *με το πολυώνυμο* $3x-2$.

Πρώτα γράφουμε τα πολυώνυμα του διαιρετέου και του διαιρέτη κατά τις ***φθίνουσες δυνάμεις*** *του x. (Θεωρούμε μηδέν τον συντελεστή του* x^2 *σε αυτή την περίπτωση).*

$$\begin{array}{r|l} 9x^3 + 0x^2 - 7x + 2 & 3x - 2 \\ \hline & 3x^2 \end{array}$$

- *Διαιρούμε τον πρώτο όρο του διαιρετέου με τον πρώτο όρο του διαιρέτη, δηλαδή* $\frac{9x^3}{3x} = 3x^2$, *για να βρούμε τον πρώτο όρο του πηλίκου.*

$$\begin{array}{r|l} 9x^3 + 0x^2 - 7x + 2 & 3x - 2 \\ \hline \underline{-9x^3 + 6x^2} \qquad\qquad & 3x^2 \\ +6x^2 - 7x + 2 & \end{array}$$

- *Πολλαπλασιάζουμε το* $3x^2$ *με τον διαιρέτη* $(3x - 2)$*:*
  $3x^2\,(3x - 2) = 9x^3 - 6x^2$
- *Αφαιρούμε το αποτέλεσμα από τον διαιρετέο, δηλαδή προσθέτουμε το αντίθετο πολυώνυμο* $-9x^3 + 6x^2$.
- *Προσθέτουμε τα δύο πολυώνυμα. Το άθροισμά τους είναι το πρώτο μερικό υπόλοιπο.*

Θεωρούμε το πρώτο μερικό υπόλοιπο ως νέο διαιρετέο και επαναλαμβάνουμε την πιο πάνω διαδικασία:

$$\begin{array}{r|l} 9x^3 + 0x^2 - 7x + 2 & 3x - 2 \\ \hline \underline{-9x^3 + 6x^2} \qquad\qquad & 3x^2 + 2x \\ +6x^2 - 7x + 2 & \\ \underline{-6x^2 + 4x} \qquad & \\ -3x \qquad & \end{array}$$

- *Διαιρούμε* $\frac{+6x^2}{3x} = +2x$
- *Πολλαπλασιάζουμε:*
  $+2x(3x - 2) = 6x^2 - 4x$
- *Προσθέτουμε το αντίθετο πολυώνυμο δηλαδή* $-6x^2 + 4x$ *και βρίσκουμε το νέο μερικό υπόλοιπο.*

Θεωρούμε το νέο μερικό υπόλοιπο ως νέο διαιρετέο και επαναλαμβάνουμε την πιο πάνω διαδικασία:

$$\begin{array}{r|l} 9x^3 + 0x^2 - 7x + 2 & 3x - 2 \\ \hline \underline{-9x^3 + 6x^2} \qquad\qquad & 3x^2 + 2x - 1 \\ +6x^2 - 7x + 2 & \\ \underline{-6x^2 + 4x} \qquad & \\ -3x + 2 & \\ \underline{+3x - 2} & \\ 0 & \end{array}$$

- *Διαιρούμε* $\frac{-3x}{3x} = -1$
- *Πολλαπλασιάζουμε:*
  $-1(3x - 2) = -3x + 2$
- *Προσθέτουμε το αντίθετο πολυώνυμο, δηλαδή* $+3x - 2$ *και βρίσκουμε το νέο μερικό υπόλοιπο.*

Η διαδικασία τερματίζεται, αφού το μερικό υπόλοιπο είναι μικρότερου βαθμού από τον διαιρέτη.

Ισχύει, $9x^3 + 2 - 7x = (3x - 2)(3x^2 + 2x - 1)$. *Άρα, ο άλλος παράγοντας του πολυωνύμου* $9x^3 + 2 - 7x$ *είναι ο* $3x^2 + 2x - 1$.

2. Να εξετάσετε κατά πόσο το πολυώνυμο $\alpha - 2\beta$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $\alpha^2 - 4\beta^2$.

Λύση:

Για να εξετάσουμε κατά πόσο το πολυώνυμο $\alpha - 2\beta$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $\alpha^2 - 4\beta^2$ πρέπει να εξετάσουμε κατά πόσο η διαίρεση είναι τέλεια.

Γράφουμε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του α ή του β (Θεωρούμε μηδέν το συντελεστή του $\alpha\beta$).

$$\begin{array}{r|l} \alpha^2 - 4\beta^2 & \alpha - 2\beta \\ \hline & \alpha \end{array}$$

- *Διαιρούμε τον πρώτο όρο του διαιρετέου με τον πρώτο όρο του διαιρέτη, δηλαδή $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, για να βρούμε τον πρώτο όρο του πηλίκου.*

$$\begin{array}{r|l} \alpha^2 + 0\alpha\beta - 4\beta^2 & \alpha - 2\beta \\ \cline{2-2} \underline{-\alpha^2 + 2\alpha\beta + 0\beta^2} & \alpha \\ +2\alpha\beta - 4\beta^2 & \end{array}$$

- *Πολλαπλασιάζουμε το α με τον διαιρέτη $\alpha - 2\beta$:*
  $\alpha(\alpha - 2\beta) = \alpha^2 - 2\alpha\beta$
- *Αφαιρούμε το αποτέλεσμα από τον διαιρετέο, δηλαδή προσθέτουμε το αντίθετο πολυώνυμο $-\alpha^2 + 2\alpha\beta$.*
  Το άθροισμά είναι το πρώτο μερικό υπόλοιπο.

Θεωρούμε το πρώτο μερικό υπόλοιπο ως νέο διαιρετέο και επαναλαμβάνουμε την πιο πάνω διαδικασία:

$$\begin{array}{r|l} \alpha^2 + 0\alpha\beta - 4\beta^2 & \alpha - 2\beta \\ \cline{2-2} \underline{-\alpha^2 + 2\alpha\beta + 0\beta^2} & \alpha + 2\beta \\ +2\alpha\beta - 4\beta^2 & \\ \underline{-2\alpha\beta + 4\beta^2} & \\ 0 & \end{array}$$

- *Διαιρούμε $\frac{+2\alpha\beta}{\alpha} = +2\beta$*
- *Πολλαπλασιάζουμε:*
  $+2\beta(\alpha - 2\beta) = +2\alpha\beta - 4\beta^2$.
- *Προσθέτουμε το αντίθετο πολυώνυμο δηλαδή $-2\alpha\beta + 4\beta^2$ και βρίσκουμε το νέο μερικό υπόλοιπο.*

Η διαδικασία τερματίζεται, αφού το μερικό υπόλοιπο είναι μικρότερου βαθμού από τον διαιρέτη.

Επειδή η πιο πάνω διαίρεση είναι τέλεια, το πολυώνυμο $\alpha - 2\beta$, όπως και το $\alpha + 2\beta$ είναι παράγοντες του πολυωνύμου $\alpha^2 - 4\beta^2$.
Άρα, $\alpha^2 - 4\beta^2 = (\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta)$

3. Να βρείτε τον $ΜΚΔ$ των παραστάσεων:
   (α) $16x^4y^2,\ 36xy^3ω$
   (β) $30(x-1)(x+y)\ ,\quad 18(x-1)\ ,\quad 42(x-1)^2$

   Λύση:
   (α) $ΜΚΔ(16x^4y^2, 36xy^3\omega) = 4xy^2$

   (β) $ΜΚΔ[30(\boldsymbol{x-1})(x+y)\ ,\quad 18(\boldsymbol{x-1})\ ,\quad 42(\boldsymbol{x-1})^2] = 6(x-1)$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε το πολυώνυμο που έχει παράγοντες:
   (α) $(x-2)$ και $(x+1)$,
   (β) $5x+2$ και x^2-4x-6.

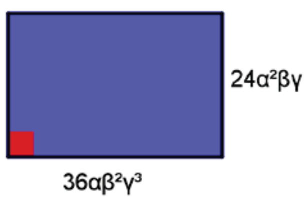
2. Να εξετάσετε κατά πόσο το πολυώνυμο:
   (α) $x+6$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $2x^2+13x-27$,
   (β) $x+4$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου x^3-8,
   (γ) $3x-y$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $9x^2-6xy+y^2$.

3. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

Πολυώνυμο	Παράγοντας	Παράγοντας
$-2x+x^3-3x^2+4$	$x-1$	
$4x^3-22x^2+32x-8$		$x-2$
x^2-4	$x+2$	
$3\alpha^3-\alpha^2\beta+12\alpha-4\beta$		$3\alpha-\beta$

4. Να υπολογίσετε τον $ΜΚΔ$ των παραστάσεων:
   (α) $24\alpha^3\beta^2\gamma^2\ ,\quad 15\alpha^2\beta^3\gamma\ ,\quad 6\alpha^4\beta^3$
   (β) $16\alpha^2x^2\ ,\quad 4\alpha^3x^5\ ,\quad 12\alpha^3x^3$
   (γ) $9\alpha^2(\alpha-\beta)^3\ ,\quad 6\alpha^2\beta(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)$

5. Θέλουμε να χωρίσουμε το διπλανό ορθογώνιο σε ίσα τετράγωνα. Να βρείτε τις διαστάσεις του μεγαλύτερου τετραγώνου που μπορούμε να δημιουργήσουμε.



6. Να συμπληρώσετε τα πιο κάτω ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες:
   (α) $x(\square+\square) = x^2+3x$ (β) $\square(2y-5) = 6y-15$
   (γ) $\square(x^2-2) = 3ax^2-6a$ (δ) $\square(\square-\square) = 3x-15$

Μέθοδοι Παραγοντοποίησης
(Κοινός Παράγοντας – Ομαδοποίηση)

Διερεύνηση (1)

Να γράψετε την παράσταση $\boldsymbol{6x^2 - 12x}$ σε γινόμενο.

Η Εβελίνα, η Ναταλία, ο Νικόλας, ο Στέφανος, και ο Μιχάλης έκαναν την πιο πάνω άσκηση με διαφορετικό τρόπο ο καθένας και έχουν καταλήξει στις πιο κάτω απαντήσεις.

- ✓ Να μελετήσετε και να εξηγήσετε τον τρόπο που εργάστηκε ο κάθε μαθητής.

Ναταλία:
$6x^2 - 12x = 2(3x^2 - 6x)$

Νικόλας:
$6x^2 - 12x = 3(2x^2 - 4x)$

Στέφανος:
$6x^2 - 12x = x(6x - 12)$

Εβελίνα:
$6x^2 - 12x = 3x(2x - 4)$

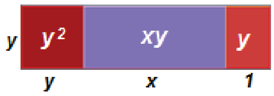
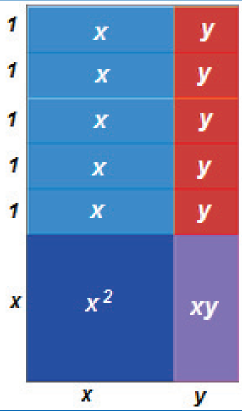
Μιχαλης:
$6x^2 - 12x = 6x(x - 2)$

- ✓ Ποιου μαθητή η απάντηση δεν επιδέχεται ξανά παραγοντοποίηση;

- ✓ Πώς θα εξηγούσατε σε κάποιον τη διαδικασία της παραγοντοποίησης έτσι ώστε μια παράσταση να μην επιδέχεται περαιτέρω παραγοντοποίηση;

Διερεύνηση (2)

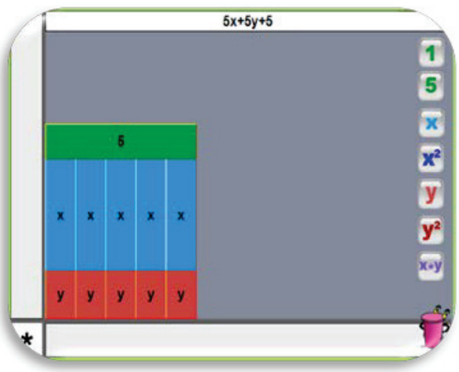
Στον πιο κάτω πίνακα δίνονται τα ορθογώνια A, B, Γ και οι αλγεβρικές εκφράσεις για το εμβαδόν τους.

Ορθογώνιο	Εμβαδόν	
A		$xy + 5y$ ή $y(x + 5)$
B		$y^2 + xy + y$ ή $y(y + x + 1)$
Γ		$x^2 + xy + 5x$ $+ 5y$ ή $x(x + y)$ $+ 5(x + y)$ ή $(x + y)(x + 5)$

✓ Να εξηγήσετε γιατί καθεμιά από τις αλγεβρικές εκφράσεις που δίνονται στην 3η στήλη εκφράζει το εμβαδόν του ορθογωνίου που δίνεται στη 2η στήλη.

Να ανοίξετε το αρχείο [«C_En3_Paragontopoiisi1.exe»].

✓ Να εμφανίσετε 5 διαφορετικά ορθογώνια και να γράψετε το εμβαδόν τους με όσο το δυνατόν περισσότερες διαφορετικές αλγεβρικές εκφράσεις.



Παρατήρηση:

Στο παράδειγμα η παράσταση $2\alpha\beta(2\alpha - 1)$ δεν επιδέχεται περαιτέρω παραγοντοποίηση. Γι' αυτό λέμε ότι η παράσταση έχει αναλυθεί σε **γινόμενο πρώτων παραγόντων**.

Παρατήρηση:
Ο κοινός παράγοντας (αν υπάρχει) είναι ο ΜΚΔ των όρων του πολυωνύμου.

Μαθαίνω

- **Παραγοντοποίηση** ή **ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων** ονομάζεται η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε μια αλγεβρική παράσταση από άθροισμα σε γινόμενο. Όταν η παράσταση δεν επιδέχεται περαιτέρω παραγοντοποίηση θα λέμε ότι έχει αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

  *Στο εξής, όταν λέμε ότι **παραγοντοποιούμε** μια παράσταση θα εννοούμε ότι την **αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων**.*

  Παράδειγμα:

  $4\alpha^2\beta - 2\alpha\beta = 2\alpha\beta(2\alpha - 1)$

- **Βασικές μέθοδοι παραγοντοποίησης**
  - **Κοινός Παράγοντας**

    Αν όλοι οι όροι της παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε χρησιμοποιείται η επιμεριστική ιδιότητα για τη μετατροπή της παράστασης σε γινόμενο παραγόντων.

    Παραδείγματα:

    $5\alpha - 5\beta + 5\gamma = \mathbf{5\alpha} - \mathbf{5}\beta + \mathbf{5\gamma} = \mathbf{5}(\alpha - \beta + \gamma)$

    Σε όλους τους όρους της παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας το 5.

    Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι «Βγάζουμε κοινό παράγοντα το 5».

    $12x^2 - 8x^3 = \mathbf{4x^2} \cdot 3 - \mathbf{4x^2} \cdot 2x = \mathbf{4x^2}(3 - 2x)$

    Σε όλους τους όρους της παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας το $4x^2$.

  - **Κοινός Παράγοντας κατά ομάδες (Ομαδοποίηση)**

    Όταν όλοι οι όροι του πολυωνύμου δεν έχουν κοινό παράγοντα, τους χωρίζουμε σε ομάδες με τέτοιο τρόπο ώστε:
    - Κάθε ομάδα που δημιουργούμε να έχει κοινό παράγοντα.
    - Οι παραστάσεις που μένουν μετά την εξαγωγή του κοινού παράγοντα να είναι ίδιες.

    Παράδειγμα:

    $\kappa x + \kappa y + \lambda x + \lambda y =$

    Δεν υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους της παράστασης.

    $\underbrace{\boldsymbol{\kappa} x + \boldsymbol{\kappa} y} + \underbrace{\boldsymbol{\lambda} x + \boldsymbol{\lambda} y} =$

    Βγάζουμε κοινό παράγοντα το κ από τους δύο πρώτους όρους της παράστασης και το λ από τους δύο τελευταίους όρους της.

    $\kappa(\boldsymbol{x + y}) + \lambda(\boldsymbol{x + y}) = (\boldsymbol{x + y})(\kappa + \lambda)$

    Σχηματίζονται δύο όροι με κοινό παράγοντα το $(x + y)$.

Παραδείγματα

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $10x^3 + 10x$ (β) $3β^2γ^3 - 9βγ^2$

(γ) $2x(α+β) + 5y(α+β)$ (δ) $10(x-y) + 2α(y-x)$

Λύση:

(α) $10x^3 + 10x = 10x(x^2+1)$

Σε όλους τους όρους της παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας το $10x$.

(β) $3β^2γ^3 - 9βγ^2 =$
$3βγ^2(βγ - 3)$

Σε όλους τους όρους της παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας το $3βγ^2$.

(γ) $2x(α+β) + 5y(α+β) =$
$(α+β)(2x+5y)$

Η παράσταση έχει δύο όρους, τους $2x(α+β)$ και $5y(α+β)$. Στους δύο όρους της παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας το $(α+β)$.

(δ) $10(x-y) + 2α(y-x) =$
$10(x-y) - 2α(x-y) =$
$2(x-y)(5-α)$

Η παράσταση έχει δύο όρους, τους $10(x-y)$ και $2α(y-x)$. Για να δημιουργήσουμε και στους δύο όρους κοινό παράγοντα τον $(x-y)$, γράφουμε τον δεύτερο όρο της $-2α(x-y)$.

Ισχύει:
$-(x-y) = +(-x+y)$
$= (y-x)$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $α^3 + 21 + 7α^2 + 3α$ (β) $αy - xy + αx - x^2$

(γ) $12x^2 - 8αx - 9βx + 6αβ$

Λύση:

Στις πιο πάνω παραστάσεις δεν υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους της παράστασης. Έτσι ομαδοποιούμε τους όρους ώστε να δημιουργήσουμε κοινό παράγοντα.

(α) $α^3 + 21 + 7α^2 + 3α =$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $α^2$ από τον πρώτο και από τον τρίτο όρο της παράστασης και το 3 από τους υπόλοιπους όρους της.

$= α^2(α+7) + 3(α+7)$

Σχηματίζονται δύο όροι με κοινό παράγοντα το $(α+7)$.

$= (α+7)(α^2+3)$

Άρα, $α^3 + 21 + 7α^2 + 3α = (α+7)(α^2+3)$

(β) $\alpha y - yx + \alpha x - x^2 =$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το y από τους δύο πρώτους όρους της παράστασης και το x από τους δύο τελευταίους όρους της.

$= y(a - x) + x(a - x)$

Σχηματίζονται δύο όροι με κοινό παράγοντα το $(\alpha - x)$.

$= (a - x)(y + x)$

Άρα, $\alpha y - yx + \alpha x - x^2 = (a - x)(y + x)$

(γ) $12x^2 - 8\alpha x - 9\beta x + 6\alpha\beta =$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $4x$ από τους δύο πρώτους όρους της παράστασης και το -3β από τους δύο τελευταίους όρους της.

$= 4x(3x - 2\alpha) - 3\beta(3x - 2\alpha)$

Σχηματίζονται δύο όροι με κοινό παράγοντα το $(3x - 2\alpha)$.

$= (3x - 2\alpha)(4x - 3\beta)$

Άρα, $12x^2 - 8\alpha x - 9\beta x + 6\alpha\beta = (3x - 2\alpha)(4x - 3\beta)$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τους κοινούς παράγοντες των πιο κάτω αλγεβρικών παραστάσεων και να τις αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων:

Πολυώνυμο	Κοινός Παράγοντας	Γινόμενο
$\alpha\beta + \alpha\gamma$		
$7\alpha\beta + 7\alpha\gamma - 7\alpha\delta$		
$3x - 3y + 6$		
$7x^3 - 14x^2$		

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $7x + 7y$

(β) $6x - 6$

(γ) $12 - 6x$

(δ) $x^4 - x^3\alpha$

(ε) $8x^2 - 6x$

(στ) $4xy^3 - 8x^2y$

(ζ) $5x + 10x^2$

(η) $-4x^2 - 18x^2 + 16x$

(θ) $15\alpha x + 30\alpha y - 10\alpha\omega$

(ι) $\frac{2}{3}xy - \frac{4}{3}x^2y$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $2x(x+y)+5y(x+y)$ (β) $3(\alpha-\beta)+\kappa(\alpha-\beta)$

(γ) $a(a+1)-2(1+a)$ (δ) $4y(2x-5)+9a(5-2x)$

(ε) $y(\alpha-2\beta)-5(2\beta-\alpha)$ (στ) $(x+y)^2+3(x+y)$

(ζ) $(\alpha+\beta)^2-3\gamma(\alpha+\beta)$ (η) $a(x-y)-x+y$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $\alpha\beta+5\alpha+2\beta+10$ (β) $\kappa x-3\kappa y+\mu x-3\mu y$

(γ) $\lambda\alpha^2+\kappa\beta\alpha-\lambda\alpha\beta-\kappa\beta^2$ (δ) $8\alpha^2-12\alpha\beta-10\alpha+15\beta$

(ε) $xy-5y-x+5$ (στ) $2ax^2+3axy-2\beta xy-3\beta y^2$

5. Αν $x+y=4$ και $xy=3$, να βρείτε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

$A=4x+4y$ $B=2x^3y^2+2x^2y^3$

$\Gamma=x^2y+xy^2+x+y$ $\Delta=x^3y+xy^3$

6. Αν ο αριθμός κ είναι ακέραιος, να δείξετε ότι ο αριθμός $\kappa^2+\kappa$ είναι άρτιος.

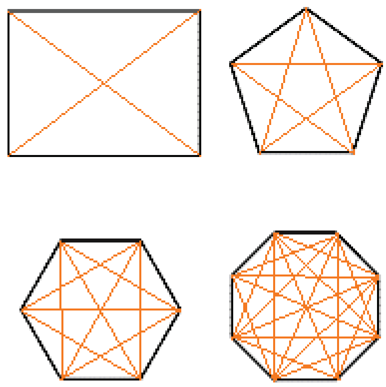
7. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των διαγωνίων (Δ) ενός πολυγώνου με ν πλευρές χρησιμοποιούμε την παράσταση:

$\Delta=\frac{1}{2}\nu^2-\frac{3}{2}\nu \quad (\nu\geq 3)$.

Δηλαδή ένα τετράπλευρο έχει 4 πλευρές και 2 διαγωνίους, ένα πεντάγωνο έχει 5 πλευρές και 5 διαγωνίους κ.λπ.

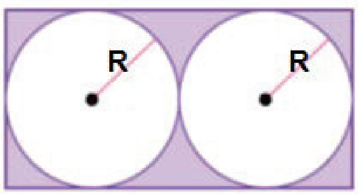
(α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση Δ.

(β) Να βρείτε τον αριθμό των διαγωνίων ενός δεκαγώνου.

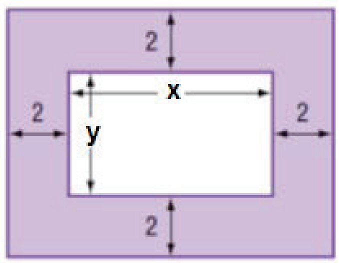


8. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής για το καθένα από τα ακόλουθα σχήματα:

(α)



(β)



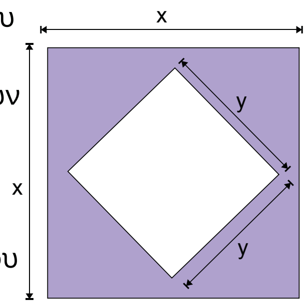
Μέθοδοι Παραγοντοποίησης

(Διαφορά δύο τετραγώνων – Διαφορά και Άθροισμα δύο κύβων)

Διερεύνηση

Στο διπλανό σχήμα, η διαφορά της πλευράς x του μεγάλου τετραγώνου από την πλευρά y του μικρού τετραγώνου είναι 1. Το άθροισμα των δύο πλευρών είναι 15.

✓ Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους.



Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους στο διπλανό σχήμα ισούται με 15.

✓ Να ελέγξετε τον ισχυρισμό του και να εξηγήσετε τον τρόπο που εργάστηκε.

Μαθαίνω

Βασικές μέθοδοι παραγοντοποίησης

- **Διαφορά δύο τετραγώνων.**
  Για να παραγοντοποιήσουμε μια αλγεβρική παράσταση που είναι διαφορά δύο τετραγώνων, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

Παραδείγματα:

$x^2 - 25 = \boldsymbol{x}^2 - \mathbf{5}^2 = (x+5)(x-5)$

$(2x-1)^2 - y^2 = (2x-1+y)(2x-1-y)$

- **Διαφορά – Άθροισμα δύο κύβων.** Για να παραγοντοποιήσουμε μια αλγεβρική παράσταση που είναι διαφορά ή άθροισμα δύο κύβων, χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες:

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$
$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

Παραδείγματα:

$$x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2 + 3x + 3^2)$$
$$= (x-3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$8a^3 + \beta^3 = (2a)^3 + \beta^3 = (2a + \beta)[(2a)^2 - 2a\beta + \beta^2]$$
$$= (2a + \beta)(4a^2 - 2a\beta + \beta^2)$$

Παρατήρηση: *Σε πολλές αλγεβρικές παραστάσεις μπορούμε να εφαρμόσουμε συνδυασμό των μεθόδων παραγοντοποίησης.*

Παραδείγματα

1. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

(α) $4x^2 - 9\beta^2$ (β) $8y^3 + 27a^3$

(γ) $3x^3 - 24$ (δ) $x^2 - y^2 + x + y$

Λύση:

(α) $4x^2 - 9\beta^2$
$= (2x)^2 - (3\beta)^2$ *Εκφράζουμε κάθε όρο ως τετράγωνο.*
$= (2x - 3\beta)(2x + 3\beta)$ *Διαφορά τετραγώνων.*

(β) $8y^3 + 27a^3$
$= (2y)^3 + (3a)^3$ *Εκφράζουμε κάθε όρο ως κύβο.*
$= (2y + 3a)(4y^2 - 6y + 9a^2)$ *Άθροισμα κύβων.*

(γ) $3x^3 - 24$
$= 3(x^3 - 8)$ *Κοινός παράγοντας.*
$= 3(x^3 - 2^3)$ *Διαφορά κύβων.*
$= 3(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

(δ) $\underline{x^2 - y^2} + \underline{\underline{x + y}}$ *Ομαδοποίηση.*
$= (x - y)(x + y) + (x + y)$ *Η πρώτη ομάδα είναι διαφορά δύο τετραγώνων.*
$= (x + y)(x - y + 1)$ *Κοινός παράγοντας.*

2. Αν $x + y = 5$ και $xy = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $x^3 + y^3$.

Λύση:

<u>Α΄ Τρόπος:</u>

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα του κύβου αθροίσματος.

Ισχύει ότι:

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
$\Rightarrow x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2$
$\Rightarrow x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ *Βγάζουμε κοινό παράγοντα.*
$\Rightarrow x^3 + y^3 = 5^3 - 3 \cdot 4 \cdot 5$ *Αντικαθιστούμε.*
$\Rightarrow x^3 + y^3 = 125 - 60 = 65$

Β΄ Τρόπος:
Ισχύει ότι:
$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

Και

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$\Longrightarrow x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$

$\Longrightarrow x^2 + y^2 = 5^2 - 2 \cdot 4$ *Αντικαθιστούμε.*
$\Longrightarrow x^2 + y^2 = 25 - 8$
$\Longrightarrow x^2 + y^2 = 17$

Άρα, αφού
$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ *τότε*
$x^3 + y^3 = 5 \cdot (17 - 4)$ *Αντικαθιστούμε.*
$\Longrightarrow x^3 + y^3 = 5 \cdot 13$
$\Longrightarrow x^3 + y^3 = 65$

Δραστηριότητες

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
   (α) $x^2 - 4$ (β) $x^2 - 49$ (γ) $9 - x^2$
   (δ) $4x^2 - 9y^2$ (ε) $-81 + 16\beta^2$ (στ) $\frac{1}{4} - x^2$
   (ζ) $\frac{1}{x^2} - 49y^2$ (η) $3\alpha^3 - 3\alpha$ (θ) $2y^2 - 32$
   (ι) $25x^4 - 1$ (ια) $81x^4 - 16y^6$ (ιβ) $18a^4 - 50\kappa^4$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
   (α) $(2x-1)^2 - y^2$ (β) $(5x+1)^2 - 4$
   (γ) $4\kappa^2 - (\kappa - \lambda)^2$ (δ) $(\alpha + 2\beta)^2 - 16$
   (ε) $\omega^2 - (x+y)^2$ (στ) $\rho^2 - (\alpha + \beta)^2$
   (ζ) $x(a^2 - \beta^2) + y(a^2 - \beta^2)$ (η) $(\alpha - \beta)^2 - (\alpha - 2\beta)^2$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
   (α) $x^2 - y^2 - 5x - 5y$
   (β) $\alpha^2 - 4\alpha - \beta^2 + 4\beta$
   (γ) $(y-3)x^2 - (y-3)\kappa^2$
   (δ) $16(y+4) - (y+4)y^2$
   (ε) $a(x-3y) + 2(x^2 - 9y^2)$
   (στ) $(x^2 - y^2)(2x+y) - (x-y)(4x^2 - y^2)$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $x^3 - 8$ (β) $125 + \omega^3$ (γ) $\beta^3 - \alpha^9$

(δ) $\frac{\alpha^3}{8} - \frac{\beta^6}{27}$ (ε) $-x^3 + \frac{1}{27}$ (στ) $\alpha x^3 + \alpha y^3$

(ζ) $2x^3 - 54y^3$ (η) $3x^3 - 24$ (θ) $x^3 y^3 + 1$

5. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $x^3(\alpha - \beta) + y^3(\alpha - \beta)$ (β) $x^3 - y^3 - 2(x^2 - y^2)$

(γ) $\alpha^3 + \beta^3 - 3(\alpha + \beta)$ (δ) $(\kappa^3 - 1) - 2(\kappa - 1)$

6. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω αριθμητικές παραστάσεις, χρησιμοποιώντας κανόνες παραγοντοποίησης:

(α) $100^2 - 99^2$ (β) $805^2 - 795^2$

7. Αν είναι $A = 2^{2015} + 2^{-2015}$ και $B = 2^{2015} - 2^{-2015}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A^2 - B^2$.

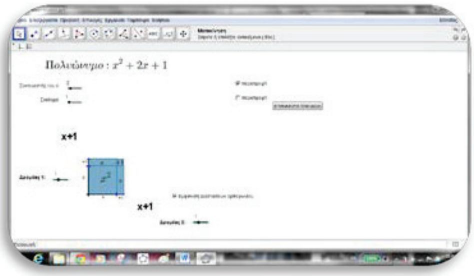
8. Να δείξετε ότι $(\alpha - \beta)$ είναι παράγοντας του $\alpha^3 - \beta^3$.

Μέθοδοι Παραγοντοποίησης
(Τριώνυμο – Τέλειο Τετράγωνο)

Διερεύνηση (1)

Να ανοίξετε το αρχείο «C_En3_Paragontopoiisi.ggb».

Στο εφαρμογίδιο οι όροι του πολυωνύμου αναπαριστούνται με πλακίδια εμβαδού 1, x και x^2 τετραγωνικών μονάδων αντίστοιχα.



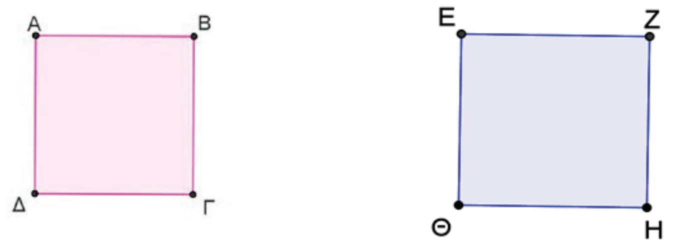
- ✓ Να μετακινήσετε τους δρομείς για να εμφανιστεί ένα νέο πολυώνυμο, καθώς και η αναπαράστασή του με τα πλακίδια.
- ✓ Να πατήσετε το κουτί επιλογής «Εμφάνιση Διαστάσεων Ορθογωνίου». Να μετακινήσετε τους δρομείς «δρομέας 1» και δρομέας 2», για να βρείτε τις διαστάσεις που πρέπει να έχει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν ισοδύναμο με το εμβαδόν των πλακιδίων που αναπαριστούν το πολυώνυμο.
- ✓ Να μετακινήσετε τα πλακίδια, σχηματίζοντας το ορθογώνιο, για να επιβεβαιώσετε τον συλλογισμό σας.

Με τη βοήθεια της πιο πάνω διαδικασίας να συμπληρώσετε τον πίνακα όπως φαίνεται στο παράδειγμα:

Πολυώνυμο	(Διάσταση 1)·(Διάσταση 2)
x^2+4x+3	$(x+3)(x+1)$
x^2+3x+2	
x^2+4x+4	
x^2+5x+6	

- ✓ Να διατυπώσετε έναν κανόνα που να συνδέει τους αριθμούς β και γ με τους αριθμούς κ και λ στην ισότητα:
  $x^2+\beta x+\gamma=(x+\kappa)(x+\lambda)$

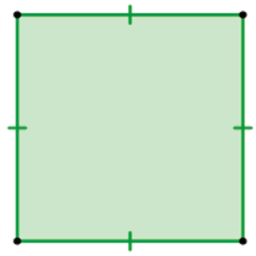
Διερεύνηση (2)



Τα πιο πάνω ορθογώνια έχουν εμβαδόν $E_{ΑΒΓΔ} = 4x^2 + 4x + 1$ και $E_{ΕΖΗΘ} = x^2 + 5x + 4$.

✓ Να βρείτε τις διαστάσεις του κάθε ορθογωνίου και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

✓ Το διπλανό σχήμα είναι τετράγωνο. Ποια μορφή θα πρέπει να έχει ένα τριώνυμο ώστε να μπορεί να αναπαριστά το εμβαδόν του.



Μαθαίνω

Βασικές μέθοδοι παραγοντοποίησης

➢ **Τριώνυμο 2ου βαθμού.** Το πολυώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ λέγεται τριώνυμο 2ου βαθμού.
Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου 2ου βαθμού, όταν $\alpha = 1$, δηλαδή $x^2 + \beta x + \gamma$ γίνεται ως εξής:
Αναζητούμε δύο αριθμούς κ, λ, αν υπάρχουν, που να έχουν γινόμενο γ και άθροισμα β, δηλαδή $\kappa \cdot \lambda = \gamma$ και $\kappa + \lambda = \beta$.
Τότε:

$$x^2 + \beta x + \gamma = (x + \boldsymbol{\kappa})(x + \boldsymbol{\lambda})$$

Παράδειγμα:
$x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$

Αναζητούμε δύο αριθμούς που να έχουν άθροισμα $+3$ και γινόμενο -10. Οι αριθμοί αυτοί είναι το -2 και το $+5$.

$$(x+\kappa)(x+\lambda)$$
$$= x^2 + \kappa x + \lambda x + \kappa\lambda$$
$$= x^2 + \underbrace{(\kappa+\lambda)}_{\beta}x + \underbrace{\kappa\lambda}_{\gamma}$$

➢ **Ανάπτυγμα τέλειου τετραγώνου.** Για να παραγοντοποιήσουμε μια αλγεβρική παράσταση που είναι ανάπτυγμα τέλειου τετραγώνου, χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες:

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$
$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

Παραδείγματα:

$4\alpha^2 + 12\alpha + 9$
$= (2\alpha)^2 + 2 \cdot 2\alpha \cdot 3 + 3^2$
$= (2\alpha + 3)^2$

$x^2 - 12xy + 36y^2$
$= x^2 - 2 \cdot x \cdot 6y + (6y)^2$
$= (x - 6y)^2$

Οι παραστάσεις αποτελούνται από όρους αναπτύγματος τετραγώνου. Άρα, χρησιμοποιούμε τις πιο πάνω ταυτότητες.

Παρατήρηση: *Σε πολλές αλγεβρικές παραστάσεις μπορούμε να εφαρμόσουμε συνδυασμό των μεθόδων παραγοντοποίησης.*

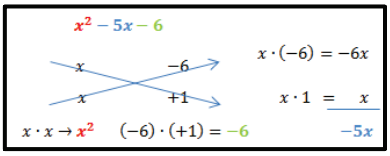
Παραδείγματα

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $x^2 - 5x - 6$ (β) $x^2 + 6x + 9$

(γ) $3x^2 + 6x - 24$ (δ) $y^2 - x^2 - 10y + 25$

Λύση:



(α) $x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$ *Τριώνυμο.*

(β) $3x^2 + 6x - 24$ *Κοινός παράγοντας.*
$= 3(x^2 + 2x - 8)$ *Τριώνυμο.*
$= 3(x + 4)(x - 2)$

(γ) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ *Τέλειο τετράγωνο.*

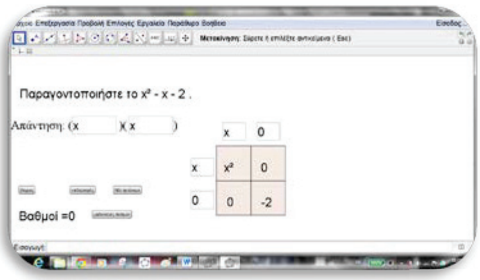
(δ) $\underline{y^2} - x^2 - \underline{10y + 25}$
$= y^2 - 10y + 25 - x^2$
$= (y - 5)^2 - x^2$ *Οι τρεις όροι αποτελούν ανάπτυγμα τέλειου τετραγώνου.*
$= (y - 5 - x)(y - 5 + x)$ *Διαφορά τετραγώνων.*

Δραστηριότητες

1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα όπως το παράδειγμα

$x^2+(a+\beta)x+a\beta$	$a\beta$	$a+\beta$	a	β	$(x+a)(x+\beta)$
$x^2+6x-16$	$-2\cdot 8$	$-2+8$	-2	8	$(x-2)\cdot(x+8)$
$x^2+10x+16$					
$x^2-6x-16$					
$x^2-10x+16$					
$x^2-8x+16$					
$x^2+17x+16$					

2. Να ανοίξετε το αρχείο «[C_En3_Par.trionimou.ggb]» Να δημιουργήσετε 10 διαφορετικά τριώνυμα και να τα παραγοντοποιήσετε. Αφού επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας, πατώντας «έλεγχος», να τις καταγράψετε στο τετράδιό σας.



3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
   - (α) $x^2-9x+20$
   - (β) $y^2-2x-15$
   - (γ) x^2+5x+6
   - (δ) y^2-6y+8
   - (ε) x^2+8-6x
   - (στ) $a(a-15)+56$
   - (ζ) $\alpha^2+\alpha-90$
   - (η) y^3-5y^2-150y
   - (θ) $x^5+x^4-2x^3$
   - (ι) $2x^2-14x+20$
   - (ια) $-a^2-5a-4$
   - (ιβ) $y^4-5y^3-6y^2$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
   - (α) $x^2-18x+81$
   - (β) $64-16y+y^2$
   - (γ) $25x^2+30x+9$
   - (δ) $4x^2+12xy+9y^2$
   - (ε) x^3-6x^2+9x
   - (στ) $16a^4+24a^2\beta+9\beta^2$

5. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις $A = x^4 - 4x^2$, $B = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$ και $A - B$.

6. Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν $25\alpha^2 - 30\alpha\beta + 9\beta^2$. Να βρείτε την περίμετρό του.

7. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω αριθμητικές παραστάσεις, χρησιμοποιώντας κανόνες παραγοντοποίησης:
(α) $992^2 + 2 \cdot 8 \cdot 992 + 8^2$ (β) $0{,}58^2 + 0{,}42^2 + 2 \cdot 0{,}58 \cdot 0{,}42$

8. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
(α) $a^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - \omega^2$ (β) $x^2 - 16y^2 + 8y - 1$
(γ) $ax + a + x^2 + 2x + 1$ (δ) $1 - \alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2$

9. Να υπολογίσετε όλες τις τιμές του κ για τις οποίες τα πιο κάτω τριώνυμα παραγοντοποιούνται στη μορφή $(x + \alpha)(x + \beta)$, όπου α, β ακέραιοι αριθμοί.
(α) $x^2 + \kappa x - 7$ (β) $x^2 + \kappa x + 10$
(γ) $x^2 - 8x + \kappa,\ \ \kappa > 0$ (δ) $x^2 - 5x + \kappa,\ \ \kappa > 0$

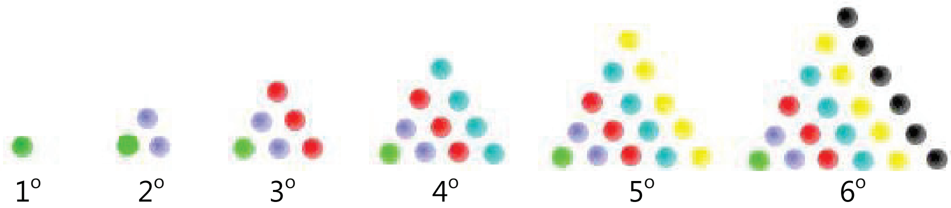
Εξισώσεις Δεύτερου και Ανώτερου Βαθμού

Διερεύνηση (1)

Οι τρίγωνοι αριθμοί είναι μια ακολουθία αριθμών που αρχίζει ως εξής:

$$1, 3, 6, 10, \dots$$

Οι αριθμοί αυτοί αντιστοιχούν στα παρακάτω «τριγωνικά» σχήματα.



Ο αριθμός T των κουκίδων (•) στο ν-οστό τρίγωνο δίνεται από τον τύπο: $T = \frac{1}{2}(\nu^2 + \nu)$

✓ Να εξετάσετε ποιοι από τους ακόλουθους αριθμούς είναι τρίγωνοι.

(α) 55 (β) 120

(γ) 150 (δ) 200

Διερεύνηση (2)

✓ Να γράψετε ως άθροισμα ή διαφορά τετραγώνων τις πιο κάτω παραστάσεις:

$$x^2 + 4x + 4$$
$$x^2 + 4x + 3$$
$$x^2 + 4x + 5$$

✓ Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$x^2 + 4x + 3 = 0$$
$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

Μαθαίνω

- Όταν το γινόμενο δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων ισούται με μηδέν, τότε τουλάχιστον μια από αυτές τις παραστάσεις ισούται με μηδέν και αντίστροφα.
Δηλαδή $A(x) \cdot B(x) = 0 \iff A(x) = 0$ ή $B(x) = 0$

Γενικά:

$$A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot A_\nu(x) = 0 \iff$$

$$\iff A_1(x) = 0 \text{ ή } A_2(x) = 0 \text{ ή } \ldots A_\nu = 0$$

- Για να λύσουμε εξισώσεις δεύτερου ή ανώτερου βαθμού μπορούμε να τις μετασχηματίσουμε στη μορφή:

$$A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot A_\nu(x) = 0.$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε για ποιες τιμές μηδενίζεται ο κάθε παράγοντας.

Παραδείγματα:

$(x-2) \cdot (2x+3) = 0 \iff x - 2 = 0$ ή $2x + 3 = 0$
$\iff x = 2$ ή $x = -\frac{3}{2}$

$x(x-2) \cdot (x+5) = 0 \iff x = 0$ ή $x - 2 = 0$ ή $x + 5 = 0$
$\iff x = 0$ ή $x = 2$ ή $x = -5$

- Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ ονομάζεται εξίσωση **2ου βαθμού.**

Παράδειγμα:

$2x^2 - x - 1 = 0$

Εξίσωση δεύτερου ή ανώτερου βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζουμε την εξίσωση που περιέχει μόνο έναν άγνωστο και ο άγνωστος αυτός έχει εκθέτη μεγαλύτερο ή ίσο του δύο.

Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta = 0$, $\alpha \neq 0$, (εξίσωση α΄ βαθμού) έχει λύση τον αριθμό $x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

- Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$, τότε οι λύσεις ή ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0\,, \alpha \neq 0$ είναι:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Δηλαδή, $\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$

Παράδειγμα:

$2x^2 - x - 1 = 0$ $\quad\quad\quad \alpha = 2\,,\ \beta = -1,\ \gamma = -1$

Η εξίσωση έχει λύσεις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{+1 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$x_1 = \frac{+1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{+1-3}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$$

Απόδειξη:

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \ \alpha \neq 0$ *Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης επί* 4α.

$\Rightarrow 4\alpha \cdot \alpha x^2 + 4\alpha \cdot \beta x + 4\alpha \cdot \gamma = 0$

$\Rightarrow\ 4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + 4\alpha\gamma = 0$

$\Rightarrow (4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2) - \beta^2 + 4\alpha\gamma = 0$ *Προσθέτουμε και αφαιρούμε το* β^2*, για να προκύψει τέλειο τετράγωνο.*

$\Rightarrow\ (2\alpha x + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$ *τότε:*

$\Rightarrow 2\alpha x + \beta = \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$

$\Rightarrow 2\alpha x = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

$\Rightarrow 2\alpha x + \beta = -\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$

$\Rightarrow 2\alpha x = -\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$

$\Rightarrow x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

Επομένως, η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \ \alpha \neq 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$.

Παραδείγματα

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $(2x-1)(x-1)(x+2)=0$ (β) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$

(γ) $x^3=64x$ (δ) $x(x-18)+81=0$

Λύση:

(α) *Η εξίσωση είναι ήδη στη μορφή* $A_1(x)\cdot A_2(x)\cdot\ldots\cdot A_\nu(x)=0$. *Άρα, εξετάζουμε για ποιες τιμές μηδενίζεται κάθε παράγοντας.*

$$
\begin{aligned}
x(2x-1)(x-1)=0 &\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } 2x-1=0 \text{ ή } x-1=0\\
&\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } 2x=1 \text{ ή } x=1\\
&\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=\tfrac{1}{2} \text{ ή } x=1
\end{aligned}
$$

(β) *Η εξισώση είναι ήδη στη μορφή* $A_1(x)\cdot A_2(x)\cdot\ldots\cdot A_\nu(x)=0$. *Άρα, εξετάζουμε για ποιες τιμές μηδενίζεται κάθε παράγοντας.*

$$
\begin{aligned}
(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0 &\Leftrightarrow x-\sqrt{2}=0 \text{ ή } x+\sqrt{2}=0\\
&\Leftrightarrow x=\sqrt{2} \text{ ή } x=-\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

(γ) *Πρώτα φέρνουμε τις εξισώσεις στη μορφή* $A_1(x)\cdot A_2(x)\cdot\ldots\cdot A_\nu(x)=0$. *Στη συνέχεια εξετάζουμε για ποιες τιμές μηδενίζεται ο κάθε παράγοντας.*

$x^3=64x \Leftrightarrow x^3-64x=0$ *Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α΄ μέλος.*

$\Leftrightarrow x(x^2-64)=0$ *Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x.*

$\Leftrightarrow x(x-8)(x+8)=0$ *Ο δεύτερος παράγοντας του γινομένου είναι διαφορά τετραγώνων.*

$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x-8=0 \text{ ή } x+8=0$

$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=8 \text{ ή } x=-8$

(δ) *Πρώτα φέρνουμε τις εξισώσεις στη μορφή* $A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot A_\nu(x) = 0$. *Στη συνέχεια εξετάζουμε για ποιες τιμές μηδενίζεται ο κάθε παράγοντας.*

$$x(x-18)+81=0 \iff x^2-18x+81=0$$

$$\iff (x-9)^2=0$$

$$\iff x-9=0$$

$$\iff x=9$$

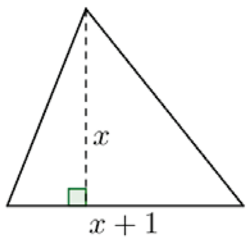
Το α΄ μέλος της εξίσωσης είναι ανάπτυγμα τετραγώνου σύμφωνα με την ταυτότητα $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$

Άρα, η εξίσωση έχει ***διπλή ρίζα*** *το 9.*

2. Η βάση ενός τριγώνου είναι 1 μονάδα μεγαλύτερη από το αντίστοιχο ύψος. Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι $15\,m^2$, να υπολογίσετε τη βάση και το ύψος του.

Λύση:

Έστω,
$\beta = x$
$\upsilon = x+1$



$E_{\tau\rho\iota\gamma.} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = 15\,m^2 \iff \frac{x(x+1)}{2} = 15$

Επιλύουμε την εξίσωση

$\iff x(x+1)=30$

$\iff x^2+x-30=0$

$\iff (x-5)(x+6)=0$

$\iff (x-5)=0$ ή $(x+6)=0$

$\iff$ $x=5$ (δεκτή) ή
$x=-6$ *(απορρίπτεται διότι είναι μήκη ευθύγραμμων τμημάτων)*

Άρα, το ύψος του τριγώνου είναι $5\,m$ *και η βάση του* $6\,m$.

3. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $(2x-5)^2=25$ (β) $4x^2+4x+10=0$

(γ) $2x^2-x-6=0$ (δ) $-x^2+3x+1=0$

Λύση:

(α) $(2x-5)^2 = 25$

$$(2x-5)^2 = (+5)^2 \quad ή \quad (2x-5)^2 = (-5)^2$$

Άρα, $2x-5=-5$ *ή* $2x-5=5$

$2x=-5+5$ *ή* $2x=5+5$

$2x=0$ $\qquad$ $2x=10$

$x=0$ $\qquad$ $x=5$

(β) $4x^2+4x+10=0$

Α΄ τρόπος:

$4x^2+4x+10=0$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$\alpha=4$, $\quad \beta=4$, $\quad \gamma=10$

Η εξίσωση έχει ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot4\cdot10}}{2\cdot4} = \frac{-4\pm\sqrt{-24}}{4}$$

Η εξίσωση δεν έχει ρίζες, αφού $\sqrt{-24}$ *δεν ορίζεται.*

Β΄ τρόπος:

$4x^2+4x+10=0$

Με τη μέθοδο συμπλήρωσης τέλειου τετραγώνου η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως:

$$4x^2+4x+10=0$$

$$4x^2+4x+1-1+10=0$$

$$4x^2+4x+1+9=0$$

$$(2x+1)^2+9=0$$

$$(2x+1)^2=-9$$

Για κάθε τιμή του x ισχύει $(2x+1)^2\geq 0$. *Άρα, η εξίσωση είναι* ***αδύνατη*** *αφού δεν υπάρχει τιμή του x που να ισχύει:* $(2x+1)^2=-9$

(γ) $2x^2 - x - 6 = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = -6$

Η εξίσωση έχει ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-6)}}{2\cdot 2}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4}$$
$$= \frac{1 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{+1+7}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{+1-7}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

(δ) $-x^2 + 3x + 1 = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 3$, $\gamma = 1$

Η εξίσωση έχει λύσεις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot(-1)\cdot 1}}{-2}$$
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{-2} = \frac{+3-\sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3-\sqrt{13}}{-2} = \frac{+3+\sqrt{13}}{2}$$

Δραστηριότητες

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x(x+5) = 0$

(β) $(x-7)(x+5)(2x-3) = 0$

(γ) $5a^2 - 10a = 0$

(δ) $(2x-5)(x^2-6x+5) = 0$

(ε) $x^4 - 4x^2 = 0$

(στ) $25x^2 - 10x + 1 = 0$

(ζ) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(η) $(x^2-9)(9x^2-6x+1) = 0$

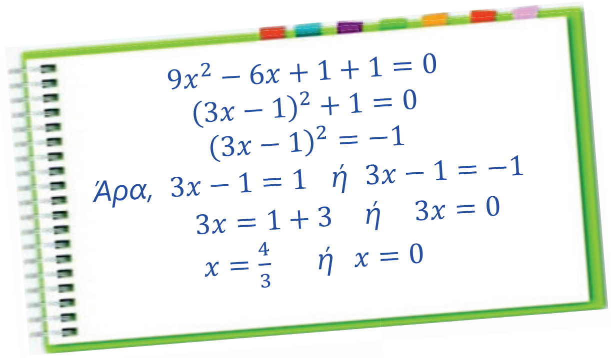
2. Να λύσετε τις εξισώσεις:
   (α) $\kappa^3 = 25\kappa$ (β) $x^2 - x = 12$
   (γ) $\alpha^2 = 35 - 2\alpha$ (δ) $x^3 = 2x^2$
   (ε) $y^3 + y^2 = 2y$ (στ) $\alpha(\alpha - 6) = -9$
   (ζ) $(y+4)(y-3) = -3y$ (η) $x^2(x - 10) + 25x = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:
   (α) $2x^2 - 5x + 10 = 0$ (β) $5x^2 - 4x - 1 = 0$
   (γ) $2x^2 - 2x - 3 = 0$ (δ) $2x^2 + x - 1 = 0$
   (ε) $3x^2 + x - 2 = 0$ (στ) $(x^2 - 7x + 12)(2x^2 - 5x + 2) = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:
   (α) $x^2 + 1 = 0$ (β) $(2 - x)^2 = 0$
   (γ) $(x - 2)^2 = 4$ (δ) $(3x - 1)^2 + 9 = 0$
   (ε) $4x^2 + 12x + 8 = 0$ (στ) $9x^2 - 6x + 2 = 0$
   (ζ) $25x^2 - 20x + 12 = 0$ (η) $16x^2 + 40x + 20 = 0$

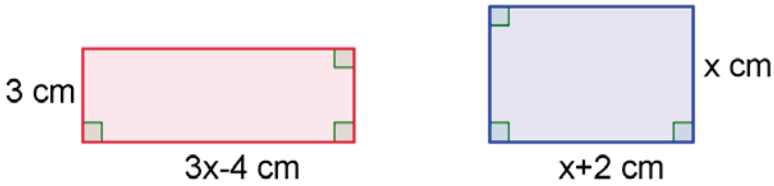
5. Δίνεται το πολυώνυμο$P(x) = (x + 1)^2 + (x - 1)^3 - x^3 + 7$:
   (α) Να αποδείξετε ότι $P(x) = -2x^2 + 5x + 7$
   (β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

6. Πιο κάτω φαίνεται η μέθοδος που χρησιμοποίησε ο Ανδρέας για να λύσει την εξίσωση $9x^2 - 6x + 2 = 0$. Να εξετάσετε την ορθότητα της λύσης.



7. Η Χριστίνα πολλαπλασίασε έναν αριθμό με τον εαυτό του και μετά πρόσθεσε 6. Το αποτέλεσμα ήταν 5 φορές πιο μεγάλο από τον αρχικό αριθμό. Να γράψετε μιαν εξίσωση με βάση τις πιο πάνω πληροφορίες και να τη λύσετε για να βρείτε τον αρχικό αριθμό.

8. Τα πιο κάτω ορθογώνια έχουν το ίδιο εμβαδόν αλλά δεν είναι ίσα. Να υπολογίσετε την τιμή του x.

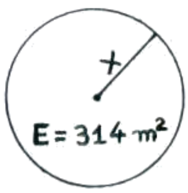


9. Να βρείτε δύο διαδοχικούς περιττούς ακεραίους, των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων να είναι 74.

10. Η μια κάθετη πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι $8\,cm$, ενώ η άλλη είναι $4\,cm$ μικρότερη από την υποτείνουσα. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.

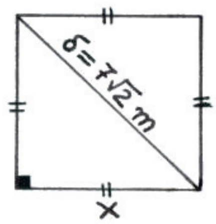
11. Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

(α)



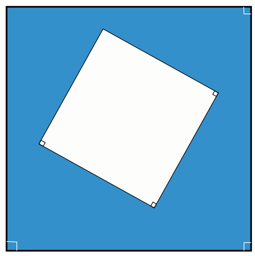
$(\pi \cong 3{,}14)$

(β)

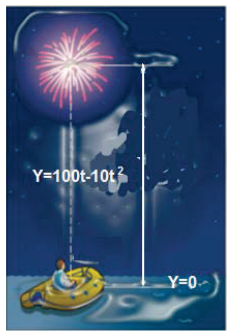


12. Σε έναν αριθμό προσθέτουμε τον αντίστροφό του και βρίσκουμε $\frac{10}{3}$. Να βρείτε ποιοι είναι οι αριθμοί.

13. Στο διπλανό σχήμα το εξωτερικό τετράγωνο έχει πλευρά $x\,cm$ και το εσωτερικό τετράγωνο έχει πλευρά 3 cm. Να υπολογίσετε την τιμή του x, αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους είναι $16\,cm^2$.



14. Ένας ναυαγός βρίσκεται σε μια σωσίβια λέμβο και εκτοξεύει κατακόρυφα προς τα πάνω (όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα) μια φωτοβολίδα για να τον εντοπίσουν. Το ύψος της φωτοβολίδας από την επιφάνεια της θάλασσας δίνεται από την αλγεβρική παράσταση $100t - 5t^2$, όπου t είναι ο χρόνος (σε δευτερόλεπτα) από την εκτόξευση της φωτοβολίδας.
(α) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η φωτοβολίδα βρίσκεται στην επιφάνεια της θάλασσας ($Y = 0$).
(β) Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «C_En3_fotovolida.ggb» για να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η φωτοβολίδα βρίσκεται στην επιφάνεια της θάλασσας ($Y = 0$).



Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

Διερεύνηση

Ο Βασίλης κάνει το ακόλουθο αριθμητικό τέχνασμα στους συμμαθητές του:

- *Διαλέξτε έναν αριθμό.*
- *Υψώστε τον αριθμό στο τετράγωνο.*
- *Αφαιρέστε το διπλάσιο του αρχικού αριθμού.*
- *Διαιρέστε το αποτέλεσμα διά τον αρχικό αριθμό μειωμένο κατά 2.*
- *Ακολούθως διαιρέστε με τον αρχικό αριθμό.*

Η απάντησή σας είναι 1!!!

✓ Να επιλέξετε διαφορετικούς αριθμούς και να εξετάσετε κατά πόσο ισχύει το πιο πάνω τέχνασμα.

✓ Για ποιους αριθμούς δεν ισχύει το πιο πάνω τέχνασμα;

✓ Πως μπορείτε να αποδείξετε ότι ισχύει πάντα το πιο πάνω τέχνασμα;

Μαθαίνω

- Μια αλγεβρική παράσταση με τη μορφή κλάσματος που οι όροι του είναι πολυώνυμα λέγεται **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς **ρητή παράσταση**.

  Παράδειγμα:

  Οι παραστάσεις $\frac{x^2-x+5}{x+1}$, $\frac{3a-3}{(a-1)(a+1)}$, $\frac{x^2+3x+1}{2}$ *είναι ρητές.*

- Οι μεταβλητές μιας ρητής αλγεβρικής παράστασης **δεν μπορούν να πάρουν πραγματικές τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή** της, αφού δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

  Παράδειγμα:

  Η κλασματική παράσταση $\frac{3a-3}{(a-1)(a+1)}$,

  ορίζεται για $(a-1)(a+1) \neq 0$, *δηλαδή για* $a \neq 1$ *και* $a \neq -1$.

  *Στη συνέχεια, όταν γράφουμε μια ρητή παράσταση, θα εννοείται ότι οι μεταβλητές της **δεν παίρνουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή**.*
- Μια ρητή αλγεβρική παράσταση μπορεί να απλοποιηθεί αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα.
  Η παράσταση που προκύπτει μετά την απλοποίηση έχει νόημα για τις ίδιες τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζεται και η αρχική παράσταση.

  Παράδειγμα:

  $$\frac{3a-3}{(a-1)(a+1)} = \frac{3\cancel{(a-1)}}{\cancel{(a-1)}(a+1)} = \frac{3}{a+1}$$

  Η απλοποιημένη παράσταση που προέκυψε ορίζεται (έχει νόημα) και πάλι για $a \neq -1$ *και* $a \neq 1$.

Ένα γινόμενο δύο αριθμών όταν είναι διάφορο του μηδενός, τότε και οι δύο αριθμοί είναι διάφοροι του μηδενός.

Δηλαδή
$\alpha \cdot \beta \neq 0$
τότε $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$.

Παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει και για το γινόμενο αλγεβρικών παραστάσεων.

Ισχύουν οι ιδιότητες:

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *και* $\beta \neq 0$, *τότε:*

- $\kappa \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\kappa\alpha}{\beta}$, $\kappa \in \mathbb{R}$
- $\frac{\lambda\, \alpha}{\lambda\, \beta} = \frac{\alpha}{\beta}$, $\lambda \neq 0$

Παραδείγματα

1. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι πιο κάτω αλγεβρικές παραστάσεις.

   (α) $\frac{13}{x^2}$ (β) $\frac{y}{x+5}$

   Λύση:

   (α) *Η παράσταση* $\frac{13}{x^2}$ *ορίζεται όταν* $x^2 \neq 0$, *δηλαδή όταν* $x \neq 0$.

   (β) *Η παράσταση* $\frac{y}{x+5}$ *ορίζεται όταν* $x+5 \neq 0$, *δηλαδή όταν* $x \neq -5$.

2. Να βρείτε τις τιμές της μεταβλητής για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $\frac{x-2}{x^2-4}$ και να την απλοποιήσετε.

Λύση:

Η παράσταση $\frac{x-2}{x^2-4}$ *ορίζεται, όταν:*

$x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \; και \; x \neq -2$.

$$\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $\frac{5x^2y^3}{10x^5y^2}$ (β) $\frac{12(a+1)^4}{4(a+1)^5}$

(γ) $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$

Λύση:

(α) $\frac{5x^2y^3}{10x^5y^2} = \frac{\cancel{5}\cdot\cancel{x^2}\cdot\cancel{y^2}\cdot y}{2\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{x^2}\cdot x^3\cdot\cancel{y^2}} = \frac{y}{2x^3}$ *Διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες των όρων της παράστασης.*

(β) $\frac{12(a+1)^4}{4(a+1)^5} = \frac{3}{a+1}$ *Διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες των όρων της παράστασης.*

(γ) $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{x+y}{x-y}$ *Παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της παράστασης και διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες των όρων της.*

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τις τιμές της μεταβλητής για τις οποίες ορίζονται οι πιο κάτω παραστάσεις.

(α) $\frac{x+5}{x^2-25}$ (β) $\frac{y^2-4}{y^2+5y-14}$ (γ) $\frac{a-3}{a^2-6a+9}$

2. Να αναγνωρίσετε τις παραστάσεις που είναι ίσες με την παράσταση $\frac{x}{y}$.

(α) $\frac{x-2}{y-2}$ (β) $\frac{5}{5+y}$ (γ) $\frac{x^3}{y^3}$ (δ) $\frac{4x}{4y}$ (ε) $\frac{a^2x}{a^2y}$, $a \neq 0$

3. Ποια από τις ακόλουθες ρητές παραστάσεις δεν ισούται με τις άλλες;

(α) $\frac{5}{3-x}$ (β) $\frac{-5}{x-3}$ (γ) $-\frac{5}{3-x}$ (δ) $-\frac{5}{x-3}$

4. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις.

(α) $\frac{3x}{x^3}$ (β) $\frac{5\beta^2\gamma^3}{2a^2\beta\gamma^2}$

(γ) $\frac{2a^2}{4a(a-6)}$ (δ) $\frac{4(a-9)}{36(9-a)x^3}$

(ε) $\frac{10(\alpha+7)}{2(\alpha+7)^2}$ (στ) $\frac{6(-x-7)(x-2)^2}{24\,(x-2)(x+7)^2}$

5. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις.

(α) $\frac{2a-10}{a^2-5a}$ (β) $\frac{a^2-2a\beta+\beta^2}{2a-2\beta}$

(γ) $\frac{5x^2-25x}{5x^3-125x}$ (δ) $\frac{2x^2-18}{x^2-6x+9}$

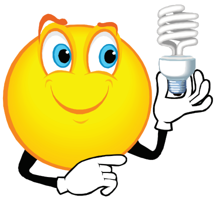
(ε) $\frac{x^2-5x+6}{4-x^2}$ (στ) $\frac{5a-5y+ax-yx}{a^2-ay}$

6. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, την τιμή της παράστασης $\frac{2018^3-2018}{2018^2-2018}$.

7. Γιατί το $K = \frac{x^2+5x-24}{x^2+3x-18}$ είναι μεγαλύτερο της μονάδας $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{-6, 3\}$;

Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση Ρητών Αλγεβρικών Παραστάσεων

Διερεύνηση



Ο κύριος Γιάννης θέλει να φωτίσει την αυλή του σπιτιού του. Σύμφωνα με τη μελέτη του ηλεκτρολόγου μηχανικού θα χρειαστεί 20 συνηθισμένες λάμπες των $40\,w$. Προβληματίζεται όμως για το κόστος που θα έχει, αν ανάβει και τις 20 αυτές λάμπες. Η χρέωση από την Α.Η.Κ. είναι περίπου 25 σεντ ανά kwh.

Ο κύριος Γιάννης έγραψε την ακόλουθη παράσταση, για να υπολογίσει το κόστος, όταν ανάβει μια λάμπα για μια ώρα.

Κόστος:

$$1\ \lambda άμπα \cdot 1\ ώρα \cdot \frac{\mathbf{40}\ watt}{1\ \lambda άμπα} \cdot \frac{\mathbf{25}\ \sigma ε\nu\tau}{1\ kilowatt \cdot 1\ ώρα} \cdot \frac{1\ kilowatt}{1000\ watt} \cdot \frac{1\ ευρώ}{100\ \sigma ε\nu\tau}$$

- ✓ Να εξηγήσετε τι εκφράζει ο καθένας από τους παράγοντες της παράστασης που έγραψε ο κύριος Γιάννης.

- ✓ Να γράψετε μία ισοδύναμη παράσταση με την πιο πάνω όσο πιο απλά μπορείτε.

- ✓ Να υπολογίσετε το κόστος για 3 ώρες, όταν θα έχει αναμμένες όλες τις λάμπες.

- ✓ Ο κύριος Γιάννης ανακάλυψε ότι μπορεί να χρησιμοποιήσει 20 οικονομικούς λαμπτήρες των $8\,w$. Να υπολογίσετε πόση εξοικονόμηση θα κάνει κάθε 3 ώρες που θα έχει αναμμένες όλες τις λάμπες.

Μαθαίνω

- Για να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε ρητές αλγεβρικές παραστάσεις χρησιμοποιούμε διαδικασίες παρόμοιες με το γινόμενο και το πηλίκο ρητών αριθμητικών παραστάσεων.
  Αν A, B, Γ, Δ είναι ρητές αλγεβρικές παραστάσεις, τότε ισχύει:

  – $\kappa \cdot \frac{A}{B} = \frac{\kappa \cdot A}{B}, \kappa \in \mathbb{R}$

  – $\frac{A}{B} \cdot \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{A \cdot \Gamma}{B \cdot \Delta}$

$-\quad \frac{A}{B} : \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{A}{B} \cdot \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{A \cdot \Delta}{B \cdot \Gamma}$

$-\quad \frac{\frac{A}{B}}{\frac{\Gamma}{\Delta}} = \frac{A}{B} : \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{A}{B} \cdot \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{A \cdot \Delta}{B \cdot \Gamma}$

Παράδειγματα:

(α) $\frac{2a+3\beta}{\alpha-\beta} \cdot \frac{\alpha^2-\beta^2}{9\beta^2-4a^2} =$

$= \frac{2a+3\beta}{a-\beta} \cdot \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{(3\beta-2a)(3\beta+2a)}$ *Αναλύουμε τους όρους του κάθε κλάσματος σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.*

$= \frac{\cancel{(2a+3\beta)}\cancel{(\alpha-\beta)}(\alpha+\beta)}{\cancel{(\alpha-\beta)}(3\beta-2a)\cancel{(2a+3\beta)}}$ *Απλοποιούμε τους ίδιους όρους.*

$= \frac{a+\beta}{3\beta-2\alpha}$

(β) $\frac{x^2}{2y} : \frac{x^3}{6y^4} =$

$= \frac{x^2}{2y} \cdot \frac{6y^4}{x^3}$ *Μετατρέπουμε τη διαίρεση σε πολλαπλασιασμό, αντιστρέφοντας το διαιρέτη.*

$= \frac{3y^3}{x}$

Παραδείγματα

1. Να κάνετε τις πράξεις και να απλοποιήσετε τα αποτελέσματα, όπου είναι δυνατόν.

   (α) $\frac{5}{3x} \cdot \frac{12x^2}{10y}$ (β) $\frac{1-4x+4x^2}{x^2-4} : \frac{2x-1}{2-x}$

   Λύση:

   (α) $\frac{5}{3x} \cdot \frac{12x^2}{10y} = \frac{2x}{y}$ *Απλοποιούμε* (β) $\frac{1-4x+4x^2}{x^2-4}:\frac{2x-1}{2-x}=\frac{(1-2x)^2}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{2-x}{2x-1}$ *Αντιστρέφουμε τον διαιρέτη και παραγοντοποιούμε*

Ισχύει
$(1-2x)^2=(2x-1)^2$
$(2-x)=-(x-2)$

$$=\frac{-(2x-1)^2\cdot(x-2)}{(x-2)(x+2)(2x-1)}$$ *Απλοποιούμε*

$$=-\frac{2x-1}{(x+2)}$$

2. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\frac{\frac{1}{a^2-9}}{\frac{a^2-3a+9}{a^3+27}}$

Λύση:

<u>Α΄ Τρόπος</u>

$\frac{\frac{1}{a^2-9}}{\frac{a^2-3a+9}{a^3+27}}=\frac{1}{(a-3)(a+3)}:\frac{a^2-3a+9}{(a+3)(a^2-3a+9)}$ *Παραγοντοποιούμε*

$$=\frac{1}{(a-3)(a+3)}\cdot\frac{(a+3)(a^2-3a+9)}{a^2-3a+9}=\frac{1}{a-3}$$ *Αντιστρέφουμε και απλοποιούμε*

<u>Β΄ Τρόπος</u>

Μετατρέπουμε το σύνθετο κλάσμα σε απλό:

Ισχύει
$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$
όπου $\beta,\gamma,\delta\neq0$

$$\frac{\frac{1}{a^2-9}}{\frac{a^2-3a+9}{a^3+27}}=\frac{\frac{1}{(a-3)(a+3)}}{\frac{a^2-3a+9}{(a+3)(a^2-3a+9)}}=\frac{(a+3)(a^2-3a+9)}{(a-3)(a+3)(a^2-3a+9)}$$

$$=\frac{1}{a-3}$$

Δραστηριότητες

1. Να απλοποιήσετε την πιο κάτω παράσταση.

$$20\ \text{λεπτά}\cdot\frac{75\ \text{χιλιόμετρα}}{1\ \text{ώρα}}\cdot\frac{1\ \text{ώρα}}{60\ \text{λεπτά}}$$

Τι μπορεί να παριστάνει το αποτέλεσμα της πιο πάνω παράστασης;

2. Να μετετρέψετε: (α) $10\ m/s\ σε\ Km/h$
(β) $72\ Km/h\ σε\ m/s$

3. Να κάνετε τους πιο κάτω πολλαπλασιασμούς:

(α) $\frac{10}{\alpha^3}\cdot\frac{\alpha^3}{2\omega^3}$ (β) $\frac{x^2-1}{2x+2}\cdot\frac{4}{x^2-x}$

(γ) $\frac{5(a+2)^2}{3a^2}\cdot\frac{9a}{7(a+2)}$ (δ) $\frac{x^2-9}{x-3}\cdot\frac{2x}{6+2x}$

(ε) $\frac{xy^2}{x^2+3x-18}\cdot\frac{4x+24}{xy}\cdot\frac{1}{4y}$ (στ) $\frac{y^3-y}{y^2-9}\cdot\frac{9-6y+y^2}{y^2}\cdot\frac{2y+6}{1-y^2}$

4. Να κάνετε τις πιο κάτω διαιρέσεις:

(α) $\frac{3a^2}{\beta}:\frac{6a}{\beta^2}$ (β) $\frac{a^5}{\beta^5}:\left(\frac{a}{\beta}\right)^6$

(γ) $\frac{x}{x-2}:\frac{x^2}{x^2-2x}$ (δ) $\frac{6}{x+5}:\frac{3x-45}{x^2+10x+25}$

(ε) $\frac{x^3}{x^3-1}:\frac{3}{x^3+x^2+x}$ (στ) $\frac{x^2-8x+12}{x^2-36}:\frac{3x-6}{x^2+5x-6}$

5. Η Γεωργία και η Χριστίνα έκαναν τις πιο κάτω πράξεις:

Γεωργία

$$\frac{x-2}{x+2}\cdot\frac{3x}{x^2-3x+2}=$$
$$=\frac{\cancel{x-2}}{x+2}\cdot\frac{3x}{\cancel{(x-2)}(x-1)}$$
$$=\frac{3x}{(x+2)(x-1)}$$

Χριστίνα

$$\frac{\cancel{x}-\cancel{2}}{\cancel{x}+\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{3x}}{x^2-\cancel{3x}+2}$$
$$=\frac{1}{x^2+2}$$

Να εξηγήσετε ποιο από τα δύο αποτελέσματα είναι ορθό και γιατί;

6. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{2x^4-2x^3}{x^2-x} \cdot \frac{1}{2x}$ για $x = 2013$.

7. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\dfrac{\frac{2\alpha\gamma}{3\beta}}{\frac{\alpha}{4\beta}}$ (β) $\dfrac{\frac{3x-6}{x-1}}{\frac{5x-10}{15x-15}}$

(γ) $\dfrac{\frac{x(x+1)}{x^2-1}}{2x}$ (δ) $\dfrac{\frac{3}{\alpha}+\frac{3}{\beta}}{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}}$

8. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\mathrm{A} = \frac{x^2y^2-y^4}{x^3-y^3} : \frac{xy^2+y^3}{x^2+xy+y^2}$ είναι σταθερή.

Πρόσθεση – Αφαίρεση
Ρητών Αλγεβρικών Παραστάσεων

Διερεύνηση

Ο Γιώργος και ο Δημήτρης δουλεύουν ταυτόχρονα, για να καλύψουν τη στέγη ενός σπιτιού με κεραμίδια. Για την εργασία αυτή χρειάζονται 6 μέρες.
Αν ο καθένας δουλεύει μόνος του, ο Αντρέας τελειώνει τη στέγη 5 μέρες νωρίτερα από τον Δημήτρη.

✓ Να θεωρήσετε ότι ο Δημήτρης χρειάζεται x μέρες για να ολοκληρώσει τη στέγη από μόνος του.
Να βρείτε τις παραστάσεις που εκφράζουν τα πιο κάτω:
- Τις μέρες που χρειάζεται ο Γιώργος για να ολοκληρώσει τη στέγη, αν δουλεύει μόνος του.
- Το μέρος της στέγης που θα ολοκληρώσει ο Γιώργος, σε μια μόνο μέρα, αν δουλεύει μόνος του.
- Το μέρος της στέγης που θα ολοκληρώσει ο Δημήτρης, σε μια μόνο μέρα, αν δουλεύει μόνος του.
- Το μέρος της στέγης που θα ολοκληρώσουν μαζί ο Δημήτρης και ο Γιώργος, σε μια μόνο μέρα.

✓ Να υπολογίσετε πόσες μέρες χρειάζεται ο Δημήτρης, για να ολοκληρώσει τη στέγη από μόνος του.

Μαθαίνω

- **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται το γινόμενο **όλων των παραγόντων** τους με εκθέτη τον μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

  Παραδείγματα:
  Το ΕΚΠ των πιο κάτω παραστάσεων είναι:
  $ΕΚΠ\ (2xy^2,\ 6x^2y\omega,\ xy) = 6x^2y^2\omega$
  $ΕΚΠ\ \left((x-y)(x+y),\ 5(x+y)^2\right) = 5(x+y)^2(x-y)$

- Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ρητές αλγεβρικές παραστάσεις χρησιμοποιούμε διαδικασίες παρόμοιες με το άθροισμα και τη διαφορά ρητών αριθμητικών παραστάσεων.
  Για ρητές παραστάσεις με τους **ίδιους παρονομαστές** ισχύει:
  $$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}+\frac{\boldsymbol{\Gamma}}{\boldsymbol{B}}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\Gamma}}{\boldsymbol{B}}\ ,\qquad \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}-\frac{\boldsymbol{\Gamma}}{\boldsymbol{B}}=\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\Gamma}}{\boldsymbol{B}}$$

  Παράδειγμα:

  $$\frac{x+3}{y+2}-\frac{x-2}{y+2}=\frac{x+3-(x-2)}{y+2}=\frac{x+3-x+2}{y+2}=\frac{x+5}{y+2}$$

  Όταν έχουμε ρητές παραστάσεις με **διαφορετικούς παρονομαστές** πρέπει πρώτα να τις μετατρέψουμε, ώστε να έχουν κοινό παρονομαστή το ΕΚΠ των παρονομαστών τους.
  Παράδειγμα:
  $$ΕΚΠ\ (2x,\ x+1)=2x(x+1)$$

  $$\frac{\overset{x+1}{\breve{3}}}{2x}+\frac{\overset{2x}{\breve{2}}}{x+1}=\frac{3(x+1)+4x}{2x(x+1)}=\frac{3x+3+4x}{2x(x+1)}=\frac{7x+3}{2x(x+1)}$$

- Όταν το πηλίκο δύο αλγεβρικών παραστάσεων ισούται με μηδέν, τότε ο αριθμητής του πηλίκου ισούται με μηδέν ενώ ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός και αντίστροφα.
  $$\frac{A(x)}{B(x)}=0\ \Leftrightarrow A(x)=0\ \ και\ \ B(x)\neq 0.$$

- Για την επίλυση εξίσωσης της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)}=0$, βρίσκουμε τις τιμές που μηδενίζουν *την* $A(x)$, αλλά δεχόμαστε μόνο όσες από αυτές δεν μηδενίζουν τη $B(x)$.

  Παράδειγμα:
  $\frac{x-2}{x+3}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x-2=0$ *Περιορισμός:* $x+3\neq 0$
  $\Leftrightarrow x\neq -3$
  $\Leftrightarrow \quad x=2$
  Η λύση είναι δεκτή διότι ικανοποιεί τον περιορισμό.

Παραδείγματα

1. Να κάνετε τις πράξεις:
   (α) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ (β) $\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}$

Λύση:

(α) $\overset{y}{\frac{1}{x}} + \overset{x}{\frac{1}{y}} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{y+x}{xy}$

$$ΕΚΠ = xy$$

Μετατρέπουμε τις παραστάσεις, ώστε να έχουν κοινό παρονομαστή (ομώνυμα) και εκτελούμε την πρόσθεση.

(β) $\frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)} - \overset{x-1}{\frac{1}{x+1}}$

Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή της παράστασης $\frac{1}{x^2-1}$.
Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π.:
$ΕΚΠ = (x+1)(x-1)$

$$= \frac{2x-1(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x-x+1}{(x+1)(x-1)}$$

Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα και εκτελούμε την πρόσθεση.

$$= \frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(x-1)}$$

$$= \frac{1}{x-1}$$

2. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{2}{x-3} + \frac{x}{2x-4} = \frac{2}{x^2-5x+6}$

Λύση:

$$\frac{2}{x-3} + \frac{x}{2x-4} = \frac{2}{x^2-5x+6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x-3} + \frac{x}{2(x-2)} = \frac{2}{(x-2)(x-3)}$$

Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές, για να βρούμε το ΕΚΠ και να μετατρέψουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα.

$$ΕΚΠ = 2(x-2)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow \overset{2(x-2)}{\frac{2}{x-3}} + \overset{x-3}{\frac{x}{2(x-2)}} = \overset{2}{\frac{2}{(x-2)(x-3)}}$$

Θέτουμε περιορισμούς:
$2(x-2)(x-3) \neq 0$
$\Leftrightarrow x-2 \neq 0 \text{ και } x-3 \neq 0$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x \neq 2 \text{ και } x \neq 3}$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-2) + x(x-3)}{2(x-2)(x-3)} = \frac{4}{2(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow 4(x-2) + x(x-3) = 4$$

Απαλείφουμε τους παρονομαστές
Επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.

$\Leftrightarrow 4x - 8 + x^2 - 3x - 4 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$
$\Leftrightarrow (x+4)(x-3) = 0$
$\Leftrightarrow \; x+4 = 0 \text{ ή } x-3 = 0$
$\Leftrightarrow \; x = -4 \text{ ή } x = 3$

Ελέγχουμε κατά πόσο οι λύσεις που βρήκαμε τηρούν τους περιορισμούς.
($x \neq 2$ και $x \neq 3$)

Η λύση $x = -4$ είναι δεκτή ενώ η $x = 3$ απορρίπτεται.

Δραστηριότητες

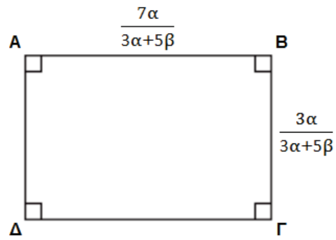
1. Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε τις παραστάσεις ως ένα κλάσμα:

   (α) $\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}-\frac{1}{5x}$ (β) $\frac{a}{\beta}-\frac{7}{11}$

   (γ) $\frac{5x}{x+5}+\frac{1}{x+5}$ (δ) $\frac{3x}{x+2}+\frac{6}{x+2}$

   (ε) $\frac{3}{\beta}+\frac{3}{\beta^2}+\frac{3}{\beta^3}$ (στ) $\frac{3}{2x}-\frac{1}{xy}+\frac{2}{3y}$

2. Ποια από τις πιο κάτω αλγεβρικές παραστάσεις εκφράζει την περίμετρο του διπλανού ορθογωνίου;



   (α) $\frac{7\alpha}{3\alpha+5\beta}$ (β) $\frac{10\alpha}{3\alpha+5\beta}$ (γ) $\frac{10\alpha}{6\alpha+10\beta}$ (δ) $\frac{20\alpha}{3\alpha+5\beta}$

3. Η κυρία Ελένη μπορεί να πληκτρολογεί κατά μέσο όρο ν λέξεις το λεπτό. Να γράψετε μια παράσταση που να εκφράζει τα λεπτά που χρειάζεται η κυρία Ελένη, για να πληκτρολογήσει
   (α) 300 λέξεις
   (β) 100 λέξεις
   (γ) 900 λέξεις
   (δ) Να προσθέσετε τις παραστάσεις από τα (α), (β), (γ). Τι αντιπροσωπεύει το άθροισμα αυτό;

4. Να κάνετε τις πράξεις:

   (α) $\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}$ (β) $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+2}$

   (γ) $\frac{x}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}$ (δ) $\frac{2x}{2x+1}-\frac{5}{2x-1}-\frac{4x^2+1}{4x^2-1}$

   (ε) $\frac{1}{x-4}-\frac{6}{x^2-x-12}-\frac{x-3}{x^2+3x}$ (στ) $\frac{a}{a^2+2a}-\frac{2}{2-a}-\frac{4a}{a^2-4}$

5. Να γράψετε δύο ρητές αλγεβρικές παραστάσεις με παρονομαστή $x+2$ οι οποίες:
   (α) να έχουν άθροισμα 1.
   (β) να έχουν άθροισμα 0.

6. Να δείξετε ότι $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2x+1}{x(x+1)}$. Ακολούθως να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα για να υπολογίσετε τα πιο κάτω:
(α) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ (β) $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ (γ) $\frac{1}{10}+\frac{1}{11}$ (δ) $\frac{1}{20}+\frac{1}{21}$

7. Να κάνετε τις πράξεις:
(α) $(2\alpha-\beta):\left(\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)$
(β) $3\alpha(\alpha+2)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+2}\right)$
(γ) $\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right):\left(\frac{1}{x^2}-1\right)$
(δ) $\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}\right):\frac{9x^2-1}{x^2-x}$
(ε) $\left(\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x-2}\right):\frac{x+2}{x^2-3x+2}$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:
(α) $\frac{x-7}{x+1}=0$
(β) $\frac{x^2-2x-3}{x+1}=0$
(γ) $\frac{y+4}{3}=\frac{2y-1}{y-2}$
(δ) $\frac{x^2-2x-3}{x-3}=2$
(ε) $\frac{12}{x-1}-\frac{6}{x}=-1$
(στ) $\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+1}=-2$
(ζ) $\frac{3x}{x^2-16}+\frac{1}{4-x}=\frac{3}{x+4}$
(η) $\frac{5y}{y^2-y-12}+\frac{2}{4-y}=\frac{2y}{y^2+3y}$

9. Να αντιστοιχίσετε τις προτάσεις της Στήλης Ι με τις κατάλληλες προτάσεις της Στήλης ΙΙ:

Στήλη Ι Δίνεται η εξίσωση:	**Στήλη ΙΙ** Η εξίσωση έχει λύση:
(α) $\frac{x-3}{x+1}=0$	1) $x=0$ ή $x=-3$
(β) $\frac{x(x+3)}{x+1}=0$	2) $x=2$
(γ) $\frac{x^2-4}{x+2}=0$	3) $x=3$
(δ) $\frac{x^3-x}{x^2+x}=1$	4) $x=1$
	5) $x=0$ ή $x=1$ ή $x=-1$

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

   (α) $3\kappa\omega + 3\kappa\varphi$ (β) $5x^2y + 10xy^2 - 15x^3$

   (γ) $x^2 - 7x + 10$ (δ) $y^2 - y - 12$

   (ε) $8x^2 - 4xy$ (στ) $2x^3 - 2x$

   (ζ) $x^2 + xy + 5x + 5y$ (η) $y^3 - 6y^2 + 8y$

   (θ) $ax^3 - 27a$ (ι) $16a^2 - 8ay + y^2$

2. Να αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

   (α) $(a+1)^2 - 9$ (β) $3x - 3y + x^2 - y^2$

   (γ) $(3x + 2y)^2 - 16y^2$ (δ) $4a^2(\beta^2 - 1) + 4\beta^2(1 - \beta^2)$

   (ε) $x^3 + y^3 - 3x - 3y$ (στ) $x^2 - 10x + 25 + 4x - 20$

   (ζ) $a^3x - \beta^3x + a^3 - \beta^3$ (η) $y^2 - x^2 - 10y + 25$

   (θ) $a^3 + 2a^2 + a + a\beta + \beta$ (ι) $(x-y)^2 - (x+1)^2$

   (ια) $(3a - 9)(a^2 - 9) - (a - 3)^2$ (ιβ) $x^2 + 4x - 36a - 12 + ax^2$

3. Ο κύριος Φαίδωνας είναι υπεύθυνος για τη διοργάνωση ενός τουρνουά ποδοσφαίρου σάλας. Για να βρει τον αριθμό των αγώνων που πρέπει να προγραμματίσει χρησιμοποιεί την παράσταση $A = \frac{1}{2}\nu^2 - \frac{1}{2}\nu$. Το αποτέλεσμα της παράστασης αυτής δίνει τον αριθμό των αγώνων που χρειάζονται, ώστε να παίξουν ν ομάδες μεταξύ τους από μια φορά.
   (α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση A.
   (β) Πόσοι αγώνες πρέπει να προγραμματιστούν, για να παίξουν μεταξύ τους 9 ομάδες από δύο φορές;

4. (α) Να αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων την παράσταση $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta$.
   (β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι, αν $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha + \beta$.

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $\frac{9x^4y^3\omega}{-3x^2y^2\omega}$ (β) $\frac{x+5}{x^2+5x}$

(γ) $\frac{x^2+2x}{x^2+3x+2}$ (δ) $\frac{y(y-3)+y^2-9}{4y^2-9}$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{y}$ (β) $\frac{2a^3}{3\beta^2}:\frac{4a^2}{6\beta}$

(γ) $\frac{a^2-4}{a^2+a-6}\cdot\frac{a+3}{a^2+2a}$ (δ) $\frac{2y^2}{y^2-y-6}\cdot\frac{y^2-9}{y}$

(ε) $\frac{y^2-4}{y^2+y}:\frac{y^2+5y+6}{y^2+3y}$ (στ) $\frac{x^3+8}{x^2-4}\cdot\frac{x-2}{x^2-2x+4}$

(ζ) $\frac{a^2-4}{a-3}\cdot\frac{a^2+a}{a^2-a-6}:\frac{a^3-a}{a^2-6a+9}$ (η) $\dfrac{\frac{xy-xy^3}{6}}{\frac{xy-x^3y}{12}}$

(θ) $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{9y}{x}}{\frac{x^2-6xy}{y^2}+9}$ (ι) $\dfrac{\frac{x^2+y^2}{xy}-2}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}$

7. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\frac{3}{5}-\frac{5+9\alpha}{15\alpha}$ (β) $\frac{\beta+4}{4\beta}-\frac{1}{\beta}$

(γ) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{4}{x^2-1}$ (δ) $\frac{2y}{2y+1}-\frac{5}{2y-1}-\frac{4y^2+1}{4y^2-1}$

(ε) $\left(\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)\cdot\frac{x^2+3x}{2x+18}$ (στ) $\frac{y^2-4}{y^2+4y+4}:\left(\frac{5}{y+2}-\frac{3}{y}\right)$

8. Δίνεται το άθροισμα $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$. Να εξετάσετε με ποιο από τα παρακάτω ισούται:

(α)

(Α) $\frac{2x+1}{x(x+1)}$ (Β) $\frac{1}{x(x+1)}$ (Γ) $\frac{2x-1}{x(x+1)}$ (Δ) $-\frac{1}{x(x+1)}$

(β) Να βρείτε το άθροισμα $\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}$.

9. Να βρείτε την παράσταση $A(x)$ ώστε να ισχύουν οι ισότητες στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) $\frac{2x}{x+3} + A(x) = \frac{2x+3}{x+3}$ (β) $\frac{2x}{x+3} - A(x) = \frac{3x-1}{x+3}$

(γ) $\frac{x+1}{x^2-9} \cdot A(x) = \frac{1}{3(x+3)}$ (δ) $\frac{x+3}{x^2-2x+1} : A(x) = \frac{2}{x-1}$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $(\alpha-2)(\alpha+8) = 0$ (β) $3x(5x-2) = 0$

(γ) $3(x+5)^2 = 0$ (δ) $x^2 = 9x$

(ε) $x(x+3) = 4$ (στ) $16\beta^2 - 8\beta + 1 = 0$

(ζ) $x(x+1) = 3x(x+1)$ (η) $(\alpha-3)(\alpha+2) = +6$

11. Να βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου, αν διαφέρουν κατά 5 cm και το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 24 cm^2.

12. Οι κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου διαφέρουν κατά 2 cm. Αν η υποτείνουσα είναι 10 cm να υπολογίσετε τα μήκη των κάθετων πλευρών του τριγώνου.

13. Το άθροισμα του τετραγώνου και του κύβου ενός αριθμού είναι ίσο με 20 φορές τον ίδιο τον αριθμό. Να βρείτε όλους τους αριθμούς με αυτή την ιδιότητα και να χαρακτηρίσετε το σύνολο στο οποίο ανήκουν.

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\frac{x-2}{x} = 0$ (β) $\frac{4x+1}{x(x-2)} = \frac{9}{x-2}$

(γ) $\frac{x+1}{x-1} = 2$ (δ) $\frac{x-3}{x+1} = \frac{x+5}{x-2}$

(ε) $\frac{3x+1}{x-3} = 2 - \frac{7}{x-3}$ (στ) $\frac{y}{y+2} + \frac{4}{y} = \frac{y+8}{y^2+2y}$

(ζ) $\frac{3-3\alpha}{3-\alpha} - \frac{2(\alpha+1)}{2+\alpha} = \frac{30}{\alpha^2-\alpha-6}$ (η) $\frac{y-4}{y^2+y} + \frac{10}{y^2-1} = \frac{8}{y^2-y}$

15. Η Δανάη κάνει τα ακόλουθα αριθμητικά τεχνάσματα στους συμμαθητές της:

<u>Τέχνασμα 1:</u>
«Διαλέξτε έναν αριθμό.
Αφαιρέστε 1.
Υψώστε στο τετράγωνο το αποτέλεσμα.
Αφαιρέστε 4.
Διαιρέστε με τον αρχικό αριθμό.
Αφαιρέστε 5 από το αποτέλεσμα.
Η απάντησή σας είναι ο αρχικός σας αριθμός!!!»

<u>Τέχνασμα 2:</u>
«Διαλέξτε έναν αριθμό.
Προσθέστε 3.
Υψώστε στο τετράγωνο το αποτέλεσμα.
Αφαιρέστε 4.
Διαιρέστε με τον αριθμό που είναι κατά 1 πιο μεγάλος από τον αρχικό σας αριθμό.
Αφαιρέστε 5 από το αποτέλεσμα
Η απάντησή σας είναι ο αρχικός σας αριθμός!!!»

(α) Να ελέγξετε αν ισχύουν τα πιο πάνω τεχνάσματα. Να εξηγήσετε πώς μπορείτε να είσαστε σίγουροι για την απάντησή σας.
(β) Πώς μπορείτε να αποδείξετε ότι τα πιο πάνω ισχύουν πάντα;
(γ) Τα πιο πάνω ισχύουν για όλους τους αριθμούς;

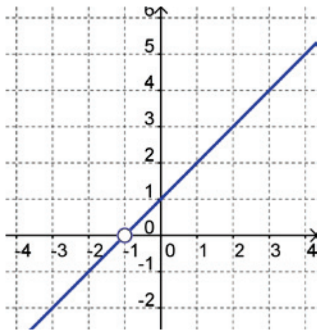
16. Να βρείτε ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη πλευρών διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς. Να εξετάσετε πόσα τέτοια τρίγωνα υπάρχουν.

17. Αν $\alpha^2+\beta^2=1$ να δείξετε ότι $(\alpha+2\beta)^2+(2\alpha-\beta)^2=5$.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ και ισχύει $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να δείξετε ότι η παράσταση $\frac{\beta^2+2\beta\gamma-\alpha^2}{\alpha+\beta}$ είναι ίση με γ.

2. Η συνάρτηση $y = \frac{(x+1)^2}{x+1}$ μπορεί να απλοποιηθεί στην $y = x + 1$, για κάθε τιμή του x, εκτός για $x = -1$, που μηδενίζει τον παρονομαστή. Η γραφική παράσταση της $y = \frac{(x+1)^2}{x+1}$, που φαίνεται δίπλα, είναι η ίδια με της $y = x + 1$ αλλά με ένα άδειο κύκλο στο σημείο $(-1{,}0)$ που υποδηλώνει ότι δεν παίρνει τιμή για $x = -1$. Με παρόμοιο τρόπο να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:



(α) $y = \frac{4x^2}{2x}$ (β) $y = \frac{(x-2)(2x-3)}{x-2}$

3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2013^3 + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 2014.

4. Να υπολογίσετε την παράσταση:

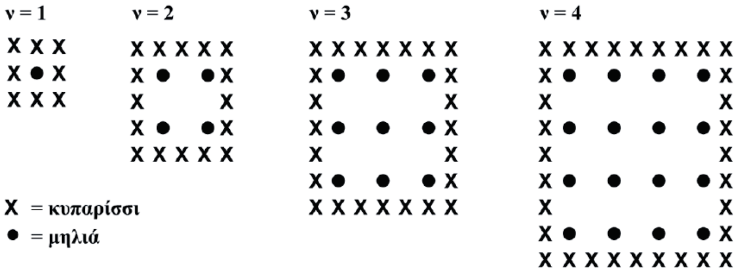
$$A = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\left(1 - \frac{1}{x+2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{x+2009}\right)\left(1 - \frac{1}{x+2010}\right)$$

5. (α) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$

   (β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα:
   $A = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \dots + \frac{1}{2013\cdot2014}$ δεν μπορεί να υπερβεί τη μονάδα.

6. Ο κύριος Αντρέας εργάζεται σε ένα λογιστικό γραφείο. Συνήθως για να ολοκληρώσει μια δουλειά για έναν συγκεκριμένο πελάτη χρειάζεται 2 ώρες. Μια μέρα επειδή βιαζόταν ζήτησε από τον κ. Γιώργο να τον βοηθήσει και τελείωσαν τη δουλειά σε 1 ώρα και 20 λεπτά. Πόσο χρόνο χρειάζεται ο κύριος Γιώργος για να τελειώσει τη δουλειά από μόνος του;

7. Ένας αγρότης θέλει να φυτέψει μηλιές σε σειρές και σε τετράγωνο σχήμα. Σκέφτεται να προστατέψει τις μηλιές από τον αέρα, περιφράζοντάς τις με κυπαρίσσια. Στα παρακάτω διαγράμματα βλέπουμε τη διάταξη των δέντρων, όπως τα φαντάζεται ο αγρότης. Κάθε διάγραμμα περιλαμβάνει διαφορετικές σειρές από μηλιές (ν = σειρές από μηλιές) .



(α) Συμπληρώστε τα στοιχεία που λείπουν στον παρακάτω πίνακα:

ν	Πλήθος δέντρων μηλιάς	Πλήθος κυπαρισσιών
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

(β) Οι τύποι που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, για να υπολογίσετε το πλήθος των δέντρων μηλιάς και το πλήθος των κυπαρισσιών στα παραπάνω διαγράμματα, είναι δύο:
Πλήθος δέντρων μηλιάς = ν^2
Πλήθος κυπαρισσιών = 8ν
όπου ν είναι ο αριθμός των σειρών που σχηματίζουν οι μηλιές.
Υπάρχει μια τιμή του ν, για την οποία το πλήθος των δέντρων μηλιάς ισούται με το πλήθος των κυπαρισσιών. Να βρείτε αυτή την τιμή του ν και να περιγράψετε παρακάτω τον τρόπο με τον οποίο την υπολογίσατε.

(γ) Ας υποθέσουμε ότι ο αγρότης μεγαλώνει συνέχεια το περιβόλι του προσθέτοντας συνεχώς σειρές δέντρων. Ενώ ο αγρότης μεγαλώνει το περιβόλι του προσθέτοντας σειρές, θα χρειαστεί περισσότερες μηλιές ή κυπαρίσσια; Γράψτε παρακάτω τον τρόπο με τον οποίο βρήκατε την απάντησή σας.

PISA 2003

8. Ένα από τα επακόλουθα της υπερθέρμανσης του πλανήτη μας είναι το λιώσιμο των πάγων. Δώδεκα χρόνια μετά το λιώσιμο των πάγων, αρχίζουν να αναπτύσσονται στους βράχους μικροσκοπικά φυτά που ονομάζονται λειχήνες.

   Κάθε λειχήνα αναπτύσσεται σε σχήμα περίπου κυκλικό.

   Ο παρακάτω τύπος χρησιμοποιείται, για να υπολογιστεί κατά προσέγγιση, η διάμετρος *(δ)* της λειχήνας σε σχέση με την ηλικία της:

   $\delta = 7{,}0 \times \sqrt{t-12}$ για $t \geq 12$

   όπου δ η διάμετρος της λειχήνας σε mm, και t ο αριθμός των ετών που έχουν περάσει μετά το λιώσιμο των πάγων.

   (α) Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο, υπολογίστε τη διάμετρο που θα έχει μια λειχήνα, 16 έτη μετά το λιώσιμο των πάγων.

   (β) Η Άννα μέτρησε τη διάμετρο μιας λειχήνας που βρήκε σε κάποιο μέρος, και είδε ότι ήταν 35 mm. Πόσα χρόνια έχουν περάσει από το λιώσιμο των πάγων σε αυτό το μέρος; Εξηγήστε πώς βρήκατε την απάντησή σας.

   (γ) Σε πόσα χρόνια από σήμερα, μια λειχήνα που τώρα έχει διάμετρο 35 mm θα έχει διπλασιάσει τη διάμετρό της; Εξηγήστε παρακάτω πώς βρήκατε την απάντησή σας.

PISA 2003

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

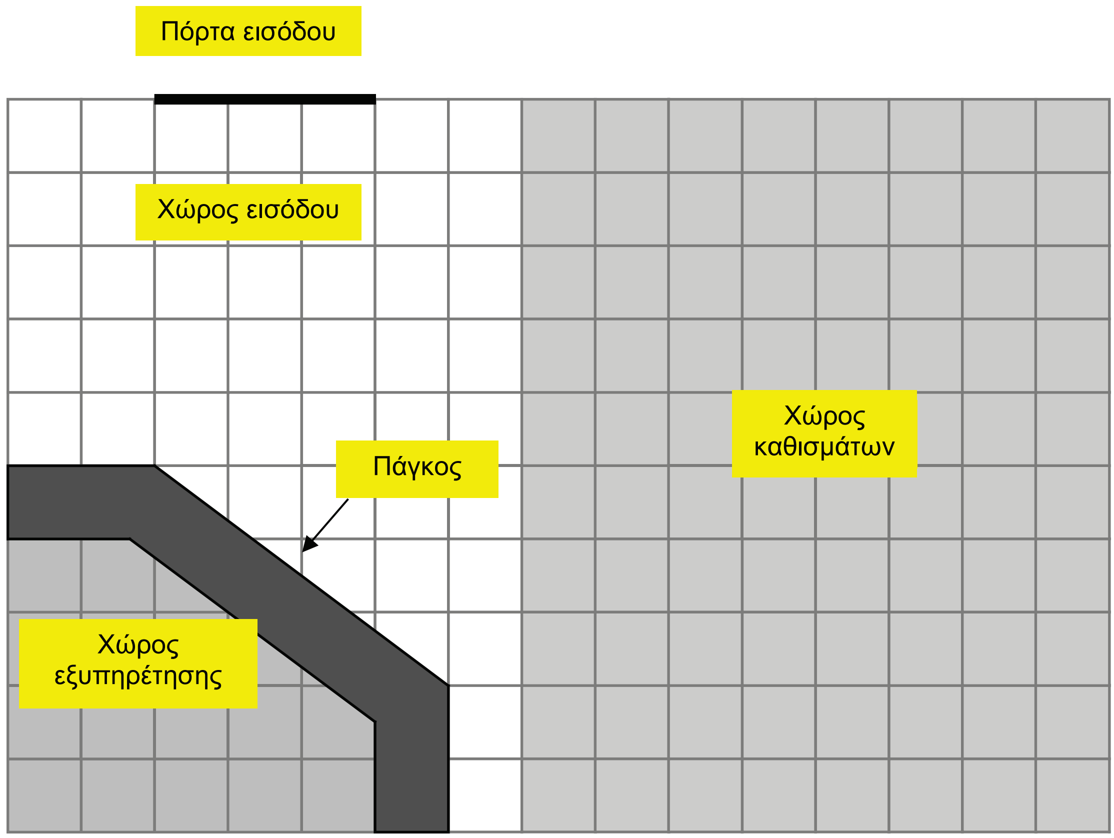
- Να εφαρμόζουμε τις προτάσεις που αφορούν τις ανισοτικές σχέσεις μεταξύ των πλευρών ενός τριγώνου.
- Να γνωρίζουμε πότε δυο σχήματα είναι ίσα.
- Να εξετάζουμε πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα με τη βοήθεια των κριτηρίων ισότητας τριγώνων.
- Να εφαρμόζουμε τα κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων, για να αποδεικνύουμε ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων ή γωνιών.

Λύση Προβλήματος

ΖΑΧΑΡΟΠΛΑΣΤΕΙΟ

Πιο κάτω παρουσιάζεται η κάτοψη του Ζαχαροπλαστείου της Μαρίας. Η Μαρία ανακαινίζει το κατάστημά της.

Ο χώρος εξυπηρέτησης περιτριγυρίζεται από τον πάγκο εξυπηρέτησης.



Σημείωση: Κάθε τετραγωνάκι στο διάγραμμα αντιστοιχεί σε 0,5 μέτρα × 0,5 μέτρα.

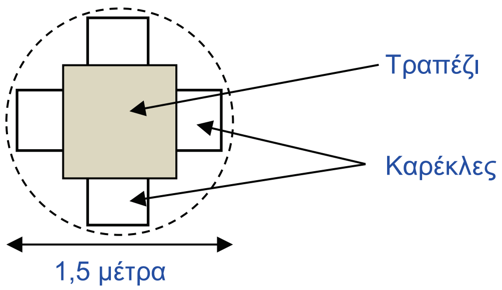
Ερώτηση 1:

Η Μαρία θέλει να τοποθετήσει καινούρια ταπετσαρία κατά μήκος της εξωτερικής πλευράς του πάγκου εξυπηρέτησης. Ποιο είναι το συνολικό μήκος της ταπετσαρίας που χρειάζεται;

Ερώτηση 2:

Η Μαρία πρόκειται, επίσης, να τοποθετήσει νέο δάπεδο στο κατάστημα. Ποιο είναι το συνολικό εμβαδόν του καταστήματος, εκτός από τον χώρο εξυπηρέτησης και τον πάγκο εξυπηρέτησης;

Ερώτηση 3:



Η Μαρία θέλει να τοποθετήσει στο κατάστημά της σύνολα (σετ) αποτελούμενα από ένα τραπέζι και τέσσερις καρέκλες, όπως αυτό που φαίνεται πιο πάνω. Ο κύκλος αναπαριστά το εμβαδόν του δαπέδου που χρειάζεται για το κάθε σύνολο.
Για να υπάρχει αρκετός χώρος για τους πελάτες, όταν κάθονται, κάθε σύνολο (όπως φαίνεται από τον κύκλο) πρέπει να τοποθετηθεί σύμφωνα με τους πιο κάτω περιορισμούς:

- *Κάθε σύνολο πρέπει να τοποθετηθεί τουλάχιστον 0,5 μέτρα μακριά από τους τοίχους.*
- *Κάθε σύνολο πρέπει να τοποθετηθεί τουλάχιστον 0,5 μέτρα μακριά από τα άλλα σύνολα.*

Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός συνόλων που μπορεί να τοποθετήσει η Μαρία στον χώρο καθισμάτων στο κατάστημά της, ο οποίος στο διάγραμμα είναι σκιασμένος;

PISA 2012

Έχουμε μάθει ...

- Δύο ευθείες ε_1 και ε_2, που τέμνονται από μία τρίτη ευθεία δ είναι παράλληλες όταν σχηματίζουν:
  - τις εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες

    $$\text{Αν } \hat{\varphi} = \hat{\mu} \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$$

    ή

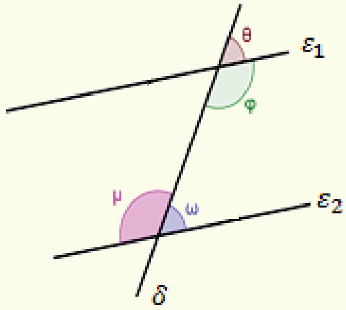
  - τις εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες

    $$\text{Αν } \hat{\theta} = \hat{\omega} \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$$

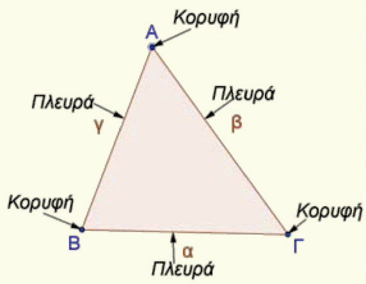
    ή

  - τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές

    $$\text{Αν } \hat{\varphi} + \hat{\omega} = 180^\circ \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$$



- **Κύρια Στοιχεία** Τριγώνου
  Κάθε τρίγωνο έχει:
  - τρεις **πλευρές,**
    Παράδειγμα: ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ή γ, α, β αντίστοιχα
  - τρεις **γωνιές,**
    Παράδειγμα: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$

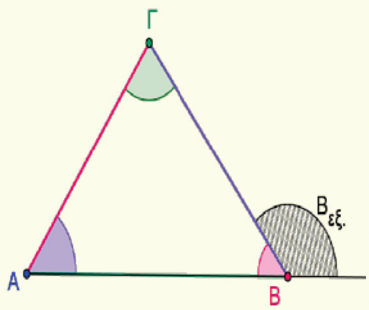


- Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180^o.

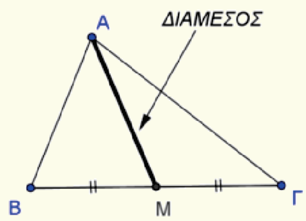
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o.$$

- Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.

$$\hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} + \hat{\Gamma}.$$



- **Διάμεσος** τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.

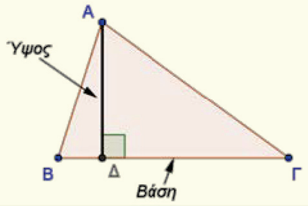


B

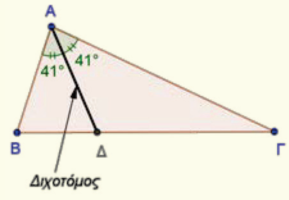
$BM = M\Gamma$

- **Ύψος** τριγώνου ονομάζεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από μια κορυφή του τριγώνου προς την ευθεία που περιέχει την απέναντι πλευρά του. Η πλευρά αυτή ονομάζεται βάση του τριγώνου ως προς το συγκεκριμένο ύψος.

$$\boldsymbol{ΑΔ \perp ΒΓ}$$
$$\boldsymbol{\widehat{Δ} = 90^0}$$



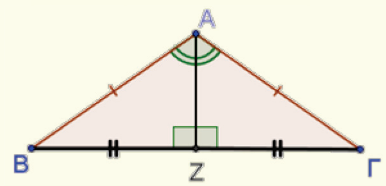
- **Διχοτόμος** τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που διχοτομεί μια γωνία του τριγώνου, ξεκινά από μια κορυφή του και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.



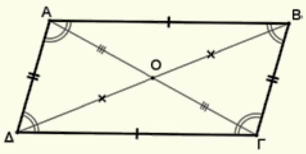
$$\boldsymbol{Β\widehat{Α}Δ = Δ\widehat{Α}Γ}$$

- Σε **ισοσκελές τρίγωνο** ισχύει:
  - Οι δύο του πλευρές είναι ίσες.
  - Οι δύο του γωνίες (γωνίες βάσης) είναι ίσες.
  - Το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση είναι και διχοτόμος και διάμεσος.

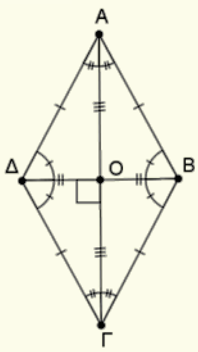
$$\boldsymbol{Β\widehat{Α}Ζ = Γ\widehat{Α}Ζ,}$$
$$\boldsymbol{ΑΖ \perp ΒΓ,}$$
$$\boldsymbol{ΒΖ = ΖΓ}$$



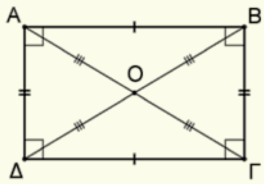
- **Παραλληλόγραμμο** ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει τις **απέναντι πλευρές του παράλληλες.**



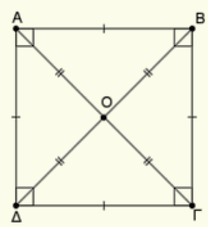
- **Ρόμβος** ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει και τις **τέσσερις πλευρές του ίσες.**



- **Ορθογώνιο** ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει και τις **τέσσερις γωνίες του ορθές.**



- **Τετράγωνο** ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει τις **τέσσερις γωνίες του ορθές και τις τέσσερις πλευρές του ίσες.**



Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ερμηνεύει τις μορφές του περιβάλλοντος χώρου χρησιμοποιώντας λίγες πρώτες αρχές και αξιοποιώντας τη σκέψη και τον ορθό λόγο.

Οι συλλογισμοί μας, για την αντιμετώπιση ενός γεωμετρικού προβλήματος, πρέπει να είναι θεωρητικοί, γενικοί και το σχέδιο του σχήματος να έρχεται αρωγός στην προσπάθεια λύσης του προβλήματος.

Από την εποχή του Αρχιμήδη και του Ήρωνα μέχρι σήμερα, τα πεδία εφαρμογής της Γεωμετρίας συνεχώς διευρύνονται.

Αρχικά, η μελέτη των ιδιοτήτων των διάφορων γεωμετρικών σχημάτων έγινε με τρόπο εμπειρικό, όπως τη συναντήσαμε στις προηγούμενες τάξεις. Η μέθοδος που ακολουθήσαμε τότε ήταν η εύρεση ή επαλήθευση των ιδιοτήτων και σχέσεων ανάμεσα στα γεωμετρικά σχήματα με βάση τη μέτρηση, η οποία όμως δεν μπορεί να είναι ακριβής και τα αποτελέσματά της δεν γενικεύονται.

*Η διαφοροποίηση της **Πρακτικής** Γεωμετρίας από τη **Θεωρητική Γεωμετρία** ή Ευκλείδεια Γεωμετρία, την οποία θα μελετήσουμε, συνίσταται στη συστηματική χρήση της λογικής για να θεμελιώσει τις γνώσεις μας για τον χώρο, ξεφεύγοντας από μετρήσεις και επιμέρους συμπεράσματα.*

*Οι γνώσεις αυτές υπάρχουν ήδη: όλοι ξέρουν τι είναι κύκλος και τι τετράγωνο, αφού οι αντίστοιχες λέξεις υπάρχουν σε όλες τις γνωστές γλώσσες. Πρόκειται όμως για γνώσεις σκόρπιες, ασύνδετες μεταξύ τους. Η Γεωμετρία τις θεμελιώνει, δηλαδή τις οργανώνει σε ένα σύστημα, και φυσικά προσθέτει και νέες γνώσεις σε αυτές που ήδη υπάρχουν. Κάθε καινούργιο αποτέλεσμα προκύπτει από τα προηγούμενα, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που λέγεται **απόδειξη** και που στηρίζεται στους κανόνες της Λογικής.*

*Η Γεωμετρία προχωράει από το πιο απλό στο πιο σύνθετο. Θα πρέπει, ωστόσο, από κάπου να ξεκινήσουμε, από έννοιες οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας, όπως οι έννοιες σημείο, ευθεία και επίπεδο τις οποίες δεχόμαστε ως **πρωταρχικές** χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις. Όμως οι έννοιες αυτές υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές:*

- *Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.*
- *Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.*

*Ισχυρισμούς όπως οι παραπάνω, τους οποίους δεχόμαστε ως αληθείς χωρίς απόδειξη, τους ονομάζουμε **αξιώματα**. Επομένως, τα αξιώματα δεν αποδεικνύονται, επιλέγονται. Η δομή του βιβλίου, η σειρά των αποτελεσμάτων εξαρτώνται από την επιλογή των αξιωμάτων, τα οποία δίνονται εκεί που χρειάζονται. Γενικότερα, γίνεται προσπάθεια ώστε, μετά* *από μία νέα έννοια ή ένα νέο σημαντικό αποτέλεσμα, να εξετάζεται τι καινούργιο μπορεί να προκύψει σε συνδυασμό με τα προηγούμενα. Κάθε νέο αποτέλεσμα που προκύπτει από μία σειρά συλλογισμών θεμελιωμένη στα αξιώματα λέγεται* ***θεώρημα****, ενώ οι άμεσες συνέπειες ενός θεωρήματος λέγονται* ***πορίσματα****.*

Όπως προαναφέραμε αντικείμενο της Γεωμετρίας είναι η μελέτη των σχημάτων του επιπέδου και του χώρου. Η μελέτη αυτή συχνά υποβοηθείται από ένα σχέδιο του σχήματος.

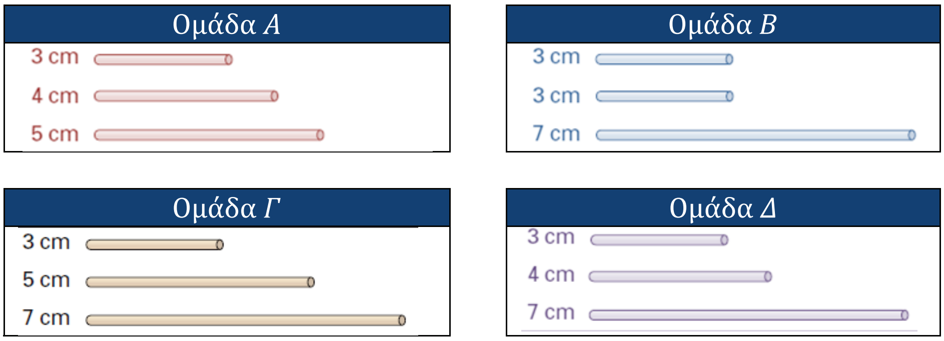
Στην πορεία εξαγωγής των συμπερασμάτων σημαντικό ρόλο παίζει η διαίσθηση και η εποπτεία. Τα συμπεράσματα, για να είναι γενικά, δεν πρέπει να είναι συνέπειες μόνο της παρατήρησης του σχεδίου. Είναι αναγκαίο να προκύπτουν με ορθό συλλογισμό από τις ιδιότητες του σχήματος, οι οποίες άλλωστε είναι δυνατό να μην είναι όλες ορατές στο σχήμα. Για να καταλήξουμε σε μία απόδειξη ο δρόμος μπορεί να είναι μακρύς και να περνάει μέσα από εικασίες, λάθη, επανατοποθετήσεις, μέχρι να οδηγηθούμε στην τελική μορφή.

Ανισοτικές Σχέσεις στα Τρίγωνα

Διερεύνηση

Για την πιο κάτω διερεύνηση θα χρειαστείτε πλαστικά καλαμάκια και ένα ψαλίδι.

- Να κόψετε τα καλαμάκια στα μεγέθη* που φαίνονται ομαδοποιημένα στους πίνακες Α, Β, Γ και Δ.
- Να χρησιμοποιήσετε διαφορετικό χρώμα για κάθε πίνακα.



**τα μεγέθη που φαίνονται είναι υπό κλίμακα.*

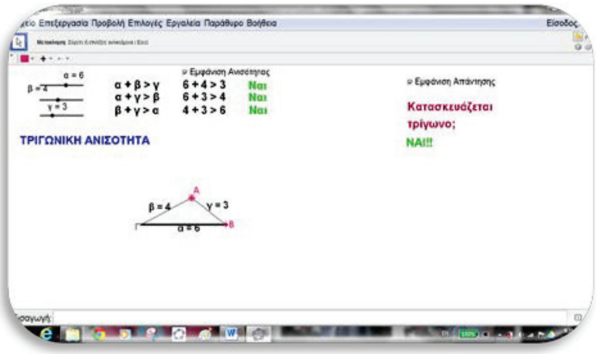
✓ Να χρησιμοποιήσετε τα καλαμάκια κάθε ομάδας για να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο κάθε φορά και να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα με τις παρατηρήσεις σας.

Μήκος πλευρών (cm)	Μπορέσατε να κατασκευάσετε τρίγωνο;
Ομάδα Α **3, 4, 5**	
Ομάδα Β **3, 3, 7**	
Ομάδα Γ **3, 5, 7**	
Ομάδα Δ **3, 4, 7**	

✓ Ποια προϋπόθεση πρέπει να ισχύει σε σχέση με το μήκος των πλευρών ενός τρίγωνου για να μπορεί αυτό να κατασκευαστεί;

✓ Να κόψετε τρία καλαμάκια ώστε να σχηματίζεται ένα τρίγωνο και να εξετάσετε αν ισχύει ο πιο πάνω ισχυρισμός σας.

Να ανοίξετε το αρχείο «C_En4_KataskeuasimoTrig.ggb» για να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο.



- ✓ Να επιλέξετε το μέτρο των ευθύγραμμων τμημάτων με τη βοήθεια των δρομέων και ακολούθως να περιστρέψετε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ από τα άκρα του (σημειώνονται με σταυρό), για να εξετάσετε κατά πόσο σχηματίζεται τρίγωνο.

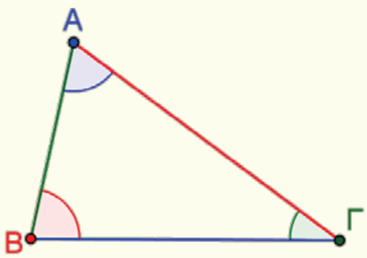
- ✓ Να παρατηρήσετε τις σχέσεις των πλευρών του τριγώνου και να διατυπώσετε έναν κανόνα που πρέπει να ισχύει μεταξύ των μέτρων των πλευρών ενός τριγώνου, ο οποίος να μας εξασφαλίζει πότε ένα τρίγωνο μπορεί να κατασκευαστεί.

Μαθαίνω

- Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών και μεγαλύτερη από την απόλυτη διαφορά τους, δηλαδή

Για παράδειγμα στο διπλανό σχήμα

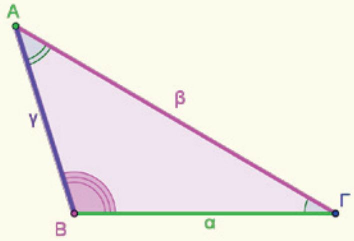
$$|ΑΓ - ΑΒ| < ΒΓ < ΑΓ + ΑΒ$$
$$|ΑΓ - ΒΓ| < ΑΒ < ΑΓ + ΒΓ$$
$$|ΒΓ - ΑΒ| < ΑΓ < ΒΓ + ΑΒ$$



<u>Παρατήρηση:</u>
Ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι κατασκευάσιμο, αν ισχύει μια από τις πιο πάνω ανισοτικές σχέσεις.

- Σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά είναι αυτή που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου και αντίστροφα.

Για παράδειγμα στο διπλανό σχήμα έχουμε: $\hat{B} > \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \beta > \gamma$



<u>Παρατήρηση:</u>

- *Σε τυχαίο τρίγωνο* $AB\Gamma$, *η γωνία* A *ονομάζεται περιεχόμενη γωνία των πλευρών* AB *και* $A\Gamma$, *γιατί οι πλευρές της γωνίας είναι οι πλευρές* AB *και* $A\Gamma$ *του τριγώνου.*
- *Οι γωνίες* B *και* Γ *ονομάζονται προσκείμενες γωνίες της πλευράς* $B\Gamma$ *γιατί η πλευρά του τριγώνου* $B\Gamma$ *είναι κοινή πλευρά τους.*

Παραδείγματα

Για να εξετάσουμε κατά πόσο ένα τρίγωνο είναι κατασκευάσιμο, αρκεί να συγκρίνουμε το άθροισμα των δύο μικρότερων πλευρών του με τη μεγαλύτερη του πλευρά.

1. Να εξετάσετε κατά πόσο είναι δυνατόν να κατασκευαστεί τρίγωνο με μήκη πλευρών:
   (α) $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 4$
   (β) $\alpha = 8, \beta = 6, \gamma = 12$

   Λύση:
   (α) *Υπολογίζουμε το άθροισμα των δύο μικρότερων πλευρών και το συγκρίνουμε με την άλλη πλευρά:*
   $\alpha + \beta = 1 + 2 = 3$ *και* $\gamma = 4$
   Ισχύει ότι $\alpha + \beta < \gamma$. *Άρα, δεν σχηματίζουν τρίγωνο, αφού το άθροισμα των δύο μικρότερων ευθύγραμμων τμημάτων δεν είναι μεγαλύτερο από το τρίτο.*

   (β) *Συγκρίνουμε το άθροισμα των δύο μικρότερων πλευρών με το μήκος της άλλης πλευράς:*
   $\alpha + \beta = 8 + 6 = 14$ *και* $\gamma = 12$
   Ισχύει $\alpha + \beta > \gamma$. *Άρα, σχηματίζουν τρίγωνο, αφού το άθροισμα των δύο μικρότερων ευθύγραμμων τμημάτων είναι μεγαλύτερο από το τρίτο.*

Υπάρχουν άπειρες πλευρές ΒΓ που ικανοποιούν την ανίσωση

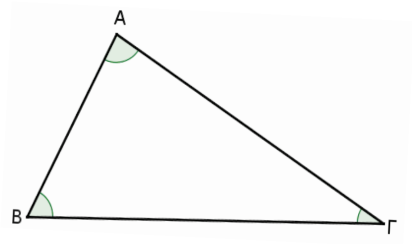
$3{,}1\ \text{m} < B\Gamma < 4{,}7\ \text{m}$

2. Τα μήκη των πλευρών AB και $A\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $0{,}8\,m$ και $3{,}9\,m$, αντίστοιχα, και το μήκος του $B\Gamma$ είναι ακέραιος αριθμός. Να βρείτε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

   Λύση:
   Αφού σε κάθε τρίγωνο ισχύει: $|A\Gamma - AB| < B\Gamma < A\Gamma + AB$,
   τότε $3{,}9 - 0{,}8 < B\Gamma < 3{,}9 + 0{,}8$
   δηλαδή $3{,}1\,m < B\Gamma < 4{,}7\,m$.
   Άρα, $B\Gamma = 4\,m$, *γιατί είναι ο μόνος ακέραιος που βρίσκεται μεταξύ του* $3{,}1\,m$ *και* $4{,}7\,m$.

Δραστηριότητες

1. Δίνεται το τρίγωνο $ΑΒΓ$.
   (α) Να γράψετε τα κύρια στοιχεία του τριγώνου.
   (β) Να ονομάσετε με μικρά γράμματα τις πλευρές $ΑΒ, ΑΓ$ και $ΒΓ$ του διπλανού σχήματος.
   (γ) Ποιες είναι οι περιεχόμενες γωνίες των πλευρών:
      (i) $ΑΒ$ και $ΒΓ$
      (ii) $ΑΓ$ και $ΑΒ$
   (δ) Ποιες πλευρές έχουν περιεχόμενη γωνία τη γωνία $Γ$;
   (ε) Ποιες είναι οι προσκείμενες γωνίες της πλευράς $ΑΒ$;



2. Να εξετάσετε κατά πόσο είναι δυνατόν να κατασκευαστεί τρίγωνο με μήκη πλευρών:
   (α) $\alpha = 1\,, \beta = 2\,, \gamma = 3$
   (β) $\alpha = 10\,, \beta = 5\,, \gamma = 7$
   (γ) $\alpha = 3\,, \beta = 4\,, \gamma = 5$

3. Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ η $ΑΒ = 2{,}7\ cm$ και $ΑΓ = 10\ cm$. Αν το μήκος της πλευράς $ΒΓ$ είναι ακέραιος να βρείτε τις πιθανές τιμές που μπορεί να έχει το μήκος της $ΒΓ$.

4. Σε ισοσκελές τρίγωνο $ΔΕΖ\ (ΔΕ = ΔΖ)$ η γωνία $\hat{Δ} = 70°$. Να συγκρίνετε τα μέτρα των πλευρών $ΔΖ$ και $ΕΖ$.

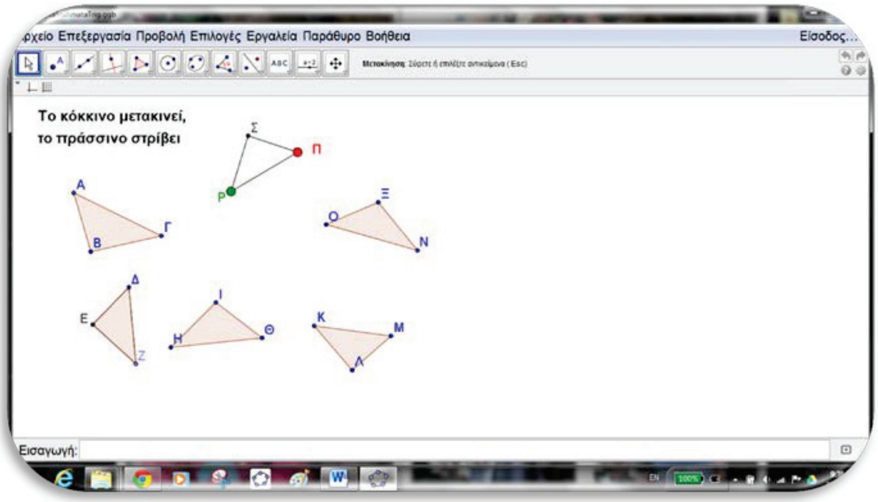
5. Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ > ΑΓ$, οι διχοτόμοι των γωνιών του $Β$ και $Γ$ τέμνονται στο $Κ$. Να δείξετε ότι $ΒΚ > ΓΚ$.

6. Να αποδείξετε ότι το μήκος οποιασδήποτε πλευράς ενός τριγώνου δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το μισό της περιμέτρου του (ημιπερίμετρος).

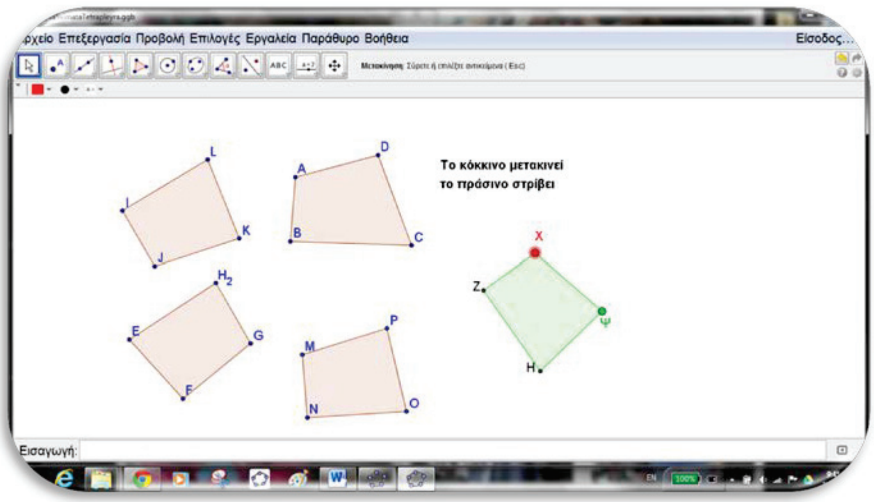
Ίσα σχήματα – Ισότητα τριγώνων

Διερεύνηση (1)

Να ανοίξετε τα αρχεία [«C_En4_IsaSsxhmataTrig.ggb»]() *και* [«C_En4_IsaSsximataTetrapleyra.ggb».]()



- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο το τρίγωνο $ΣΠΡ$, με κατάλληλη μετατόπιση, είναι δυνατόν να συμπέσει με κάποια από τα υπόλοιπα τρίγωνα.



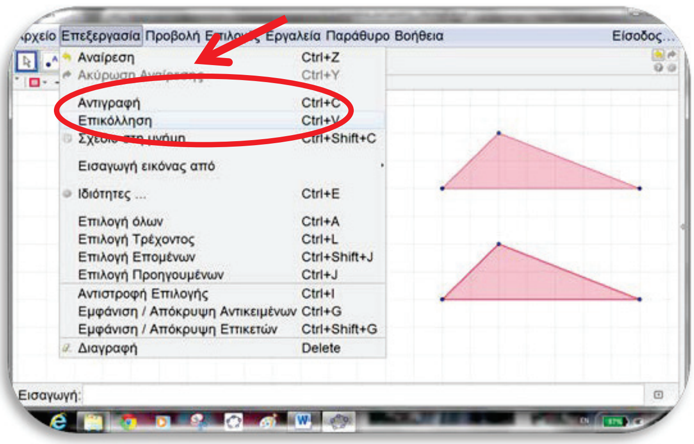
- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο το τετράπλευρο $ΖΧΨΗ$, με κατάλληλη μετατόπιση, είναι δυνατό να συμπέσει με κάποια από τα υπόλοιπα τετράπλευρα.

- ✓ Τι παρατηρείτε;

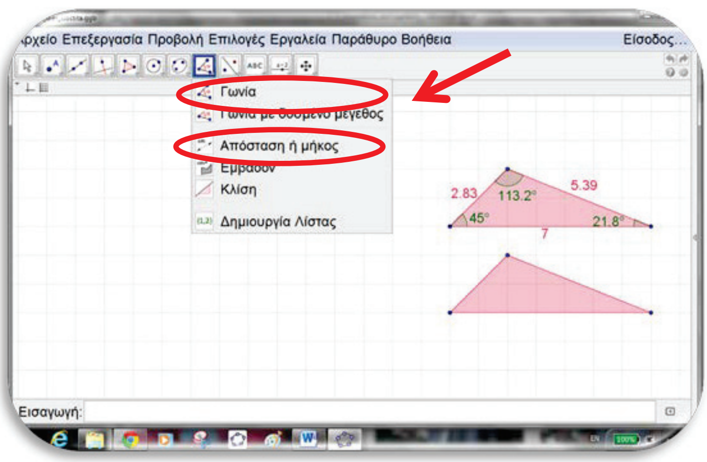
Διερεύνηση (2)

Να ανοίξετε ένα νέο αρχείο του GeoGebra. Με τη βοήθεια των εργαλείων του λογισμικού:

- *Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο.*
- *Να επιλέξετε το τρίγωνο και να το αντιγράψετε με τις εντολές αντιγραφή (COPY) και επικόλληση (PASTE).*



- ✓ Να εξετάσετε ποια σχέση έχουν τα δύο τρίγωνα μεταξύ τους.
- ✓ Ποια είναι η σχέση των στοιχείων (πλευρές – γωνίες) του αρχικού τριγώνου με το αντίστοιχο στο τρίγωνο που προέκυψε από την αντιγραφή του.
- ✓ Με την εντολή «ΓΩΝΙΑ» και «ΑΠΟΣΤΑΣΗ ή ΜΗΚΟΣ» να βρείτε το μέτρο των πλευρών και των γωνιών των δύο τριγώνων, για να εξετάσετε τον ισχυρισμό σας.

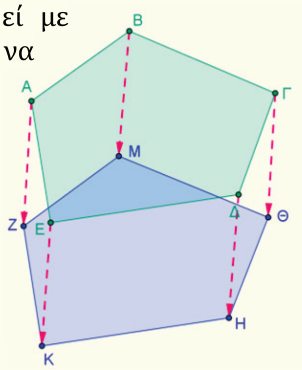


- ✓ Να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας, επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για ένα νέο πολύγωνο με τη βοήθεια του λογισμικού, αλλά και των γεωμετρικών σας οργάνων.

Όταν ένα σχήμα μπορεί με κατάλληλη μετατόπιση να ταυτιστεί με ένα άλλο, τότε κάθε πλευρά, κάθε γωνία, κάθε κορυφή κ.λπ., του πρώτου σχήματος θα συμπέσει με κάποια του άλλου σχήματος. Τα στοιχεία που συμπίπτουν λέγονται **αντίστοιχα**.

Μαθαίνω

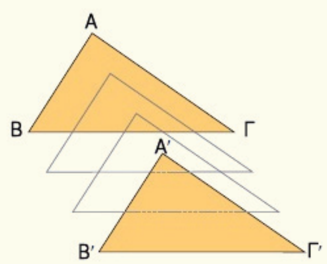
- Δύο επίπεδα σχήματα είναι ίσα, αν μπορεί με κατάλληλη μετατόπιση το ένα από αυτά να ταυτιστεί (συμπέσει) με το άλλο.



- Αν δύο σχήματα είναι ίσα, τότε έχουν και τα **αντίστοιχα** στοιχεία τους ίσα, δηλαδή κάθε στοιχείο του ενός είναι ίσο με το αντίστοιχο στοιχείο του άλλου.

Παράδειγμα:
Τα πολύγωνα $ΑΒΓΔΕ$ και $ΜΘΗΚΖ$ είναι ίσα, τότε:
$\hat{A} = \hat{Z},\ \hat{B} = \hat{M},\ \hat{\Gamma} = \hat{\Theta},\ \hat{\Delta} = \hat{H},\ \hat{E} = \hat{K}$ *και*
$AB = ZM,\ B\Gamma = M\Theta,\ \Gamma\Delta = \Theta H,\ \Delta E = HK,\ EA = KZ.$

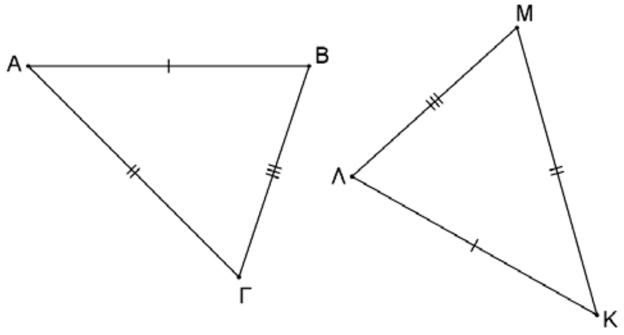
- Δύο τρίγωνα είναι ίσα, αν μπορεί με κατάλληλη μετατόπιση το ένα από αυτά να ταυτιστεί (συμπέσει) με το άλλο.
  Τότε τα δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.



Παράδειγμα:
Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα, τότε:
$\hat{A} = \hat{A}',\ \hat{B} = \hat{B}',\ \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ *και*
$AB = A'B',\ B\Gamma = B'\Gamma' \quad A\Gamma = A'\Gamma'.$

Παραδείγματα

1. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$, $ΚΛΜ$ είναι ίσα και ισχύει $AB = K\Lambda$, $B\Gamma = M\Lambda$, $\Gamma A = KM$. Να βρείτε τις αντίστοιχες ίσες γωνίες.



Λύση:

Στα ίσα τρίγωνα, απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

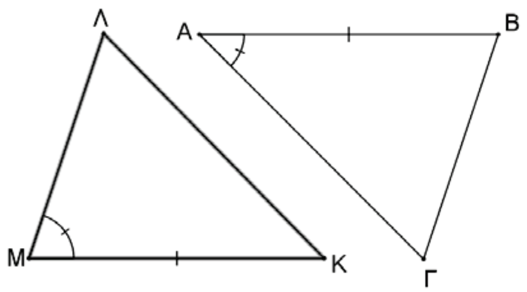
Δηλαδή,

$ΒΓ = ΜΛ \Longrightarrow \hat{A} = \widehat{K}$,

$ΓΑ = ΜΚ \Longrightarrow \hat{B} = \hat{Λ}$ *και*

$ΑΒ = ΚΛ \Longrightarrow \hat{Γ} = \widehat{M}$.

2. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΚΛΜ$ είναι ίσα και ισχύει $ΑΒ = ΜΚ$ και $\hat{A} = \widehat{M}$. Να βρείτε τα αντίστοιχα ίσα κύρια στοιχεία τους.



Λύση:

Στα ίσα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΚΛΜ$, απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές και αντίστροφα.

Δηλαδή,

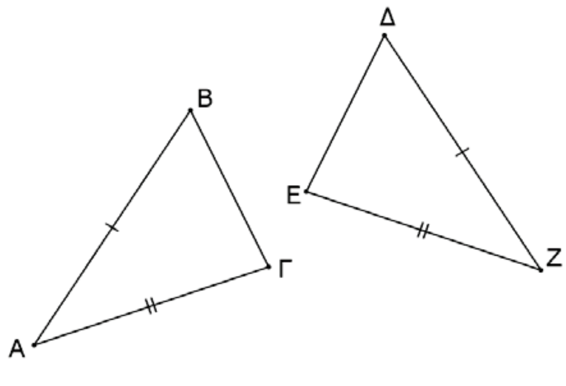
$ΑΒ = ΜΚ \Longrightarrow \hat{Γ} = \widehat{Λ}$, και $\hat{A} = \widehat{M} \Longrightarrow ΒΓ = ΚΛ$

$\widehat{Γ} = \widehat{Λ}$ και $\widehat{A} = \widehat{M} \Longrightarrow \hat{B} = \widehat{K}$

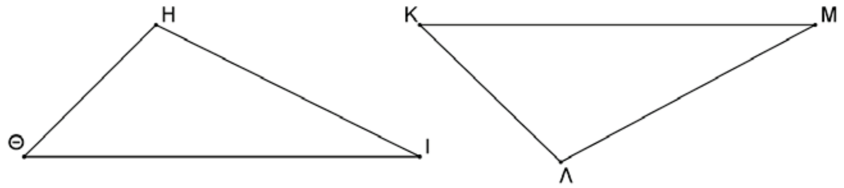
$\widehat{B} = \widehat{K} \Longrightarrow ΑΓ = ΜΛ$

Δραστηριότητες

1. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ είναι ίσα και ισχύει $ΑΒ = ΔΖ$ και $ΑΓ = ΕΖ$. Να βρείτε τα αντίστοιχα ίσα κύρια στοιχεία τους.



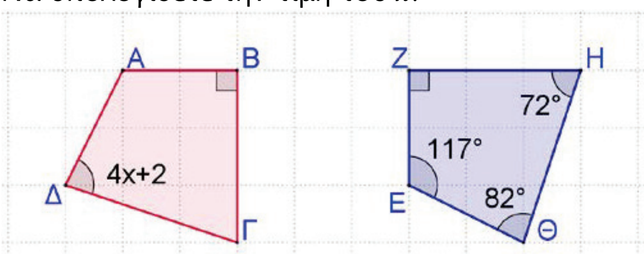
2. Να συγκρίνετε τα πιο κάτω τρίγωνα $ΘΗΙ$ και $ΚΛΜ$, αφού τοποθετήσετε το ένα πάνω στο άλλο με τη χρήση ενός διαφανούς χαρτιού.



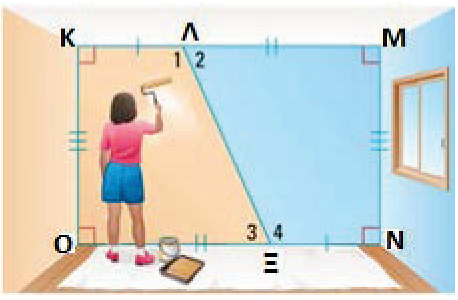
3. Να εξετάσετε κατά πόσο θα μπορούσε:
   (α) ένα σκαληνό τρίγωνο να είναι ίσο με ένα ισοσκελές τρίγωνο,
   (β) ένα ισόπλευρο τρίγωνο να είναι ίσο με ένα ορθογώνιο τρίγωνο,
   (γ) ένα ισοσκελές τρίγωνο να είναι ίσο με ένα ορθογώνιο τρίγωνο.
   Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4. Η Μαρίλια ισχυρίζεται ότι: «*Δύο ίσα τρίγωνα θα έχουν και ίση περίμετρο*».
   (α) Να εξετάσετε τον ισχυρισμό της.
   (β) Να εξετάσετε κατά πόσο ισχύει και το αντίστροφο, ότι δηλαδή «Δύο τρίγωνα με ίση περίμετρο θα είναι ίσα».

5. Τα τετράπλευρα $ΑΒΓΔ$ και $ΖΗΘΕ$ στο πιο κάτω σχήμα είναι ίσα.
   (α) Να βρείτε όλα τα αντίστοιχα στοιχεία.
   (β) Να υπολογίσετε την τιμή του x.



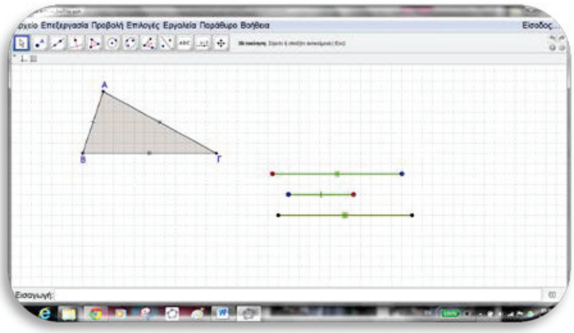
6. Να εξετάσετε κατά πόσο τα δύο τετράπλευρα $ΚΛΞΟ$ και $ΛΜΝΞ$ της εικόνας είναι ίσα.



Κριτήρια Ισότητας Τριγώνων

Διερεύνηση (1)

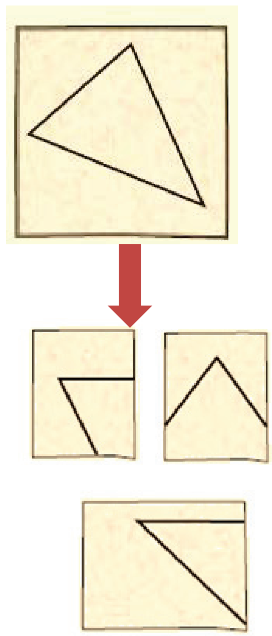
Να ανοίξετε το αρχείο [«C_En4_1o kritirio_IsoTrig.ggb»]



Να μετακινήσετε τα δύο πράσινα ευθύγραμμα τμήματα, ώστε να κατασκευάσετε με το μαύρο ευθύγραμμο τμήμα ένα νέο τρίγωνο. (*Το ευθύγραμμο τμήμα με μαύρα άκρα δεν μετακινείται ενώ τα άλλα δύο τμήματα μεταφέρονται από το μπλε άκρο και περιστρέφονται γύρω από το κόκκινο άκρο*).

✓ Να μετακινήσετε το τρίγωνο που δημιουργείται και να το συγκρίνετε με το τρίγωνο $ΑΒΓ$. Τι παρατηρείτε;

Διερεύνηση (2)



Για την πιο κάτω διερεύνηση θα χρειαστείτε τέσσερα φύλλα χαρτιού, διαφανές χαρτί και ένα ψαλίδι.

- *Να σχεδιάσετε σε ένα φύλλο χαρτιού ένα τρίγωνο.*
- *Να αντιγράψετε, τις τρεις γωνίες του τριγώνου σε τρία ξεχωριστά φύλλα διαφανούς χαρτιού, όπως φαίνεται στο σχήμα.*
- *Να τοποθετήσετε τα διάφανα φύλλα έτσι ώστε να σχηματίσετε ένα τρίγωνο με γωνίες ίσες με τις αρχικές.*

✓ Να εξετάσετε κατά πόσο το τρίγωνο αυτό είναι ίσο με το αρχικό τρίγωνο.

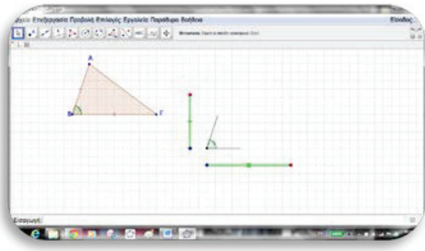
✓ Να κατασκευάσετε άλλο ένα τρίγωνο με γωνίες ίσες με τις αρχικές γωνίες. Πόσα τέτοια τρίγωνα υπάρχουν;

✓ Να εξετάσετε κατά πόσο δύο τρίγωνα με ίσες τις γωνίες τους είναι ίσα;

Διερεύνηση (3)

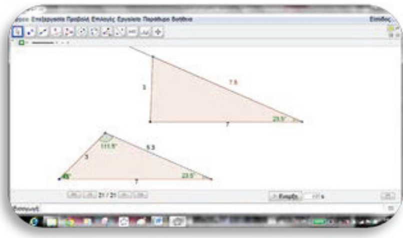
Ο Νικόλας θέλει να εξετάσει κατά πόσο δύο τρίγωνα με μόνο δύο πλευρές ίσες είναι ίσα. Αν όχι, θέλει να μελετήσει ποιο ή ποια άλλα στοιχεία χρειάζονται εκτός από την τρίτη πλευρά για να διασφαλιστεί η ισότητα δύο τριγώνων.

Να ανοίξετε το αρχείο «C_En4_2o_kritirio_IsoTrig.ggb», *για να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο.*



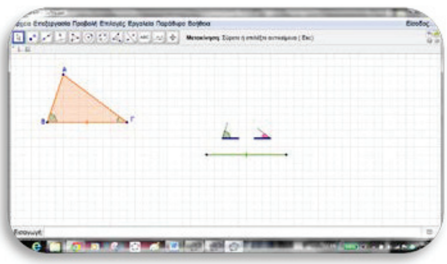
Τα δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα με τις πλευρές του τριγώνου, ενώ η γωνία είναι ίση με τη γωνία B του τριγώνου $ΑΒΓ$ *(η γωνία δεν μετακινείται).* Να μετακινήσετε αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα προς τη γωνία, ώστε να κατασκευάσετε ένα νέο τρίγωνο με πλευρές τα δύο τμήματα και περιεχόμενη τη γωνία που δίνεται.

- ✓ Ακολούθως να μετακινήσετε το τρίγωνο που δημιουργείται και να το τοποθετήσετε πάνω στο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Τι παρατηρείτε;
- ✓ Να εξετάσετε με τη βοήθεια του αρχείου «C_En4_PeriexomeniGonia.ggb» κατά πόσο δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν δύο πλευρές ίσες και μία άλλη γωνία, αλλά όχι την περιεχόμενη, αντίστοιχα ίσες.



Διερεύνηση (4)

Να ανοίξετε το αρχείο «C_En4_3o_kritirio_IsoTrig.ggb»



Οι δύο γωνίες είναι ίσες με τις γωνίες B και $Γ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ και το ευθύγραμμο τμήμα ίσο με την πλευρά $ΒΓ$ του τριγώνου.
Να μετακινήσετε τις δύο γωνίες προς τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος, ώστε να κατασκευάσετε ένα νέο τρίγωνο με πλευρά το ευθύγραμμο τμήμα και τις δύο γωνίες.

- ✓ Ακολούθως να μετακινήσετε το τρίγωνο που δημιουργείται και να το συγκρίνετε με το τρίγωνο $ΑΒΓ$. Τι παρατηρείτε;

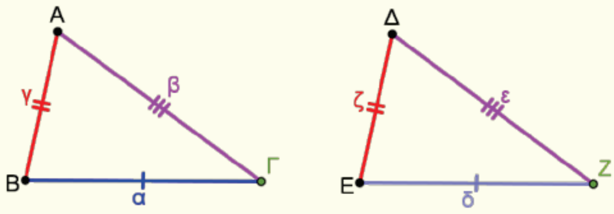
Μαθαίνω

- **Κριτήρια ισότητας τριγώνων**

  Οι προτάσεις οι οποίες εξασφαλίζουν την ισότητα δύο τριγώνων αποτελούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

  - **<u>1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων</u>** $(\boldsymbol{\Pi - \Pi - \Pi})$

    Αν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα (συμβολικά γράφουμε $\Pi - \Pi - \Pi$).



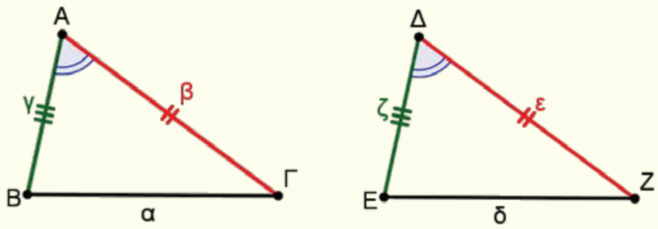
Παράδειγμα:

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, έχουν:

$$\left.\begin{array}{ll} AB = \Delta E & (\Pi) \\ B\Gamma = EZ & (\Pi) \\ A\Gamma = \Delta Z & (\Pi) \end{array}\right\} \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{\Delta EZ}$$

  - **<u>2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων</u>** $(\boldsymbol{\Pi - \Gamma - \Pi})$

    Αν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι ίσες, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα (συμβολικά γράφουμε $\Pi - \Gamma - \Pi$).



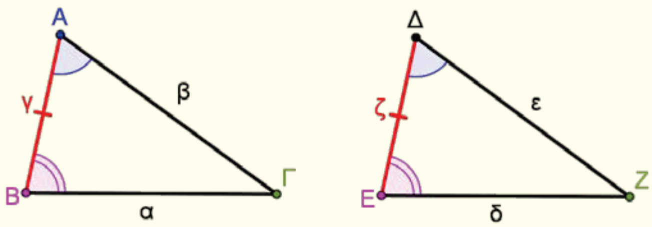
Παράδειγμα:

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, έχουν:

$$\left.\begin{array}{ll} AB = \Delta E & (\Pi) \\ B\hat{A}\Gamma = E\hat{\Delta}Z & (\Gamma) \\ A\Gamma = \Delta Z & (\Pi) \end{array}\right\} \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{\Delta EZ}$$

  - **<u>3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων</u>** $(\boldsymbol{\Gamma - \Pi - \Gamma})$

    Αν μία πλευρά ενός τριγώνου είναι ίση με μία πλευρά ενός άλλου τριγώνου και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι μία προς μία αντίστοιχα ίσες, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα (συμβολικά γράφουμε $\Gamma - \Pi - \Gamma$).



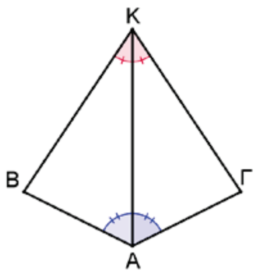
Παράδειγμα:

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, έχουν:

$$\left.\begin{array}{ll} AB = \Delta E & (\Pi) \\ B\hat{A}\Gamma = E\hat{\Delta}Z & (\Gamma) \\ A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{E}Z & (\Gamma) \end{array}\right\} \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{\Delta EZ}$$

Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα ABK και $A\Gamma K$ του διπλανού σχήματος είναι ίσα.



Λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABK και $A\Gamma K$, τα οποία έχουν:

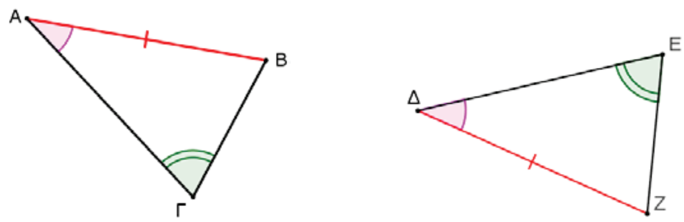
$$\left.\begin{array}{l} AK = AK \ \text{(Κοινή πλευρά) (Π)} \\ B\widehat{K}A = \Gamma\widehat{K}A \ \text{(Δεδομένα από σχήμα) (Γ)} \\ B\hat{A}K = \Gamma\hat{A}K \ \text{(Δεδομένα από σχήμα) (Γ)} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{\mathrm{A}}\mathrm{BK} = \overset{\triangle}{\mathrm{A}}\Gamma\mathrm{K}$$

Άρα, τα τρίγωνα ABK και $A\Gamma K$ είναι ίσα, γιατί έχουν μια κοινή πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες σε κάθε τρίγωνο αντίστοιχα ίσες ($\Gamma - \Pi - \Gamma$).

2. Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνων $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα, με βάση τα δεδομένα που σας δίνονται σε κάθε περίπτωση:
(α) $AB = \Delta Z, \hat{A} = \hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{E}$.

Λύση:

(α) *Κατασκευάζουμε δυο τρίγωνα σύμφωνα με τα πιο πάνω δεδομένα:*
Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία Γ είναι αντίστοιχη της πλευρά AB και στο τρίγωνο ΔEZ η γωνία E είναι αντίστοιχη της πλευράς ΔZ.
Άρα, αφού $AB = \Delta Z$ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$ τότε τα τρίγωνα έχουν αντίστοιχα ίσα μία γωνία και μία πλευρά.

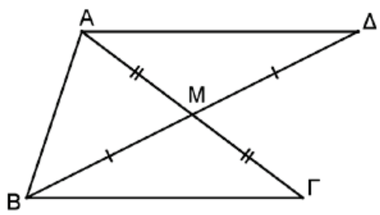


Με βάση τα δεδομένα μας αναζητούμε τώρα ένα τρίτο στοιχείο για να δούμε αν ισχύει κάποιο από τα τρία κριτήρια.
Αφού $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180° \Rightarrow \hat{B} = 180° - \boldsymbol{\hat{A}} - \boldsymbol{\hat{\Gamma}}$, (1)
και $\hat{\Delta} + \hat{E} + \hat{Z} = 180° \Rightarrow \hat{Z} = 180° - \boldsymbol{\hat{\Delta}} - \boldsymbol{\hat{E}}$. (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) και τα δεδομένα $\boldsymbol{\hat{A} = \hat{\Delta}}$ *και* $\boldsymbol{\hat{\Gamma} = \hat{E}}$, *έχουμε ότι* $\hat{B} = \hat{Z}$.
Άρα, ισχύει το κριτήριο ισότητας τριγώνων ($\Gamma - \Pi - \Gamma$) και συνεπώς τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.

<u>Παρατήρηση:</u>
Στην περίπτωση που οι ίσες γωνίες δεν είναι προσκείμενες των ίσων πλευρών αλλά είναι **αντίστοιχα** ίσες, τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

3. Στο σχήμα η διάμεσος BM του τριγώνου $AB\Gamma$ έχει προεκταθεί κατά τμήμα $M\Delta = BM$. Να αποδείξετε ότι τα τμήματα $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι ίσα.



Λύση:

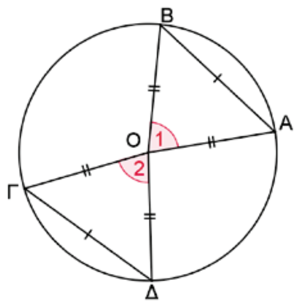
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AM\Delta$, $BM\Gamma$ τα οποία έχουν:

- $AM = M\Gamma$ *(Μ μέσο του $A\Gamma$)* (Π)
- $M\Delta = BM$ *(Δεδομένο)* (Π)
- $A\widehat{M}\Delta = B\widehat{M}\Gamma$ *(κατακορυφήν γωνίες)* (Γ)

$\Rightarrow \overset{\triangle}{AM\Delta} = \overset{\triangle}{\Gamma MB}$

Άρα, τα τρίγωνα $AM\Delta$ και ΓMB είναι ίσα διότι έχουν δύο πλευρές αντίστοιχα ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες σε αυτές αντίστοιχα ίσες $(\Pi - \Gamma - \Pi)$.
Αφού τα τρίγωνα $AM\Delta$ και ΓMB είναι ίσα, τότε και όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. Άρα, έχουμε ότι $A\Delta = B\Gamma$.

4. Να αποδείξετε ότι σε ίσες χορδές ενός κύκλου αντιστοιχούν ίσα τόξα.



Λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AOB και $\Delta O\Gamma$ τα οποία έχουν:

- $AO = \Delta O$ *(Ακτίνες κύκλου) (Π)*
- $BO = \Gamma O$ *(Ακτίνες κύκλου) (Π)*
- $AB = \Gamma\Delta$ *(Δεδομένο) (Π)*

$\Rightarrow \overset{\triangle}{AOB} = \overset{\triangle}{\Gamma O\Delta}$

Άρα, τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$ είναι ίσα διότι έχουν τρεις πλευρές αντίστοιχα ίσες μία προς μία $(\Pi - \Pi - \Pi)$.

Αφού τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$ είναι ίσα, τότε και όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. Άρα, έχουμε ότι $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

Οι γωνίες $\hat{O}_1$, $\hat{O}_2$ είναι επίκεντρες γωνίες. Άρα, τα αντίστοιχα τόξα τους $AB, \Gamma\Delta$ είναι ίσα.

Δραστηριότητες

1. Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ, για τα οποία ισχύει $AB = EZ$, $B\Gamma = E\Delta$, $A\Gamma = \Delta Z$, $A = 100°$ και $\hat{E} = 50°$. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών των δύο τριγώνων.

2. Δίνονται τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$. Να βρείτε σε ποιες από τις πιο κάτω περιπτώσεις τα τρίγωνα είναι ίσα.

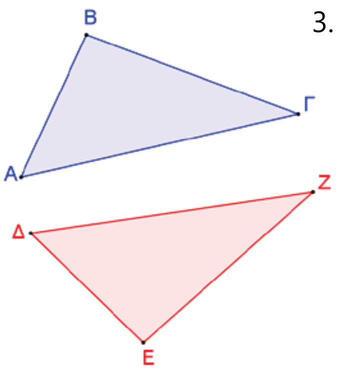
   (α) $ΑΒ = ΔΕ,\ ΑΓ = ΔΖ,\ ΒΓ = ΕΖ$

   (β) $ΑΒ = ΔΕ,\ ΒΓ = ΕΖ$

   (γ) $\hat{Α} = \hat{Δ},\ \hat{Β} = \hat{Ε},\ \hat{Γ} = \hat{Ζ}$

   (δ) $ΑΒ = ΑΓ,\ ΔΕ = ΕΖ,\ \hat{Α} = \hat{Ε}$

   (ε) $ΑΒ = ΔΕ,\ \hat{Α} = \hat{Ε},\ \hat{Δ} = \hat{Β}$



3. Να συμπληρώσετε τα στοιχεία που λείπουν σε κάθε περίπτωση έτσι ώστε τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ να είναι ίσα:

   (α) $\hat{Α} = \hat{Δ},\ \hat{Β} = \hat{Ε}$ και ______

   (β) $ΑΒ = ΔΕ,\ ΑΓ = ΔΖ$ και ______

   (γ) $\hat{Γ} = \hat{Ζ},\ ΑΓ = ΔΖ$ και ______

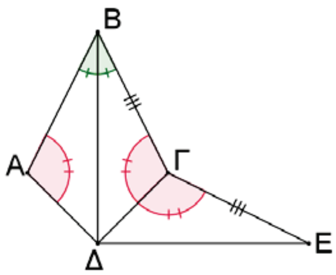
   (δ) $\hat{Β} = \hat{Ε}$, ______ και ______

4. Να γράψετε το κριτήριο με το οποίο τα πιο κάτω τρίγωνα του διπλανού σχήματος είναι ίσα .

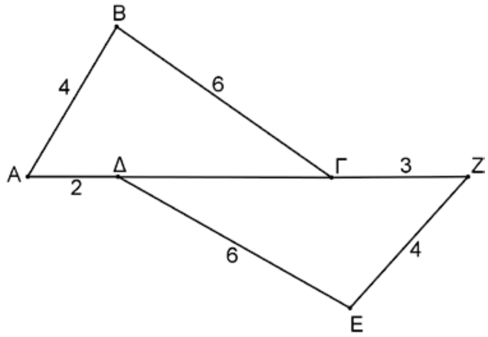
   (α) $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Delta}} = \overset{\triangle}{\mathrm{B\Delta\Gamma}}$ ________________

   (β) $\overset{\triangle}{\mathrm{B\Gamma\Delta}} = \overset{\triangle}{\mathrm{E\Gamma\Delta}}$ ________________

   (γ) $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Delta}} = \overset{\triangle}{\mathrm{E\Gamma\Delta}}$ ________________

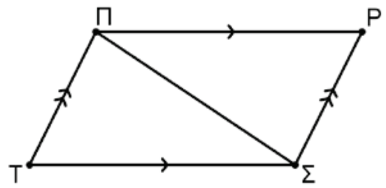


5. Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ είναι ίσα και να δικαιολογήσετε την απάντησής σας.

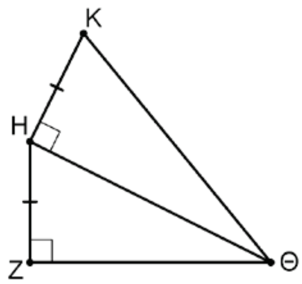


6. Από τα στοιχεία που δίνονται, να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω ζεύγη τριγώνων είναι ίσα. Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

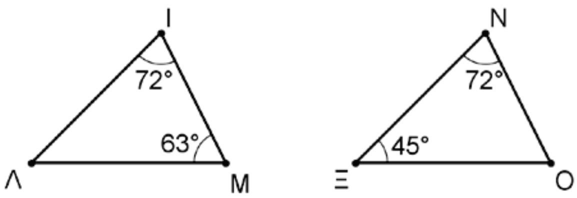
(α)



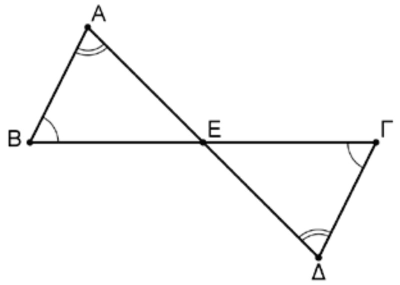
(β)



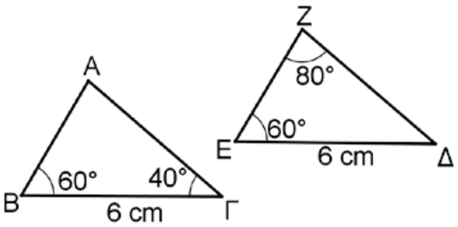
(γ)



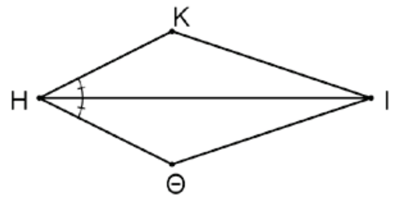
(δ)



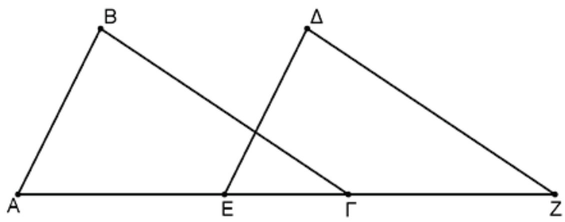
(ε)



(στ)

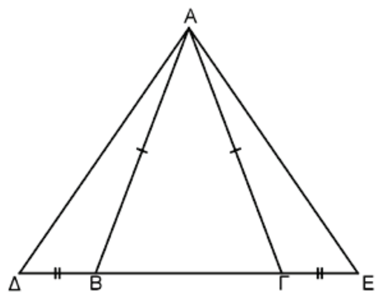


7. Στο σχήμα τα σημεία B, E, Γ και Z είναι συνευθειακά. Αν $AB = \Delta E$, $B\Gamma = \Delta Z$ και $AE = \Gamma Z$ να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.



8. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E, Z στις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma A$, αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = BE = \Gamma Z$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.

9. Στο σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο ($AB = A\Gamma$). Τα ευθύγραμμα τμήματα $B\Delta$, ΓE είναι προεκτάσεις της πλευράς $B\Gamma$ τέτοιες ώστε $B\Delta = \Gamma E$.
Να δείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.



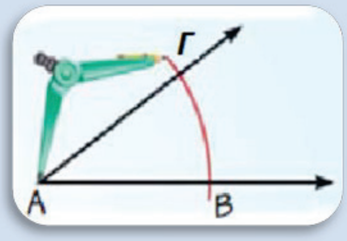
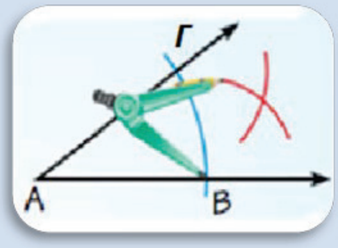
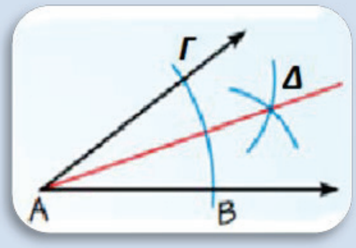
10. Να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι $ΒΜ$ και $ΓΝ$ ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ είναι ίσες.

11. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύει ότι:
    (α) Κάθε διαγώνιός του χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δυο ίσα τρίγωνα.
    (β) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
    (γ) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

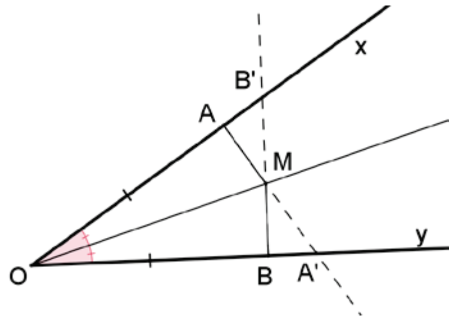
Η κατασκευή σχημάτων με "**κανόνα και διαβήτη**" είναι η μέθοδος στην οποία χρησιμοποιείται μόνο ο κανόνας (μη αριθμημένος χάρακας) και ο διαβήτης. Αυτή η μέθοδος κατασκευής χρονολογείται από τους αρχαίους Έλληνες.

12. Να κατασκευάσετε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων ένα τρίγωνο $ΔΕΖ$ που να είναι ίσο με το τρίγωνο που έχει κορυφές τα σημεία $Α(3,1), Β(8,1)$ και $Γ(8,8)$.

13. Πιο κάτω φαίνεται ένας τρόπος κατασκευής της διχοτόμου μίας γωνίας με κανόνα και διαβήτη. Να αποδείξετε την ορθότητα της κατασκευής.

Βήμα 1°	**Βήμα 2°**	**Βήμα 3°**
		
*Να κατασκευάσετε ένα τόξο με κέντρο την κορυφή της γωνίας **Α**. Ονομάστε **Γ** και **Β** τα σημεία που τέμνει το τόξο τις πλευρές της γωνιάς.*	*Να κατασκευάσετε ένα τόξο με κέντρο το Γ και ένα άλλο με την ίδια ακτίνα και κέντρο το Β.*	*Να ονομάσετε Δ το σημείο τομής των δυο τόξων και να φέρετε την ημιευθεία ΑΔ. Η ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΓΑΒ.*

14. Στο διπλανό σχήμα δίνεται γωνία $x\hat{O}y$. Στις πλευρές της Ox και Oy παίρνουμε σημεία A και B, αντίστοιχα, έτσι ώστε $OA = OB$.
    (α) Αν M είναι σημείο της διχοτόμου της $x\hat{O}y$, να δείξετε ότι $MA = MB$.
    (β) Αν οι ευθείες AM και MB τέμνουν τις πλευρές Oy και Ox στα A' και B' αντίστοιχα να δείξετε ότι $AA' = BB'$.

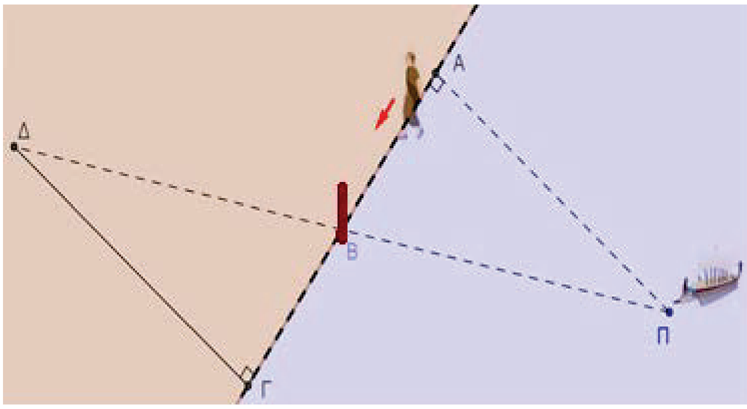


Κριτήρια Ισότητας Ορθογωνίων Τριγώνων

Εξερεύνηση

Ο Θαλής ο Μιλήσιος λέγεται ότι πριν από 2500 χρόνια χρησιμοποιήσε την πιο κάτω μέθοδο για να υπολογίσει τη θέση των εχθρικών πλοίων από την ακτή:

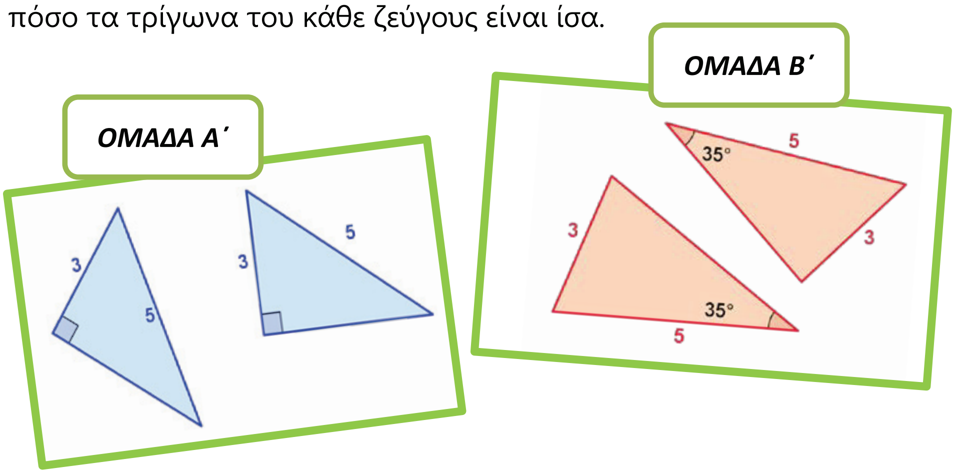
- Από το σημείο (A) της ακτής που βρίσκεται απέναντι από το πλοίο διανύουμε (κάθετα) κατά μήκος της ακτής μια τυχαία απόσταση (AB) όπου τοποθετούμε ένα ραβδί και στη προέκτασή της διανύουμε ίση απόσταση $(B\Gamma \text{ με } B\Gamma = AB)$.
- Στη συνέχεια περπατάμε (κάθετα) προς τη στεριά (ΔB) μέχρι ένα σημείο (Δ) από όπου μπορούμε να στοχεύσουμε μέσω του ραβδιού μας το πλοίο.
- Η απόστασή $(\Delta\Gamma)$ από την ακτή ισούται με τη ζητούμενη απόσταση του πλοίου από την ακτή $(A\Pi)$.



✓ Να εξηγήστε τη μέθοδο του Θαλή.

Διερεύνηση

Δίνονται τα δύο πιο κάτω ζεύγη τριγώνων. Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα του κάθε ζεύγους είναι ίσα.



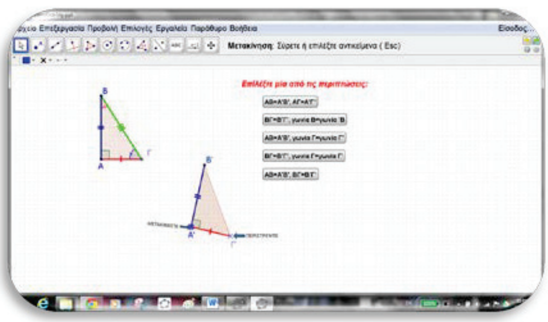
Η Νικολέττα υποστηρίζει ότι δεν μπορεί να γνωρίζει ούτε για το ένα ζεύγος ούτε και για το άλλο, αν είναι ίσα, αφού η γωνία δεν είναι περιεχόμενη των δύο ίσων πλευρών.
Ο Μιχάλης συμφωνεί με τη Νικολέττα ότι δεν μπορεί να ισχυριστεί ότι τα τρίγωνα της ομάδας B' είναι ίσα ενώ για τα τρίγωνα της ομάδας A' υποστηρίζει ότι τα στοιχεία που έχει είναι αρκετά για να αποδείξει ότι είναι ίσα.

✓ Να εξετάσετε τον ισχυρισμό των δύο παιδιών.

✓ Να εξετάσετε πώς διαφοροποιούνται τα κριτήρια της ισότητας στην περίπτωση των ορθογώνιων τριγώνων.

Να ανοίξετε το αρχείο «C_En4_KritirioOrthTrig.ggb», για να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Σε καθεμιά από τις περιπτώσεις που φαίνονται στα γαλάζια κουμπιά, κατασκευάζεται ορθογώνιο τρίγωνο $A'B'Γ'$, το οποίο έχει, επιπλέον της ορθής γωνίας, άλλα δύο κύρια στοιχεία ίσα με τα αντίστοιχα του $ΑΒΓ$.



✓ Να εξετάσετε αν μπορεί να συμπέσει το τρίγωνο $A'B'Γ'$ με το τρίγωνο $ΑΒΓ$, μετακινώντας και περιστρέφοντας το $A'B'Γ'$.

Μαθαίνω

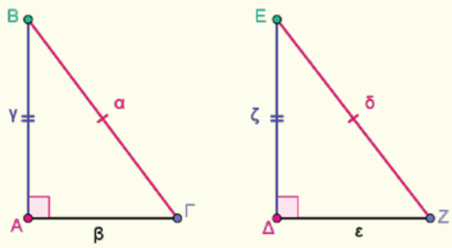
<u>Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων</u>
Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν ισχύει ένα από τα πιο κάτω:

- Έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία $(\Pi - \Pi - O)$.

Παράδειγμα:

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ, έχουν:

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{A}=\hat{\Delta}=90^\circ & (O)\\ AB=\Delta E & (\Pi)\\ B\Gamma = EZ & (\Pi)\end{array}\right\} \overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{\Delta EZ}$$

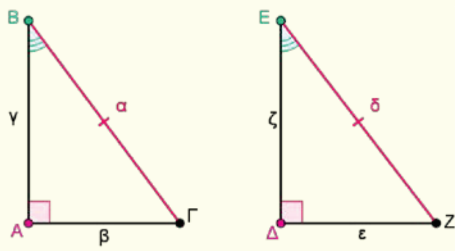


- Έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες $(\Pi - \Gamma - O)$.

Παραδείγμα:

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ, έχουν:

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{A}=\hat{\Delta}=90^\circ & (O)\\ \hat{B}=\hat{E} & (\Gamma)\\ B\Gamma = EZ & (\Pi)\end{array}\right\} \overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{\Delta EZ}$$



Γενικά

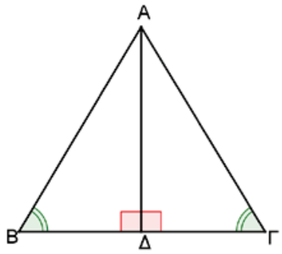
Δύο **ορθογώνια τρίγωνα** είναι ίσα, όταν εκτός από την ορθή γωνία τους, έχουν και άλλα **δύο αντίστοιχα στοιχεία** τους ίσα, από τα οποία το ένα είναι οπωσδήποτε πλευρά.

- **Κριτήρια ισοσκελών τριγώνων.**

  Αν ισχύει μία από τις πιο κάτω συνθήκες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

  - Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.
  - Αν δύο από τα δευτερεύοντα στοιχεία (ύψος, διάμεσος, διχοτόμος), που αντιστοιχούν στην ίδια πλευρά (βάση), ταυτίζονται.

Απόδειξη (α):
Στο **τρίγωνο $\boldsymbol{AB\Gamma}$ με $\boldsymbol{\widehat{B} = \widehat{\Gamma}}$,** κατασκευάζουμε το ύψος $A\Delta$.



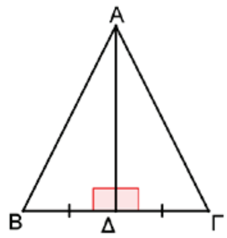
Συγκρίνουμε τα **ορθογώνια** τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ τα οποία έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{\Gamma} \;\; (\Delta\varepsilon\delta o\mu\acute{\varepsilon}\nu o)\; (\Gamma) \\ \mathrm{A\Delta} = A\Delta \;\; (Κοινή\ πλευρά)\;\; (\Pi) \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{\Delta}B = A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$$

Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία ($\Pi - \Gamma - O$).

Από την ισότητα των τριγώνων ($A\overset{\triangle}{\Delta}B = A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$) έχουμε ότι τα αντίστοιχα στοιχεία των τριγώνων είναι ίσα. Άρα:
$AB = \mathrm{A\Gamma}$ $\Leftrightarrow$ **το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές**.

Απόδειξη (β): ***Αν $\boldsymbol{A\Delta}$ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου $\boldsymbol{AB\Gamma}$, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.***



Κατασκευάζουμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με **ΑΔ να είναι ύψος και διάμεσος.**
Συγκρίνουμε τα **ορθογώνια** τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ τα οποία έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{B\Delta} = \mathrm{\Delta\Gamma} \;\; (A\Delta\ διάμεσος)\;\; (\Pi) \\ \mathrm{A\Delta} = A\Delta \;\; (Κοινή\ πλευρά)\;\; (\Pi) \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{\Delta}B = A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$$

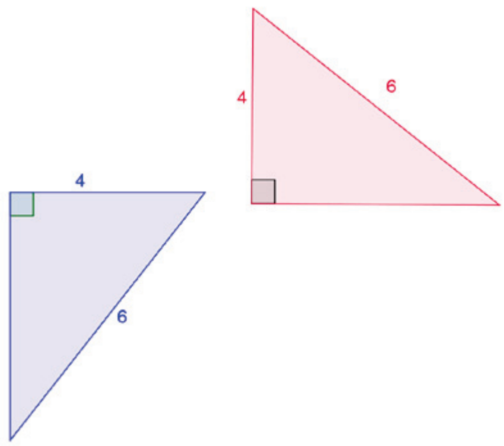
Άρα, τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές αντίστοιχα ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες σε αυτές αντίστοιχα ίσες ($\Pi - O - \Pi$).

Από την ισότητα των τριγώνων ($\mathrm{A}\overset{\triangle}{\Delta}\mathrm{B} = \mathrm{A}\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$) έχουμε ότι τα αντίστοιχα στοιχεία των τριγώνων είναι ίσα. Άρα, $AB = A\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $\boldsymbol{AB\Gamma}$ **είναι ισοσκελές**.

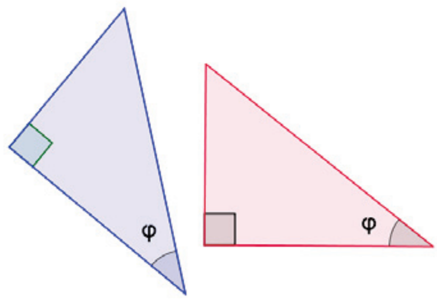
Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω ζεύγη τριγώνων είναι ίσα:

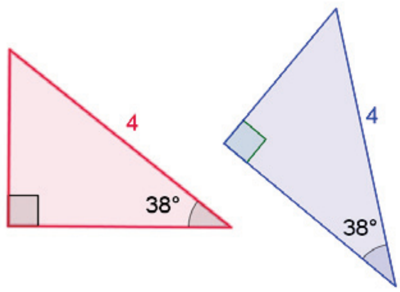
(α)



(β)



(γ)



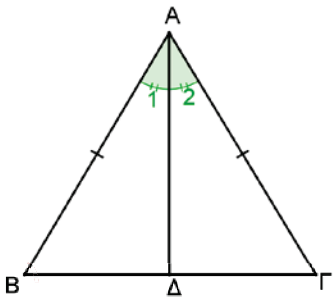
Λύση:

(α) *Τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, γιατί μια κάθετη πλευρά και η υποτείνουσα του ενός τριγώνου είναι αντίστοιχα ίσες με μια κάθετη πλευρά και την υποτείνουσα του άλλου τριγώνου* $(\Pi - \Pi - O)$.

(β) *Με βάση τα δεδομένα δίνονται μόνο ίσες γωνίες. Τα δεδομένα δεν είναι επαρκή για να αποδείξουμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα.*

(γ) *Τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, γιατί η υποτείνουσα και η μία οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι αντίστοιχα ίσες με την υποτείνουσα και την αντίστοιχη οξεία γωνία του άλλου τριγώνου* $(\Pi - \Gamma - O)$.

2. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ισχύει:
   (α) Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.
   (β) Η διχοτόμος της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.



Λύση:

(α) *Στο* ***ισοσκελές τρίγωνο*** $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$, *κατασκευάζουμε τη* ***διχοτόμο ΑΔ.***

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΔΓ$ τα οποία έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ$ $(Δεδομένο)$ $(Π)$
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ *($ΑΔ$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$)* $(Γ)$
- $ΑΔ = ΑΔ$ *(Κοινή πλευρά)* $(Π)$

$\Rightarrow \overset{\triangle}{ΑΔΒ} = \overset{\triangle}{ΑΔΓ}$

Άρα, τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΔΓ$ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές αντίστοιχα ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες σε αυτές αντίστοιχα ίσες ($Π - Γ - Π$).

Άρα, $\hat{B} = \hat{Γ}$.

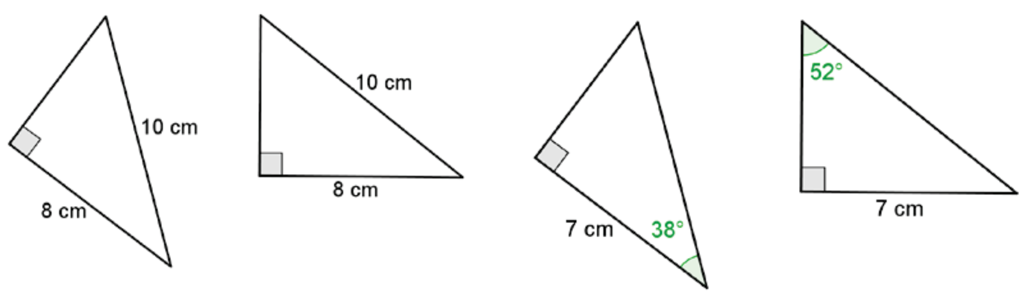
(β) *Από την ισότητα των τριγώνων ($\overset{\triangle}{ΑΔΒ} = \overset{\triangle}{ΑΔΓ}$) έχουμε ότι τα αντίστοιχα στοιχεία των τριγώνων είναι ίσα. Άρα, $ΒΔ = ΔΓ$ και $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$.*

Αφού $ΒΔ = ΔΓ$, τότε ***ΑΔ είναι διάμεσος.***

Επειδή $\hat{Δ}_1 + \hat{Δ}_2 = 180^o$ και $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$ τότε $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2 = 90^o$ και επομένως το τμήμα ***ΑΔ είναι ύψος*** *του τριγώνου.*

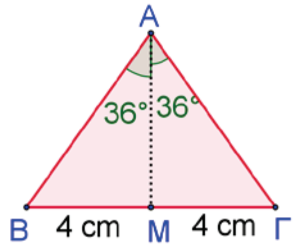
Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω τρίγωνα είναι ίσα.
   (α) (β)

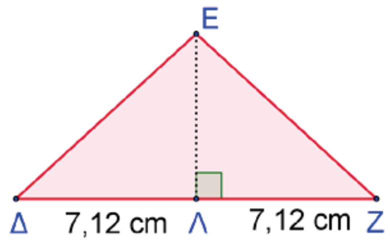


2. Να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω τρίγωνα είναι ισοσκελή, με βάση τις $ΒΓ, ΔΖ, Ζθ$ και $ΚΜ$ αντίστοιχα:

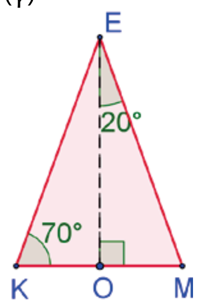
(α)



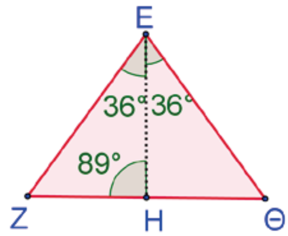
(β)



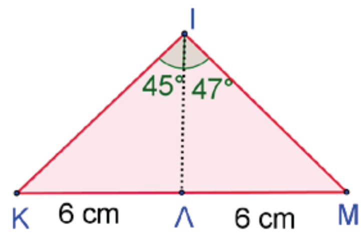
(γ)



(δ)

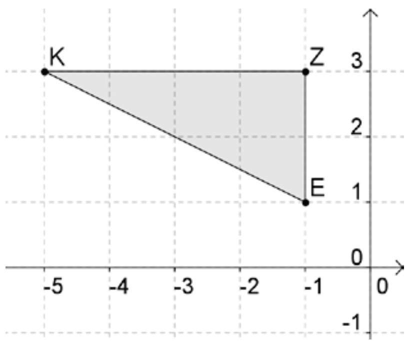


(ε)

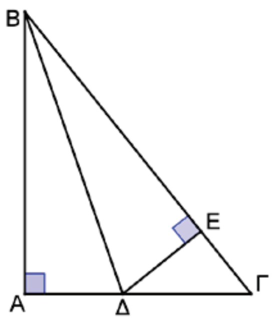


3. Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ είναι ίσοσκελή, αν οι κορυφές τους έχουν συντεταγμένες:
   (α) $A(-4{,}3)$, $B(4{,}3)$, $Γ(0{,}0)$
   (β) $Δ(-3{,}3)$, $E(-2,-2)$, $Z(2,2)$

4. Ποια από τις πιο κάτω τριάδες σημείων είναι οι συντεταγμένες των κορυφών ενός τριγώνου που είναι ίσο με το $ΕΖΚ$.
   Α. $(-1{,}1), (1{,}5)$ και $(-4{,}5)$.
   Β. $(-2{,}4), (-7{,}4)$ και $(-4{,}6)$.
   Γ. $(-3{,}2), (-1{,}3)$ και $(-3{,}1)$.
   Δ. $(-7{,}7), (-7{,}9)$ και $(-3{,}7)$.



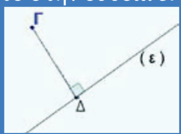
5. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο $(\hat{A} = 90°)$, $\hat{E} = 90°$ και $ΑΒ = ΒΕ$. Να δείξετε ότι η $ΒΔ$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $ΑΒΓ$.



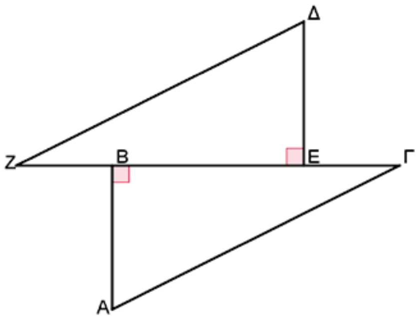
6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$). Να δείξετε ότι:
   (α) οι διχοτόμοι $ΒΔ$, $ΓΕ$ είναι ίσες.
   (β) τα ύψη του $ΒΖ$, $ΓΗ$ είναι ίσα.

7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$). Αν $Μ$ είναι τυχαίο σημείο του ύψους $ΑΔ$, να αποδείξετε ότι:
   (α) τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΔΓ$ είναι ίσα,
   (β) το $Μ$ ισαπέχει από τις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$.

Η **απόσταση σημείου από ευθεία** είναι ίση με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ξεκινά από το σημείο και είναι κάθετο στην ευθεία.
Παράδειγμα:
Η **απόσταση του σημείου $Γ$ από την ευθεία $ε$** είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $ΓΔ$ που είναι κάθετο στην ευθεία $ε$.



8. Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ είναι ορθογώνια ($\hat{Α} = 90°$, $\hat{Ε} = 90°$). Αν $ΖΒ = ΕΓ$ και $ΔΖ = ΑΓ$, να αποδείξετε ότι σημεία $Δ$ και $Α$ ισαπέχουν από το ευθύγραμμο τμήμα $ΖΓ$ (τα σημεία $Β$ και $Ε$ βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $ΖΓ$).



9. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) το σημείο $Μ$ είναι το μέσο της $ΒΓ$. Να δείξετε ότι το σημείο $Μ$ ισαπέχει από τις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$.

10. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι ενός ρόμβου τέμνονται κάθετα.

11. Να δείξετε ότι οι διαγώνιοι του ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι ίσες.

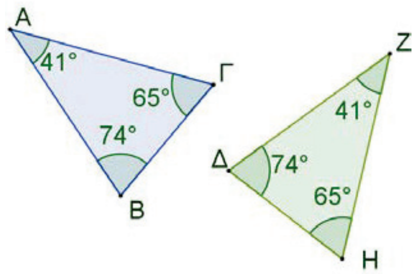
12. Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

13. Να αποδείξετε ότι το ύψος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι και διχοτόμος και διάμεσος.

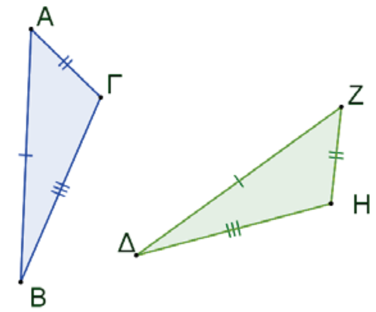
Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να εξετάσετε, σε κάθε περίπτωση, κατά πόσο τα πιο κάτω ζεύγη τρίγωνων είναι ίσα. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

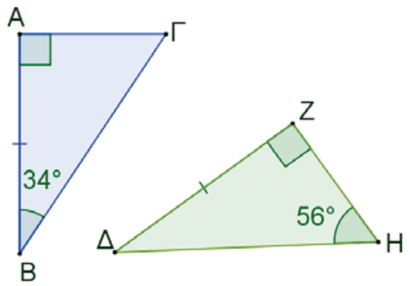
(α)



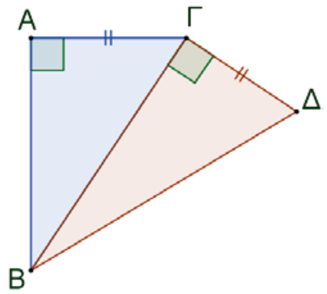
(β)



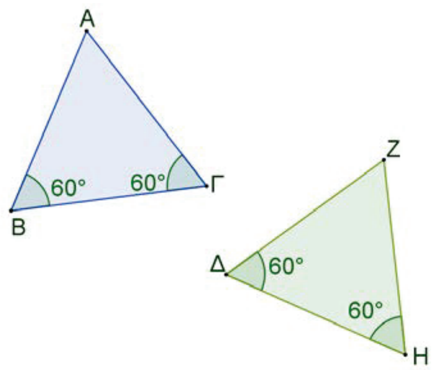
(γ)



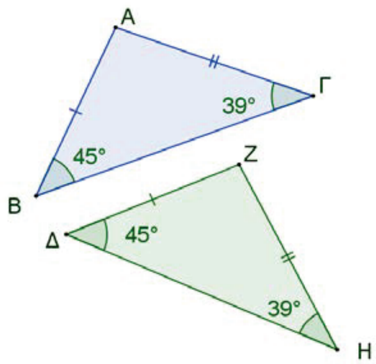
(δ)



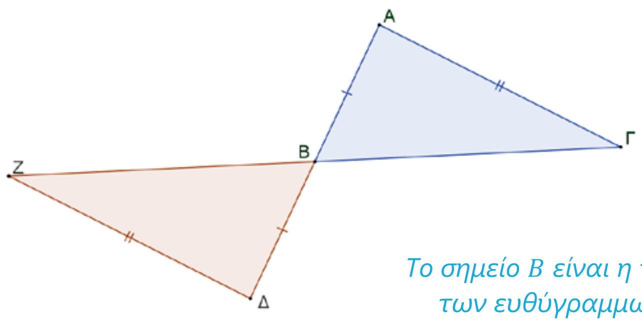
(ε)



(στ)

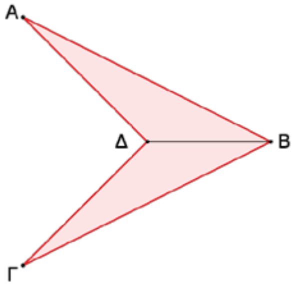


(ζ)



Το σημείο Β είναι η τομή των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΔ και ΖΓ.

2. Να εξετάσετε κατά πόσο είναι δυνατόν να κατασκευαστεί τρίγωνο με μήκη πλευρών $9\ m, 4\ m$ και $6\ m$.

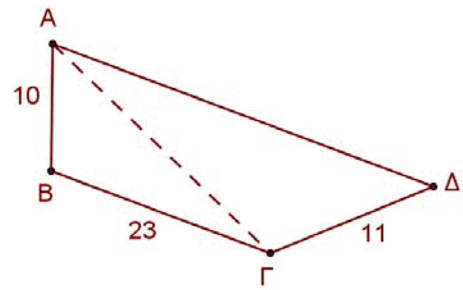


3. Στο σχήμα φαίνεται η κάτοψη ενός χαρταετού. Αν $AB = B\Gamma$ και το ευθύγραμμο τμήμα $B\Delta$ διχοτομεί τη γωνία B, να δείξετε ότι:
(α) $\Delta\hat{A}B = \Delta\hat{\Gamma}B$,
(β) $A\Delta\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο.

4. Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι φυσικοί αριθμοί. Να βρείτε το μήκος της μεγαλύτερης πλευράς που μπορεί να έχει ένα τρίγωνο με περίμετρο:
(α) $15\ cm$
(β) $100\ cm$

5. Να δείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν από τη βάση.

6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 10$, $B\Gamma = 23$, και $\Gamma\Delta = 11$. Ποιες είναι οι πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει το μήκος:
(α) του $A\Gamma$ και
(β) του $A\Delta$.



7. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ, $\widehat{\mathrm{B}} = 60^{\mathrm{o}}$ και $\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

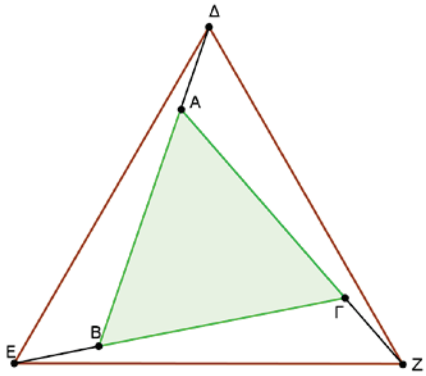
8. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ προεκτείνουμε τις πλευρές AB και $A\Gamma$ κατά τμήματα $B\Delta = \frac{AB}{3}$ και $\Gamma E = \frac{A\Gamma}{3}$, αντίστοιχα. Να εξετάσετε το είδος του τριγώνου ΑΔΕ.

9. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές.

10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημεία E, Z, έτσι ώστε $\mathrm{BE} = \mathrm{\Gamma Z}$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

11. Τα σημεία A και B απέχουν το ίδιο από μια ευθεία ε. Αν η ε τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα AB στο M, να δείξετε ότι το M είναι το μέσο του AB.

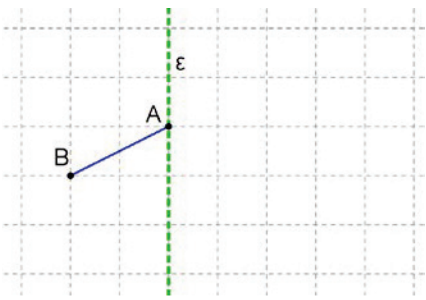
12. Στο σχήμα το $ΑΒΓ$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο και $ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΔΕΖ$ είναι ισόπλευρο.

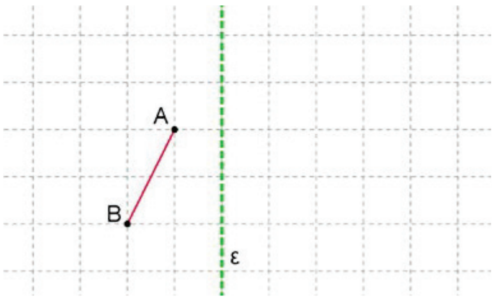


13. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του τετραγώνου διχοτομούνται, διχοτομούν τις γωνίες του και τέμνονται κάθετα.

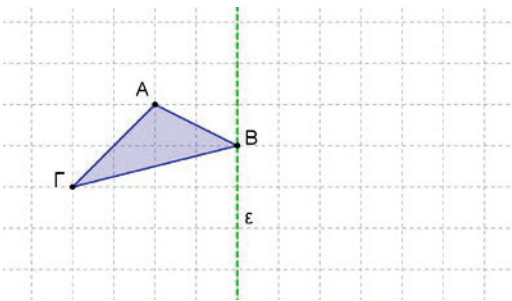
14. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ ($AB \parallel ΓΔ$). Να αποδείξετε ότι:
(α) οι παρά τις βάσεις γωνίες είναι ανά δύο αντίστοιχα ίσες ($\hat{A} = \hat{B}$ και $\hat{Γ} = \hat{Δ}$).
(β) οι διαγώνιοι είναι ίσες ($ΑΓ = ΒΔ$).

15. (α) Να κατασκευάσετε το συμμετρικό των πιο κάτω ευθύγραμμων τμημάτων AB ως προς την ευθεία ε.





(β) Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό ευθύγραμμο τμήμα είναι ίσο με το αρχικό για καθεμιά από τις πιο πάνω περιπτώσεις.
(γ) Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του τριγώνου $ΑΒΓ$ ως προς την ευθεία ε είναι ένα ίσο τρίγωνο με το αρχικό.



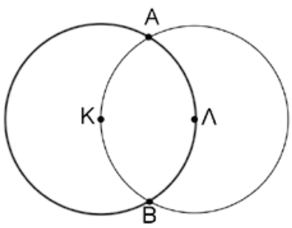
Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Σε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ παίρνουμε σημεία $Δ, Ε$ στις προεκτάσεις των πλευρών $ΒΑ$, $ΓΑ$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $ΑΔ = ΑΕ$. Να δείξετε ότι:
   (α) $ΒΕ = ΓΔ$
   (β) Αν $Μ$ είναι το μέσο της $ΒΓ$ να δείξετε ότι $ΜΔ = Μ$Ε.

2. Να αποδείξετε ότι σε κάθε κυρτό τετράπλευρο, το άθροισμα τριών οποιωνδήποτε πλευρών του είναι μεγαλύτερο από την τέταρτη πλευρά του.

3. Αν $Κ$ ένα σημείο εντός του τριγώνου $ΑΒΓ$, να αποδείξετε ότι $ΚΑ + ΚΓ < ΑΒ + ΑΓ$.

4. Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο και ακολούθως να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη ένα άλλο τρίγωνο έτσι ώστε τα δύο τρίγωνα να είναι ίσα. Να δικαιολογήσετε γιατί τα δυο τρίγωνα που κατασκευάσατε είναι ίσα.
   Να συζητήσετε με τους/τις συμμαθητές/τριές σας διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους θα μπορούσατε να κάνετε την πιο πάνω δραστηριότητα.



5. Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι με κέντρα $Κ$ και $Λ$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΒ$ και $ΚΑ$ είναι κάθετα.

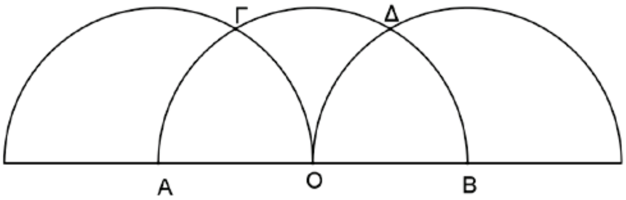
6. Αν δύο τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ έχουν $ΑΓ = ΔΖ, ΑΒ = ΔΕ$ και $\hat{Γ} = \hat{Ζ}$, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{Β}$ και $\hat{Ε}$ είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

7. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι κατασκεύαζαν τρίγωνα χρησιμοποιώντας ένα σχοινί με 13 κόμβους (αρπενδόνη). Κάρφωναν τρία καρφιά σε τρεις κόμβους, που αποτελούσαν τις κορυφές του τριγώνου, ώστε το σχοινί να είναι τεντωμένο και να χρησιμοποιηθεί ολόκληρο. Να εξετάσετε πόσα διαφορετικά τρίγωνα μπορούν να κατασκευαστούν με το συγκεκριμένο σχοινί.

8. Στις πλευρές Ox και Oy μίας γωνίας xOy παίρνουμε τα σημεία A, B και Γ, Δ αντίστοιχα, ώστε $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$. Αν M σημείο της διχοτόμου της γωνίας xOy, να αποδείξετε ότι:
   (α) $MB = M\Delta$,
   (β) οι γωνίες $A\widehat{M}B$ και $\Gamma\widehat{M}\Delta$ είναι ίσες.
   (γ) αν Δ είναι τυχαίο σημείο της πλευράς B, να δείξετε ότι

$$A\Delta > \frac{AB+A\Gamma-B\Gamma}{2}.$$

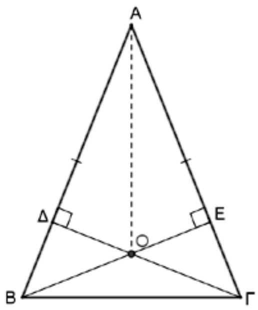
9. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο O και διάμετρο $AB = 2R$. Με κέντρα τα A και B και ακτίνα R γράφουμε ακόμα δύο ημικύκλια όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $A\hat{O}\Gamma$ και $B\hat{O}\Delta$ είναι ίσες.



10. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ προεκτείνουμε τη $B\Gamma$ προς το μέρος του B και του Γ κατά τμήμα $BZ = \Gamma H$ (Z και H σημεία της προέκτασης του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$, προς το B και Γ αντίστοιχα). Φέρουμε κάθετα ευθύγραμμα τμήματα $H\Delta$ και ZE στις ίσες πλευρές του τριγώνου AB και $A\Gamma$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta H = EZ$.

Υπόδειξη για το (α):
Να φέρετε τα ύψη AH και BK.

11. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο O (Ορθόκεντρο). Να δείξετε ότι η AO είναι διχοτόμος της γωνίας $BA\Gamma$.

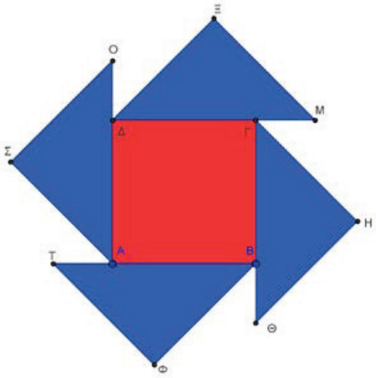


12. Ο Abu al-Wafa ήταν ένας Πέρσης μαθηματικός που μεταξύ άλλων ασχολήθηκε με τη διαίρεση γεωμετρικών σχημάτων σε αλλά απλούστερα, με σκοπό την ανασύνθεσή τους σε ένα νέο γεωμετρικό σχήμα. Μία τέτοια κατασκευή είναι η ακόλουθη:

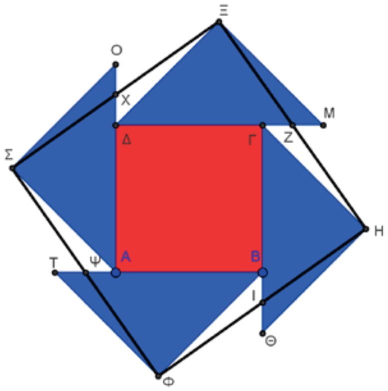
«Να διαιρέσετε τρία ίσα τετράγωνα σε κατάλληλα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα, έτσι ώστε αναδιατάσσοντάς τα (χωρίς να περισσέψει κανένα) να σχηματίσετε ένα τετράγωνο».

Ο Abu al-Wafa (940 – 998 μΧ.) ήταν ένας Πέρσης μαθηματικός και αστρονόμος που εργάστηκε στη Βαγδάτη. Έκανε σημαντικές καινοτομίες όπως το έργο του σχετικά με αριθμητική για τους επιχειρηματίες. Από αυτόν γίνεται για πρώτη φορά η χρήση των αρνητικών αριθμών σε ένα μεσαιωνικό ισλαμικό κείμενο.

- *Κατασκευάζουμε τρία ίσα τετράγωνα, δυο με μπλε και ένα με κόκκινο χρώμα. Χωρίζουμε τα δυο μπλε τετράγωνα σε ίσα τρίγωνα, φέρνοντας διαγωνίους.*



- *Τοποθετούμε το κόκκινο τετράγωνο και περιμετρικά γύρω του τα τέσσερα τρίγωνα (μπλε).*



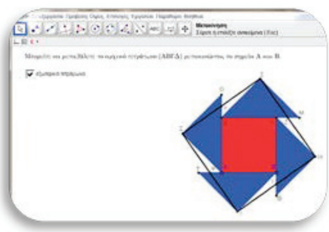
- *Ενώνουμε τις κορυφές Ξ, Η, Φ, Σ (όπως βλέπουμε στο σχήμα) και "κόβουμε" τα μικρά τρίγωνα που περισσεύουν, τα τοποθετούμε στα κενά (δείτε τα αντίστοιχα χρώματα) και έχουμε σχηματίσει ένα τετράγωνο.*

(α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα που είναι έξω από το τετράπλευρο $ΞΗΦΣ$ είναι ίσα με αυτά που σχηματίζονται από τον κενό χώρο (άσπρο) μέσα στο τετράπλευρο $ΞΗΦΣ$.

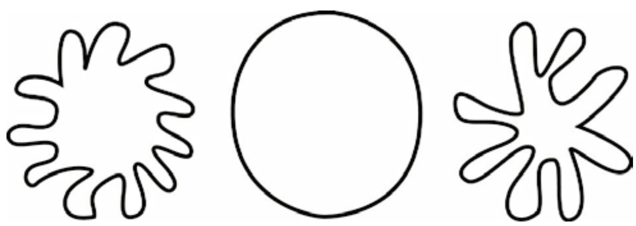
(β) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $ΞΗΦΣ$ είναι τετράγωνο.

Μπορείτε να δείτε την κατασκευή στο αρχείο:

"C_En4_Emploutismos_AbualWafa.ggb"



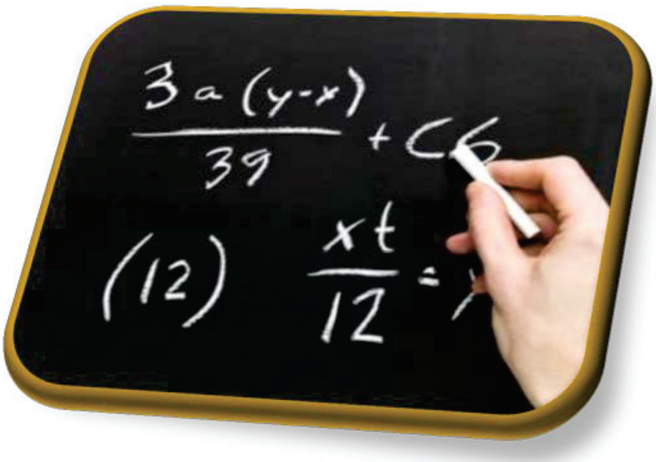
13. Ποιο από τα σχήματα έχει τη μεγαλύτερη επιφάνεια;
    (α) Να περιγράψετε μια μέθοδο προσδιορισμού του εμβαδού για το τρίτο σχήμα.
    (β) Να περιγράψετε έναν τρόπο που να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε κατά προσέγγιση την περίμετρο του τρίτου σχήματος.



PISA 2003

Απαντήσεις Δραστηριοτήτων

Α΄ τεύχους



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ: Επανάληψη από την Α΄– Β΄ Γυμνασίου

						Σελίδα 9
Δραστηριότητα	Απαντήσεις					
1.	(α)	6	(β)	-5	(γ)	1
	(δ)	0	(ε)	-4	(στ)	2
	(ζ)	17	(η)	-17	(θ)	-3
	(ι)	-5				
2.	(α)	Ρητοί: $\frac{3}{5}$, $\sqrt[3]{8}, -\frac{1}{3}$, $\sqrt{9}, -2$ Άρρητοι: $\sqrt{21}$, π , $\sqrt[3]{9}$				
3.	(α)	6	(β)	$\frac{2}{3}$	(γ)	1
	(δ)	36				
4.	(α)	6α	(β)	$-5x$	(γ)	$-5xy$
	(δ)	$20x^3$	(ε)	$4x^4$	(στ)	$-12\alpha^3\beta^7$
	(ζ)	$-6x^4$	(η)	3ω	(θ)	$7\alpha^4$
	(ι)	$12\alpha^4\beta^3$				
5.	(α)	$6x^2 + 10x$	(β)	$-6y^3 + 3y^2$		
	(γ)	$\alpha^2 - 4$	(δ)	$2\alpha^2 + 7\alpha + 6$		
	(ε)	$8x^3 - 4x^2 - 10x + 5$	(στ)	$\alpha^2 - \alpha\gamma - \beta^2 - \beta\gamma$		
	(ζ)	$3x^2 - 17x + 2$	(η)	$3a^2 - 3\alpha\beta - 6\beta^2$		
	(θ)	$-6y^3 + 9y^2 + y - 2$	(ι)	$-6\alpha^2 - 6\alpha + 3$		
6.	(α)	$x - y + 5$	(β)	8	(γ)	20
7.	(α)	$0 < x < 10$	(β)	$4x^3 - 80x^2 + 400x$	(γ)	$576\ cm^3$
8.	(α)	$4a - 5$	(β)	$-3y^5 + 2y^3$	(γ)	$-3x^2 + 8\omega^4$
	(δ)	$\frac{x^3y^4}{2} - 2x^2y + 1$	(ε)	$a + 1$	(στ)	$x + 3$
	(ζ)	$\pi = 5x + 1$ και $\upsilon = 3$				
9.	(α)	$5x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 13$	(β)	$3x^4 - x^3 + 3x^2 - x$		
10.	(α)	16 (β) -11			(γ)	$4x^2 - 5$
	(δ)	11				
11.	(α)	$x = -2$ (β) Αόριστη			(γ)	$x = -\frac{1}{2}$
	(δ)	Αδύνατη (ε) $x = 5$			(στ)	$\omega = 0$
12.		$E = 130\ cm^2$				
13.	(α)	$x = 1\ , y = 2$ (β) $x = 1,\ y = 1$				

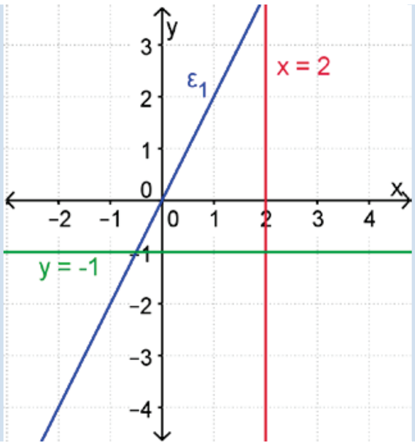
14.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	Παραλληλόγραμμο	Ορθογώνιο	Τετράγωνο	Ρόμβος
Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.	✓	✓	✓	✓
Οι διαγώνιοι είναι ίσες.		✓	✓	
Οι πλευρές είναι ίσες.			✓	✓
Οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα.			✓	✓
Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.	✓	✓	✓	✓
Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.	✓	✓	✓	✓
Οι γωνίες του είναι 90°.		✓	✓	
Δυο διαδοχικές γωνίες είναι παραπληρωματικές.	✓	✓	✓	✓
Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.	✓	✓	✓	✓
Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του.			✓	✓

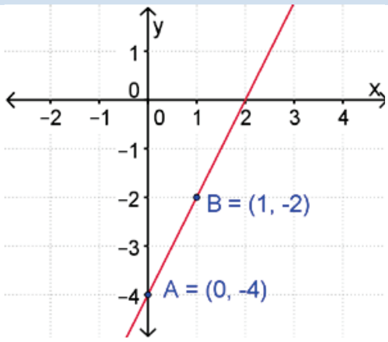
15. (α) $x = z = 119, \quad y = 61$ (β) $x = 90, \quad y = 37, \quad z = 53$

16. (α) $E_{ΑΒΓΔ} = 4 \cdot E_{ΚΛΜΝ}$ (β) $Π_{ΑΒΓΔ} = 2 \cdot Π_{ΚΛΜΝ}$

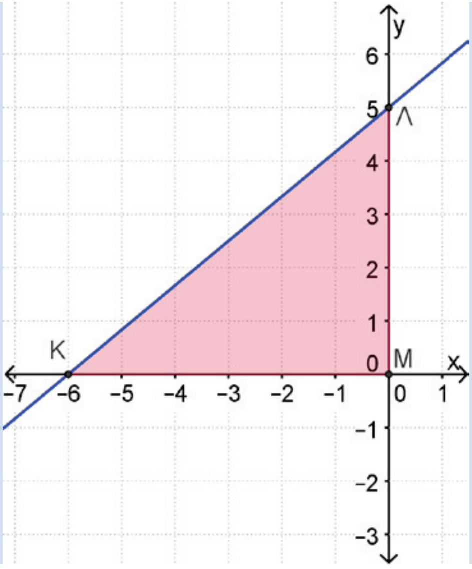
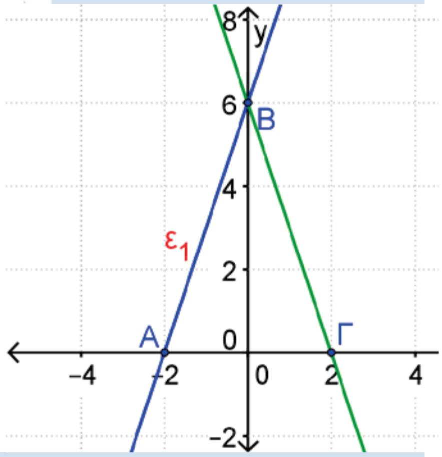
17. (α) $(-2, -4)$ ανήκει (β) $(0,0)$ (γ)



18. (α) $α = 2\,,$ $β = -4$ (β)



(γ) $λ = 2$

19.	(α)	$K(-6,0)$ $\Lambda(0,5)$	(β)		(γ)	$E = 15\ \tau.\mu.$
20.	(α)	$\lambda = 3$	(β)	$y = 3x + 6$	(γ)	
	(δ)	Ισοσκελές				
21.	(α)	14,3	(β)	14,5	(γ)	50%
22.	(α)	2	(β)	2	(γ)	1
23.	(α)	$P(A) = \frac{5}{18}$	(β)	$P(B) = \frac{1}{36}$	(γ)	$P(\Gamma) = \frac{27}{36}$
	(δ)	$P(\Delta) = \frac{11}{36}$	(ε)	$P(E) = \frac{5}{6}$		

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Διανύσματα

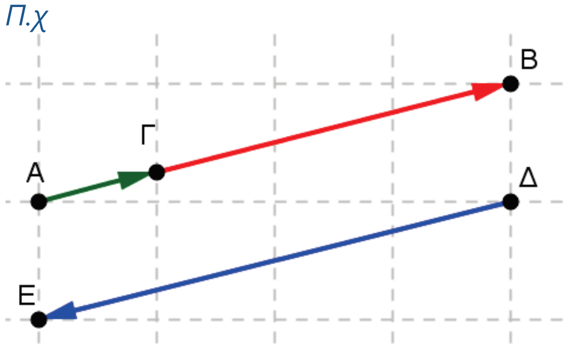
Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ				*Σελίδα 23*
Δραστηριότητα	Απαντήσεις			
1.		*Το β και το ζ.*		
2.	(α)	$\vec{\lambda}, \vec{\eta}, \overrightarrow{\theta}$ *και* $\vec{\kappa}$.	(β)	$\vec{\eta}$ *και* $\vec{\lambda}$.

3.	(α)	$\overrightarrow{\Delta E}=1$, $\overrightarrow{\Delta Z}=2$, $\overrightarrow{\Delta \Theta}=4$, $\overrightarrow{BA}=1$, $\overrightarrow{B\Gamma}=1$, $\overrightarrow{B\Delta}=2$, $\overrightarrow{BZ}=4$, $\overrightarrow{K\Theta}=2$, $\overrightarrow{NI}=4$		
		Ίσα: $\overrightarrow{\Delta E}=\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{\Delta Z}$ $και$ $\overrightarrow{BZ}=\overrightarrow{\Delta\Theta}$		
	(β)	Αντίθετα: $\overrightarrow{\Delta Z}=-\overrightarrow{K\Theta}$, $\overrightarrow{B\Delta}=-\overrightarrow{K\Theta}$ $\overrightarrow{\Delta E}=-\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{B\Gamma}=-\overrightarrow{BA}$ $\overrightarrow{BZ}=-\overrightarrow{NI}$, $\overrightarrow{\Delta\Theta}=-\overrightarrow{NI}$		
	(γ)	Π.χ. $\overrightarrow{NH}$		
4.	(α)	ΣΩΣΤΟ	(β)	ΣΩΣΤΟ
	(γ)	ΛΑΘΟΣ	(δ)	ΛΑΘΟΣ
	(ε)	ΛΑΘΟΣ		
8.	(α)	Π.χ. $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{O\Delta}$	(β)	Π.χ. $\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{O\Gamma}$
	(γ)	Π.χ. $\overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{ZE} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$	(δ)	Π.χ. $\overrightarrow{B\Gamma},\overrightarrow{A\Delta}$
	(ε)	Π.χ. $\overrightarrow{Z\Gamma},\overrightarrow{EB}$		

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ *Σελίδα 30*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) ΛΑΘΟΣ	(β) ΣΩΣΤΟ	(γ) ΣΩΣΤΟ
	(δ) ΛΑΘΟΣ	(ε) ΣΩΣΤΟ	
3.	(α) $\overrightarrow{P\Sigma}=\vec{x}$	(β) $\overrightarrow{\Phi\Lambda}=\vec{y}$	(γ) $\overrightarrow{\Pi M}=\vec{x}+\vec{y}$
	(δ) $\overrightarrow{H\Delta}=2\vec{x}+2\vec{y}$	(ε) $\overrightarrow{K\Theta}=-2\vec{x}$	(στ) $\overrightarrow{\Gamma N}=-4\vec{y}$
	(ζ) $\overrightarrow{KN}=-2\vec{x}-2\vec{y}$	(η) $\overrightarrow{Y\Theta}=4\vec{y}-2\vec{x}$	
4.	(α) $\vec{x}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$	(β) $\vec{x}=\vec{\gamma}-\vec{\alpha}+\vec{\beta}$	
	(γ) $\vec{x}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}=-\vec{\alpha}+\vec{\delta}$		
5.	(α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{AB}$	(β) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}=2\,\overrightarrow{\Gamma A}$	
	(γ) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma B}$	(δ) $\overrightarrow{\Gamma A}-\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{BA}$	
7.	(α) $\overrightarrow{BA}=-\vec{\beta}$	(β) $\overrightarrow{Z\Gamma}==2\vec{\beta}$	(γ) $\overrightarrow{H\Delta}=\vec{\alpha}$
	(δ) $\overrightarrow{EH}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$	(ε) $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$	(στ) $\overrightarrow{BE}=-2\overrightarrow{EH}$
	(ζ) $\overrightarrow{Z\Delta}=2\vec{\beta}$	(η) $\overrightarrow{\Gamma A}=-\vec{\alpha}-\vec{\beta}$	

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ	*Σελίδα 33*
Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) Μονόμετρο (β) Μονόμετρο (γ) Μονόμετρο (δ) Διανυσματικό (ε) Διανυσματικό (στ) Μονόμετρο
2.	(α) $22\ cm$ και $3\sqrt{2}\ cm$
5.	(α) $\lvert\vec{\alpha}\rvert = \sqrt{5}$, $\lvert\vec{\beta}\rvert = \sqrt{8}$, $\lvert\vec{\gamma}\rvert = \sqrt{10}$
7.	(α) $\lvert\overrightarrow{M\Lambda}\rvert = 5$
8.	$\overrightarrow{A\Delta} = 2\vec{\beta}$ $\overrightarrow{\Gamma M} = -\vec{\alpha}$ $\overrightarrow{NM} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ $\overrightarrow{M\Lambda} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ	*Σελίδα 36*
Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	*Π.χ*  $\lvert\overrightarrow{A\Gamma}\rvert + \lvert\overrightarrow{\Gamma B}\rvert + \lvert\overrightarrow{\Delta E}\rvert$=0
2.	(α) $\overrightarrow{AE} = \frac{\vec{\beta}}{3}$, $\overrightarrow{EB} = \frac{3\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{3}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \frac{2(4\vec{\beta}-3\vec{\alpha})}{15}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ $(\boldsymbol{\alpha} \pm \boldsymbol{\beta})^2$ *Σελίδα 46*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	Δεν είναι Ταυτότητα	(β)	Είναι Ταυτότητα
	(γ)	Είναι Ταυτότητα	(δ)	Δεν είναι Ταυτότητα
	(ε)	Δεν είναι Ταυτότητα	(στ)	Δεν είναι Ταυτότητα
2.	(α)	$\alpha^2 + 2\alpha + 1$	(β)	$y^2 - 6y + 9$
	(γ)	$\mu^2 - 14\mu + 49$	(δ)	$x^2 + 12x + 36$
	(ε)	$16\kappa^2 - 8\kappa + 1$	(στ)	$9x^2 + 12x + 4$
	(ζ)	$25x^2 - 10x\psi^2 + \psi^4$	(η)	$10\sqrt{2} + 27$
	(θ)	$y^6 + 4\,\omega^2\,y^3 + 4\,\omega^4$	(ι)	$\frac{x^2}{16} - \frac{3\,x}{2} + 9$
	(ια)	$y^2 + 2 + \frac{1}{y^2}$	(ιβ)	$\frac{x^2 - 6\,x + 9}{25}$
3.	(α)	$x^2 - 4x + 4$	(β)	$x^2 - 8x + 16$
	(γ)	$x^2 - 10x + 25$	(δ)	$ΟΡΘΗ$
4.	(α)	$2\kappa^2 + 2$	(β)	$6x^2 + 1$
	(γ)	$16\alpha + 8$	(δ)	$5\beta^2 - 14\beta + 10$
5.	(α)	$(y + \boxed{2})^2 = y^2 + 4x + 4$	(β)	$(x + \boxed{3})^2 = 9 + 6x + x^2$
	(γ)	$(\boxed{5} + \boxed{x})^2 = 25 + x^2 + 10x$	(δ)	$(\boxed{2y} - \boxed{5})^2 = -20y + 4y^2 + 25$
	(ε)	$(5 - \boxed{4\beta})^2 = \boxed{25} + 16\beta^2 - 40\beta$	(στ)	$(\boxed{y^3} + \boxed{x^2})^2 = y^6 + x^4 + \boxed{2y^3x^2}$
6.		$x^2 - 4x + 4\,,\ 9x^2 + 6x + 1\,,\ \omega^2 - 2\omega + 1$		
7.	(α)	25	(β)	4
	(γ)	1		
9.		$ΑΒΓ$ *ορθογώνιο τρίγωνο*		
10.	(α)	4	(β)	4

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})$ *Σελίδα 50*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	$x^2 - 9$	(β)	$4x^2 - 1$
	(γ)	$\alpha^2\,\beta^2 - 1$	(δ)	$x^6 - 4\omega^2$

	(ε)	$\kappa^2-\frac{1}{4}$	(στ)	23
	(ζ)	$9a^2-1$	(η)	$25-9y^2$
2.	(α)	$(4a-\boxed{1})(\boxed{4\alpha}+1)=\boxed{16\alpha^2}-1$	(β)	$(\psi-\boxed{8})(\boxed{\psi}+8)=\psi^2-\boxed{64}$
	(γ)	$\left(2\beta+\boxed{8\alpha^2}\right)\left(\boxed{8\alpha^2}-\boxed{2\beta}\right)=64\alpha^4-\boxed{4\beta^2}$		
	(δ)	$\left(\boxed{\frac{\psi}{3}}-\boxed{5\alpha^3}\right)\left(\boxed{\frac{\psi}{3}}+5\alpha^3\right)=\frac{\psi^2}{9}-\boxed{25\alpha^6}$		
3.	(α)	v^4-81	(β)	$x^2+3\,x-9$
	(γ)	α^4-2	(δ)	$32x^2+16x+3$
	(ε)	$-2x^2+9$	(στ)	$-x$
4.	(α)	10609	(β)	841
	(γ)	9999	(δ)	39996
7.		$E=5x^2-2x$		
8.		$A=20$		
9.		$A=7$		

Ταυτοτητα $(\alpha\pm\beta)^3$ *Σελίδα 55*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	$x^3+9x^2+27x+27$	(β)	$8-12x+6x^2-x^3$
	(γ)	$x^3+9x^2+27x+27$	(δ)	$\alpha^3-9\beta\alpha^2+27\alpha\beta^2-27\beta^3$
	(ε)	$8x^3-12x^2+6x-1$	(στ)	$x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$
2.	(α)	$x^3-3x^2+12x+1$	(β)	$-7x^3-5x^2+x+1$
	(γ)	$5x^3-6x^2+3x-8$		
4.		$a^2+\beta^2=20$		$\alpha^3+\beta^3=56$
5.	(α)	5	(β)	9
	(γ)	1		
6.		$\sqrt{13}$		
7.		18		
8.		2015		

Δραστηριοτητες Ενοτητας *Σελίδα 56*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	$4x^2+20x+25$	(β)	$a^2+2+\frac{1}{a^2}$
	(γ)	y^4-4y^2+4	(δ)	$11-4\sqrt{7}$

	(ε)	$a^2 + 6a + 9$	(στ)	4
	(ζ)	$\beta^2 - \alpha^2$	(η)	$y^4 - \omega^2$
	(θ)	$a^3 - 15a^2 + 75a - 125$	(ι)	$8 - 36\beta + 54\beta^2 - 27\beta^3$
	(ια)	$\beta^8 - 1$		
2.	(α)	$\boxed{x^2} + \boxed{2x\beta} + \beta^2 = \left(x + \boxed{\beta}\right)^2$		
	(β)	$25x^2 + 1 + \boxed{10x} = \left(\boxed{5x} + \boxed{1}\right)^2$		
	(γ)	$\boxed{16x^2} + \boxed{40xy} + 25y^2 = \left(4x + \boxed{5y}\right)^2$		
	(δ)	$\left(\boxed{2y} + 9x\right) \cdot \left(\boxed{2y} - \boxed{9x}\right) = 4y^2 - \boxed{81x^2}$		
	(ε)	$\alpha^2 - \boxed{\frac{1}{4}} = \left(\boxed{\alpha} - \boxed{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(\boxed{\alpha} + \frac{1}{2}\right)$		
	(στ)	$\left(3\alpha^2 - \boxed{\frac{\beta}{2\alpha}}\right) \cdot \left(\boxed{3\alpha^2} + \boxed{\frac{\beta}{2\alpha}}\right) = \boxed{9\alpha^4} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}$		
	(ζ)	$\omega^2 - \omega + \boxed{\frac{1}{4}} = \left(\boxed{\omega} - \boxed{\frac{1}{2}}\right)^2$		
	(η)	$y^4 + 8y^2 + \boxed{16} = \left(\boxed{y^2} + \boxed{4}\right)^2$		
	(θ)	$\alpha^2 + \frac{9}{\beta^2} + \boxed{\frac{6\alpha}{\beta}} = \left(\boxed{\alpha} + \boxed{\frac{3}{\beta}}\right)^2$		
	(ι)	$27x^3 + 1 + \boxed{27x^2} + \boxed{9x} = \left(\boxed{3x} + \boxed{1}\right)^3$		
5.		$A = 4029\,,\ B = 0{,}0321$		
7.	(α)	$-2x^2 + 6x + 76$	(γ)	-396
11.	(α)	-20	(β)	-2
	(γ)	-4		
12.	(α)	$x = \frac{1}{2}$	(β)	$x = -2$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ *Σελίδα 59*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	3		
3.		17 *ου* βαθμού		
4.		$(\alpha+\beta)^5 = \alpha^5 + 5\beta\alpha^4 + 10\beta^2\alpha^3 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5$ $(\alpha+\beta)^6 = \alpha^6 + 6\beta\alpha^5 + 15\beta^2\alpha^4 + 20\,\alpha^3\beta^3 + 15\,\alpha^2\beta^4 + 6\,\alpha\beta^5 + \beta^6$ $(\alpha-\beta)^6 = \alpha^6 - 6\beta\alpha^5 + 15\alpha^2\beta^4 - 20\alpha^3\beta^3 - 6\alpha\beta^5 + 15\beta^2\alpha^4 + \beta^6$		
5.		15 βαθμοί		
6.	(α)	$0{,}5\ m$	(β)	89,6 *μέτρα ανά λεπτό* 5,38 *χιλιόμετρα ανά ώρα*

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Παραγοντοποίηση – Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

Εισαγωγη Στην Παραγοντοποιηση Πολυωνυμων *Σελίδα 69*

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (α) $x^2 - x - 2$ (β) $5x^3 - 18x^2 - 38x - 12$

2. (α) ΟΧΙ (β) ΟΧΙ (γ) ΝΑΙ

3.

Πολυώνυμο	Παράγοντας	Παράγοντας
$-2x + x^3 - 3x^2 + 4$	$x - 1$	$x^2 - 2x - 4$
$4x^3 - 22x^2 + 32x - 8$	$4x^2 - 14x + 4$	$x - 2$
$x^2 - 4$	$x + 2$	$x - 2$
$3\alpha^3 - \alpha^2\beta + 12\alpha - 4\beta$	$\alpha^2 + 4$	$3\alpha - \beta$

4. (α) $3\alpha^2\beta^2$ (β) $4\alpha^2x^2$ (γ) $3\alpha^2(\alpha - \beta)^2$

5. (α) $6\alpha\beta\gamma$

6. (α) $x(\boxed{x} + \boxed{3}) = x^2 + 3x$ (β) $\boxed{3}(2y - 5) = 6y - 15$

(γ) $\boxed{3\alpha}(x^2 - \boxed{2}) = 3\alpha x^2 - 6\alpha$ (δ) $\boxed{3}(\boxed{x} - \boxed{5}) = 3x - 15$

Κοινος Παραγοντας-Ομαδοποιηση *Σελίδα 74*

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1.

Πολυώνυμο	Κοινός Παράγοντας	Γινόμενο
$\alpha\beta + \alpha\gamma$	α	$\alpha(\beta + \gamma)$
$7\alpha\beta + 7\alpha\gamma - 7\alpha\delta$	7α	$7\alpha(\beta + \gamma - \delta)$
$3x - 3y + 6$	3	$3(x - y + 2)$
$7x^3 - 14x^2$	$7x^2$	$7x^2(x - 2)$

2. (α) $7(x + y)$ (β) $6(x - 1)$ (γ) $6(2 - x)$

(δ) $x^3(x - a)$ (ε) $2x(4x - 3)$ (στ) $4xy(y^2 - 2x)$

(ζ) $5x(1 + 2x)$ (η) $-2x(2x + 9x - 8)$ (θ) $5\alpha(3x + 6y - 2\omega)$

(ι) $\frac{2}{3}xy(1 - 2x)$

3. (α) $(x + y)(2x + 5y)$ (β) $(\alpha - \beta)(3 + \kappa)$ (γ) $(\alpha + 1)(\alpha - 2)$

(δ) $(2x - 5)(4y - 9\alpha)$ (ε) $(\alpha - 2\beta)(y + 5)$ (στ) $(x + y)(x + y + 3)$

(ζ) $(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 3\gamma)$ (η) $(x - y)(\alpha - 1)$

4. (α) $(\beta + 5)(\alpha + 2)$ (β) $(x - 3y)(\kappa + \mu)$ (γ) $(\alpha - \beta)(\lambda\alpha + \kappa\beta)$

	(δ)	$(2\alpha-3\beta)(4\alpha-5)$	(ε) $(x-5)(y-1)$	(στ) $(2x+3y)(\alpha x-\beta y)$
5.	(α)	$A=16$	(β) $B=72$	
	(γ)	$\Gamma=16$	(δ) $\Delta=30$	
7.	(α)	$\Delta=\frac{1}{2}\nu(\nu-3)$	(β)	35 *διαγώνιοι*
8.	(α)	$E=2R^2(4-\pi)$	(β)	$E=4(x+y+4)$

Διαφορα Δυο Τετραγωνων-Διαφορα Και Αθροισμα Δυο Κυβων *Σελίδα 78*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις			
1.	(α)	$(x-2)(x+2)$	(β)	$(x-7)(x+7)$
	(γ)	$(3-x)(3+x)$	(δ)	$(2x-3y)(2x+3y)$
	(ε)	$(4\beta-9)(4\beta+9)$	(στ)	$\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}+x\right)$
	(ζ)	$\left(\frac{1}{x}-7y\right)\left(\frac{1}{x}+7y\right)$	(η)	$3\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)$
	(θ)	$(5x^2-1)(5x^2+1)$	(ι)	$2(y-4)(y+4)$
	(ια)	$(3x-2y)(3x+y)(9x^2+4y^2)$	(ιβ)	$2(3\alpha^2-5\kappa^2)(3\alpha^2+5\kappa^2)$
2.	(α)	$(2x-1-y)(2x-1+y)$	(β)	$(5x-1)(5x+3)$
	(γ)	$(\kappa+\lambda)(3\kappa-\lambda)$	(δ)	$(\alpha+2\beta-4)(\alpha+2\beta+4)$
	(ε)	$(\omega-x-y)(\omega+x+y)$	(στ)	$(\rho-\alpha-\beta)(\rho+\alpha+\beta)$
	(ζ)	$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(x+y)$	(η)	$\beta(2\alpha-3\beta)$
3.	(α)	$(x+y)(x-y-5)$	(β)	$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-4)$
	(γ)	$(y-3)(x-\kappa)(x+\kappa)$	(δ)	$(y+4)^2(4-y)$
	(ε)	$(x-3y)(\alpha-2x+6y)$	(στ)	$(x-y)(2x+y)(2y-x)$
4.	(α)	$(x-2)(x^2+2x+4)$	(β)	$(5+\omega)(25-5\omega+\omega^2)$
	(γ)	$(\beta-\alpha^3)(\beta^2+\beta\alpha^3+\alpha^6)$	(δ)	$\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta^2}{3}\right)\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha\beta^2}{6}+\frac{\beta^4}{9}\right)$
	(ε)	$\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{x}{3}+x^2\right)$	(στ)	$\alpha(x-y)(x^2+xy+y^2)$
	(ζ)	$2(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$	(η)	$3(x-2)(x^2+2x+4)$
	(θ)	$(xy+1)(x^2y^2-xy+1)$		
5.	(α)	$(\alpha-\beta)(x+y)\,(x^2-xy+y^2)$	(β)	$(x-y)(x^2+xy+y^2-2x-2y)$
	(γ)	$(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2-3)$	(δ)	$(\kappa-1)\,(\kappa^2+\kappa-1)$
6.	(α)	199	(β)	16000
7.		$2^2=4$		

Τριωνυμο-Τελειο Τετραγωνο *Σελίδα 83*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις

1.

$x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha+\beta$	α	β	$(x+\alpha)(x+\beta)$
$x^2+6x-16$	$-2\cdot 8$	$-2+8$	-2	8	$(x-2)\cdot(x+8)$
$x^2+10x+16$	$2\cdot 8$	$2+8$	2	8	$(x+2)\,(x+8)$
$x^2-6x-16$	$-8\cdot 2$	$-8+2$	-8	2	$(x-8)\,(x+2)$
$x^2-10x+16$	$(-8)\cdot(-2)$	$-8-2$	-8	-2	$(x-8)\,(x-2)$
$x^2-8x+16$	$(-4)\cdot(-4)$	$-4-4$	-4	-4	$(x-4)^2$
$x^2+17x+16$	$16\cdot 1$	$16+1$	16	1	$(x+16)(x+1)$

3.	(α)	$(x-5)\,(x-4)$	(β)	$(y-5)(y+3)$	(γ)	$(x+2)\,(x+3)$
	(δ)	$(y-4)\,(y-2)$	(ε)	$(x-4)\,(x-2)$	(στ)	$(\alpha-7)(\alpha-8)$
	(ζ)	$(\alpha-9)\,(\alpha+10)$	(η)	$y(y-15)\,(y+10)$	(θ)	$(x-1)\,(x+2)\,x^3$
	(ι)	$2\,(x-5)\,(x-2)$	(ια)	$-(\alpha+1)\,(\alpha+4)$	(ιβ)	$(y-6)\,(y+1)\,y^2$
4.	(α)	$(x-9)^2$	(β)	$(y-8)^2$	(γ)	$(5\,x+3)^2$
	(δ)	$(2x+3y)^2$	(ε)	$x\,(x-3)^2$	(στ)	$(4\alpha^2+3\beta)^2$

5. $A=x^2(x-2)(x+2)$
$B=(2x-1)(x-2)(x+2)$
$A-B=(x-2)(x+2)(x-1)^2$

6. $\Pi=4(5\alpha-3\beta)$

7. (α) 1 000000 (β) 1

8.	(α)	$(\alpha-\beta-\omega)(\alpha-\beta+\omega)$	(β)	$(x^2-4y-1)(x^2+4y+1)$
	(γ)	$(x+1)(\alpha+x+1)$	(δ)	$(1-\alpha-\beta)(1+\alpha+\beta)$
9.	(α)	$\kappa=\pm 6$	(β)	$\kappa=\pm 7\,,\ \kappa=\pm 11$
	(γ)	$\kappa=16\,,\kappa=15,\kappa=7,\kappa=12$	(δ)	$\kappa=6,\ \kappa=4$

Εξισωσεις Δευτερου Και Ανωτερου Βαθμου *Σελίδα 91*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις

1.	(α)	$x=0$ ή $x=-5$	(β)	$x=7$ ή $x=\frac{3}{2}$ ή $x=-5$
	(γ)	$\alpha=0$ ή $\alpha=2$	(δ)	$x=\frac{5}{2}$ ή $x=1$ ή $x=5$
	(ε)	$x=0$ ή $x=-2$ ή $x=2$	(στ)	$x=\frac{1}{5}$
	(ζ)	$x=2$ ή $x=3$	(η)	$x=-3$ ή $x=3$
2.	(α)	$\kappa=0$ ή $\kappa=-5$ ή $\kappa=5$	(β)	$x=-3$ ή $x=4$

	(γ)	$\alpha = -7$ ή $\alpha = 5$	(δ)	$x = 0$ ή $x = 2$
	(ε)	$y = 0$ ή $y = -2$ ή $y = 1$	(στ)	$a = 3$
	(ζ)	$y = -6$ ή $y = 2$	(η)	$x = 0$ ή $x = 5$
3.	(α)	Αδύνατη	(β)	$x = -\frac{1}{5}$ ή $x = 1$
	(γ)	$x = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$ ή $x = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$	(δ)	$x = -1$ ή $x = \frac{1}{2}$
	(ε)	$x = -1$ ή $x = \frac{2}{3}$	(στ)	$x = \frac{1}{2}$ ή $x = 2$ ή $x = 3$ ή $x = 4$
4.	(α)	Αδύνατη	(β)	$x = 2$
	(γ)	$x = 0$ ή $x = 4$	(δ)	Αδύνατη
	(ε)	$x = -2$ ή $x = -1$	(στ)	Αδύνατη
	(ζ)	Αδύνατη	(η)	$x = \frac{-5-\sqrt{5}}{4}$ ή $x = \frac{-5+\sqrt{5}}{4}$
5.	(β)	$x = -1$ ή $x = \frac{7}{2}$		
6.		Η εξίσωση είναι αδύνατη		
7.		$x^2 - 5x + 6 = 0$ $x = 2$ ή $x = 3$		
8.		$x = 4$		
9.		$5, 7$ ή $-5, -7$		
10.		$10\ cm,\ 6\ cm.$		
11.	(α)	$x = 10\ cm$	(β)	$x = 7\ cm$
12.		$3,\ \frac{1}{3}$		
13.		$x = 5$		
14.	(α)	$t = 20\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho\acute{o}\lambda\varepsilon\pi\tau\alpha$		

Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις *Σελίδα 96*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις				
1.	(α)	$x \in \mathbb{R} - \{\pm 5\}$	(β)	$y \in \mathbb{R} - \{-7, 2\}$	(γ)	$a \in \mathbb{R} - \{3\}$
2.		$Οι\ \ \delta, \varepsilon.$				
3.		$Η\ \ \gamma.$				
4.	(α)	$\frac{3}{x^2}$	(β)	$\frac{5\beta\gamma}{2a^2}$	(γ)	$\frac{\alpha}{2(a-6)}$
	(δ)	$-\frac{1}{9x^3}$	(ε)	$\frac{5}{\alpha+7}$	(στ)	$-\frac{x-2}{4(x+7)}$
5.	(α)	$\frac{2}{a}$	(β)	$\frac{\alpha-\beta}{2}$	(γ)	$\frac{1}{x+5}$
	(δ)	$\frac{2(x+3)}{x-3}$	(ε)	$-\frac{x-3}{x+2}$	(στ)	$\frac{x+5}{a}$
6.		2019				

Πολλαπλασιασμός-Διαίρεση Ρητών Αλγεβρικών Παραστάσεων *Σελίδα 100*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις				
1.		*$75\ km$* *Παριστάνει την απόσταση που καλύπτεται σε συγκεκριμένο χρόνο.*				
2.	(α)	$36\ km/h$	(β)	$20\ m/s$		
3.	(α)	$\frac{5}{\omega^3}$	(β)	$\frac{2}{x}$	(γ)	$\frac{15\,(\alpha+2)}{7\,\alpha}$
	(δ)	x	(ε)	$\frac{1}{x-3}$	(στ)	$-\frac{2\,(y-3)}{y}$
4.	(α)	$\frac{\alpha\,\beta}{2}$	(β)	$\frac{\beta}{\alpha}$	(γ)	1
	(δ)	$\frac{2\,(x+5)}{x-15}$	(ε)	$\frac{x^4}{3\,(x-1)}$	(στ)	$\frac{x-1}{3}$
5.		Γεωργία				
6.		2013				
7.	(α)	$\frac{8\,\gamma}{3}$	(β)	9		
	(γ)	$\frac{1}{2\,(x-1)}$	(δ)	$\frac{3}{\beta-\alpha}$		

Πρόσθεση-Αφαίρεση Ρητών Αλγεβρικών Παραστάσεων *Σελίδα 106*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις				
1.	(α)	$\frac{17}{15\,x}$	(β)	$\frac{11\alpha-7\beta}{11\beta}$	(γ)	$\frac{5\,x+1}{x+5}$
	(δ)	3	(ε)	$\frac{3\,(\beta^2+\beta+1)}{\beta^3}$	(στ)	$\frac{9y+4x-6}{6xy}$
2.		Το δ.				
3.	(α)	$\frac{300}{\nu}$	(β)	$\frac{100}{\nu}$		
	(γ)	$\frac{900}{\nu}$	(δ)	$\frac{1300}{\nu}$ Τα λεπτά που χρειάζεται η κυρία Ελένη για να πληκτρολογήσει 1300 λέξεις.		
4.	(α)	$\frac{1-x}{x(x+1)}$	(β)	$\frac{x+8}{(x+2)(x-1)}$	(γ)	$\frac{x+1}{x(x+2)}$
	(δ)	$\frac{-6}{2x+1}$	(ε)	$\frac{4\,(x-3)}{x(x-4)(x+3)}$	(στ)	$-\frac{1}{(\alpha+2)}$
5.	(α)	*Π.χ.* $\frac{x}{x+2}+\frac{2}{x+2}$, $\frac{x+1}{x+2}+\frac{1}{x+2}$				
	(β)	*Π.χ.* $\frac{-2}{x+2}+\frac{2}{x+2}$, $\frac{-x}{x+2}+\frac{x}{x+2}$				
6.	(α)	$\frac{5}{6}$	(β)	$\frac{11}{30}$		
	(γ)	$\frac{21}{110}$	(δ)	$\frac{41}{420}$		
7.	(α)	$-2\alpha\beta$	(β)	6	(γ)	$\frac{x+1}{1-x}$
	(δ)	$\frac{1}{3\,x+1}$	(ε)	$-\frac{2(x+1)}{x+2}$		
8.	(α)	$x=7$	(β)	$x=3$		

	(γ)	$y = -1$ ή $y = 5$	(δ)	$x = 1$
	(ε)	$x = -3$ ή $x = -2$	(στ)	$x = 0$ ή $x = -2$
	(ζ)	$x = 8$	(η)	$y = -2$
9.	(α)	3)		
	(β)	1)		
	(γ)	2)		
	(δ)	4)		

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ *Σελίδα 108*

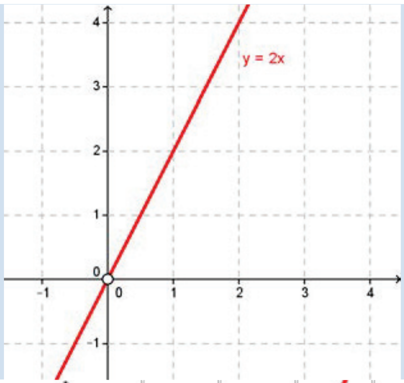
Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	$3\kappa\,(\varphi+\omega)$	(β)	$5x\,(2y^2 + x\,y - 3x^2)$
	(γ)	$(x-5)(x-2)$	(δ)	$y\,(y-4)\,(y-2)$
	(ε)	$4x\,(2x-y)$	(στ)	$2\,x\,(x-1)\,(x+1)$
	(ζ)	$(x+y)(x+5)$	(η)	$(y-4)\,(y+3)$
	(θ)	$a\,(x-3)\,(x^2+3\,x+9)$	(ι)	$(4a-y)^2$
2.	(α)	$(a-2)\,(a+4)$	(β)	$(x-y)(3+x+y)$
	(γ)	$(3\,x-2\,y)\,(3\,x+6\,y)$	(δ)	$4(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\beta-1)(\beta+1)$
	(ε)	$(x+y)(x^2-xy+y^2-3)$	(στ)	$(x-5)\,(x-1)$
	(ζ)	$(x+1)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$	(η)	$(y-5-x)(y-5+x)$
	(θ)	$(a+1)(a^2+a+\beta)$	(ι)	$-(y+1)(2x-y+1)$
	(ια)	$(3\,a+8)\,(a-3)^2$	(ιβ)	$(x+6)(x+ax-6a-2)$
3.	(α)	$\frac{\nu\,(\nu-1)}{2}$	(β)	36 αγώνες
4.	(α)	$(\alpha+\beta)(\alpha\beta-1)$		
5.	(α)	$-3\,y\,x^2$	(β)	$\frac{1}{x}$
	(γ)	$\frac{x}{x+1}$	(δ)	$\frac{y-3}{2y-3}$
6.	(α)	$\frac{1}{x\,y}$	(β)	$\frac{a}{\beta}$
	(γ)	$\frac{1}{a}$	(δ)	$\frac{2\,y\,(y+3)}{y+2}$
	(ε)	$\frac{y-2}{y+1}$	(στ)	1
	(ζ)	$\frac{a-2}{a-1}$	(η)	$\frac{2\,(y-1)\,(y+1)}{(x-1)(1+x)}$

	(θ)	$\frac{y\,(x+3\,y)}{x\,(x-3\,y)}$	(ι)	$\frac{x\,y\,(y-x)}{x+y}$
7.	(α)	$-\frac{1}{3\,\alpha}$	(β)	$\frac{1}{4}$
	(γ)	$\frac{3}{x+1}$	(δ)	$\frac{-6}{2y-1}$
	(ε)	$\frac{x}{2(x-3)}$	(στ)	$\frac{y\,(y-2)}{2(\,y-3)}$
8.	(α)	Το B	(β)	$\frac{1}{4062240}$
9.	(α)	$\frac{3}{y+3}$	(β)	$\frac{1-x}{x+3}$
	(γ)	$\frac{x-3}{3\,(x+1)}$	(δ)	$\frac{x+3}{2\,x-2}$
10.	(α)	$\alpha = 2$ ή $\alpha = -8$	(β)	$x = 0$ ή $x = \frac{2}{5}$
	(γ)	$x = -5$	(δ)	$x = 0$ ή $x = 9$
	(ε)	$x = -4$ ή $x = 1$	(στ)	$\beta = \frac{1}{4}$
	(ζ)	$x = 0$ ή $x = -1$	(η)	$\alpha = -3$ ή $\alpha = 4$
11.		$\alpha = 8\,cm$ $\beta = 3\,cm$		
12.		$\alpha = 8\,cm$ $\beta = 6\,cm$		
13.		$x = 0$ ή $x = 4$ ή $x = -5$		
14.	(α)	$x = 2$	(β)	$x = \frac{1}{5}$
	(γ)	$x = 3$	(δ)	$x = \frac{1}{11}$
	(ε)	$x = -14$	(στ)	$y = -3$
	(ζ)	$\alpha = -10$	(η)	$y = 4$
15.		Το δεύτερο ισχύει για όλους τους αριθμούς εκτός από τον αριθμό -1		
16.		$\alpha = 3\,\mu.$ $\beta = 4\,\mu.$ $\gamma = 5\,\mu.$		

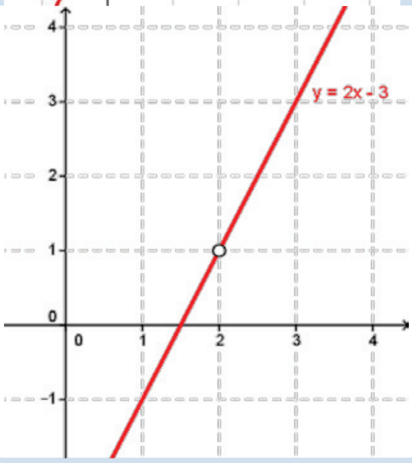
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ *Σελίδα 112*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$(\beta+\gamma)[\alpha(\beta-\gamma)+\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2]$

3. (α) $y = 2x, x \neq 0$



(β) $y = 2x - 3, x \neq 2$



4. (α) $\alpha^3 + 1$

5. $\frac{x-1}{x+2010}$

7. 4 ώρες

8. (α)

ν	Πλήθος δέντρων μηλιάς	Πλήθος κυπαρισσιών
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40

(β) $\nu = 8$

(γ) Οι μηλιές αυξάνονται γρηγορότερα.

9. (α) $14\ mm$

(β) $37\ \chi\rho\acute{o}\nu\iota\alpha$

(γ) $\Sigma\varepsilon\ 75\ \chi\rho\acute{o}\nu\iota\alpha\ \alpha\pi\acute{o}\ \tau\acute{\omega}\rho\alpha$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ — *Σελίδα 125*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις			
1.	(α)	Γωνίες: A, B, Γ και πλευρές: $AB, B\Gamma, A\Delta$	(β)	$AB = \gamma, B\Gamma = \alpha, A\Delta = \beta$
	(γ)	$(\iota)\hat{B}$ $(\iota\iota)\hat{A}$	(δ)	$A\Gamma, \Gamma B$
	(ε)	$\hat{A}, \hat{B}$		
2.	(α)	ΟΧΙ	(β)	ΝΑΙ
	(γ)	ΝΑΙ		
3.		$B\Gamma = 1,2,3, \dots ,11,12cm$ ή $B\Gamma = 8,9,10, \dots cm$		
4.	$EZ > \Delta Z$			

ΙΣΑ ΣΧΗΜΑΤΑ - ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ — *Σελίδα 129*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$\hat{B} = \hat{\Delta}, B\Gamma = \Delta E, \hat{E} = \hat{\Gamma}$
4.	(α) ΟΡΘΟΣ Ο ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ (β) ΛΑΘΟΣ Ο ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ
5.	(α) $\hat{B} = \hat{Z},\quad \hat{\Theta} = \hat{\Delta},\quad \hat{\Gamma} = \hat{H},\quad \hat{A} = \hat{E}$ $AB = ZE,\ B\Gamma = ZH,\ \Delta\Gamma = H\Theta,\ A\Delta = E\Theta$ (β) $x = 20°$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ — *Σελίδα 135*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	$\hat{B} = \hat{E} = 50°,\ \hat{A} = \hat{Z} = 100°,\ \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 30°$		
2.	(α) ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ	(β) ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ	(γ) ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ
	(δ) ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ	(ε) ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ	

3.	(α) $AB = ΔE$ (β) $\hat{A} = \hat{Δ}$ ή $EZ = BΓ$ (γ) $\hat{A} = \hat{Δ}$, $AB = ΔE$ ή $\hat{Γ} = \hat{Z}$, $EZ = BΓ$ ή $AB = ΔE$, $EZ = BΓ$
4.	(α) Γ-Π-Γ (β) Π-Γ-Π (γ) Π-Γ-Π
5.	ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ ($AΓ \neq ΔZ$)
6.	(α) Π-Π-Π (β) ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΑΡΚΕΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ (γ) ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΑΡΚΕΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ (δ) ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΑΡΚΕΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ (ε) Π-Γ-Π (στ) ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΑΡΚΕΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Κριτηρια Ισοτητας Ορθογωνιων Τριγωνων *Σελίδα 144*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ (β) ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ
2.	(α) ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ (β) ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ (γ) ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ (δ) ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ
3.	(α) ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ (β) ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ
4.	Δ

Δραστηριοτητες Ενοτητας *Σελίδα 147*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ (β) ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ (γ) ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ (δ) ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ (ε) ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ (στ) ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ (ζ) ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ
2.	Είναι δυνατό
4.	(α) $7\ cm$ (β) $49\ cm$
6.	(α) $AΓ < 33$ (β) $AΔ < 44$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

$\in$	ανήκει
$\notin$	δεν ανήκει
$\forall$	για κάθε
$\exists$	υπάρχει
$\cup$	ένωση συνόλων
$\cap$	τομή συνόλων
$\subset$	γνήσιο υποσύνολο
$\subseteq$	υποσύνολο
$\emptyset$ ή $\{\ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
$\neq$	άνισο
$\equiv$	ταυτοτικά ίσο
$\cong$	κατά προσέγγιση ίσο
$\mathbb{N}$	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{N}_0$	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{Z}$	ακέραιοι αριθμοί $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\dots\}$
$\mathbb{Z}^+$	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{Z}^-$	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1,-2,-3,-4,\dots\}$
$\mathbb{Q}$	ρητοί αριθμοί $\{α/β:\ α,β\in Z$ και $β\neq0\}$
$\mathbb{Q}^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{Q}_0^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
$\mathbb{Q}^-$	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{R}$	πραγματικοί αριθμοί
$\Rightarrow$	απλή συνεπαγωγή
$\Leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
$\perp$	κάθετες
$\parallel$	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή

=		Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)
.		Υποδιαστολή
EXP		Εκθέτης δύναμης με βάση το 10
Ans		Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος
$x^{\square}$	ή x^y ή ^	Δύναμη
		Ποντίκι (Mouse)
SHIFT	ή 2^{nd} F	Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί
AC		Επανεκκίνηση υπολογιστικής
DEL		Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή
Abs		Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)
(-)		Εισαγωγή Προσήμου –
a b/c	ή $\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$	Κλάσμα
S⇔D	ή a b/c	Μετατροπή Κλάσματος ⇔ Δεκαδικό
CLR		Σβήσιμο μνήμης
M+		Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη
M-		Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη
M		Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3+4$	3 + 4 =	3+4 7
2,34 – 1,1	2 · 3 4 – 1 · 1 =	2.34 – 1.1 1.24
$3 \cdot 2$	3 x 2 =	$3X2$ 6
2^5	2 x^y 5 =	2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$	5 EXP 3 =	$5E3$ ή $5X103$ 5000
$\frac{3}{4}$	a b/c 3 ↓ 4 → = ή 3 a b/c 4 =	$\frac{3}{4}$ 3⌟4
$2\frac{3}{4}$	SHIFT ■/■ 2 → 3 ↓ 4 = ή 2 a b/c 3 a b/c 4 =	$2\frac{3}{4}$ 2 ⌟3 ⌟4
$\sqrt{4}$	√ 4 =	$\sqrt{4}$ 2
5^2	5 X² =	5^2 25
$2 \cdot (7-3)$	2 x (7 – 3) =	$2X(7-3)$ 8
$2 \cdot (7-3)$	7 – 3 = 2 x Ans =	$2XAns$ 8
$2-(-3)$	2 – ((-) 3) =	$2-(-3)$ 5
$\lvert -3 \rvert$	Abs (-) 3 =	$\lvert -3 \rvert$ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης	S⇔D ή SHIFT a b/c	$\frac{1}{4}$
$9-6:2$	Υπολογισμός και αποθήκευση 9 – 6 ÷ 2 = M+	9 – 6 : 2 M + 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9-6:2) - 6:(9-6:2)$	3 X M – 6 ÷ M =	3 X M – 6 : M 17