ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ Γυμνασίου

Β΄ Τεύχος

Αναθεωρημένη Έκδοση

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ Γυμνασίου

Β΄ τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Β΄ Γυμνασίου, Β΄ Τεύχος

Συγγραφή: Αθανασίου Ανδρέας
Αντωνιάδης Μάριος
Γιασουμής Νικόλας
Έλληνα Αγγέλα
Ματθαίου Κυριάκος
Μουσουλίδου – Νικολαΐδου Μαριλένα
Παπαγιάννης Κωνσταντίνος
Τιμοθέου Σάββας
Φιλίππου Ανδρέας

Συντονιστής: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*

Εποπτεία: Θεοφίλου Στέλιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Κωστή Αντώνιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παντελή Παντελής, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*

Γλωσσική επιμέλεια: Παλάτου – Χριστόφια Μαριάννα, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Σχεδιασμός εξωφύλλου: Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης: Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Α΄ έκδοση 2012
Β΄ έκδοση 2014

Εκτύπωση: Ariagraf & ΣΙΑ ΕΕ

ISBN: 978-9963-0-4729-1

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε δύο τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Στην αρχή κάθε ενότητας γίνεται παράθεση των στόχων και οι μαθητές/τριες προϊδεάζονται ως προς το τι «… θα μάθουμε». Ακολουθεί, στο «Έχουμε μάθει …», η παρουσίαση της αναγκαίας προϋπάρχουσας γνώσης που οι μαθητές/τριες πρέπει να διαθέτουν, κάτι που βοηθά τους/τις εκπαιδευτικούς στον καταρτισμό καλύτερης διαγνωστικής και διαμορφωτικής αξιολόγησης. Στη συνέχεια, οι νέες μαθηματικές έννοιες διερευνώνται με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών/τριών, όπως ορίζουν οι αρχές των Εκσυγχρονισμένων Αναλυτικών Προγραμμάτων των Μαθηματικών. Η προσπάθεια κλιμακώνεται με παραδείγματα και διαβαθμισμένες δραστηριότητες, με έμφαση στη λύση προβλήματος και στην ανάδειξη της τεχνολογίας ως αναπόσπαστου μέρους της Μαθηματικής εκπαίδευσης.

Όλες οι εκδόσεις για τα Μαθηματικά των τελευταίων χρόνων βρίσκονται υπό συνεχή αξιολόγηση, διαμόρφωση και βελτίωση στη βάση της ανατροφοδότησης και των παρατηρήσεων που προέρχονται και από τους/τις μάχιμους/ες καθηγητές/τριες των Μαθηματικών. Αναμένω από τους διδάσκοντες/ουσες να εκφράσουν τις απόψεις τους και να υποβάλουν τις εισηγήσεις τους, τόσο σε σχέση με το περιεχόμενο του βιβλίου και το επίπεδο των ασκήσεων και δραστηριοτήτων όσο και σε σχέση με τον τρόπο προσέγγισης της ύλης.

Όλο το υλικό που παράγεται για το μάθημα των Μαθηματικών αποσκοπεί στη βοήθεια τόσο των μαθητών/τριών, όσο και των καθηγητών/τριών, στην πορεία τους μέσα από τα Εκσυγχρονισμένα Αναλυτικά Προγράμματα, με στόχο το καλύτερο αποτέλεσμα. Είναι εμποτισμένο με τον σύγχρονο τρόπο σκέψης και προσηλωμένο στην προαγωγή και στην ανάδειξη των βασικών δεξιοτήτων των μαθητών/τριών μας, που αποτελεί πρώτιστο μέλημά μας. Η προσπάθεια συνεχίζεται και οι προοπτικές είναι λαμπρές.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τον κύριο Κωνσταντίνο Χρίστου, Καθηγητή στο Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Σάββας Αντωνίου

Αναπληρωτής Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Εξισώσεις – Ανισώσεις α΄ Βαθμού

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να διερευνούμε εξισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής και να εξετάζουμε το πλήθος των λύσεών τους.
- Να μετασχηματίζουμε τύπους ως προς μια μεταβλητή.
- Να επιλύουμε ανισώσεις πρώτου βαθμού αλγεβρικά και γραφικά, χρησιμοποιώντας ποικιλία μεθόδων με ή χωρίς τεχνολογία και να χρησιμοποιούμε τις ανισώσεις στην επίλυση προβλημάτων.
- Να παρουσιάζουμε το σύνολο των λύσεων μιας ανίσωσης και σε διάστημα πραγματικών αριθμών.
- Να βρίσκουμε τις κοινές λύσεις δύο ή περισσότερων ανισώσεων πρώτου βαθμού.

Έχουμε μάθει …

- **Εξίσωση** είναι μια ισότητα που περιέχει τουλάχιστον μία **μεταβλητή**. Η μεταβλητή της εξίσωσης ονομάζεται και **άγνωστος** της εξίσωσης.

- Επίλυση **εξίσωσης** είναι η διαδικασία που εφαρμόζουμε, για να βρούμε την τιμή του αγνώστου που επαληθεύει την εξίσωση.

- Για να λύσουμε μια εξίσωση α' βαθμού με έναν άγνωστο, μπορούμε να ακολουθήσουμε τα πιο κάτω στάδια:
  - *Απαλείφουμε τους παρονομαστές, αν υπάρχουν.*
  - *Απαλείφουμε τις παρενθέσεις, αν υπάρχουν.*
  - *Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.*
  - *Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων.*
  - *Διαιρούμε και τα δύο μέλη με τον συντελεστή του αγνώστου.*

Παράδειγμα:

$\frac{2y}{3} + 1 = \frac{y}{2} - \frac{y+3}{3}$

$\Leftrightarrow \overset{2}{\frac{2y}{3}} + \overset{6}{\frac{1}{1}} = \overset{3}{\frac{y}{2}} - \overset{2}{\frac{y+3}{3}}$ — *Βρίσκουμε το $ΕΚΠ[3,2,1] = 6$ και μετατρέπουμε σε ομώνυμα και απαλείφουμε τους παρονομαστές*

$\Leftrightarrow 4y + 6 = 3y - 2(y+3)$ — *Απαλείφουμε τις παρενθέσεις.*

$\Leftrightarrow 4y + 6 = 3y - 2y - 6$ — *Χωρίζουμε τους γνωστούς από τους άγνωστους όρους.*

$\Leftrightarrow 4y - 3y + 2y = -6 - 6$ — *Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων.*

$\Leftrightarrow 3y = -12$

$\Leftrightarrow \frac{3y}{3} = \frac{-12}{3}$ — *Διαιρούμε με τον συντελεστή του άγνωστου όρου.*

$\Leftrightarrow y = -4$ — *Βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης.*

Διερεύνηση Εξίσωσης α΄ Βαθμού με μία Μεταβλητή

Διερεύνηση

Έχουμε μάθει ότι ένα σύνολο μπορεί να αναπαρασταθεί με αναγραφή των στοιχείων του ή με βέννειο διάγραμμα. Ένας άλλος τρόπος είναι η περιγραφή του συνόλου με τη χρήση μεταβλητής.

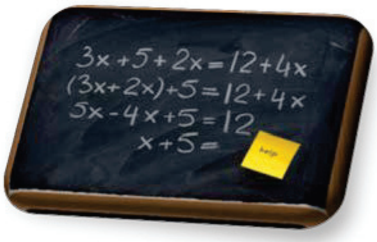
Παράδειγμα:

$A = \{2x, \text{όπου } x \epsilon \mathbb{N}\}$

$= \{2, 4, 6, \dots\}$

Δίνονται τα σύνολα:

- $\mathrm{A} = \{x, \text{όπου } x \text{ η λύση της εξίσωσης } \ 3x - 4 = x - 4\}$
- $\mathrm{B} = \{x, \text{όπου } x \text{ η λύση της εξίσωσης } \ 3x - 4 = 3x + 4\}$
- $\Gamma = \{x, \text{όπου } x \text{ η λύση της εξίσωσης } \ 3x - 4 = 3x - 4\}$



✓ Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα πιο πάνω σύνολα και να βρείτε τον πληθικό αριθμό του κάθε συνόλου. Τι παρατηρείτε;

✓ Να ορίσετε το σύνολο $\varDelta$:
$\Delta = \{x, \text{όπου } x \text{ η λύση της εξίσωσης } \dots\dots\dots\dots\}$, έτσι ώστε να ισχύει:

i. $\nu(\varDelta) = \nu(A)$

ii. $\nu(\varDelta) = \nu(B)$

iii. $\nu(\varDelta) = \nu(\varGamma)$

✓ Πώς θα ταξινομούσατε τις εξισώσεις με βάση το πλήθος των λύσεων που έχουν;

✓ Ποια χαρακτηριστικά θα έχει μια εξίσωση που ανήκει σε καθεμιά από τις κατηγορίες του πιο πάνω ερωτήματος;

Εξίσωση πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο ονομάζουμε την εξίσωση που περιέχει μόνο έναν άγνωστο και που ο άγνωστος αυτός έχει εκθέτη 1.

Μαθαίνω

- Κάθε εξίσωση της μορφής $\boldsymbol{\alpha x = \beta}$ είναι εξίσωση πρώτου βαθμού με άγνωστο τον x.

  - Όταν $\alpha \neq 0$, η εξίσωση $\alpha x = \beta$ έχει **μία μοναδική** λύση, τη $x = \frac{\beta}{\alpha}$.

    Παράδειγμα:

    $2x = -4$

    $\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-4}{2}$

    $\Leftrightarrow x = -2$ *Η εξίσωση έχει μοναδική λύση τον αριθμό -2.*

  - Όταν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$, η εξίσωση $\alpha x = \beta$ παίρνει τη μορφή, $\boldsymbol{0x = \beta}$ και **δεν έχει λύση.** Η εξίσωση αυτή είναι **αδύνατη**.

    Παράδειγμα:

    *Η εξίσωση $0x = -3$ είναι **αδύνατη**, αφού κανένας αριθμός δεν την επαληθεύει. Άρα, η εξίσωση δεν έχει λύση.*

  - Όταν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ η εξίσωση $\alpha x = \beta$ παίρνει τη μορφή $\boldsymbol{0x = 0}$ και έχει ως λύση **κάθε πραγματικό αριθμό.** Η εξίσωση αυτή είναι **αόριστη**.

    Παράδειγμα:

    *Η εξίσωση $0x = 0$ έχει άπειρες λύσεις, αφού κάθε αριθμός την επαληθεύει. Άρα, η εξίσωση είναι **αόριστη**.*

    $0 \cdot (-2) = 0$

    $0 \cdot 3 = 0$

    $\vdots$

Άρα, η εξίσωση $\alpha x = \beta$:

- έχει μοναδική λύση τη $\boldsymbol{x = \frac{\beta}{\alpha}}$, όταν $\alpha \neq 0$
- δεν έχει λύση, όταν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$
- έχει άπειρες λύσεις, όταν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$

Παραδείγματα

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{3}{5}-\frac{2x+1}{10}=\frac{5-2x}{10}$

Λύση:

$\frac{3}{5}-\frac{2x+1}{10}=\frac{5-2x}{10}$

$\Leftrightarrow \frac{\overset{2}{\breve{3}}}{5}-\frac{\overset{1}{\overbrace{2x+1}}}{10}=\frac{\overset{1}{\overbrace{5-2x}}}{10}$ — *Βρίσκουμε το $ΕΚΠ[5,10]=10$ και μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα.*

$\Leftrightarrow \frac{6}{10}-\frac{2x+1}{10}=\frac{5-2x}{10}$ — *Απαλείφουμε τους παρονομαστές, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ισοτήτων.*

$\Leftrightarrow 6-(2x+1)=5-2x$ — *Απαλείφουμε τις παρενθέσεις.*

$\Leftrightarrow 6-2x-1=5-2x$

$\Leftrightarrow -2x+2x=5+1-6$ — *Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους.*

$\Leftrightarrow 0x=0$ — *Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων.*

Άρα, η εξίσωση είναι αόριστη, δηλαδή έχει ως λύση κάθε τιμή του x.

Δεν μπορούμε να διαιρέσουμε με τον συντελεστή του αγνώστου, γιατί είναι μηδέν.

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση επαληθεύεται για όλες τις τιμές του x. Άρα, έχει άπειρες λύσεις.
Για παράδειγμα:
$0\cdot 3=0$,
$0\cdot(-215)=0$,
$0\cdot\frac{4}{7}=0$

2. Να προσδιορίσετε τον αριθμό (παράμετρο) λ, έτσι ώστε η εξίσωση $3(x-1)=\lambda x-1$ να είναι αδύνατη.

Λύση:

$3(x-1)=\lambda x-1$ — *Απαλείφουμε τις παρενθέσεις, εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα.*

$\Leftrightarrow 3x-3=\lambda x-1$

$\Leftrightarrow 3x-\lambda x=3-1$ — *Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους.*

$\Leftrightarrow (3-\lambda)x=2$ — *Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων, εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα.*

Για να είναι αδύνατη εξίσωση $(3-\lambda)x=2$, πρέπει ο συντελεστής του x να είναι μηδέν.

Άρα, θέτουμε τον συντελεστή του x στην εξίσωση $(3-\lambda)x=2$ ίσο με το μηδέν:

$$3-\lambda=0$$
$$\Rightarrow -\lambda=-3$$
$$\Rightarrow \lambda=3$$

Αν αντικαταστήσουμε το $\lambda=3$ τότε η εξίσωση γίνεται $0x=2$ και επαληθεύεται ότι είναι αδύνατη.

Δραστηριότητες

1. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $2x-6=4x-2$ (β) $3x-4=2x-5$

(γ) $5(x+3)=5x+\ 3$ (δ) $\frac{a-1}{3}+\frac{1}{2}=a$

(ε) $2(x+4)-4x=2(4-x)$ (στ) $\frac{x-4}{2}=\frac{7x}{2}-3x-5$

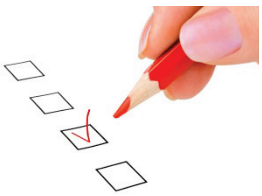
2. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω εξισώσεις έχουν μία λύση, καμία λύση ή άπειρες λύσεις:

(α) $-3x+15=-4x-3$ (β) $3x+5=3x-3+8$

(γ) $2(x+2)-5x=6-3(x-1)$ (δ) $3x-4+\frac{x}{2}=7+4x$

(ε) $-2(2x-1)+5=11-4(x+1)$ (στ) $\frac{3-x}{3}+\frac{x-2}{2}=\frac{x}{6}$

3. Να εξετάσετε την ορθότητα καθεμιάς από τις πιο κάτω προτάσεις βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.



(α)	$0x=0$ είναι αόριστη	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$0x=3$ έχει άπειρες λύσεις	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$-3x=0$ είναι αδύνατη	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$10x=0$ έχει μια λύση	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	$0x=-10$ δεν έχει λύση	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

4. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση για καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) Η εξίσωση $ax+3=0$ δεν έχει λύση, αν:

Α. $α=0$ Β. $α=-3$ Γ. $α=-2$ Δ. $α=2$

(β) Η εξίσωση $(a-5)x=+3$ δεν έχει λύση, αν:

Α. $α=0$ Β. $α=-3$ Γ. $α=-5$ Δ. $α=5$

(γ) Η εξίσωση $0x=3+a$ έχει άπειρες λύσεις, αν:

Α. $α=0$ Β. $α=-5$ Γ. $α=-3$ Δ. $α=3$

(δ) Η εξίσωση $ax+3=2x-x-3$ δεν έχει λύση, αν:

Α. $α=0$ Β. $α=+1$ Γ. $α=-1$ Δ. $α=2$

5. Να προσδιορίσετε τον αριθμό λ σε καθεμιά από τις πιο κάτω εξισώσεις, έτσι ώστε οι εξισώσεις να είναι αδύνατες.

(α) $(\lambda-3)x=7$ (β) $(\lambda+2)x=-2014$

(γ) $4x=3-\lambda x$ (δ) $3x+\lambda x+6=15-6x$

6. Να προσδιορίσετε τον αριθμό α σε καθεμιά από τις πιο κάτω εξισώσεις έτσι ώστε οι εξισώσεις να είναι αόριστες.

(α) $(\alpha+3)x=0$ (β) $\alpha x=6x$

(γ) $13x+5=13x+\alpha$ (δ) $3x+\alpha=3x-1$

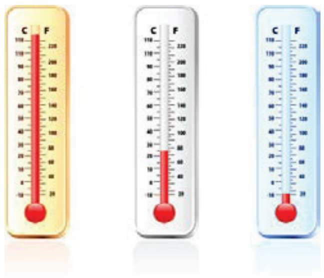
7. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α και β σε καθεμιά από τις πιο κάτω εξισώσεις έτσι ώστε οι εξισώσεις να είναι αόριστες.

(α) $(\alpha-4)x+1=2\beta+5$

(β) $\alpha x+2\beta=5x+6\beta+4$

Μετασχηματισμός Τύπου

Διερεύνηση



Στην Κύπρο, για τη μέτρηση της θερμοκρασίας, χρησιμοποιούνται οι βαθμοί της κλίμακας κελσίου (°C) ενώ σε κάποιες άλλες χώρες χρησιμοποιούνται οι βαθμοί της κλίμακας Φαρενάιτ (°F).
Η σχέση που συνδέει τους βαθμούς στην κλίμακα Φαρενάιτ (F) με τους βαθμούς στην κλίμακα κελσίου (C) δίνεται από τον τύπο:
$F = 1{,}8C + 32$.

- ✓ Ένας Αμερικανός πολίτης που θέλει να ταξιδέψει στην Κύπρο πληροφορείται ότι η θερμοκρασία στη Λεμεσό είναι 30°C. Πώς μπορεί να μετατρέψει τη θερμοκρασία σε °F;
- ✓ Ένας Κύπριος που θα ταξιδέψει στη Νέα Υόρκη (Αμερική) πληροφορείται ότι η θερμοκρασία εκεί είναι 42°F. Πώς μπορεί να μετατρέψει τη θερμοκρασία σε °C;
- ✓ Να γράψετε έναν τύπο για να μπορείτε να υπολογίζετε τη θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου (°C), όταν είναι γνωστή η θερμοκρασία σε βαθμούς Φαρενάιτ (°F).
- ✓ Πόσο αυξάνεται η θερμοκρασία σε βαθμούς Φαρενάιτ (°F), όταν σημειώνεται αύξηση κατά 1°C;

Μαθαίνω

- Αν έχουμε μία σχέση που συνδέει δύο ή περισσότερες μεταβλητές, μπορούμε, χρησιμοποιώντας τις τεχνικές που μάθαμε στις εξισώσεις, να επιλύσουμε τη σχέση αυτή ως προς μία μεταβλητή.
  Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **μετασχηματισμός τύπου**.

  Παράδειγμα:

  Ο τύπος υπολογισμού του εμβαδού ενός ορθογωνίου $E = \alpha \cdot \beta$, επιλύεται ως προς το β ως εξής:

  $\Rightarrow \alpha \cdot \beta = E$

  $\Rightarrow \beta = \dfrac{E}{\alpha}$

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τη βάση του παραλληλογράμμου που έχει περίμετρο 42 cm και η άλλη βάση του είναι ίση με:
   (α) 7 cm
   (β) 10 cm
   (γ) 3 cm

Λύση:

Ο τύπος της περιμέτρου του παραλληλογράμμου είναι $\Pi = 2(\beta_1 + \beta_2)$.

Για να υπολογίσουμε το μήκος της άγνωστης βάσης σε καθεμιά από τις πιο πάνω περιπτώσεις θα πρέπει:
<u>Α΄ τρόπος:</u>
Να κάνουμε αντικατάσταση στον τύπο και να επιλύσουμε κάθε φορά την εξίσωση που προκύπτει με άγνωστο το (β_1),
ή
<u>Β΄ τρόπος:</u>
Να επιλύσουμε τον τύπο $\Pi = 2(\beta_1 + \beta_2)$ *ως προς τη μία βάση* (β_1) *και ακολούθως να κάνουμε αντικατάσταση με τις τιμές των* Π *και* β_2.

$\Pi = 2(\beta_1 + \beta_2)$

$\Rightarrow \Pi = 2\beta_1 + 2\beta_2$ *Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.*

$\Rightarrow \Pi - 2\beta_2 = 2\beta_1$ *Απομονώνουμε τη μεταβλητή* β_1 *στο ένα μέλος.*

$\Rightarrow \dfrac{\Pi - 2\beta_2}{2} = \beta_1$ *Διαιρούμε και τα δύο μέλη με τον συντελεστή της μεταβλητής* β_1.

Άρα, $\beta_1 = \frac{\Pi - 2\beta_2}{2}$

Αντικαθιστούμε την τιμή της περιμέτρου $\Pi = 42\ cm$ *και την τιμή του μήκους της άλλης βάσης:*

(α) $\beta_2 = 7\ \text{cm}$

$$\Rightarrow \beta_1 = \frac{\Pi - 2\beta_2}{2} = \frac{42 - 2\cdot 7}{2} = \frac{42-14}{2} = \frac{28}{2} = 14\ cm$$

(β) $\beta_2 = 10\ \text{cm}$

$$\Rightarrow \beta_1 = \frac{\Pi - 2\beta_2}{2} = \frac{42 - 2\cdot 10}{2} = \frac{42-20}{2} = \frac{22}{2} = 11\ cm$$

(γ) $\beta_2 = 3\ \text{cm}$

$$\Rightarrow \beta_1 = \frac{\Pi - 2\beta_2}{2} = \frac{42 - 2\cdot 3}{2} = \frac{42-6}{2} = \frac{36}{2} = 18\ cm$$

Δραστηριότητες

1. Να επιλύσετε τους πιο κάτω τύπους ως προς τη μεταβλητή που σημειώνεται μέσα στην παρένθεση.

i.	$y = 3x$	(x)	ii.	$E = \alpha \cdot \beta$	(α)
iii.	$y = 5x - 1$	(x)	iv.	$y = \alpha x + \beta$	(x)
v.	$2y - x = -5$	(y)	vi.	$T = \frac{K \cdot E \cdot X}{100}$	(K)
vii.	$2x - 5y = 1$	(y)	viii.	$\gamma = \frac{2\pi \cdot R \cdot \mu}{360}$	(R)

2. Για τον υπολογισμό της απόστασης που διανύει ένα αυτοκίνητο που κινείται με σταθερή ταχύτητα u σε χρόνο t, χρησιμοποιείται ο τύπος $S = ut$.

   (α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

S	u	t
	10	2
60	15	
75		3

   (β) Ποιο από τα πιο κάτω είναι ορθό, αν ο τύπος $S = ut$ επιλυθεί ως προς u;

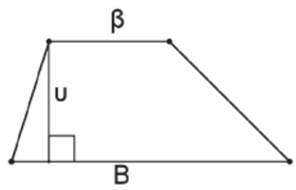
   Α. $u = S - t$
   Β. $u = S \cdot t$
   Γ. $u = \frac{t}{S}$
   Δ. $u = -\frac{S}{t}$
   Ε. κανένα από τα πιο πάνω

3. Εμπειρικές μελέτες για τη χιονόπτωση στην Αγγλία κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι ο αριθμός A των ημερών ενός έτους στη διάρκεια των οποίων πέφτει χιόνι, δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο $A = 0{,}155\upsilon + 11$, όπου υ είναι το υψόμετρο ενός τόπου (στην Αγγλία) σε μέτρα. Χρησιμοποιώντας τον τύπο αυτό, να υπολογίσετε:

   (α) Πόσες ημέρες χιονίζει σε έναν τόπο που είναι παραθαλάσσιος ($\upsilon = 0$);

   (β) Σε ποιο υψόμετρο χιονίζει 6 μήνες τον χρόνο (180 ημέρες) και σε ποιο υψόμετρο χιονίζει κάθε μέρα (360 μέρες);

4. Το $E = \frac{(\beta+B)\upsilon}{2}$ εκφράζει το εμβαδόν του τραπεζίου, που φαίνεται δίπλα.
   (α) Να επιλύσετε τον τύπο αυτό ως προς τη μεταβλητή (υ).
   (β) Να βρείτε το ύψος του τραπεζίου, αν το εμβαδόν του είναι $60\ m^2$ και οι βάσεις του είναι $8\ m$ και $12\ m$.



5. Να αντιστοιχίσετε κάθε τύπο της Α΄ Στήλης με τον αντίστοιχο τύπο της Β΄ Στήλης:

Α΄ Στήλη		Β΄ Στήλη	
Να επιλύσετε τους πιο κάτω τύπους ως προς τη μεταβλητή (γ):			
Α.	$2\alpha + \gamma = \beta$	i.	$\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$
Β.	$\alpha\gamma = \beta$	ii.	$\gamma = \alpha - \beta$
Γ.	$\alpha - \gamma = \beta$	iii.	$\gamma = 2\beta - \alpha$
Δ.	$2(\alpha + \gamma) = \beta$	iv.	$\gamma = \beta - 2\alpha$
Ε.	$2\alpha - 3\gamma + \beta = 0$	v.	$\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$
		vi.	$\gamma = \frac{\beta-2\alpha}{2}$
		vii.	$\gamma = \frac{2\alpha+\beta}{3}$

Ιδιότητες Ανισοτήτων

Διερεύνηση

Δίνεται η πιο κάτω ανισότητα:

$$-4 < 8$$

Να γράψετε τις ανισότητες που προκύπτουν, αν:

- *Προσθέσουμε και στα δύο μέλη τον αριθμό* 2.
- *Προσθέσουμε και στα δύο μέλη τον αριθμό* 100.
- *Προσθέσουμε και στα δύο μέλη τον αριθμό* -3.

✓ Τι παρατηρείτε;

✓ Ποια είναι η φορά της νέας ανίσωσης που προκύπτει αν και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό;

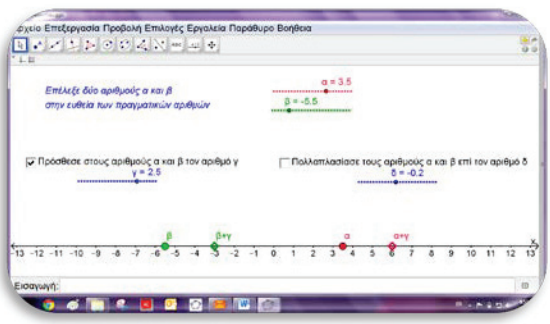
Να γράψετε τις ανισότητες που προκύπτουν, αν:

- *Πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με τον αριθμό* 2.
- *Πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με τον αριθμό* $\frac{1}{2}$.
- *Πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με τον αριθμό* -2.
- *Πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με τον αριθμό* -100.

✓ Τι παρατηρείτε;

✓ Να γράψετε μια δική σας ανισότητα και να την πολλαπλασιάσετε επί έναν ***θετικό*** και επί έναν ***αρνητικό*** αριθμό.

Να ανοίξετε το αρχείο «B_En4_Anisotites.ggb». Να μετακινήσετε τους δρομείς και να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας.



Μαθαίνω

Στην καθημερινή ζωή πολλές φορές χρειάζεται να συγκρίνουμε δυο μεγέθη με μια σχέση ισότητας ή ανισότητας, χρησιμοποιώντας τα σύμβολα $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $=$.

Ιδιότητες Ανισοτήτων

✓ Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει μια νέα ανισότητα με την ίδια φορά.

Γενικά:

- Αν $A < B \Leftrightarrow A + \boldsymbol{\Gamma} < B + \boldsymbol{\Gamma}$
- Αν $A > B \Leftrightarrow A + \boldsymbol{\Gamma} > B + \boldsymbol{\Gamma}$

Παραδείγματα:

$5 > 3$

- *Προσθέτουμε* 5 *και στα δύο μέλη:*

  $5 + 5 = 10$ *και* $3 + 5 = 8$

  Παρατηρούμε ότι $10 > 8$. *Η φορά της ανισότητας διατηρείται.*

- *Προσθέτουμε* -4 *και στα δύο μέλη:*

  $5 + (-4) = 1$ *και* $3 + (-4) = -1$

  Παρατηρούμε ότι $1 > -1$. *Η φορά της ανισότητας διατηρείται.*

✓ Αν και τα δύο μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιαστούν:

- με τον **ίδιο θετικό αριθμό**, τότε προκύπτει μια νέα ανισότητα **με την ίδια φορά**,
- με τον **ίδιο αρνητικό αριθμό**, τότε προκύπτει μια νέα ανισότητα **με αντίθετη φορά**.

Γενικά:

- Αν $A < B$ και $\Gamma > 0 \Leftrightarrow A \cdot \boldsymbol{\Gamma} < B \cdot \boldsymbol{\Gamma}$
- Αν $A > B$ και $\Gamma > 0 \Leftrightarrow A \cdot \boldsymbol{\Gamma} > B \cdot \boldsymbol{\Gamma}$
- Αν $A < B$ και $\Gamma < 0 \Leftrightarrow A \cdot \boldsymbol{\Gamma} > B \cdot \boldsymbol{\Gamma}$
- Αν $A > B$ και $\Gamma < 0 \Leftrightarrow A \cdot \boldsymbol{\Gamma} < B \cdot \boldsymbol{\Gamma}$

Παραδείγματα:

- $7 > -1$

  Πολλαπλασιάζουμε επί 2 *και τα δύο μέλη:*

  $7 \cdot 2 = 14$ *και* $-1 \cdot 2 = -2$

  Παρατηρούμε ότι $14 > -2$. *Η φορά της ανισότητας διατηρείται.*

➢ $8 > 6$

Πολλαπλασιάζουμε επί $-\frac{1}{2}$ *και τα δύο μέλη:*

$8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{2} = -4$ *και* $6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{6}{2} = -3$

Παρατηρούμε ότι $-4 < -3$. *Η νέα ανισότητα έχει* ***αντίθετη φορά.***

Παραδείγματα

1. Να συμπληρώσετε τα κενά, σύμφωνα με το παράδειγμα, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ανισοτήτων:

<u>Παράδειγμα</u>: Αν $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + 2 > \beta + 2$

(α) Αν $x > 5 \Leftrightarrow x - 3$ .... (β) Αν $x \geq \omega \Leftrightarrow \frac{x}{3}$ ....

(γ) Αν $\alpha > \beta \Leftrightarrow -2\alpha$ .... (δ) Αν $x < 5 \Leftrightarrow 4x + 1$ ....

(ε) Αν $\alpha > 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{-2}$ ....

Λύση:

(α) *Αν* $x > 5 \Leftrightarrow x - 3 > 5 - 3 \Leftrightarrow x - 3 > 2$

Προσθέτουμε -3 *(ή αφαιρούμε 3) και στα δύο μέλη. Άρα, η φορά διατηρείται.*

(β) *Αν* $x \geq \omega \Leftrightarrow \frac{x}{3} \geq \frac{\omega}{3}$

Πολλαπλασιάζουμε επί $\frac{1}{3}$ *(ή διαιρούμε με 3) και τα δύο μέλη. Άρα, η φορά διατηρείται.*

(γ) *Αν* $\alpha > \beta \Leftrightarrow -2\alpha < -2\beta$

Πολλαπλασιάζουμε επί -2 *και τα δύο μέλη. Άρα, η φορά αλλάζει.*

(δ) *Αν* $x < 5 \Leftrightarrow 4x < 4 \cdot 5 \Leftrightarrow 4x + 1 < 20 + 1 \Leftrightarrow 4x + 1 < 21$

Πολλαπλασιάζουμε επί 4 και ακολούθως προσθέτουμε 1 και στα δύο μέλη. Άρα, η φορά διατηρείται.

(ε) *Αν* $\alpha > 2 \Leftrightarrow \alpha - 1 > 2 - 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{-2} < \frac{2-1}{-2} \Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{-2} < -\frac{1}{2}$

Αφαιρούμε 1, η φορά διατηρείται, και ακολούθως διαιρούμε με -2 *και η φορά αλλάζει.*

Δραστηριότητες

1. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο σύμβολο $(>, <, =, \leq, \geq)$:

(α) Αν $x < 3 \Leftrightarrow x + 3$ 6

(β) Αν $x < -3 \Leftrightarrow \frac{x}{2}$ .... $-\frac{3}{2}$

(γ) Αν $x > 5 \Leftrightarrow x - 3$ 2

(δ) Αν $x \leq 6 \Leftrightarrow \frac{x}{-3}$ ....-2

(ε) Αν $x \geq -2 \Leftrightarrow 2x$ .... -4

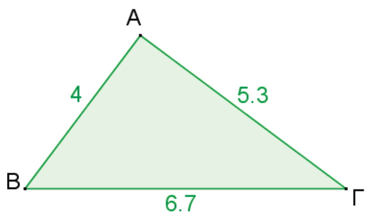
(στ) Αν $x < 4 \Leftrightarrow \frac{3x}{2}$ 6

(ζ) Αν $x < 7 \Leftrightarrow -3x$ .... -21

(η) Αν $x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -4x$ 2

2. Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία και αντίστροφα. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $(>, <, =)$, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

(α)



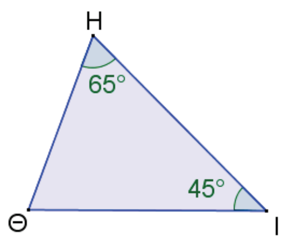
$\hat{A}$ .... $\hat{B}$

$\hat{A}$ .... $\hat{\Gamma}$

$\frac{\hat{\Gamma}}{2}$ .... $\frac{\hat{B}}{2}$

$\hat{A} + \hat{B}$ .... $\hat{\Gamma} + \hat{B}$

(β)



$H\Theta$ .... HI

$I\Theta$ .... $H\Theta$

$3 \cdot H\Theta$ .... $3 \cdot \Theta I$

$\frac{H\Theta}{2}$ .... $\frac{\Theta I}{2}$

3. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις:

(α)	Αν $\alpha < \beta$, τότε $\alpha - 16 < \beta - 16$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν $\alpha < \beta$, τότε $-\alpha < -\beta$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν $\alpha < 6$, τότε $\frac{\alpha}{2} < 3$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν $\alpha < 0$, τότε $2\alpha < \alpha$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Αν $\alpha > 1$, τότε $1 > \frac{1}{\alpha}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

4. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $(>, <, =)$ έτσι ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις. Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$, τότε:

(α) $\alpha\gamma \ldots\ldots\ \beta\gamma$ (β) $\alpha + \gamma \ldots\ldots\ \beta + \gamma$

(γ) $\alpha - \gamma \ldots\ldots\ \beta - \gamma$ (δ) $\alpha + \gamma^2 \ldots\ldots\ \beta + \gamma^2$

(ε) $\frac{\alpha}{2\gamma} \ldots\ldots \frac{\beta}{2\gamma}$ (στ) $\alpha\gamma^3 \ldots\ldots\ \beta\gamma^3$

5. Να δείξετε με τη βοήθεια των ιδιοτήτων ότι ισχύουν τα πιο κάτω:

(α) $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$

(β) $\alpha > \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha < 0$

(γ) $\alpha > \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > \alpha\beta$

Ανισώσεις α΄ Βαθμού

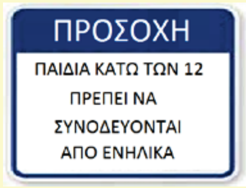
Εξερεύνηση

Πιο κάτω φαίνονται τέσσερις πινακίδες:

Στάθμευση

Ταχύτητα

Ζωολογικός Κήπος



Πρόγραμμα τηλεόρασης

ΚΑΤΑΛΛΗΛΟ
ΓΙΑ ΑΤΟΜΑ
ΑΝΩ ΤΩΝ 12

✓ Να μελετήσετε τις πιο πάνω πινακίδες και να σχολιάσετε το περιεχόμενό τους.

Διερεύνηση

Ο Ιάκωβος είναι συνδρομητής σταθερής τηλεφωνίας. Η εταιρεία προσφέρει στους πελάτες της την επιλογή μεταξύ των δύο πιο κάτω σχεδίων.

	ΣΧΕΔΙΟ 1	ΣΧΕΔΙΟ 2
Πάγια Χρέωση (€)	5,35	10,00
Επιπλέον Χρέωση ανά λεπτό (€)	0,10	0,05

Ο Ιάκωβος, αφού μελέτησε τα δύο σχέδια, υποστηρίζει ότι αν τον προηγούμενο μήνα χρησιμοποιούσε το $1^{ο}$ σχέδιο για αποπληρωμή του μηνιαίου λογαριασμού του, θα πλήρωνε περισσότερα από ότι θα πλήρωνε με το $2^{ο}$ σχέδιο.

✓ Πόσος μπορεί να ήταν ο συνολικός χρόνος ομιλίας τον συγκεκριμένο μήνα;

Μαθαίνω

- Η **ανισότητα** που περιέχει μεταβλητή ονομάζεται **ανίσωση**.

  Παράδειγμα:
  $2x + 1 > 7$

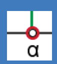
- **Λύση της ανίσωσης** είναι κάθε τιμή της μεταβλητής που την επαληθεύει.
  Παράδειγμα:
  $2x + 1 > 7$
  $\Leftrightarrow 2x > 7 - 1$
  $\Leftrightarrow 2x > 6$
  $\Leftrightarrow x > 3$ *Κάθε πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του 3 επαληθεύει την ανίσωση.*

Η διαδικασία που ακολουθούμε, για να βρούμε τις λύσεις μιας ανίσωσης, ονομάζεται **επίλυση** της ανίσωσης.

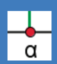
Για κάθε ανίσωση ορίζεται ένα σύνολο λύσεων του οποίου κάθε στοιχείο επαληθεύει την ανίσωση. Το σύνολο αυτό μπορεί να αναπαρασταθεί με διάφορους τρόπους, όπως πιο κάτω:

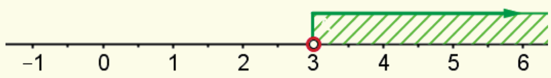
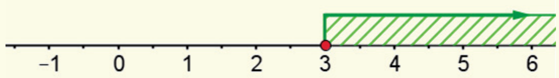
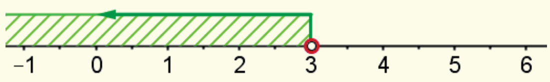
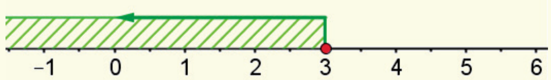
Στη γραφική αναπαράσταση της λύσης της ανίσωσης στην ευθεία των πραγματικών αριθμών χρησιμοποιούμε το σύμβολο:

○ πάνω στην τιμή α, όταν η τιμή α **ΔΕΝ** συμπεριλαμβάνεται στη λύση της ανίσωσης.



● πάνω στην τιμή α, όταν η τιμή α συμπεριλαμβάνεται στη λύση της ανίσωσης.



Συμβολικά	**Γραφικά** στην ευθεία των πραγματικών αριθμών	**Λεκτικά**
$x > 3$		Το x μεγαλύτερο του 3.
$x \geq 3$		Το x μεγαλύτερο ή ίσο του 3.
$x < 3$		Το x μικρότερο του 3.
$x \leq 3$		Το x μικρότερο ή ίσο του 3.

Παραδείγματα

1. Να λύσετε την ανίσωση $2x-4 \le 4x+7$ και να παραστήσετε γραφικά τη λύση της στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Λύση:

$2x-4 \le 4x+7$

$\Leftrightarrow 2x-4x \le 7+4$ *Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους.*

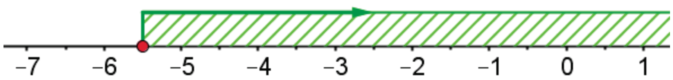
$\Leftrightarrow -2x \le +11$ *Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων.*

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x}{-2} \ge \dfrac{+11}{-2}$ *Διαιρούμε με τον συντελεστή του άγνωστου όρου, δηλαδή το -2. Ο συντελεστής είναι αρνητικός. Άρα, θα προκύψει ανίσωση με* ***αντίθετη*** *φορά.*

$\Leftrightarrow x \ge -5\frac{1}{2}$

Η ανίσωση είναι αληθής για κάθε τιμή της μεταβλητής x που είναι μεγαλύτερη ή και ίση με τον αριθμό $-5\frac{1}{2}$.

<u>Γραφική λύση:</u>



2. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{2(x-4)}{3} \le \frac{x+8}{2} - \frac{4x-5}{6}$.

Λύση:

$\frac{2(x-4)}{3} \le \frac{x+8}{2} - \frac{4x-5}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{\overset{2}{\overbrace{2(x-4)}}}{3} \le \frac{\overset{3}{\overbrace{x+8}}}{2} - \frac{\overset{1}{\overbrace{4x-5}}}{6}$ *Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα, για να απαλείψουμε τους παρονομαστές.*

$\Leftrightarrow 4(x-4) \le 3(x+8) - (4x-5)$ *Κάνουμε τις πράξεις.*

$\Leftrightarrow 4x-16 \le 3x+24-4x+5$ *Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους.*

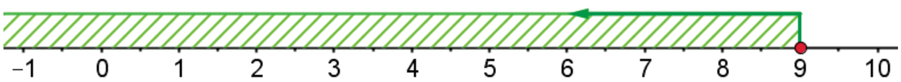
$\Leftrightarrow 4x-3x+4x \le 24+5+16$ *Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων.*

$\Leftrightarrow 5x \le 45$ *Διαιρούμε με τον συντελεστή του άγνωστου όρου.*

$\Leftrightarrow \frac{5x}{5} \le \frac{45}{5}$

$\Leftrightarrow x \le 9$

Η ανίσωση είναι αληθής για κάθε τιμή της μεταβλητής x μικρότερη ή ίση με το 9.



<u>Επίλυση ανίσωσης:</u>

- Απαλείφουμε παρονομαστές και παρενθέσεις.
- Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους.
- Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων.
- Διαιρούμε με τον συντελεστή του άγνωστου όρου και τα δύο μέλη.

Αν ο συντελεστής είναι θετικός, η ανισότητα δεν αλλάζει φορά, ενώ αν είναι αρνητικός η φορά της ανισότητας αλλάζει.

3. Να λυθεί η ανίσωση $3y - 5 + y > 4y + 3$

Λύση:
$3y - 5 + y > 4y + 3$

$\Leftrightarrow 3y + y - 4y > +3 + 5$

$\Leftrightarrow 0y > 8$

Παρατηρούμε ότι η ανίσωση δεν αληθεύει για καμιά τιμή της μεταβλητής y. Δηλαδή η ανίσωση είναι ***αδύνατη****.*

4. Να λυθεί η ανίσωση $3x - 5 + x < 4x + 3$

Λύση:
$3x - 5 + x < 4x + 3$

$\Leftrightarrow 3x + x - 4x < +3 + 5$

$\Leftrightarrow 0x < 8$

Παρατηρούμε ότι η ανίσωση είναι ***αληθής για κάθε τιμή*** *της μεταβλητής x.*

5. Η μηνιαία κάρτα διαδρομών με το λεωφορείο κοστίζει €40. Μία απλή διαδρομή χωρίς κάρτα κοστίζει €1,50. Να υπολογίσετε πόσες διαδρομές το μήνα πρέπει να κάνει κάποιος, για να τον συμφέρει οικονομικά η αγορά της κάρτας.

Λύση:
Έστω ο αριθμός των απλών διαδρομών με το λεωφορείο είναι x
Τότε, το συνολικό μηνιαίο κόστος θα είναι $1{,}50 \cdot x$

Άρα, για να συμφέρει η αγορά της μηνιαίας κάρτας πρέπει να ισχύει η ανίσωση:

$1{,}5 \cdot x > 40$

$\Leftrightarrow x > 40 : 1{,}5$

$\Leftrightarrow x > 26{,}67$

Άρα, αν κάποιος κάνει τουλάχιστον 27 διαδρομές μηνιαίως, τότε τον συμφέρει η αγορά της μηνιαίας κάρτας.

Δραστηριότητες

1. Δίνεται η ανίσωση $x > 2$.
   (α) Να δώσετε πέντε αριθμούς που επαληθεύουν την πιο πάνω ανίσωση.
   (β) Να δώσετε τις τρεις μικρότερες ακέραιες λύσεις της ανίσωσης.
   (γ) Πόσες λύσεις έχει η πιο πάνω ανίσωση;

2. Δίνεται η ανίσωση $3x - 9 < 0$
   (α) Να λύσετε την ανίσωση.
   (β) Να δώσετε τρεις τιμές του x που επαληθεύουν την ανίσωση.

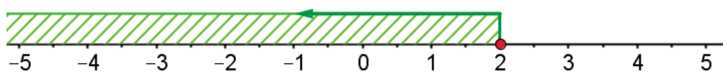
3. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω τιμές του x: $-2,\ 8,\ 0, -\frac{1}{2},\ 5\ ,\ -6\frac{1}{3}$ επαληθεύουν την ανίσωση $3x < 15$.

4. Ποιος είναι ο μικρότερος ακέραιος αριθμός που είναι λύση της ανίσωσης $-7x < 21$;

5. Να περιγράψετε το σύνολο των λύσεων $\{\alpha | a \geq -4\}$ και να το παραστήσετε γραφικά.

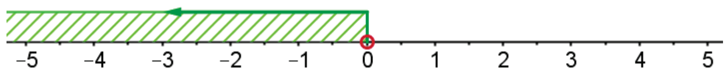
6. Δίνονται οι γραφικές λύσεις ανισώσεων. Να επιλέξετε τις αντίστοιχες αλγεβρικές τους λύσεις:

(α)



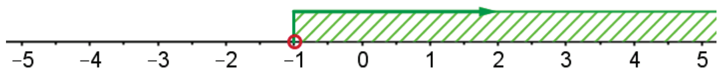
Α. $x \geq 2$ Β. $x < 2$ Γ. $x \leq 2$ Δ. $x > 2$

(β)



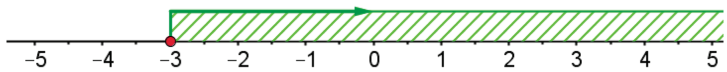
Α. $x \geq 0$ Β. $x \leq 0$ Γ. $x > 0$ Δ. $x < 0$

(γ)



Α. $x \leq -1$ Β. $x < -1$ Γ. $x > -1$ Δ. $x \geq -1$

(δ)



Α. $x \geq -3$ Β. $x < -3$ Γ. $x > -3$ Δ. $x \leq -3$

7. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε γραφικά τη λύση τους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

(α) $3a - 4 > a - 2$ (β) $2(x-1) + 3 < 5$

(γ) $1 - 3(x-2) \leq 10$ (δ) $2(\kappa - 1) - 3\kappa \geq 5 - \kappa$

(ε) $4 - 5(\alpha - 2) \geq 13 - 3(\alpha + 1)$ (στ) $\frac{3(a-4)}{5} - \frac{5a-1}{10} > \frac{5+a}{3}$

8. Κάποιος διαθέτει μια δεξαμενή χωρητικότητας $48\, m^3$ για αποθήκευση νερού. Η δεξαμενή ήταν κενή. Γεμίζει τη δεξαμενή με ρυθμό 2,5 $m^3/\,h$. Να βρείτε:
   (α) Πόσο νερό θα υπάρχει στη δεξαμενή, αν η παροχή νερού παραμείνει ανοικτή για 24 ώρες;
   (β) Πόσες ώρες μπορεί να παραμείνει ανοιχτή η παροχή νερού, χωρίς η δεξαμενή να υπερχειλίσει;

9. Ένας υπάλληλος μιας εταιρείας ηλεκτρονικών ειδών έχει σταθερό μηνιαίο μισθό €700 και παίρνει 8% προμήθεια πάνω στην τιμή πώλησης κάθε προϊόντος. Πόσες πωλήσεις πρέπει να κάνει ο υπάλληλος έτσι ώστε να παίρνει μισθό τουλάχιστον €2300 τον μήνα;

10. Να εξετάσετε για ποιες πραγματικές τιμές του x ορίζεται η καθεμιά από τις παραστάσεις:

$A = \sqrt{3x - 2}$

$B = \sqrt{20 - 5x}$

Συναλήθευση Ανισώσεων – Διαστήματα

Διερεύνηση (1)

Η ακοή είναι μια από τις πέντε αισθήσεις. Όργανο αντίληψης είναι τα αφτιά, ενώ το αντικείμενο της αντίληψης είναι ο ήχος. Οι διάφοροι οργανισμοί μπορούν να αντιληφθούν ήχους διαφορετικών συχνοτήτων.

Ο άνθρωπος μπορεί να ακούσει ήχους με συχνότητα μεταξύ 20 και 20000 Hz, ενώ οι σκύλοι ακούνε ήχους μεταξύ 15 και 50000 Hz.

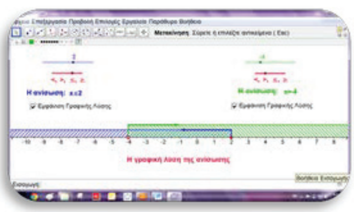
Η νυχτερίδα, επειδή βασίζεται περισσότερο στην ακοή παρά στην όραση, μπορεί να ακούσει δύο ανθρώπους να ψιθυρίζουν στη μία γωνιά ποδοσφαιρικού γηπέδου ενώ η ίδια βρίσκεται στην άλλη.

- ✓ Σε ποιες συχνότητες πρέπει να εκπέμπεται ένας ήχος για να μπορούν να τον ακούσουν και οι άνθρωποι και οι σκύλοι;
- ✓ Πώς μπορείτε να περιγράψετε το πιο πάνω σύνολο συχνοτήτων με τη χρήση μαθηματικών συμβόλων;
- ✓ Ένας εκπαιδευτής χρησιμοποιεί μια σφυρίχτρα την οποία μπορούν να ακούσουν μόνο οι σκύλοι. Ποια μπορεί να είναι η συχνότητα του ήχου που παράγει;

Διερεύνηση (2)

Το Δημοτικό Συμβούλιο μιας πόλης θέλει να κατασκευάσει ένα γλυπτό στην είσοδο του λιμανιού. Ζήτησαν από τον γλύπτη που ανάλαβε το έργο να χρησιμοποιήσει τα δύο κατάρτια ενός παλιού πλοίου. Ο γλύπτης αποφάσισε να κατασκευάσει το γλυπτό που φαίνεται δίπλα. Οι δύο πλευρές του τριγώνου θα είναι τα κατάρτια με μήκος 9 m και 5 m, ενώ η τρίτη πλευρά θα είναι μια μεταλλική δοκός.

- ✓ Ο γλύπτης γνωρίζει ότι για να μπορεί να κατασκευαστεί ένα τρίγωνο πρέπει κάθε πλευρά του να είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών. Να βρείτε πόσο μπορεί να είναι το μήκος της τρίτης πλευράς του τριγώνου.
- ✓  Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αρχείο «B_En4_Synalithefsi.ggb», για να παρουσιάσετε την απάντησή σας.



- ✓ Να μετακινήσετε τους δρομείς και να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας για τις κοινές λύσεις δύο ανισώσεων.

Μαθαίνω

- Το σύνολο των λύσεων μιας ανίσωσης ή το σύνολο των κοινών λύσεων δύο ή περισσότερων ανισώσεων μπορεί να αναπαρασταθεί με τη μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων πραγματικών αριθμών.

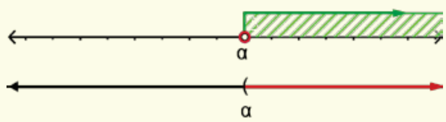
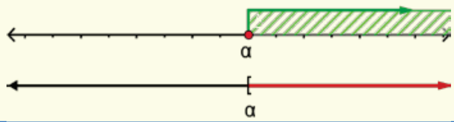
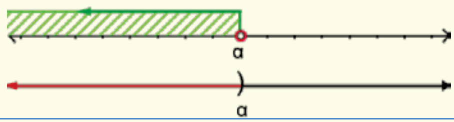
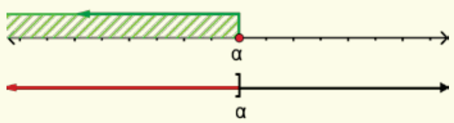
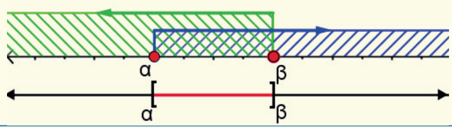
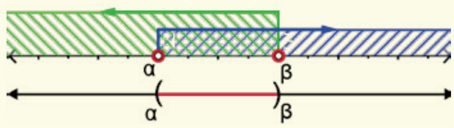
Το x μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες του α.

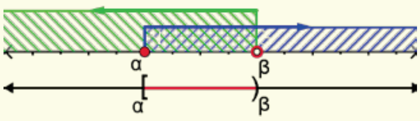
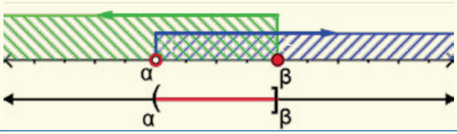
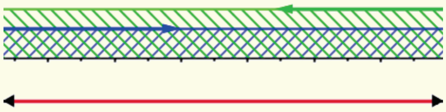
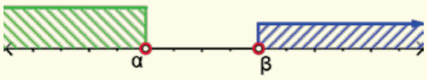
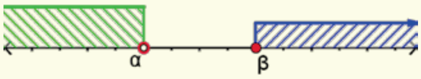
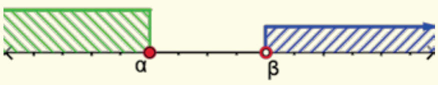
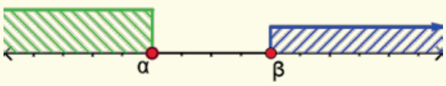
Η λέξη άπειρο προέρχεται από το στερητικό πρόθεμα «α-» και τη λέξη «πέρας» που σημαίνει τέλος. Επομένως το άπειρο είναι αυτό που δεν έχει τέλος.

Το σύμβολο ∞ το εισήγαγε ο John Wallis το 1655 στο βιβλίο του «Arithmetica infitorum»

Η ανίσωση $\alpha \leq x \leq \beta$ ονομάζεται διπλή ανίσωση.

Διαστήματα

Ανίσωση	Γραφική αναπαράσταση της λύσης της ανίσωσης και του διαστήματος	Συμβολική αναπαράσταση
$x > a$	*Το x είναι μεγαλύτερο του α.* 	$x \in (\alpha, +\infty)$
$x \geq a$	*Το x είναι μεγαλύτερο ή ίσο του α.* 	$x \in [\alpha, +\infty)$
$x < a$	*Το x είναι μικρότερο του α.* 	$x \in (-\infty, \alpha)$
$x \leq a$	*Το x είναι μικρότερο ή ίσο του α.* 	$x \in (-\infty, a]$
$a \leq x \leq \beta$	*Το x είναι μεγαλύτερο ή ίσο του α και μικρότερο ή ίσο του β.* 	$x \in [\alpha, \beta]$
$a < x < \beta$	*Το x είναι μεγαλύτερο του α και μικρότερο του β* 	$x \in (\alpha, \beta)$

$a \leq x < \beta$	*Το x είναι μεγαλύτερο ή ίσο του α και μικρότερο του β.* 	$x \in [\alpha, \beta)$
$a < x \leq \beta$	*Το x είναι μεγαλύτερο του α και μικρότερο ή ίσο του β.* 	$x \in (\alpha, \beta]$
$-\infty < x < +\infty$	*Το x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.* 	$x \in \mathbb{R}$
Αν $a < \beta$: $x < a$ και $x > \beta$	*Το x είναι μικρότερο του α και μεγαλύτερο του β.* 	
$x < a$ και $x \geq \beta$	*Το x είναι μικρότερο του α και μεγαλύτερο ή ίσο του β.* 	$x \notin \mathbb{R}$ Δεν υπάρχει αριθμός που να επαληθεύει και τις δύο ανισώσεις
$x \leq a$ και $x > \beta$	*Το x είναι μικρότερο ή ίσο του α και μεγαλύτερο του β.* 	
$x \leq a$ και $x \geq \beta$	*Το x είναι μικρότερο ή ίσο του α και μεγαλύτερο ή ίσο του β.* 	

- Οι αριθμοί α και β των πιο πάνω διαστημάτων λέγονται **άκρα** του διαστήματος.
- Όταν ένα άκρο του διαστήματος **ανήκει** στο διάστημα, χρησιμοποιούμε το σύμβολο της **αγκύλης** και το διάστημα λέγεται **κλειστό** στο άκρο αυτό. Όταν ένα άκρο του διαστήματος **δεν ανήκει** στο διάστημα χρησιμοποιούμε το σύμβολο της **παρένθεσης** και το διάστημα λέγεται **ανοικτό** στο άκρο αυτό.

  Παράδειγμα:
  Το διάστημα $[3,5]$ *είναι κλειστό. Το διάστημα* $(-1,5)$ *είναι ανοικτό.*
  Το διάστημα $[0,9)$ *είναι κλειστό αριστερά και ανοικτό δεξιά.*

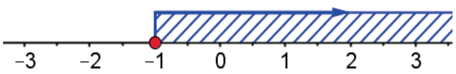
Παραδείγματα

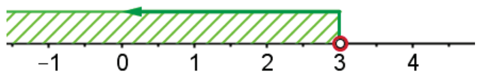
1. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων: $2x - 1 \geq x - 2$ και $\frac{x+6}{3} < 3$.

Λύση:

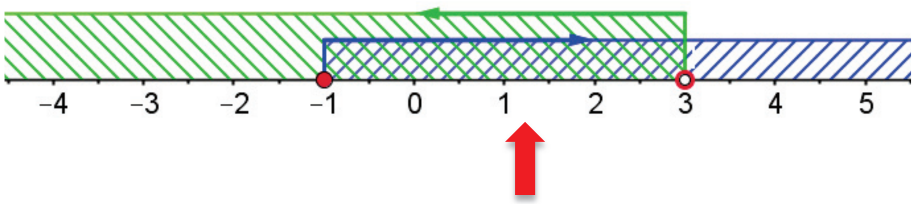
Επιλύουμε την κάθε ανίσωση χωριστά:

$2x - 1 \geq x - 2$	$\frac{x+6}{3} < 3$
$\Leftrightarrow 2x - x \geq 1 - 2$	$\Leftrightarrow x + 6 < 9$
$\Leftrightarrow x \geq -1$	$\Leftrightarrow x < 9 - 6$
	$\Leftrightarrow x < 3$





Στη συνέχεια αναπαριστάνουμε τις λύσεις των δύο ανισώσεων <u>στην ίδια ευθεία</u> των πραγματικών αριθμών και χρωματίζουμε την ***κοινή*** *λύση:*



Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι το σύνολο:

$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\}$ *ή* $x \in [-1,3)$

2. Ο φωτογράφος ενός περιοδικού έχει βασικό μισθό €500 ενώ για κάθε φωτογραφία που δημοσιεύεται στο περιοδικό πληρώνεται επιπλέον €20. Η διεύθυνση του περιοδικού μπορεί να διαθέτει για τον μισθό του φωτογράφου μέχρι €2250 μηνιαίως. Να υπολογίσετε τον αριθμό φωτογραφιών που μπορούν να δημοσιεύονται μηνιαίως, ώστε ο μισθός του φωτογράφου να είναι μεγαλύτερος από €1200.

Λύση:

Ο μηνιαίος μισθός του φωτογράφου είναι $500 + 20x$, *όπου* x *είναι ο αριθμός των φωτογραφιών που δημοσιεύονται.*

- *Για να είναι ο μισθός μεγαλύτερος από €1200, πρέπει:*
  $1200 < 500 + 20x$ *και*
- *Για να είναι ο μισθός μικρότερος ή ίσος με €2250, πρέπει:*
  $500 + 20x \leq 2250$

Άρα, ο μισθός πρέπει: $1200 < 500 + 20x \leq 2250$

Επιλύουμε την κάθε ανίσωση χωριστά:

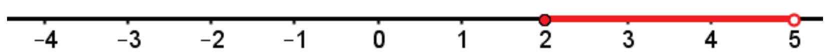
$$500 + 20x > 1200$$
$$\Leftrightarrow \quad 20x > 1200 - 500$$
$$\Leftrightarrow \quad 20x > 700$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{20}{20}x > \frac{700}{20}$$
$$\Leftrightarrow \quad x > 35$$

$$500 + 20x \leq 2250$$
$$\Leftrightarrow \quad 20x \leq 2250 - 500$$
$$\Leftrightarrow \quad 20x \leq 1750$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{20}{20}x \leq \frac{1750}{20}$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq 87{,}5$$

Άρα, για να ικανοποιούνται οι συνθήκες για τον μισθό του φωτογράφου, πρέπει να δημοσιεύονται περισσότερες από 35 και λιγότερες από 88 φωτογραφίες.

Δραστηριότητες

1. Σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις παρουσιάζεται η γραφική αναπαράσταση ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών. Να εκφράσετε την κάθε περίπτωση σε μορφή διαστήματος, όπως στο παράδειγμα:

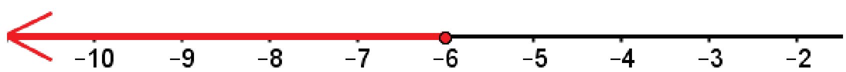


Διάστημα: $[2, 5)$

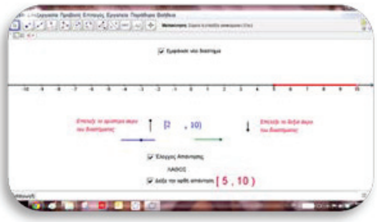
(α)

(β)

(γ)



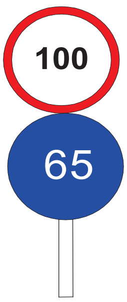
2. Να ανοίξετε το αρχείο «B_En4_diastimata.ggb» και να βρείτε το διάστημα που κάθε φορά αναπαριστάται στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.



3. Να εκφράσετε τα διαστήματα τιμών της μεταβλητής x που ακολουθούν, σε μορφή ανισώσεων και να τα παρουσιάσετε γραφικά στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

(α) $x \in (2,7)$	(β) $x \in (-3,3)$	(γ) $x \in [-4,4]$
(δ) $x \in (-\infty,-5)$	(ε) $x \in (\sqrt{3},8]$	(στ) $x \in (-\infty,\pi)$
(ζ) $x \in (-\infty,5]$	(η) $x \in (-2\,,+\infty)$	(θ) $x \in [-2,\sqrt{5})$

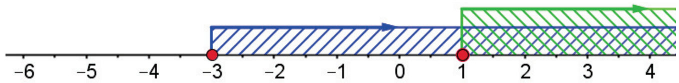
4. Ένα αεροπλάνο βρίσκει κενά αέρος ενώ πετά στα 30000 πόδια. Ο πύργος ελέγχου ειδοποιεί τον πιλότο να αυξήσει το ύψος του αεροπλάνου πάνω από τα 33000 πόδια ή να το μειώσει κάτω από τα 26000 πόδια, για να αποφύγει τα κενά αέρος. Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το ύψος το οποίο ο πιλότος πρέπει να αποφύγει.



5. Το όριο ταχύτητας, στους αυτοκινητόδρομους, καθορίζεται από τις πινακίδες του διπλανού σχήματος.
   (α) Να γράψετε αλγεβρικά την ανίσωση που εκφράζει την επιτρεπόμενη ταχύτητα και να την παραστήσετε γραφικά στον ίδιο άξονα.
   (β) Να γράψετε το διάστημα των τιμών της επιτρεπόμενης ταχύτητας.

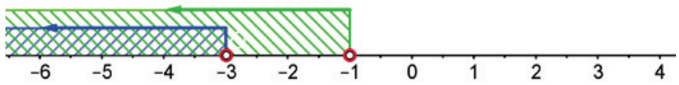
6. Δίνονται οι ανισώσεις $3x-4 \geq x-2$ και $2x+3<13$.
   (α) Να βρείτε τις λύσεις της κάθε ανίσωσης.
   (β) Ποια είναι η μικρότερη τιμή του x που ικανοποιεί και τις δύο ανισώσεις;
   (γ) Να βρείτε 4 άλλες λύσεις που ικανοποιούν και τις δύο ανισώσεις.
   (δ) Να βρείτε τη μεγαλύτερη ακέραια τιμή του x που ικανοποιεί και τις δύο ανισώσεις.
   (ε) Να βρείτε ένα τμήμα της ευθείας των πραγματικών αριθμών που συμπεριλαμβάνει το σύνολο των λύσεων που ικανοποιούν και τις δύο ανισώσεις.

7. Στο καθένα από τα πιο κάτω διαγράμματα, δίνονται οι γραφικές λύσεις δύο ανισώσεων. Να βρείτε τις κοινές λύσεις του καθενός από τα πιο κάτω ζεύγη ανισώσεων:

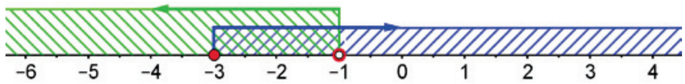


Παράδειγμα: $x \geq 1$

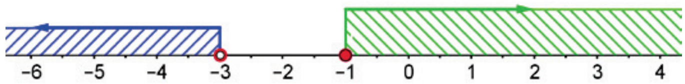
(α)



(β)



(γ)



8. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (αν υπάρχουν):

(α) $x < 5$ και $x \geq -2$

(β) $x < -3$ και $x \geq -1$

(γ) $y \geq 2$ και $y \leq 7\frac{1}{2}$

(δ) $5 > x$ και $x < 15$

9. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (αν υπάρχουν):

(α) $2x - 5 < 1$ και $5 + x > 4$

(β) $3(2x - 1) < 2(1 - x)$ και $x < 0$

(γ) $3(x + 2) < x - 4$ και $3x + 2 \geq 5x - 6$

(δ) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} \geq -1$ και $1 + \frac{4x+2}{2} \geq \frac{2(x-1)}{3}$

10. Ένας φυσικός αριθμός όταν διαιρεθεί με το 15 αφήνει υπόλοιπο 3. Να βρείτε τον αριθμό αυτό, αν ισχύει ότι είναι μικρότερος του 323 αλλά μεγαλύτερος του 310.

11. Να συμπληρώσετε κατάλληλα τα κενά, έτσι ώστε οι ανισώσεις:
    (α) $x \geq 3$ *και* $x < \square$ *να μην έχουν κοινές λύσεις.*
    (β) $x \geq 3$ *και* $x < \square$ *να έχουν κοινές λύσεις* $[3, 2014)$.
    (γ) $x \geq 3$ *και* $x < \square$ *να έχουν μια ακέραια κοινή λύση.*
    (δ) $x > 3$ *και* $x < \square$ *να μην έχουν κοινές ακέραιες λύσεις.*

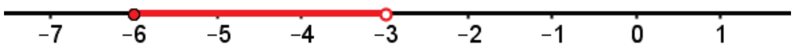
12. Η κυρία Μαρία για επαγγελματικούς σκοπούς χρειάζεται να ενοικιάζει ένα αυτοκίνητο για 4 ημέρες. Η εταιρεία ενοικίασης χρεώνει €19,50 τη μέρα και επιπλέον 20 *σεντ* το κάθε χιλιόμετρο που διανύει το αυτοκίνητο. Αν ο εργοδότης της πληρώνει μέχρι €35 την ημέρα για οδοιπορικά, να βρείτε τον μέγιστο αριθμό χιλιομέτρων που μπορεί να διανύσει, ώστε να μην υπερβεί το ποσό που μπορεί να πληρώνει η εταιρεία της.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Σε καθεμιά από πιο κάτω περιπτώσεις παρουσιάζεται η γραφική αναπαράσταση ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών. Να εκφράσετε κάθε περίπτωση σε μορφή διαστήματος, όπως το παράδειγμα:

Παράδειγμα: $(6, \infty)$

(α)



(β)

(γ)

2. Να εκφράσετε τα πιο κάτω διαστήματα τιμών της μεταβλητής x, σε μορφή ανισώσεων και να τα παρουσιάσετε γραφικά στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

(α) $x \in [-1, 5]$ (β) $x \in (-2, \frac{3}{5})$ (γ) $x \in (-\infty, -1]$

(δ) $x \in (-3, 1]$ (ε) $x \in [-2, \pi)$ (στ) $x \in (-9, +\infty)$

3. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω εξισώσεις έχουν μία λύση, καμιά λύση ή άπειρες λύσεις.

(α) $3x - 5 = 2x - 1 + x$ (β) $7x - 3(2x - 5) = 15$

(γ) $2(x + 2) + x = 6 + 3(x - 1) - x$ (δ) $4(a - 1) = 5 - 4(a + 2)$

(ε) $-2(-3x + 1) = 6(x + 3) - 12$ (στ) $3x - 4 + \frac{x}{2} = 7 + 4x$

(ζ) $\frac{3-x}{3} + \frac{x-2}{2} = \frac{x}{6}$ (η) $\frac{2x-1}{3} - \frac{5x+12}{12} = \frac{x-3}{4} + 1$

4. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ο αριθμός $A = 9 - 3(7 - 2x)$ είναι αρνητικός.

5. Ποιο από τα πιο κάτω σύνολα είναι το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης $-8x+11<83$;

$A=\{x|\ x>-9\}$ $\qquad$ $B=\{x|\ x>9\}$

$\Gamma=\{x|\ x<-9\}$ $\qquad$ $\Delta=\{x|\ x<9\}$

6. Να εξετάσετε κατά πόσο ισχύουν οι πιο κάτω ισοδυναμίες.

(α) $y=\alpha x+\beta \Leftrightarrow x=\frac{\beta-y}{\alpha}$

(β) $V=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma \Leftrightarrow \gamma=V-\alpha\cdot\beta$

(γ) $E=2(\alpha+\beta) \Leftrightarrow \alpha=\frac{E-2\beta}{2}$

(δ) $E=m\cdot c^2 \Leftrightarrow c=\frac{E}{2m}$

7. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις και να παραστήσετε γραφικά τη λύση τους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

(α) $x+2>1$ $\qquad$ (β) $3x<-9$

(γ) $-6x<28$ $\qquad$ (δ) $x-1\geq 2x$

(ε) $2(x-1)-3x<4(1+x)-1$ $\qquad$ (στ) $2x-5>x+3$

(ζ) $\frac{3x}{2}-\frac{5}{6}\leq\frac{x}{3}$ $\qquad$ (η) $\frac{2(x-5)}{2}\leq\frac{3(1-x)}{5}$

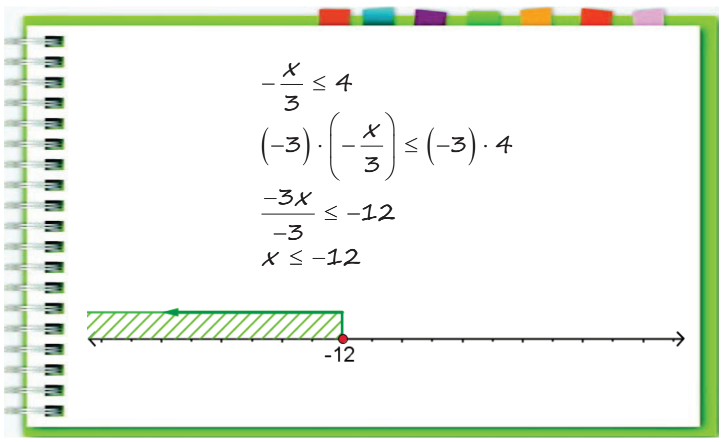
8. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των πιο κάτω ανισώσεων.

(α) $x<0$ και $x+3\geq -2$

(β) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\leq 5$ και $x<0$

(γ) $\frac{x-2}{3}+\frac{7}{6}\leq\frac{x-5}{4}$ και $1-x\leq\frac{7}{12}$

9. Ο Οδυσσέας έλυσε την ανίσωση $-\frac{x}{3}\leq 4$ όπως φαίνεται πιο κάτω. Να εξετάσετε την ορθότητα του συλλογισμού του.



10. Να προσδιορίσετε τον αριθμό α, ώστε η εξίσωση $\alpha x - 9 = 3(x-3)$ να είναι αόριστη.

11. Να προσδιορίσετε τον αριθμό λ, ώστε η εξίσωση $6(x-1) + \lambda x = 10$ να είναι αδύνατη.

12. Να βρείτε πόσες κοινές ακέραιες λύσεις έχουν οι ανισώσεις: $8y - 3(y+1) > 7y + 5$ και $\frac{y}{6} + \frac{y}{2} \geq \frac{y}{3} - 2$.

13. Ένα φορτηγό, το οποίο έχει μάζα (απόβαρο) 3 τόνων, είναι φορτωμένο με βαρέλια που το καθένα ζυγίζει 200 Kg. Πόσα το πολύ βαρέλια μπορεί να μεταφέρει το φορτηγό, ώστε να περάσει με ασφάλεια τη γέφυρα της οποίας η αντοχή είναι 8 τόνοι;

14. Ένα γυμναστήριο προσφέρει δύο «*πακέτα*» συνδρομής:

Πακέτο	Μηνιαία χρέωση	Χρέωση ανά επίσκεψη
Α	€10,00	€2,00
Β	€17,50	€1,50

Να εξετάσετε πόσες τουλάχιστον επισκέψεις πρέπει να κάνει ένας πελάτης τον μήνα για να συμφέρει να επιλέξει το «*πακέτο Β*».

15. Η τελική βαθμολογία σε ένα μάθημα καθορίζεται από τον πιο κάτω πίνακα. Αν ο Χρίστος έχει ήδη εξασφαλίσει βαθμολογίες 98, 76, 86 και 92 στα τέσσερα διαγωνίσματα, τι βαθμό μπορεί να πάρει στο 5^{ο} διαγώνισμα, ώστε να εξασφαλίσει:

(α) Βαθμολογία B;
(β) Βαθμολογία A;

Μέσος όρος βαθμών διαγωνίσματος	Τελική βαθμολογία
(92,100]	*Α*
(83,92]	*Β*
(73,83]	*Γ*
(47,73]	*Δ*
(0,47]	Αποτυχία

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:
   $2(x-3) > -2$ και $3x-2 < 13$ και $3x+1 \geq 5(x-1)$

2. Αν $5 < \alpha < 7 < \beta < 14$, ποια από τις πιο κάτω σχέσεις είναι πάντα αληθής $\frac{\alpha}{\beta}$;

   (α) $\frac{5}{7} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{1}{2}$ (β) $\frac{5}{14} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{1}{2}$

   (γ) $\frac{5}{7} < \frac{\alpha}{\beta} < 1$ (δ) $\frac{5}{14} < \frac{\alpha}{\beta} < 1$

3. Να βρείτε το σύνολο των λύσεων των πιο κάτω ανισώσεων:
   (α) $x^2 < 0$ (β) $x^2 \leq 0$

   (γ) $x^2 \geq 0$ (δ) $\frac{1}{x^2} < 0$

4. Να λύσετε τις ανισώσεις:
   (α) $|x+3| < 4$
   (β) $-1 \leq \frac{3-5x}{2} \leq 9$

5. Αν $-1 < x < 4$, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή που μπορούν να πάρουν οι παραστάσεις:
   $\mathrm{A} = 2x-3$ $\mathrm{B} = 5-2x$

6. Αν $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$.

7. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση;
   $A = \sqrt{5x-1} + \sqrt{3-x}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Συναρτήσεις

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να διακρίνουμε πότε μια αντιστοιχία είναι συνάρτηση.
- Να αναπαριστούμε μια συνάρτηση με διαφορετικούς τρόπους (πίνακα τιμών, γραφική παράσταση, βελοειδές διάγραμμα κ.λπ.) και να μεταφράζουμε από ένα είδος αναπαράστασης μιας συνάρτησης σε άλλο.
- Να αναγνωρίζουμε και να επεξηγούμε πότε μια λεκτική έκφραση, ένας πίνακας τιμών ή μια γραφική παράσταση αναπαριστούν γραμμική σχέση.
- Να κατασκευάζουμε και να ερμηνεύουμε γραφικές παραστάσεις γραμμικών συναρτήσεων.
- Να ελέγχουμε αλγεβρικά και γραφικά κατά πόσο ένα σημείο ανήκει σε μία ευθεία.
- Να διερευνούμε και να ερμηνεύουμε τη σημασία των παραμέτρων α και β της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$.
- Να κατανοούμε την έννοια της κλίσης ευθείας με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών και να την εφαρμόζουμε στην επίλυση προβλημάτων.
- Να αναπαριστούμε γραφικά την ευθεία, όταν δίνεται η κλίση και ένα σημείο ή όταν δίνονται δύο σημεία της ευθείας.
- Να επιλύουμε γραμμικά συστήματα εξισώσεων (αλγεβρικά ή με τη χρήση δυναμικών λογισμικών).

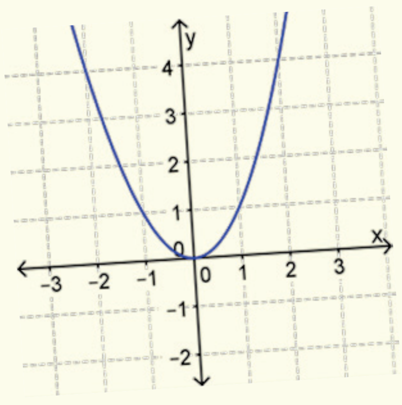
Έχουμε μάθει ...

- **Αντιστοιχία** λέγεται μια σχέση (κανόνας) που συνδέει τα στοιχεία ενός συνόλου A (σύνολο εισόδου) με τα στοιχεία ενός συνόλου B (σύνολο εξόδου).

- **Συνάρτηση** ονομάζουμε την ειδική περίπτωση αντιστοιχίας στην οποία **κάθε** στοιχείο του συνόλου εισόδου A αντιστοιχεί σε **ένα μόνο** στοιχείο του συνόλου εξόδου B.

- Η αναπαράσταση σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών (x, y), που προκύπτουν μέσω του τύπου της συνάρτησης, ονομάζεται **γραφική παράσταση** της συνάρτησης.

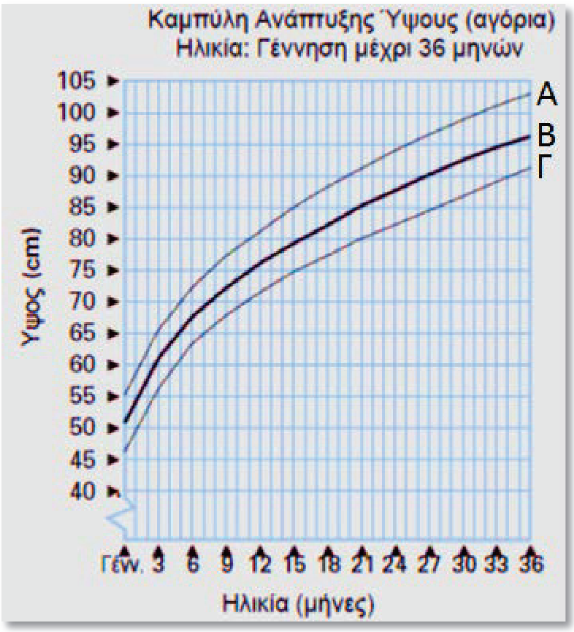
Παράδειγμα:



Η Έννοια της Αντιστοιχίας – Συνάρτησης

Διερεύνηση (1)

Στο βιβλιάριο υγείας κάθε παιδιού υπάρχει το πιο κάτω διάγραμμα που παρουσιάζει τη φυσιολογική ανάπτυξη ενός αγοριού από τη γέννησή του μέχρι τους 36 μήνες της ηλικίας του. Όταν το ύψος του παιδιού, καθώς μεγαλώνει, βρίσκεται μεταξύ των καμπυλών A και Γ, τότε η ανάπτυξη του παιδιού θεωρείται φυσιολογική.



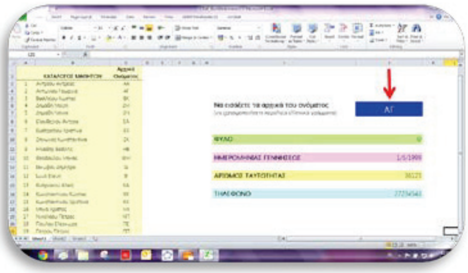
✓ Να ερμηνεύσετε το πιο πάνω διάγραμμα.

✓ Τι ύψος πρέπει να έχει ένα παιδί στους 24 μήνες, ώστε να θεωρείται η ανάπτυξή του φυσιολογική;

✓ Να μελετήσετε τον πιο κάτω πίνακα και να εξηγήσετε κατά πόσο η ανάπτυξη ενός παιδιού, με βάση τις πιο πάνω γραφικές παραστάσεις, ήταν φυσιολογική.

Μήνας	Γέννηση	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ύψος	53	57	60	65	70	73	76	78	79	80	81	82	83	84

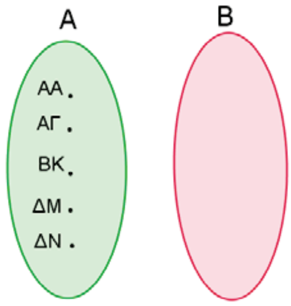
Διερεύνηση (2)



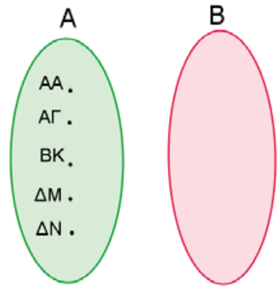
Στο αρχείο «B_En5_Dedomena.xlsx» υπάρχουν καταχωρισμένα δεδομένα των μαθητών ενός τμήματος.

✓ Να συμπληρώσετε τα πιο κάτω βελοειδή διαγράμματα με βάση τα στοιχεία που παρουσιάζονται με την εισαγωγή των αρχικών του ονόματος των πέντε πρώτων μαθητών.

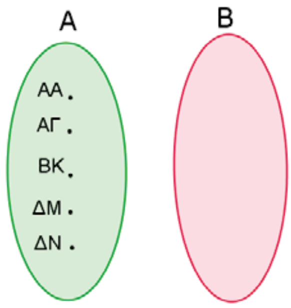
(α) Αρχικό Ονόματος — Ημερομηνία Γεννήσεως



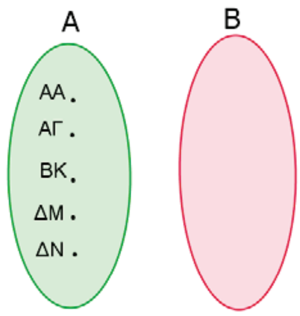
(β) Αρχικό Ονόματος — Φύλο



(γ) Αρχικό Ονόματος — Αριθμός Ταυτότητας



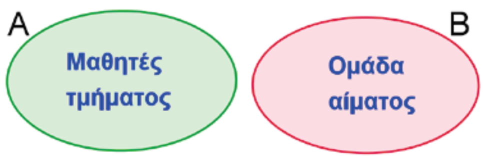
(δ) Αρχικό Ονόματος — Τηλέφωνο



✓ Να παρατηρήσετε τα πιο πάνω βελοειδή διαγράμματα και να σχολιάσετε τον τρόπο που συνδέονται τα στοιχεία των δύο συνόλων σε καθένα από αυτά *(Για κάθε διάγραμμα να αναφέρετε το σύνολο των τιμών εισόδου και το σύνολο των τιμών εξόδου).*

✓ Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B σε καθεμιά από τις πιο πάνω περιπτώσεις.

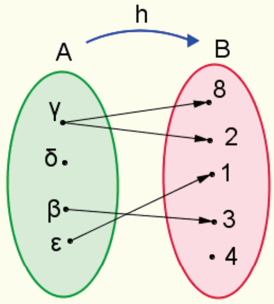
✓ Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται συνάρτηση:
- από το σύνολο A στο σύνολο B
- από το σύνολο B στο σύνολο A



Μαθαίνω

- **Αντιστοιχία** ονομάζεται ένας κανόνας που συνδέει στοιχεία ενός συνόλου με στοιχεία ενός άλλου συνόλου.

  Παράδειγμα:
  Στο διπλανό σχήμα ο κανόνας αυτός συμβολίζεται με το γράμμα του λατινικού αλφαβήτου h.



- Η αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων A και B μπορεί να δοθεί με διάφορους τρόπους όπως:
  - με βελοειδές διάγραμμα,
  - με λεκτική – περιγραφική διατύπωση ή συμβολικά,
  - με γράφημα (σύνολο διατεταγμένων ζευγών),
  - με τη χρήση τύπου,
  - με πίνακα τιμών,
  - με γραφική παράσταση.

- **Συνάρτηση** ονομάζουμε την ειδική περίπτωση αντιστοιχίας από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B, όπου **κάθε** στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται (απεικονίζεται) με **μόνο ένα** στοιχείο του συνόλου B.

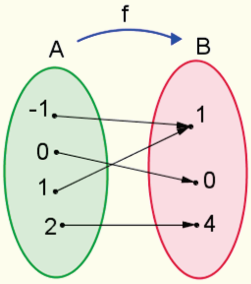
  - Το σύνολο A ονομάζεται **Πεδίο Ορισμού**.

  - Το σύνολο των στοιχείων του B που αντιστοιχίζονται με στοιχεία του A, θα το λέμε **Πεδίο Τιμών** της συνάρτησης.

Για τον πλήρη καθορισμό μιας συνάρτησης πρέπει να γνωρίζουμε:
- Το Πεδίο ορισμού της.
- Τη διαδικασία αντιστοίχισης κάθε στοιχείου του Πεδίου ορισμού με το στοιχείο του Πεδίου τιμών.

Παράδειγμα:
Δίνονται τα σύνολα $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ *και* $B = \{1, 0, 4\}$. *Η συνάρτηση* f *που συνδέει κάθε στοιχείο του συνόλου* A *με μόνο ένα στοιχείο του συνόλου* B, *μπορεί να δοθεί ως εξής:*

- *με* ***βελοειδές διάγραμμα***:



Πεδίο Ορισμού: $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

Πεδίο Τιμών: $\{0,\ 1,\ 4\}$

➢ *ως **σύνολο διατεταγμένων ζευγών**:*

$$G = \{(-1,1), (0,0), (1,1), (2,4)\}.$$

➢ *με τη χρήση **τύπου:***

$y = x^2$

ή

$f(x) = x^2$

όπου με x συμβολίζουμε τη μεταβλητή που παίρνει όλες τις τιμές του συνόλου A και με y τη μεταβλητή που παίρνει τις αντίστοιχες τιμές στο σύνολο B.

Η τιμή της μεταβλητής που αντιστοιχεί σε κάθε τιμή της μεταβλητής x, μέσω του κανόνα αντιστοίχισης f της συνάρτησης, συμβολίζεται και με $f(x)$.

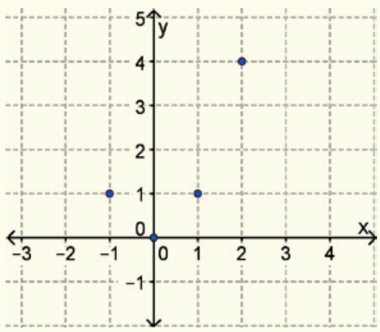
➢ *με **πίνακα τιμών:***

x	-1	0	1	2
y	1	0	1	4

➢ ***περιγραφικά ή συμβολικά,** όπως φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα:*
Κανόνας: «Κάθε αριθμός του συνόλου $\{-1, 0, 1, 2\}$ αντιστοιχίζεται με το τετράγωνό του».

Περιγραφικά	*Συμβολικά*	*Διαβάζεται*
Το -1 αντιστοιχίζεται ΜΟΝΟ με το 1.	$f(-1) = 1$	*Η τιμή της συνάρτησης f στο -1 είναι 1.*
Το 0 αντιστοιχίζεται ΜΟΝΟ με το 0.	$f(0) = 0$	*Η τιμή της συνάρτησης f στο 0 είναι 0.*
Το 1 αντιστοιχίζεται ΜΟΝΟ με το 1.	$f(1) = 1$	*Η τιμή της συνάρτησης f στο 1 είναι 1.*
Το 2 αντιστοιχίζεται ΜΟΝΟ με το 4.	$f(2) = 4$	*Η τιμή της συνάρτησης f στο 2 είναι 4.*

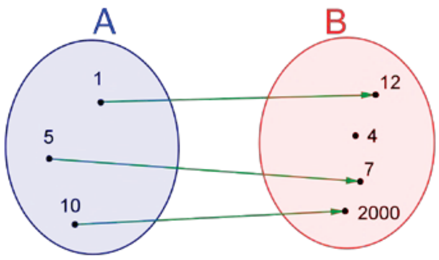
➢ *με **γραφική παράσταση**:*



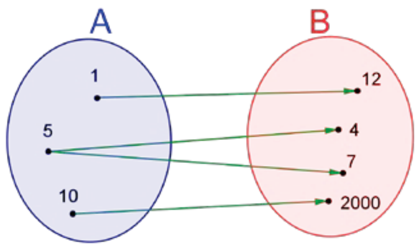
Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε κατά πόσο η καθεμιά από τις πιο κάτω αντιστοιχίες από το σύνολο A στο σύνολο B ορίζουν συναρτήσεις.

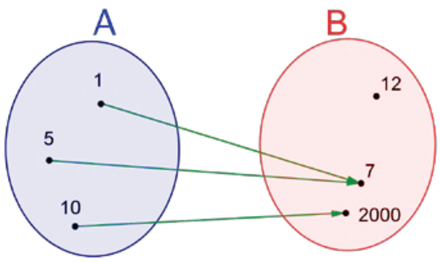
(α)



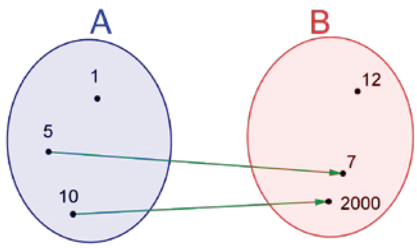
(β)



(γ)



(δ)



Λύση:

(α) *Η αντιστοιχία **ορίζει** συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B, γιατί κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο του συνόλου B.*
Το Πεδίο Ορισμού και το Πεδίο Τιμών της συνάρτησης είναι:
Πεδίο Ορισμού: $\{1, 5, 10\}$
Πεδίο Τιμών: $\{12, 7, 2000\}$

(β) *Η αντιστοιχία **δεν ορίζει** συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B, γιατί υπάρχει στοιχείο (το 5) του συνόλου A που αντιστοιχίζεται με δύο στοιχεία (το 4 και το 7) του συνόλου B.*

(γ) *Η αντιστοιχία **ορίζει** συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B, γιατί κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο του συνόλου B.*
Το Πεδίο Ορισμού και το Πεδίο Τιμών της συνάρτησης είναι:
Πεδίο Ορισμού: $\{1, 5, 10\}$
Πεδίο Τιμών: $\{7, 2000\}$

(δ) *Η αντιστοιχία **δεν ορίζει** συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B, γιατί υπάρχει στοιχείο (το 1) του συνόλου A που δεν αντιστοιχίζεται με ένα στοιχείο του συνόλου B.*

2. Δίνεται το σύνολο $A = \left\{0\,, \frac{1}{3}\,, 1\,, \frac{3}{2}\,, 2\right\}$. Η αντιστοιχία f ορίζεται με τον κανόνα *«τριπλασιάζω κάθε αριθμό του συνόλου A και τον αυξάνω κατά 5».*
   (α) Να βρείτε το Πεδίο Τιμών της αντιστοιχίας.
   (β) Να βρείτε το γράφημά της.

Λύση:

(α) *Για να βρούμε το Πεδίο τιμών της συνάρτησης, εισάγουμε στον κανόνα τις τιμές του Πεδίου Ορισμού για να βρούμε τις αντίστοιχες τιμές του Πεδίου Τιμών:*

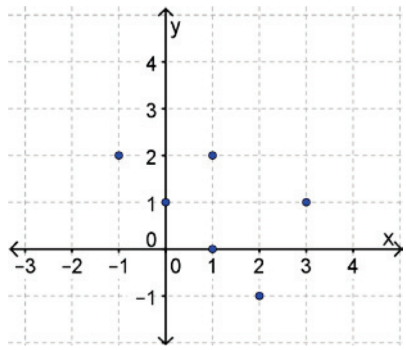
$3 \cdot 0 + 5 = 5$ $\quad 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 = 6$ $\quad 3 \cdot 1 + 5 = 8$

$3 \cdot \frac{3}{2} + 5 = \frac{19}{2}$ $\quad 3 \cdot 2 + 5 = 11$

Άρα, το πεδίο τιμών είναι $\{5,\ 6,\ 8,\ \frac{19}{2},\ 11\}$.

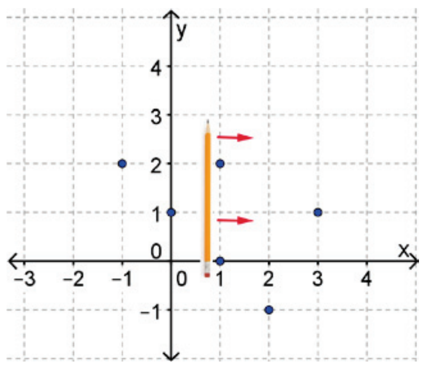
(β) *Το γράφημα της αντιστοιχίας είναι:*
$G = \left\{(0{,}5)\,, \left(\frac{1}{3}, 6\right)\,, (1{,}8)\,, \left(\frac{3}{2}, \frac{19}{2}\right),\ (2{,}11)\right\}$.

3. Δίπλα δίνεται η γραφική παράσταση μιας αντιστοιχίας. Να εξετάσετε κατά πόσο η αντιστοιχία ορίζει συνάρτηση.



Λύση:
*Η αντιστοιχία **δεν ορίζει** συνάρτηση, διότι η τιμή $x = 1$ αντιστοιχίζεται με δύο τιμές του y, δηλαδή $y = 0$ και $y = 2$.*

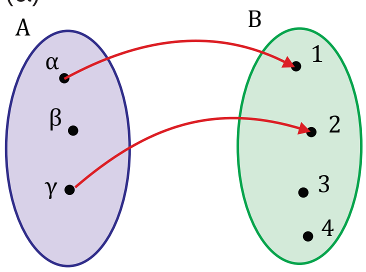
Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε εύκολα, αν μετακινήσουμε το μολύβι μας κάθετα πάνω στον άξονα των τετμημένων.
Θα διαπιστώσουμε ότι όταν περνά από το $x = 1$, θα καλύψει δύο σημεία, το $(1{,}2)$ και το $(1{,}0)$. Τα σημεία αυτά έχουν την ίδια τετμημένη $x = 1$ αλλά διαφορετική τεταγμένη y.



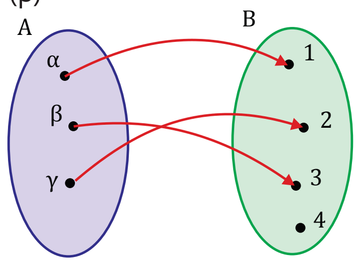
Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω βελοειδή διαγράμματα ορίζουν συνάρτηση.

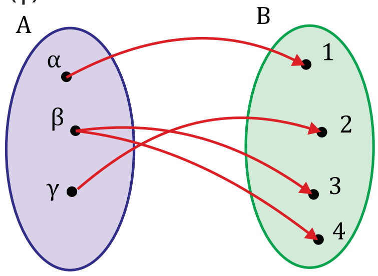
(α)



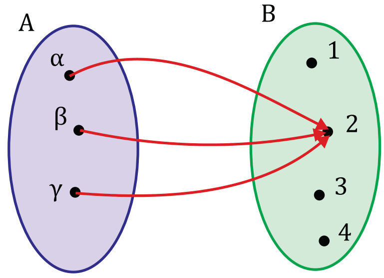
(β)



(γ)



(δ)



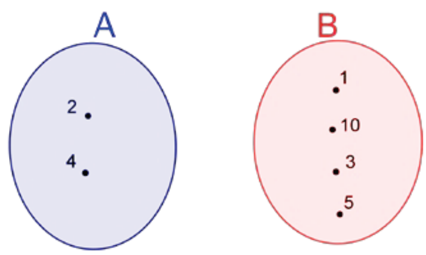
2. Το σύνολο $G = \{(-2,3), (0,1), (1,2), (3,0), (4,1), (5,-1)\}$ είναι το γράφημα της αντιστοιχίας f. Να αναπαραστήσετε την αντιστοιχία:
   (α) με τη χρήση πίνακα τιμών,
   (β) με τη χρήση βελοειδούς διαγράμματος,
   (γ) με τη χρήση γραφικής παράστασης,
   (δ) να εξετάσετε κατά πόσο η αντιστοιχία f είναι συνάρτηση.

3. Η Κατερίνα αμείβεται €30 την εβδομάδα για την επίβλεψη των παιδιών μιας οικογένειας.
   (α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα που παρουσιάζει τα χρήματα με τα οποία αμείβεται η Κατερίνα σε συνάρτηση με τον αριθμό των εβδομάδων που εργάζεται.

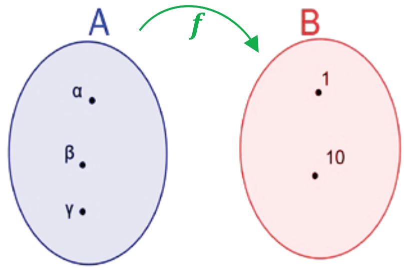
Εβδομάδες (x)	1	2	3	4	5
Αμοιβή (y)					

   (β) Να δώσετε έναν τύπο που εκφράζει την πιο πάνω συνάρτηση.

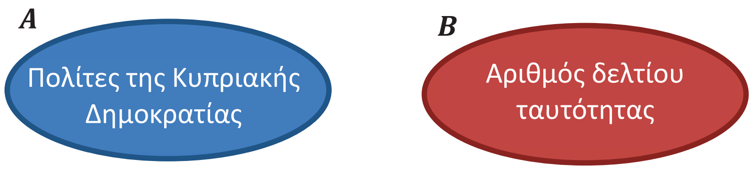
4. Να συμπληρώσετε το βελοειδές διάγραμμα της αντιστοιχίας από το σύνολο A στο σύνολο B, που ορίζεται με τον κανόνα ***«ο αριθμός x, $x\epsilon A$, είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό $y, y\epsilon B$»***. Στη συνέχεια να εξετάσετε κατά πόσο η αντιστοιχία αυτή ορίζει συνάρτηση.



5. Να συμπληρώσετε το βελοειδές διάγραμμα, με δύο διαφορετικούς τρόπους, ώστε η αντιστοιχία f από το σύνολο A στο σύνολο B να ορίζει συνάρτηση.

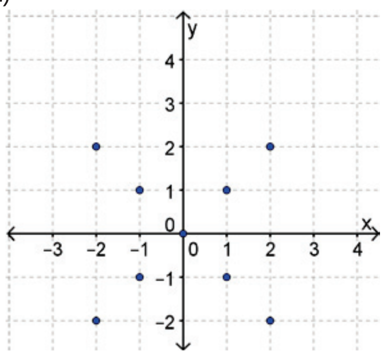


6. Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται συνάρτηση:
   (α) από το σύνολο A στο σύνολο B
   (β) από το σύνολο B στο σύνολο A

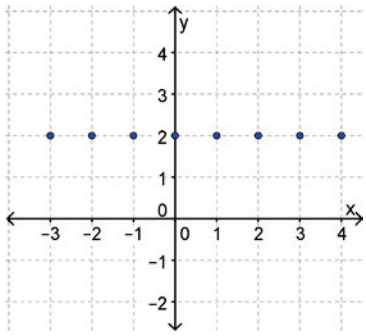


7. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τεσσάρων γραφημάτων. Να εξετάσετε κατά πόσο τα γραφήματα ορίζουν συνάρτηση.

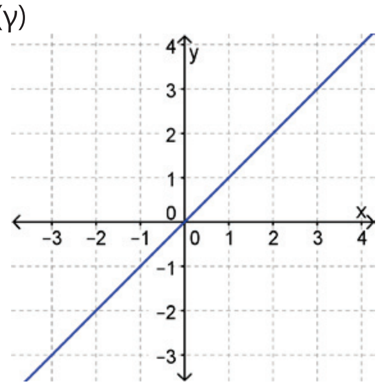
(α)



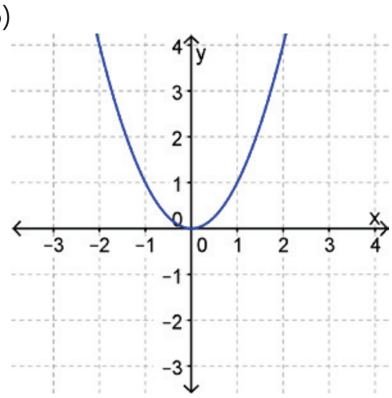
(β)



(γ)



(δ)



8. Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο «ΛΤ_ΜΑΘ_Α_ΨΕΠ02_συναρτησεις_1.0». Να επιλέξετε την ΕΝΟΤΗΤΑ1: Αντιστοιχία – Συνάρτηση και να ακολουθήσετε τις οδηγίες της παραγράφου 1.1 μέχρι 1.5.

Γραμμική Συνάρτηση – Ευθεία

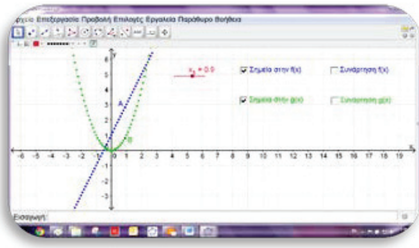
Διερεύνηση (1)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ με τύπους $f(x) = 2x + 1$ και $g(x) = x^2$.

- Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τέσσερις τυχαίες τιμές του x και τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $f(x)$.

x				
$f(x)$				

Να ανοίξετε το αρχείο «B_En5_GrafikiParastasi.ggb» και να τοποθετήσετε τα σημεία που προκύπτουν από τον πίνακα στο σύστημα αξόνων.



- ✓ Τι παρατηρείτε, αν ενώσουμε τα τέσσερα αυτά σημεία;
- ✓ Να σημειώσετε ένα ακόμα σημείο που να είναι συνευθειακό με τα πιο πάνω.
- ✓ Πόσα τέτοια σημεία μπορείτε να βρείτε και τι σχήμα θα προκύψει αν μπορούσαμε να παραστήσουμε όλα αυτά τα σημεία; Με τη βοήθεια του δρομέα να προσθέσετε και άλλα σημεία στη γραφική παράσταση και να κάνετε τις παρατηρήσεις σας.
- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο το σημείο $(-3{,}9)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Πώς θα μπορούσαμε να εξετάσουμε κατά πόσο ένα σημείο ανήκει ή όχι στη γραφική παράσταση της ευθείας, χωρίς να την κατασκευάσουμε;

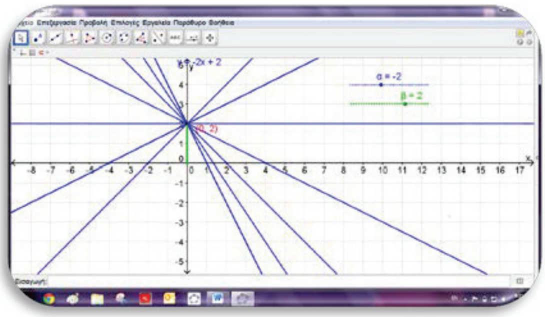
- Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης $g(x) = x^2$ και να τοποθετήσετε τα σημεία στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

x				
$g(x)$				

- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο τα σημεία είναι συνευθειακά.
- ✓ Να εμφανίσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$ και να τη συγκρίνετε με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.
- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο τα σημεία $(-3{,}9)$ και $(-10{,}20)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

Διερεύνηση (2)

Να ανοίξετε το αρχείο «B_En5_y=αx+b.ggb»



- ✓ Να μελετήσετε την ευθεία $y = \alpha x + \beta$ καθώς μεταβάλλεται η τιμή του α ενώ η τιμή του β παραμένει σταθερή.
- ✓ Τι κοινό έχουν όλες αυτές οι ευθείες που έχετε κατασκευάσει;
- ✓ Να μελετήσετε την ευθεία $y = \alpha x + \beta$ καθώς μεταβάλλεται η τιμή του β ενώ η τιμή του α παραμένει σταθερή.
- ✓ Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα και στη συνέχεια να επαληθεύσετε με τη βοήθεια του λογισμικού τις απαντήσεις σας.

α	2	3	-1	$\frac{1}{2}$	1000	-1234
β	1	2	-1	-5	4	$-4{,}5$
$y = \alpha x + \beta$	$y = 2x + 1$					
Σημείο τομής με τον άξονα των y.	$(0{,}1)$					

- ✓ Να αποδείξετε ότι το σημείο $(0, \beta)$ ανήκει πάντοτε στη γραφική παράσταση της γραμμικής συνάρτησης με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ (όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

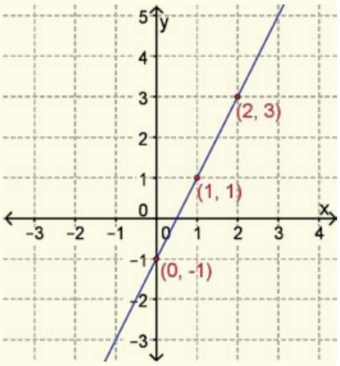
Μαθαίνω

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $\boldsymbol{y = \alpha x + \beta}$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, είναι μια ευθεία γραμμή.

- Μια συνάρτηση της μορφής $\boldsymbol{f(x) = \alpha x + \beta}$ ή $\boldsymbol{y = \alpha x + \beta}$, $x \in A$ με $A \subseteq \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ονομάζεται **γραμμική συνάρτηση.**

- Ο τύπος $y = \alpha x + \beta$ ονομάζεται **εξίσωση της ευθείας**.

  Παράδειγμα:
  Η γραφική παράσταση της $y = 2x - 1$ παριστάνεται με ευθεία γραμμή, όπως φαίνεται δίπλα.



  Αντίστροφα, κάθε ευθεία γραμμή μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση με τύπο $\mathbf{y = \alpha x + \beta}$ με εξαίρεση τις ευθείες που είναι κάθετες στον άξονα των x.

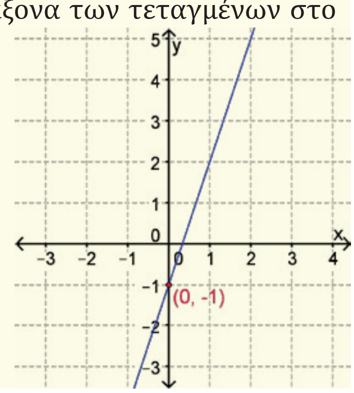
- Αν ένα σημείο $A(x_1, y_1)$ **ανήκει** στη γραφική παράσταση της ευθείας $y = \alpha x + \beta$, τότε οι συντεταγμένες του σημείου A **επαληθεύουν** την εξίσωση της ευθείας.

  Αντίστροφα, αν οι συντεταγμένες ενός σημείου $A(x_1, y_1)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας $y = \alpha x + \beta$, τότε το σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση της ευθείας.

  Παράδειγμα:
  Το σημείο $(-1,2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $y = -2x$ αφού επαληθεύει την εξίσωσή της:
  $y = -2x$
  $2 = -2 \cdot (-1)$
  $2 = 2$

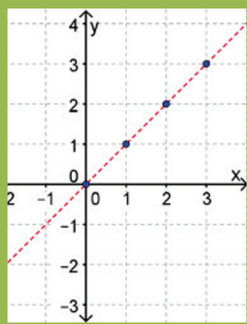
- Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $(\mathbf{0}, \boldsymbol{\beta})$.

  Παράδειγμα:
  Η ευθεία $y = 3x - 1$ τέμνει τον άξονα των τεταγμένων y στο σημείο $(0, -1)$.



Όταν δεν αναφέρεται το Πεδίο Ορισμού μιας γραμμικής συνάρτησης θα εννοούμε ότι θα είναι το σύνολο των Πραγματικών Αριθμών ($\mathbb{R}$).

Όταν οι τιμές που παίρνει η μεταβλητή x, στη συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$ είναι ακέραιοι ή φυσικοί αριθμοί, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης αποτελείται από **μεμονωμένα σημεία,** τα οποία ανήκουν σε ευθεία.



Παραδείγματα

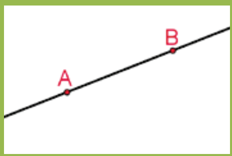
1. Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $A(-1,1)$, $B(2,3)$ και $\Gamma(-2,-1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x - 1$.

Λύση:

<u>*Α΄ τρόπος:*</u>

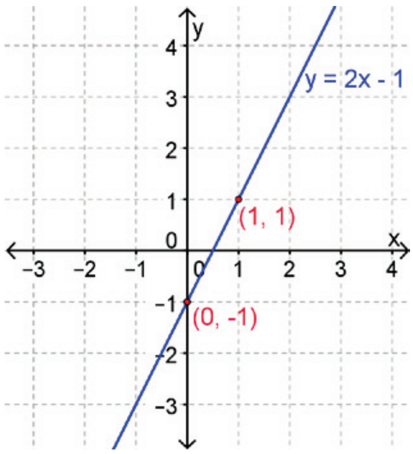
Μπορούμε να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση και ακολούθως να εξετάσουμε κατά πόσο τα σημεία ανήκουν σε αυτή ή όχι.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ευθεία γραμμή. ***Δύο σημεία ορίζουν μια ευθεία****. Επομένως, αρκεί να βρούμε δύο σημεία της ευθείας, για να κατασκευάσουμε τη γραφική της παράσταση.*

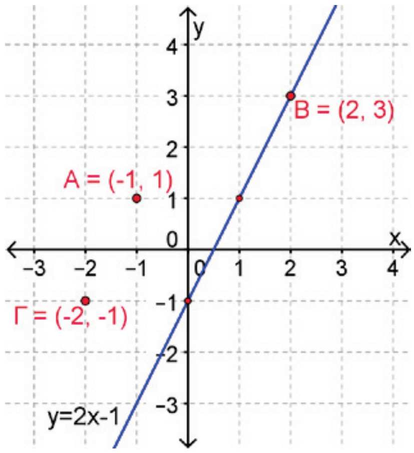


Δύο σημεία ορίζουν μια και μοναδική ευθεία. Άρα, είναι αρκετό να γνωρίζουμε δύο σημεία για να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση της ευθείας.
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε περισσότερα σημεία για επαλήθευση.

x	$y = 2x - 1$	y	(x, y)
0	$y = 2 \cdot 0 - 1$	-1	$(0, -1)$
1	$y = 2 \cdot 1 - 1$	1	$(1,1)$

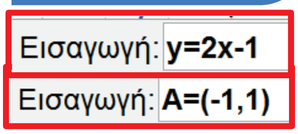


Ακολούθως εξετάζουμε κατά πόσο τα σημεία A, B και Γ ανήκουν στη γραφική παράσταση.
Το σημείο B ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x - 1$ ενώ τα σημεία A και Γ δεν ανήκουν.



Μπορούμε να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra, ακολουθώντας τα πιο κάτω βήματα:

- Στο πεδίο «Εισαγωγή» καταχωρίζουμε την εξίσωση της ευθείας $y = 2x - 1$ και πατούμε «ENTER».
- Στο πεδίο «Εισαγωγή» καταχωρίζουμε διαδοχικά τα σημεία πατώντας κάθε φορά «ENTER».



<u>*Β΄ τρόπος (Αλγεβρική λύση):*</u>

Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες των σημείων A, B και Γ στον τύπο της συνάρτησης και ελέγχουμε κατά πόσο αυτές επαληθεύουν τον τύπο.

- $A(-1,1)$
  $x = -1,\ y = 1$

$$y = 2x - 1$$
$$\Rightarrow\ 1 = 2 \cdot (-1) - 1$$
$$\Rightarrow\ 1 = -3\ \text{ψευδής}$$

Το A δεν ανήκει

• $B(2{,}3)$ $x=2,\ y=3$	$y=2x-1$ $\Rightarrow\ 3=2\cdot 2-1$ $\Rightarrow\ 3=3$ *αληθής*	*Το B ανήκει*
• $\Gamma(-2,-1)$ $x=-2, y=-1$	$y=2x-1$ $\Rightarrow\ -1=2\cdot(-2)-1$ $\Rightarrow\ -1=-5$ *ψευδής*	*Το Γ δεν ανήκει*

Το σημείο B ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=2x-1$, ενώ τα σημεία A και Γ δεν ανήκουν.

2. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση $y=2x-1$ τέμνει τους άξονες και ακολούθως να κατασκευάσετε τη γραφική της παράσταση.

Λύση:

Για να βρούμε το σημείο στο οποίο η συνάρτηση τέμνει τον άξονα των τετμημένων, θέτουμε $y=0$.

Για $y=0 \Rightarrow 2x-1=0$

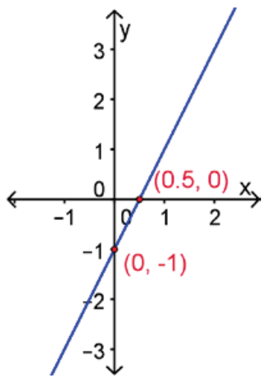
$\Rightarrow 2x=1$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ *Άρα, η συνάρτηση τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο* $(\frac{1}{2},0)$.

Για να βρούμε το σημείο στο οποίο η συνάρτηση τέμνει τον άξονα των τεταγμένων, θέτουμε $x=0$.

Για $x=0 \Rightarrow y=2\cdot 0-1$

$\Rightarrow y=-1.$ *Άρα, η συνάρτηση τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο* $(0,-1)$.



Χρησιμοποιώντας τα σημεία στα οποία τέμνει η ευθεία τους άξονες μπορούμε να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση της ευθείας.

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία $(0{,}3)$ και $(1{,}5)$.

Λύση:

Η εξίσωση της ευθείας έχει τη μορφή $y=\alpha x+\beta$. Χρησιμοποιούμε τα σημεία που δίνονται, για να υπολογίσουμε τις τιμές των α και β.

- *Το σημείο $(0{,}3)$ ανήκει στην ευθεία. Άρα, οι συντεταγμένες του $x=0$ και $y=3$ επαληθεύουν την εξίσωση $y=\alpha x+\beta$:*

$$3=\alpha\cdot 0+\beta$$
$$\Rightarrow \beta=3$$

Άρα, η εξίσωση της ευθείας είναι $y=\alpha x+3$.

- *Το σημείο* $(1{,}5)$ *ανήκει στην ευθεία. Άρα, οι συντεταγμένες του* $x = 1$ *και* $y = 5$ *επαληθεύουν την εξίσωση* $y = \alpha x + 3$*:*

$$5 = \alpha \cdot 1 + 3$$
$$\Rightarrow \alpha = 5 - 3$$
$$\Rightarrow \alpha = 2$$

Άρα, η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι $y = 2x + 3$.

Δραστηριότητες

1. Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω γραμμικών συναρτήσεων:
   (α) $y = x + 3$ (β) $y = 2x$
   (γ) $y = 3x - 2$ (δ) $y + 3x = 1$

2. Να εξετάσετε κατά πόσο τα δεδομένα που δίνονται στον διπλανό πίνακα συνδέονται με γραμμική σχέση.

x	-2	0	2	4
y	1	5	9	13

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x + 3$.
   (α) Να εξετάσετε κατά πόσο τα σημεία $(1{,}3)$, $(1{,}1)$, $(4,-5)$, $(6{,}11)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
   (β) Να βρείτε 3 άλλα σημεία που ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

4. Η ευθεία $y = \alpha x$ περνά από το σημείο $A(-1, 3)$.
   (α) Να υπολογίσετε την τιμή του α.
   (β) Να βρείτε 2 σημεία που ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

5. Η γραφική παράσταση της ευθείας $y = -2x + \beta$ περνά από το σημείο $A(-2, 6)$. Να βρείτε την τιμή του β.

6. Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες της ευθείας με τύπο $y = 2x - 4$ και να κατασκευάσετε τη γραφική της παράσταση.

7. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $6x - 2y = 3$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα των τεταγμένων.

8. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία:
   (α) $(0{,}1)$ και $(2{,}4)$
   (β) $(0{,}4)$ και $(-1{,}2)$

9. Να ανοίξετε ένα αρχείο του GeoGebra και να κατασκευάσετε τρεις ευθείες που να τέμνουν τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $(0,3)$.

10. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω ευθείες τέμνουν τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $(0,-1)$:

(α) $y = 3x - 1$ (β) $y - 1 = 5x$

(γ) $y = -1 + 3x$ (δ) $2x + 5y = -1$

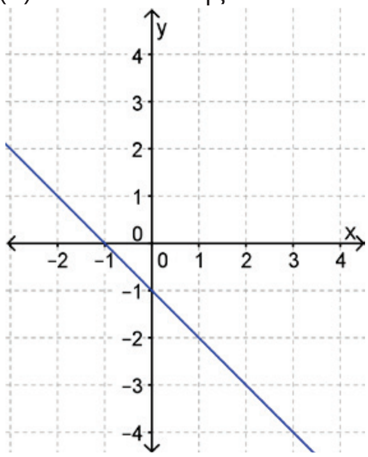
11. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών γραμμικών συναρτήσεων. Να βρείτε:

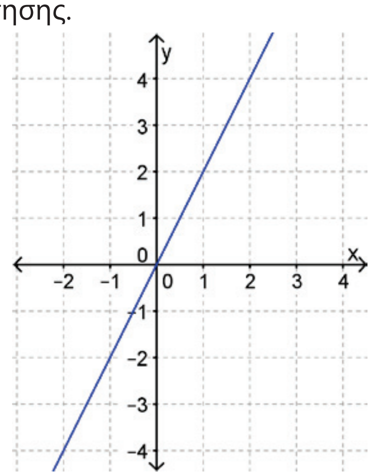
(α) τα σημεία τομής της κάθε ευθείας με τους άξονες,

(β) δύο άλλα σημεία που ανήκουν στην κάθε ευθεία,

(γ) δύο σημεία που δεν ανήκουν στην κάθε ευθεία,

(δ) τον τύπο της κάθε συνάρτησης.





12. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει:

(α) τον άξονα των τεταγμένων στο $(0,3)$ και τον άξονα των τετμημένων στο $(-1,0)$

(β) τον άξονα των τεταγμένων στο $(0,-2)$ και τον άξονα των τετμημένων στο $(-2,0)$.

13. Μια εταιρεία τηλεπικοινωνιών χρεώνει τη σταθερή γραμμή τηλεφώνου σε κάθε νοικοκυριό με πάγιο τέλος 15 ευρώ τον μήνα. Χρεώνει, επίσης, τις κλήσεις προς 3 σεντ το λεπτό.

(α) Να βρείτε έναν τύπο που να υπολογίζει τη μηνιαία χρέωση της εταιρείας για μια σταθερή γραμμή σε κάποιο νοικοκυριό.

(β) Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται γραμμική συνάρτηση.

Ειδικές Περιπτώσεις Ευθείας

Διερεύνηση (1)

Να ανοίξετε ένα αρχείο του λογισμικού GeoGebra και να δώσετε τις κατάλληλες οδηγίες για να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των πιο κάτω συναρτήσεων:

	ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΟΜΑΔΑ Α	• $y = 3x$ • $y = x$ • $y = -5x$ • $y = 0{,}4x$ • $y = \frac{1}{2}x$

(Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων να γίνουν όλες στο ίδιο αρχείο)

✓ Τι **κοινό** έχουν οι γραφικές παραστάσεις όλων των πιο πάνω συναρτήσεων;

Σε ένα νέο αρχείο του GeoGebra να παραστήσετε τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις:

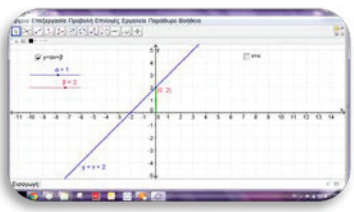
	ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΟΜΑΔΑ Β	• $y = 3x + 1$ • $y = x + 12$ • $y = -5x + 3$ • $y = 0{,}4x - 2$ • $y = \frac{1}{2}x + 5$

(Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων να γίνουν όλες στο ίδιο αρχείο)

✓ Τι **διαφορές** παρατηρείτε ανάμεσα στις δυο ομάδες των γραφικών παραστάσεων;

✓ Να γράψετε ακόμη δυο παραδείγματα συναρτήσεων που να έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά με τις συναρτήσεις της Ομάδας A. Να δικαιολογήσετε γιατί ισχύει αυτό.

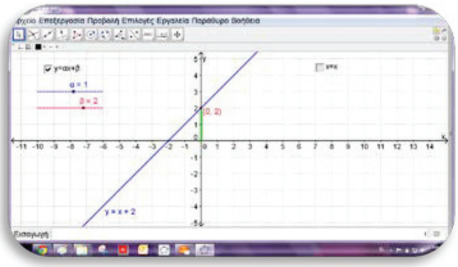
Να ανοίξετε το αρχείο «B_En5_y=ax+b.ggb».
Να δώσετε στον δρομέα β την τιμή 0. Να μεταβάλλετε τον δρομέα α και να παρατηρήσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας που αναπαριστάται κάθε φορά.



✓ Να μελετήσετε πώς το πρόσημο του α επηρεάζει τη γραφική παράσταση της ευθείας.

Διερεύνηση (2)

Να ανοίξετε το αρχείο «B_En5_y=ax+b.ggb».



- Να δώσετε στον δρομέα α την τιμή 0. Να μεταβάλλετε τον δρομέα β και να παρατηρήσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας που αναπαριστάται κάθε φορά.

✓ Τι κοινό χαρακτηριστικό έχουν τα σημεία που ανήκουν στην ευθεία $y = \beta$;

✓ Πώς θα περιγράφατε τα χαρακτηριστικά της οικογένειας των ευθειών $y = \beta$;

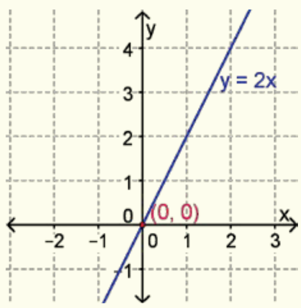
- Να πατήσετε το κουμπί «*εμφάνιση* $y = \alpha x + \beta$», για να μη φαίνεται η ευθεία και ακολούθως να πατήσετε το κουμπί «*εμφάνιση* $x = \kappa$», για να εμφανιστεί μια άλλη ευθεία.

✓ Να μετακινήσετε τον δρομέα κ και να παρατηρήσετε την ευθεία που σχηματίζεται κάθε φορά. Ποιο είναι το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό οικογένειας των ευθειών $x = \kappa$;

Μαθαίνω

- Η γραφική παράσταση της $\boldsymbol{y = \alpha x}$ είναι ευθεία που **περνά από την αρχή των αξόνων**.

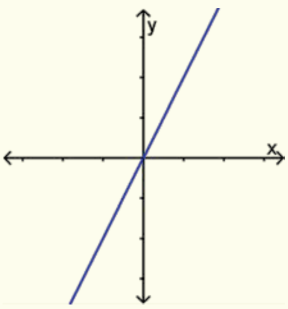
Παράδειγμα:
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x$ περνά από την αρχή των αξόνων.



Παρατήρηση:

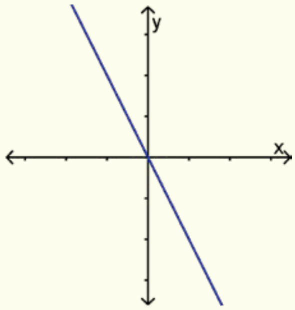
Για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x$ ισχύει:

$\alpha > 0$



1ο και 3ο τεταρτημόριο

$\alpha < 0$

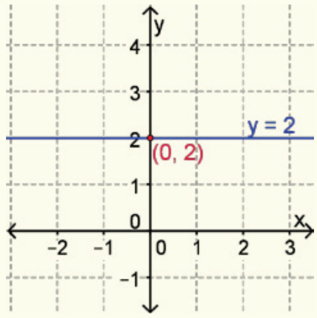


2ο και 4ο τεταρτημόριο

Η $y = \beta$ είναι σταθερή συνάρτηση.

- Η γραφική παράσταση της $\mathrm{y} = \beta$ είναι ευθεία κάθετη στον άξονα των y στο σημείο $(0, \beta)$.

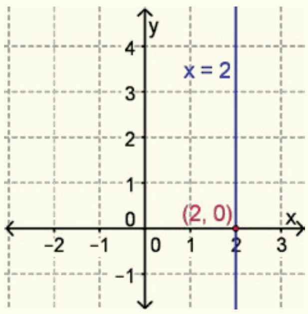
  Παράδειγμα:
  Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2$ είναι κάθετη στον άξονα των y στο σημείο $(0,2)$.



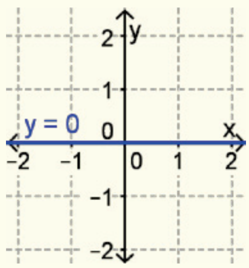
Η $x = \kappa$ **ΔΕΝ ορίζει** συνάρτηση

- Η γραφική παράσταση της ευθείας $x = \kappa$ είναι ευθεία κάθετη στον άξονα των x στο σημείο $(\kappa, 0)$.

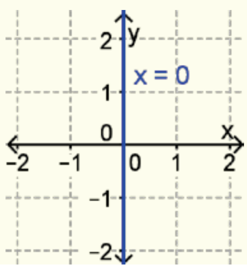
  Παράδειγμα:
  Η γραφική παράσταση της εξίσωσης $x = 2$ είναι ευθεία κάθετη στον άξονα των τετμημένων στο σημείο $(2,0)$.



- Ο άξονας των τετμημένων (x) έχει εξίσωση $\mathrm{y} = 0$.



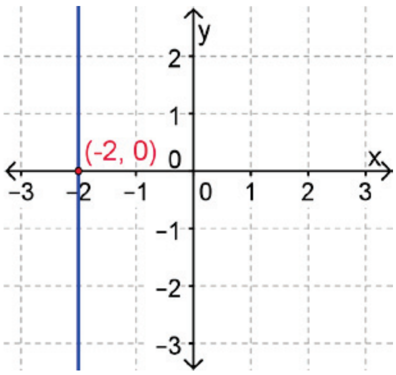
- Ο άξονας των τεταγμένων (y) έχει εξίσωση $x = 0$.



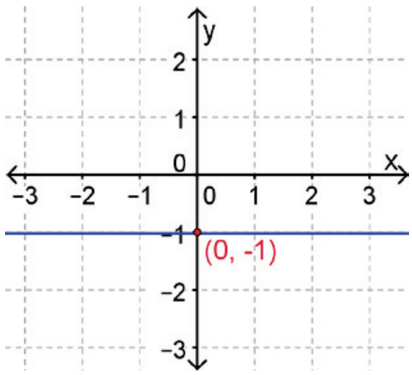
Παραδείγματα

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των πιο κάτω ευθειών:

(α)



(β)



Λύση:

(α) *Είναι της μορφής $x=\kappa$. Διέρχεται από το $(-2{,}0)$. Άρα, η ευθεία είναι η $x=-2$.*

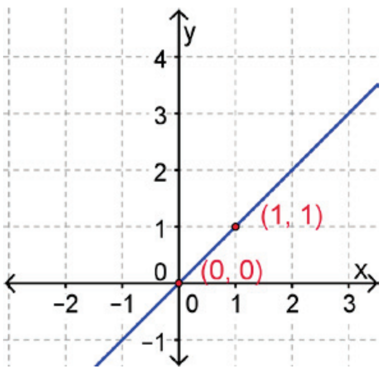
(β) *Είναι της μορφής $y=\beta$. Διέρχεται από το $(0,-1)$. Άρα, η ευθεία είναι η $y=-1$*

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $(1{,}1)$.

Λύση:

Αφού περνά από την αρχή των αξόνων, δηλαδή από το $(0{,}0)$, θα είναι της μορφής $y=\alpha x$.

Η ευθεία περνά και από το σημείο $(1{,}1)$. Άρα, οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Δηλαδή,



$x=1$ *και* $y=1$ $\qquad y=\alpha x$

$$1=\alpha\cdot 1$$

$$\Rightarrow \alpha=1$$

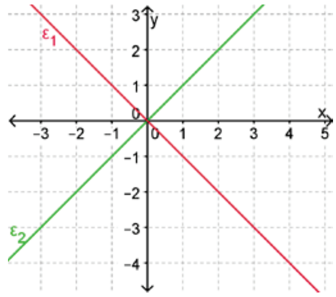
Άρα, η εξίσωση της ευθείας είναι $y=x$.

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των πιο κάτω ευθειών:

(α)

(β)



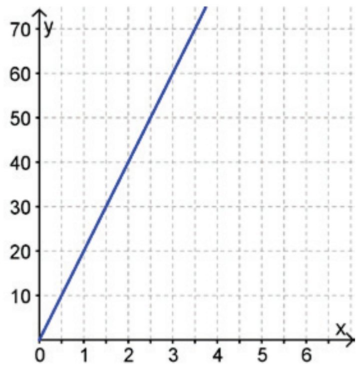
2. Να κατασκευάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών:
   - $y = 2x$
   - $y = 2$
   - $x = 3$

3. Δίνονται οι ευθείες ε_1: $x = 3$ και ε_2: $y = 4$.
   (α) Να κατασκευάσετε στο ίδιο ορθογώνιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των πιο πάνω ευθειών.
   (β) Να εξετάσετε ποιο ή ποια από τα σημεία $A(3,1)$, $B(0,0)$, $\Gamma(3,4)$ και $\Delta(-1000,4)$ ανήκουν σε κάθε ευθεία.
   (γ) Να βρείτε το κοινό σημείο των δύο ευθειών ε_3: $x = -14$ και ε_4: $y = 2014$, χωρίς να κατασκευάσετε τη γραφική τους παράσταση.

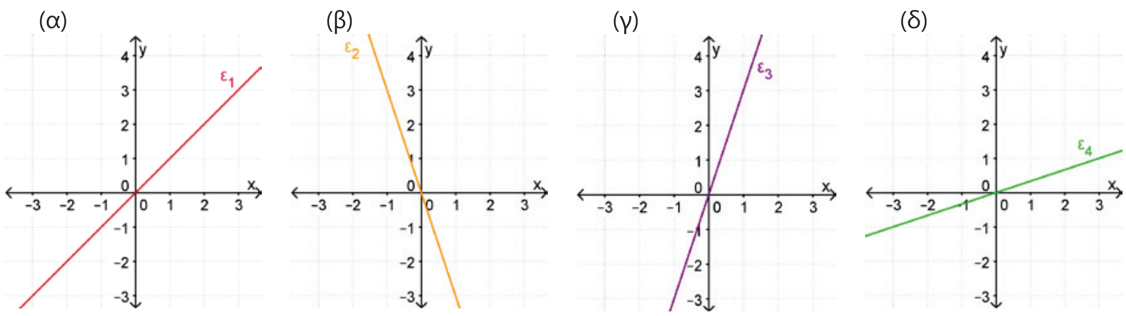
4. Να βρείτε το σημείο τομής των δύο ευθειών $y = 3x$ και $y = -8x$, χωρίς να κάνετε τη γραφική παράσταση των δύο ευθειών.

5. Δίνεται η συνάρτηση $y = \alpha x$. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:
   (α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $(1,2)$, τότε:
   i. $\alpha = 1$ ii. $\alpha = 2$ iii. $\alpha = -1$ iv. $\alpha = 0{,}5$
   (β) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $(2,1)$, τότε:
   i. $\alpha = 1$ ii. $\alpha = 2$ iii. $\alpha = -1$ iv. $\alpha = 0{,}5$
   (γ) Αν $\alpha = 3$, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο:
   i. $A(1,3)$ ii. $B(0,3)$ iii. $\Gamma(\alpha,3)$ iv. $\Delta(3,\alpha)$
   (δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι μια ευθεία που διέρχεται πάντοτε από το σημείο:
   i. $A(1,1)$ ii. $B(0,0)$ iii. $\Gamma(\alpha,1)$ iv. $\Delta(0,\alpha)$

6. Η διπλανή γραφική παράσταση αναπαριστά την απόσταση y σε km που διανύει ένα όχημα καταναλώνοντας x λίτρα βενζίνη. Να υπολογίσετε πόση βενζίνη θα χρειαστεί, για να διανύσει μια απόσταση $280\ km$.



7. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών ε_1 , ε_2 , ε_3 και ε_4. Να αντιστοιχίσετε την κάθε ευθεία με την εξίσωσή της.



Ευθεία
ε_1
ε_2
ε_3
ε_4

Εξίσωση
$y = 3x$
$y = \frac{1}{3}x$
$y = -3x$
$y = x$

8. Μια εταιρεία παραγωγής φυσικών χυμών έχει υπολογίσει ότι από κάθε κιλό πορτοκάλια που παίρνει από τον παραγωγό, παράγει $0{,}4$ λίτρα χυμό.
   (α) Πόσα λίτρα χυμού θα παραχθούν με $500\ Kg$ πορτοκάλια;
   (β) Να εκφράσετε με τύπο την ποσότητα $f(x)$ του χυμού (σε λίτρα) που παράγεται, ως συνάρτηση της ποσότητας x (σε κιλά) των πορτοκαλιών που χρειάζονται.
   (γ) Πόσα κιλά πορτοκάλια πρέπει να χρησιμοποιήσει η εταιρεία, ώστε η παραγωγή σε χυμό να είναι 300 λίτρα;

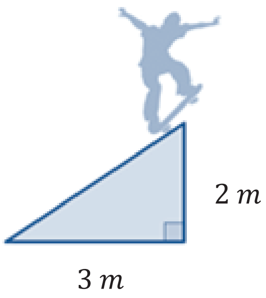
9. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας:
   (α) που διέρχεται από το σημείο $(-2{,}4)$,
   (β) που διέρχεται από το σημείο $(-2{,}4)$ και περνά και από την αρχή των αξόνων,
   (γ) που διέρχεται από το σημείο $(-2{,}4)$ και είναι κάθετη στον y άξονα.

Κλίση Γραμμικής Συνάρτησης – Ευθείας

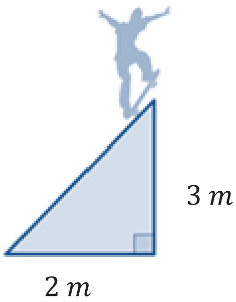
Εξερεύνηση

Σε μια σχολή για δεξιότητες με πατίνι (skateboard), οι μαθητές πρέπει να εξασκηθούν σε μια από τις τέσσερις διαφορετικές ράμπες που φαίνονται πιο κάτω.

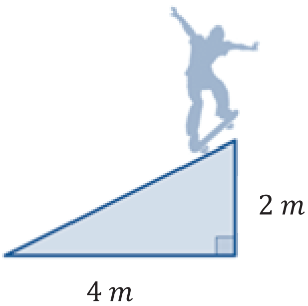
Α.



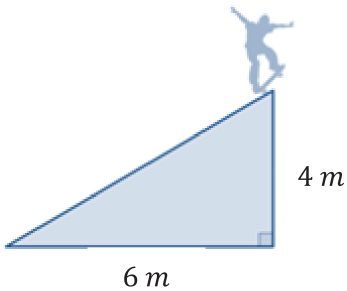
Β.



Γ.



Δ.

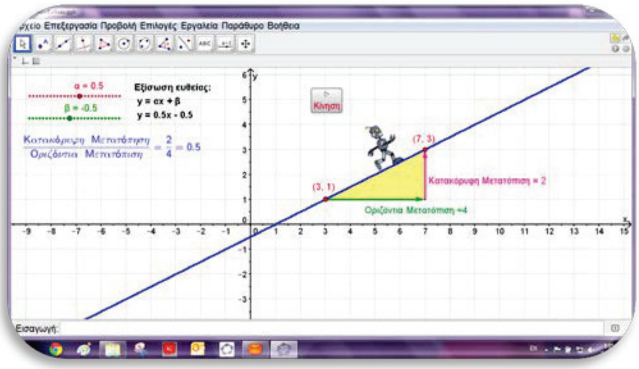


Ο διευθυντής της σχολής, για λόγους ασφάλειας, είπε στους αρχάριους μαθητές να επιλέξουν τη ράμπα που είναι λιγότερο ανηφορική.

✓ Να βρείτε ποια είναι αυτή και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο «B_En5_Klisi.ggb».



Ένα ρομπότ βρίσκεται στο σημείο A και κινείται σε ένα άλλο σημείο B της ευθείας που αναπαριστάται στο σύστημα αξόνων.

- *Να μετακινήσετε τους δρομείς α και β, για να κατασκευάσετε την εξίσωση της ευθείας $y = 2x$.*

  ✓ Να επιλέξετε ένα σημείο Α και ακολούθως να μεταβάλετε τις συντεταγμένες του σημείου Β έτσι ώστε το ρομπότ να μετακινηθεί μια μονάδα προς τα δεξιά (οριζόντια μεταβολή). Να υπολογίσετε πόση θα είναι η κατακόρυφη μετατόπιση της πιο πάνω μετακίνησης. Να εξετάσετε κατά πόσο αυτό ισχύει για οποιοδήποτε σημείο αφετηρίας A.

  ✓ Αν το ρομπότ μετακινηθεί από ένα σημείο A κατά δύο μονάδες δεξιά, πόση θα είναι η κατακόρυφη μεταβολή της αλλαγής της θέσης του; Ισχύει αυτό για οποιοδήποτε σημείο αφετηρίας A;

  ✓ Ποια νομίζετε ότι θα είναι η κατακόρυφη μεταβολή αν μετακινηθεί από ένα σημείο A κατά 5 μονάδες δεξιά; Να εξετάσετε με τη βοήθεια του λογισμικού την απάντησή σας.

  ✓ Να εξετάσετε τον λόγο $\frac{\textit{Κατακόρυφη μεταβολή}}{\text{Οριζόντια μεταβολή}}$, για δύο οποιαδήποτε σημεία A και B της ευθείας.

- Να μεταβάλετε τους δρομείς α και β και να παρατηρήσετε πώς συνδέεται ο λόγος $\frac{\textit{Κατακόρυφη μεταβολή}}{\text{Οριζόντια μεταβολή}}$ με την εξίσωση της ευθείας.

Μαθαίνω

Έστω ότι θέλουμε να «μετακινηθούμε» από ένα σημείο A σε ένα σημείο B μιας ευθείας. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε μια οριζόντια μετατόπιση (μεταβολή) $\boldsymbol{\Delta x}$ *και μια κατακόρυφη μετατόπιση (μεταβολή)* $\boldsymbol{\Delta y}$.

Η κλίση μιας ευθείας μπορεί να δοθεί και ως η κατακόρυφη μεταβολή που σημειώνεται καθώς η τιμή της μεταβλητής x αυξάνεται κατά 1 μονάδα.
Δηλαδή,

$$\lambda = \frac{\Delta y}{1}$$

- **Κλίση** μιας ευθείας είναι **ο λόγος της κατακόρυφης μεταβολής** $\boldsymbol{\Delta y}$, (από ένα σημείο A σε ένα σημείο B της ευθείας), **προς την οριζόντια μεταβολή** $\boldsymbol{\Delta x}$.

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Ο λόγος αυτός ονομάζεται και **ρυθμός μεταβολής.**

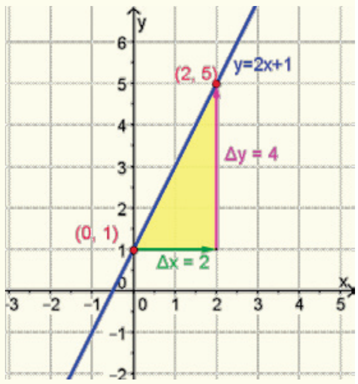
Δηλαδή η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι ίση με $\boldsymbol{\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$.

Παράδειγμα:
Για την ευθεία $y = 2x + 1$ έχουμε:

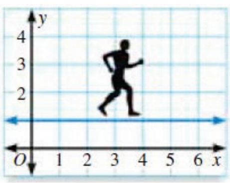
Κατακόρυφη μεταβολή: $\Delta y = 5 - 1 = 4$

Οριζόντια μεταβολή: $\Delta x = 2 - 0 = 2$

Άρα, $\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$.

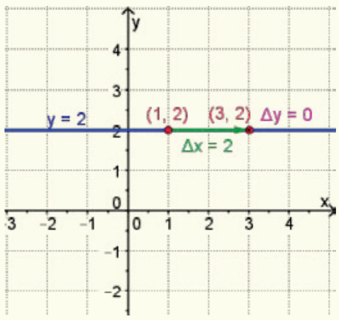


- Η κλίση κάθε ευθείας της μορφής $y = \beta$ είναι $\boldsymbol{\lambda = 0}$.

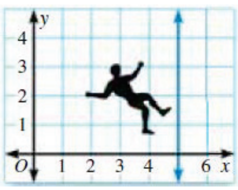


Παράδειγμα:
Η κλίση της ευθείας $y = 2$ είναι:
$\Delta y = 0$
$\Delta x = 2$

$\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{2} = 0$

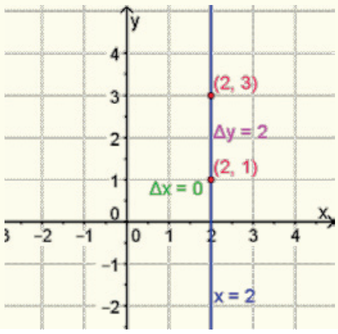


- Η κλίση κάθε ευθείας της μορφής $x = \kappa$ **δεν ορίζεται**.



Παράδειγμα:
Η κλίση της ευθείας $x = 2$:
$\Delta y = 2$
$\Delta x = 0$

$\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{0}$ ΔΕΝ ορίζεται.

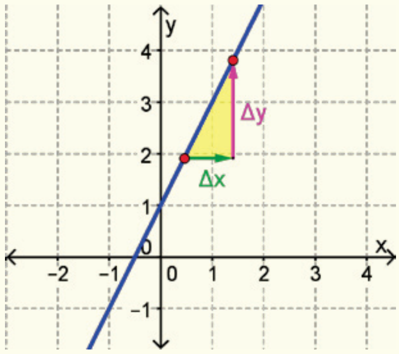


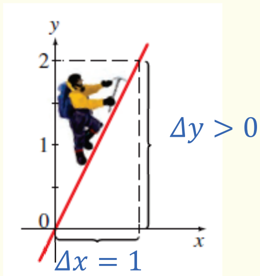
- Αν η εξίσωση της ευθείας δίνεται στη μορφή $y = \boldsymbol{\alpha} x + \beta$, τότε η κλίση της είναι ίση με τον συντελεστή του x, δηλαδή $\lambda = \boldsymbol{\alpha}$.

Παράδειγμα:
Η κλίση της ευθείας $y = 2x + 1$ είναι $\lambda = 2$.

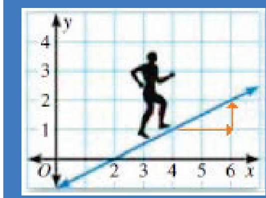
Παρατήρηση

- *Αν $\alpha > 0$, δηλαδή η κλίση $\lambda > 0$, τότε η γραφική παράσταση θα έχει τη μορφή:*

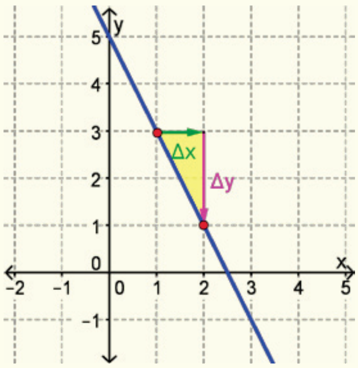


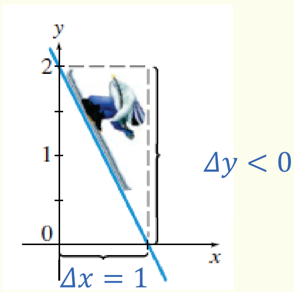


Καθώς οι τιμές της μεταβλητής x αυξάνονται, οι τιμές της μεταβλητής y αυξάνονται.
$\boldsymbol{\lambda > 0}$



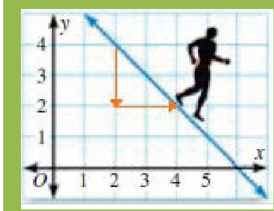
- *Αν $\alpha < 0$, δηλαδή η κλίση $\lambda < 0$, τότε η γραφική παράσταση θα έχει τη μορφή:*





Καθώς οι τιμές της μεταβλητής x αυξάνονται, οι τιμές της μεταβλητής y μειώνονται (φθίνουν).

$\boldsymbol{\lambda < 0}$



Παραδείγματα

1. Να βρείτε την κλίση των ευθειών που έχουν εξίσωση:
   (α) $y = -3x$ (β) $2y = 4x - 1$
   (γ) $y = 2$ (δ) $x = 3$

Λύση:

(α) $y = -3x$ *Ο συντελεστής του x είναι -3.* *Άρα,* $\lambda = -3$.

(β) *Μετασχηματίζουμε την εξίσωση στη μορφή* $y = ax + \beta$:

$$2y = 4x - 1$$
$$\Rightarrow \frac{2y}{2} = \frac{4x}{2} - \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow y = 2x - \frac{1}{2}$$ *Άρα,* $\lambda = 2$.

(γ) $y = 2$, *δηλαδή* $y = 0x + 2$. *Άρα,* $\lambda = 0$.

(δ) $x = 3$, *Η κλίση* ***δεν ορίζεται***.

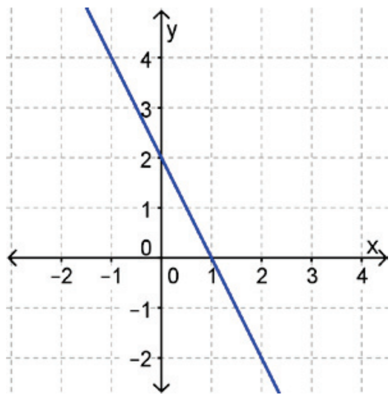
2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση -3.

   Λύση:
   Η εξίσωση περνά από την αρχή των αξόνων. Άρα, θα είναι της μορφής $y = ax$.

   - *Η εξίσωση έχει κλίση -3.* *Άρα,* $\alpha = -3$.

   Η εξίσωση της ευθείας είναι η $y = -3x$.

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας της οποίας η γραφική παράσταση αναπαριστάται στο διπλανό σχήμα:



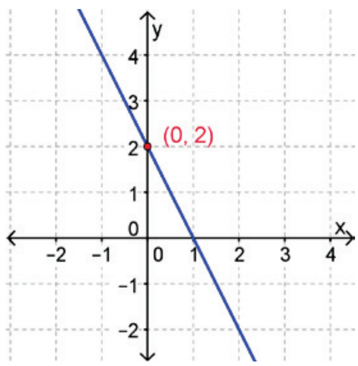
Λύση:
Η ευθεία έχει εξίσωση $y = ax + \beta$.

Μπορούμε να βρούμε τις τιμές των α και β ως εξής:

- *Η ευθεία $y = ax + \beta$ τέμνει τον άξονα των y στο σημείο* $(0, \beta)$.

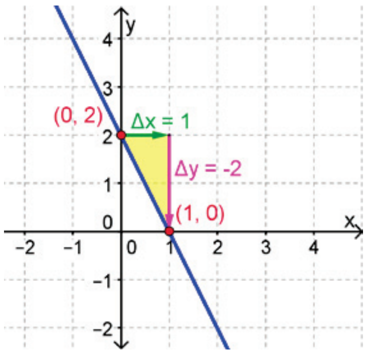
  Από τη γραφική παράσταση βρίσκουμε το σημείο τομής $(0,2)$. *Άρα,* $\beta = 2$.

  Η ευθεία θα είναι της μορφής $y = ax + 2$.



- *Η κλίση της ευθείας είναι $\lambda = \alpha$.*
  Από τη γραφική παράσταση υπολογίζουμε τον λόγο της κατακόρυφης προς την οριζόντια μεταβολή.
  $\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-2}{1-0} = \frac{-2}{1} = -2$

  Άρα, $\alpha = -2$



<u>Παρατήρηση:</u>
Για τον προσδιορισμό των α και β της $y = ax + \beta$ θα μπορούσαμε να πάρουμε και σημεία πάνω στην ευθεία που την επαληθεύουν.
Για παράδειγμα τα σημεία $(0,2)$ και $(1,0)$ επαληθεύουν την εξίσωση:

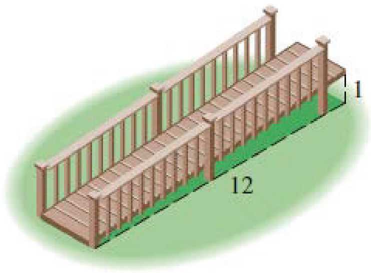
$y = ax + \beta$	$y = ax + 2$
$2 = a \cdot 0 + \beta$	$0 = a \cdot 1 + 2$
$\beta = 2$	$a + 2 = 0$
	$a = -2$

Η εξίσωση της ευθείας είναι η $y = -2x + 2$.

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε την κλίση στις πιο κάτω περιπτώσεις:

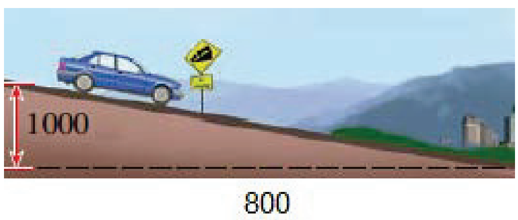
(α)



(β)

(γ)

(δ)



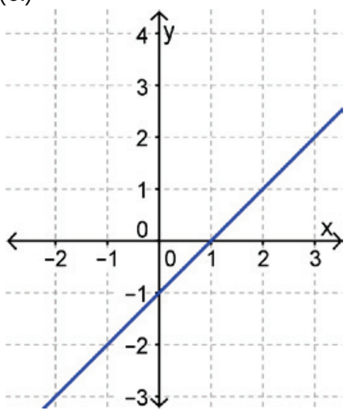
2. Να βρείτε την κλίση των ευθειών:

(α) $y = 3x + 1$	(β) $y = -2x$
(γ) $y = -\frac{3}{4}x + 1$	(δ) $y = 5 - 2x$
(ε) $3y - 3 = 9x$	(στ) $2 + y = 4x$
(ζ) $y = 4$	(η) $x = -1$

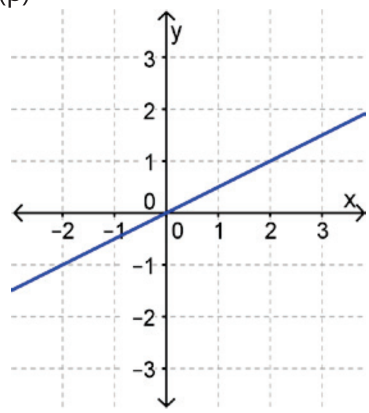
3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που:
   (α) περνά από το σημείο $A(-1\,,3)$ και έχει κλίση $\lambda = 3$,
   (β) περνά από το σημείο $B(0\,,0)$ και έχει κλίση $\lambda = -1$,
   (γ) περνά από το σημείο $\Gamma(0\,,1)$ και έχει κλίση $\lambda = 2$,
   (δ) περνά από τα σημεία $A(0\,,0)$ και $B(1\,,-3)$.

4. Να βρείτε την κλίση για καθεμιά από τις πιο κάτω ευθείες.

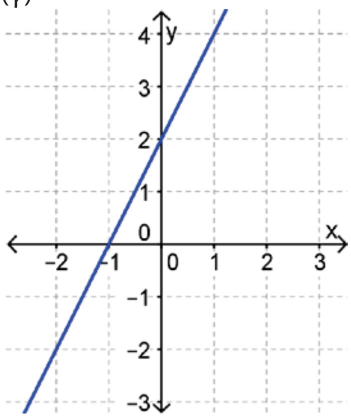
(α)



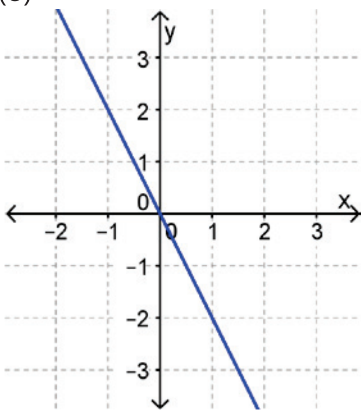
(β)



(γ)



(δ)



5. Δίνεται η ευθεία $y = (\kappa + 3)x$. Να βρείτε την τιμή του κ, αν η ευθεία:
   (α) έχει κλίση 5,
   (β) έχει την ίδια κλίση με την ευθεία $y = -2x$.

6. Έστω ότι η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο είναι ευθεία. Να εξηγήσετε πώς μεταβάλλεται η θερμοκρασία, αν η κλίση της ευθείας είναι:
   (α) θετική,
   (β) αρνητική,
   (γ) μηδέν.

7. Στις πιο κάτω προτάσεις δίνονται 4 γραμμικές συναρτήσεις. Να αναγνωρίσετε την κλίση $α$, και την παράμετρο $β$ και να εξηγήσετε τη σημασία τους σε κάθε περίπτωση.
   (α) Το κέρδος σε ευρώ $K(n)$ από την πώληση n προϊόντων δίνεται από τη σχέση $K(n) = 0{,}75n - 150$.
   (β) Ένας σταλακτίτης μεγαλώνει σύμφωνα με τη σχέση $M(t) = 5{,}35 + 0{,}45t$. Το $M(t)$ αντιπροσωπεύει το μήκος του σταλακτίτη σε cm και το t τον χρόνο σε έτη από την πρώτη μέτρηση του μήκους του σταλακτίτη.
   (γ) Ο πληθυσμός μιας πόλης δίνεται από τη σχέση $Π(t) = 54000 - 230t$. Το $Π(t)$ αντιπροσωπεύει τον πληθυσμό και το t αντιπροσωπεύει τον χρόνο σε έτη από το 2000 μέχρι σήμερα.
   (δ) Μια τηλεφωνική εταιρεία χρεώνει τους πελάτες της με βάση τη σχέση $X(λ) = 15 + 0{,}05λ$. Το $X(λ)$ είναι η μηνιαία χρέωση σε ευρώ και $λ$ ο χρόνος ομιλίας σε λεπτά.

Γραμμικά Συστήματα
δύο Εξισώσεων με δύο Αγνώστους

Διερεύνηση (1)

Ένας επιχειρηματίας χρειάζεται να ενοικιάσει μια εξειδικευμένη συσκευή για μία εβδομάδα. Αποτάθηκε σε δύο εταιρείες και πήρε τις πιο κάτω προσφορές:

<u>Εταιρεία Α</u>
- €600 σταθερή επιβάρυνση
- €20 επιπλέον για κάθε ώρα χρήσης της συσκευής.

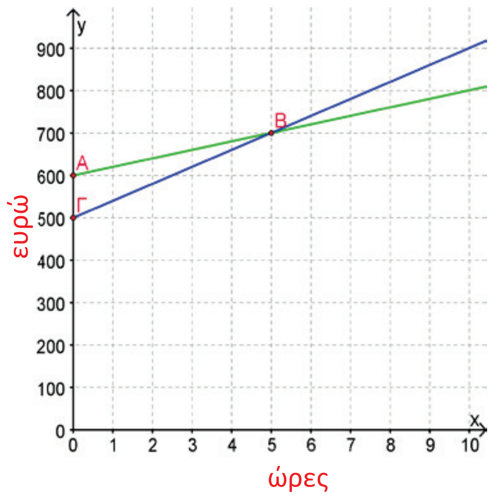
<u>Εταιρεία Α</u>
- €500 σταθερή επιβάρυνση
- €40 επιπλέον για κάθε ώρα χρήσης της συσκευής.

✓ Να προτείνετε τρόπους στον κύριο Ανδρέα για να αποφασίσει ποια είναι η πιο συμφέρουσα προσφορά.

Ο Αχιλλέας προτείνει να χρησιμοποιήσει τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις του κόστους χρήσης της συσκευής σε σχέση με τον χρόνο.

✓ Πώς μπορεί να αποφασίσει ποια είναι η πιο συμφέρουσα προσφορά χρησιμοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις;

✓ Πόσες ώρες πρέπει να χρησιμοποιήσει τη συσκευή, ώστε το κόστος να είναι το ίδιο σύμφωνα με τις προσφορές των δυο εταιρειών;



Διερεύνηση (2)

Ο σύνδεσμος γονέων ενός σχολείου διοργανώνει ένα φιλανθρωπικό δείπνο του οποίου τα έσοδα θα διατεθούν για την αγορά εξοπλισμού για την αίθουσα αθλοπαιδιών.

- Για το δείπνο έχουν δηλώσει συμμετοχή 200 ενήλικες και 100 παιδιά. Στα παιδιά θα σερβίρεται μικρότερη μερίδα και επομένως το εισιτήριό τους θα είναι πιο φθηνό.
  - ✓ Να βρείτε τρεις πιθανές τιμές των δύο εισιτηρίων, έτσι ώστε η είσπραξη του σχολείου να είναι €1200.
  - ✓ Αν η τιμή του κανονικού εισιτηρίου είναι €y και του παιδικού εισιτηρίου €x, ποια σχέση πρέπει να συνδέει τις τιμές των δύο εισιτηρίων;

- Οι διοργανωτές αποφάσισαν ότι θα πρέπει το εισιτήριο για τους ενήλικες ότι να κοστίζει τα διπλάσια από το παιδικό εισιτήριο.
  - ✓ Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης της τιμής του κανονικού εισιτηρίου (y) σε σχέση με την τιμή του παιδικού (x).
  - ✓ Να βρείτε τρεις πιθανές τιμές των δύο εισιτηρίων. Πόσα τέτοια ζεύγη υπάρχουν;
  - ✓ Ποια σχέση συνδέει τα διατεταγμένα αυτά ζεύγη (x, y);

Ποιο πρέπει να είναι το κόστος των δύο εισιτηρίων, αν πρέπει να τηρούνται και οι **δύο** πιο πάνω προϋποθέσεις;

Μαθαίνω

- Αν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους x, y και αναζητούμε το ζεύγος των αριθμών (x, y) που είναι ταυτόχρονα λύση και των δύο εξισώσεων, τότε λέμε ότι έχουμε να επιλύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y.**

Παράδειγμα:

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x + 3 \\ x + y &= 6 \end{aligned}\right\}$$ *Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y.*

Παρατήρηση:
Ένα σύστημα μπορεί να **μην έχει λύση**, ή να έχει **άπειρες λύσεις** που να το επαληθεύουν.

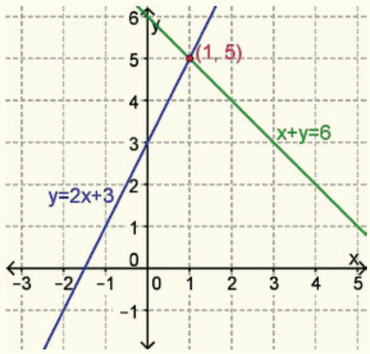
- **Λύση** γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ονομάζεται κάθε ζεύγος τιμών (x, y) που **επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις** του.

Παράδειγμα:
Η λύση του γραμμικού συστήματος $\left.\begin{matrix} y = 2x + 3 \\ x + y = 6 \end{matrix}\right\}$ *είναι το ζεύγος* $(1{,}5)$*, διότι επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος, αφού:* $5 = 2 \cdot 1 + 3$ *και* $1 + 5 = 6$

- Για τη **γραφική λύση** ενός γραμμικού συστήματος εργαζόμαστε ως εξής:
  - Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες που αντιστοιχούν στις δύο γραμμικές εξισώσεις.
  - Προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους (x, y). Το ζεύγος (x, y) είναι η λύση του συστήματος.

Παράδειγμα:
Για το σύστημα $\left.\begin{matrix} y = 2x + 3 \\ x + y = 6 \end{matrix}\right\}$ *κατασκευάζουμε τις ευθείες:*
$\varepsilon_1 : y = 2x + 3$ *και*
$\varepsilon_2 : y = 6 - x$.

Στη συνέχεια βρίσκουμε το σημείο τομής τους που είναι το $(1{,}5)$*. Η λύση του συστήματος είναι η* $x = 1,\ y = 5$.



- Για την **αλγεβρική επίλυση** ενός γραμμικού συστήματος με δύο μεταβλητές (x, y) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη **μέθοδο της αντικατάστασης**.

Παράδειγμα:
Για να λύσουμε το σύστημα $\begin{matrix} y - 2x = 1 \\ x + y = 7 \end{matrix}$ *εργαζόμαστε ως εξής:*

Βήματα

- Επιλύουμε τη μια από τις δύο εξισώσεις του συστήματος ως προς τη μια μεταβλητή. — *Λύουμε τη* $y - 2x = 1$ *ως προς* y*:* $y = 2x + 1$

- Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος.

Αντικαθιστούμε $2x+1$ στη θέση του y στην εξίσωση $x+y=7$ και έχουμε:

$$x+(2x+1)=7$$

- Επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.

$$x+2x+1=7$$
$$\Rightarrow 3x+1=7$$
$$\Rightarrow 3x=7-1$$
$$\Rightarrow 3x=6$$
$$\Rightarrow x=2$$

- Αντικαθιστούμε την τιμή της μεταβλητής που βρήκαμε σε μια από τις δύο αρχικές ή σε μια ισοδύναμή τους και βρίσκουμε την τιμή της άλλης μεταβλητής.

Αντικαθιστούμε το $x=2$ στην εξίσωση $y=2x+1$ και έχουμε:

$$y=2\cdot 2+1$$
$$\Rightarrow y=5$$

- Η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ που βρήκαμε.

Άρα, η λύση του συστήματος είναι: $x=2$ και $y=5$
Δηλαδή, το ζεύγος $(x,y)=(2{,}5)$.

Παραδείγματα

1. Δίνονται οι εξισώσεις $\varepsilon_1\colon y=x+1$ και $\varepsilon_2\colon y=-x+3$.
   (α) Ποια από τα πιο κάτω ζεύγη αριθμών είναι λύσεις της εξίσωσης ε_1 και ποια είναι λύσεις της εξίσωσης ε_2;

   Α. $x=0,\ y=1$ Β. $x=1,\ y=2$

   Γ. $x=2,\ y=1$ Δ. $x=-1,\ y=4$

   (β) Ποιο ζεύγος είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων ε_1 και ε_2;

Λύση:

(α) *Τα ζεύγη Α και Β είναι λύσεις της ε_1, γιατί την επαληθεύουν, δηλ. $1=0+1$ και $2=1+1$.*
Τα ζεύγη Β, Γ και Δ είναι λύσεις της ε_2, γιατί την επαληθεύουν, δηλ. $2=-1+3$, $1=-2+3$ και $4=-(-1)+3$.

(β) *Το ζεύγος Β είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων ε_1 και ε_2, γιατί επαληθεύει και τις δύο.*

2. Ο Χρίστος και ο Αλέξης έχουν μαζί €30. Αν ο Χρίστος έχει τα διπλάσια χρήματα από τον Αλέξη, να βρείτε πόσα χρήματα έχει ο καθένας;

Λύση:

Συμβολίζουμε τα χρήματα που έχει ο Χρίστος με x
και τα χρήματα που έχει ο Αλέξης με y
Τότε:

$x + y = 30$

και $x = 2y$

Αντικαθιστούμε $2y$ *στη θέση του* x *στην εξίσωση:*

$$x + y = 30$$
$$2y + y = 30$$
$$\Rightarrow 3y = 30$$
$$\Rightarrow y = 10$$

Αντικαθιστούμε το $y = 10$ *στην εξίσωση:*

$$x = 2y$$
$$x = 2 \cdot 10$$
$$\Rightarrow x = 20$$

Άρα, ο Χρίστος έχει €20 και ο Αλέξης €10.

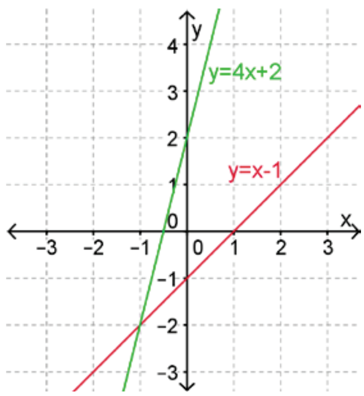
Δραστηριότητες

1. Ποιο από τα πιο κάτω ζεύγη αριθμών είναι η λύση του συστήματος: $\left.\begin{array}{l} y = -3x + 6 \\ x - 2y = -5 \end{array}\right\}$

(α) $x = 3$, $y = 1$ (β) $x = 3$, $y = 4$ (γ) $x = 1$, $y = 3$ (δ) $x = -1$, $y = 9$

2. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών:
$\varepsilon_1: y = x - 1$,
$\varepsilon_2: y = 4x + 2$,

Να βρείτε τη λύση του πιο κάτω συστήματος, χρησιμοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις:
$\left.\begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = 4x + 2 \end{array}\right\}$



3. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα εξισώσεων:

(α) $y = 3 + x$
$x + 2y = 6$

(β) $y - 2x = 0$
$2x + y = 3$

(γ) $3x + 2y = 5$
$x - 3y = 9$

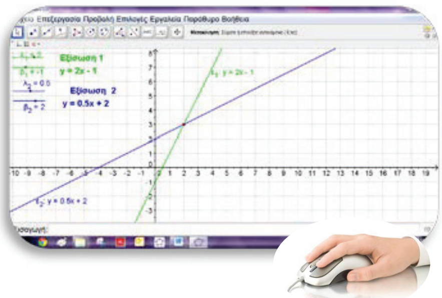
(δ) $\alpha - 3\beta = 0$
$\alpha + 2\beta = 15$

(ε) $\omega + 5\varphi = 18$
$3\omega + 2\varphi = 41$

(στ) $3\kappa + \lambda = 5$
$\kappa + 3(\lambda + 1) = 10$

4. Να ανοίξετε το αρχείο «B_En5_Sistimata.ggb».

(α) Να βρείτε γραφικά τη λύση των πιο κάτω συστημάτων με τη βοήθεια του υπολογιστή, μετακινώντας τους δρομείς, ώστε να πετύχετε τις πιο κάτω εξισώσεις:



i. $\left.\begin{aligned} y &= 2x - 1 \\ y &= x + 3 \end{aligned}\right\}$

ii. $\left.\begin{aligned} y &= 3x - 1 \\ y &= x + 1 \end{aligned}\right\}$

iii. $\left.\begin{aligned} y &= 3x - 1 \\ y &= 3x + 3 \end{aligned}\right\}$

iv. $\left.\begin{aligned} y &= 3x + 3 \\ y &= 3x + 3 \end{aligned}\right\}$

(β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων του καθενός από τα πιο πάνω συστήματα. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα αυτά.

5. Ο Στέφανος και η Μαρίλια έχουν συνολικά €120. Αν ο Στέφανος δώσει στη Μαρίλια €10, τότε θα έχουν τα ίδια χρήματα. Πόσα χρήματα έχει ο καθένας;

6. Σε μια κατασκήνωση 260 παιδιά διαμένουν σε 50 σκηνές των 4 και των 6 ατόμων (οι οποίες είναι όλες γεμάτες). Να υπολογίσετε πόσες είναι οι σκηνές των 4 και πόσες οι σκηνές των 6 ατόμων.

7. Σε μια εκδρομή πήγαν συνολικά 60 παιδιά. Τα αγόρια ήταν τριπλάσια από τα κορίτσια. Να βρείτε πόσα ήταν τα αγόρια και πόσα τα κορίτσια.

8. Σε μια εκδρομή το κανονικό εισιτήριο ήταν €10, ενώ για τους συνταξιούχους ήταν €6. Οι συνταξιούχοι που συμμετείχαν ήταν 10 λιγότεροι από τους υπόλοιπους που δεν ήταν συνταξιούχοι. Αν συνολικά εισπράχθηκε το ποσό των €260, να βρείτε πόσοι ήταν οι συνταξιούχοι.

9. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $y = \alpha x + \beta$ που περνά από τα σημεία $A(1,1)$ και $B(-1,-3)$.

Δραστηριότητες Ενότητας

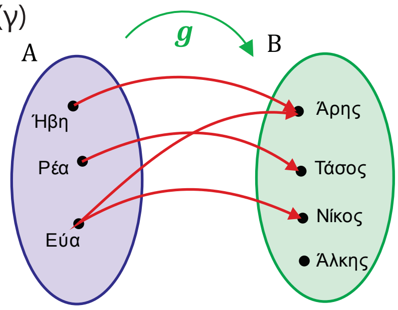
1. Να εξετάσετε, κατά πόσο ορίζεται συνάρτηση σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

   (α) $G = \{(-2,3), (0,1), (1,2), (3,0), (4,1), (-2,-1)\}$

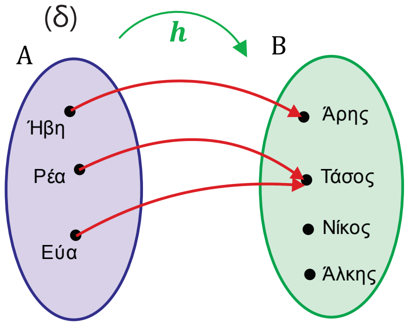
   (β)

x	1	7	$\frac{3}{7}$	-100	354
$f(x)$	5	$-3{,}52$	$1{,}2$	$0{,}02$	123

   (γ)



   (δ)

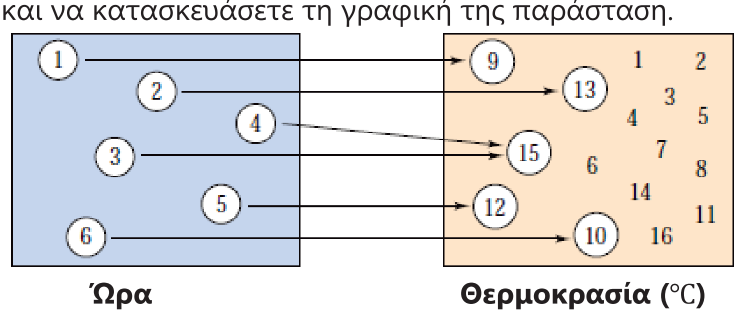


2. Στο πιο κάτω σχήμα παρουσιάζεται η αντιστοιχία των ωρών μιας συγκεκριμένης ημέρας και των θερμοκρασιών της σε βαθμούς κελσίου.

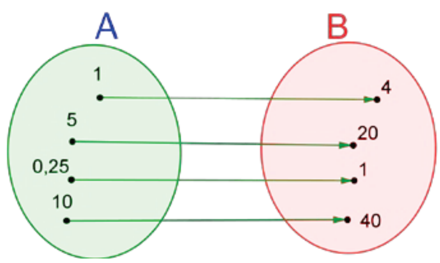
   (α) Να εξετάσετε κατά πόσο η πιο κάτω αντιστοιχία ορίζει συνάρτηση.

   (β) Να γράψετε το Πεδίο Ορισμού και το Πεδίο Τιμών, αν ορίζεται συνάρτηση.

   (γ) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών ώρα – θερμοκρασία και να κατασκευάσετε τη γραφική της παράσταση.

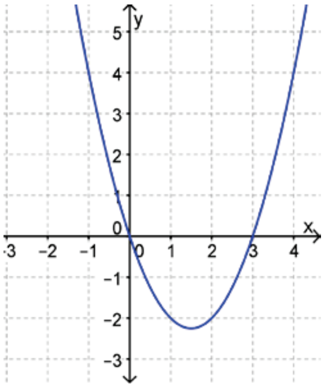


3. Να εξετάσετε κατά πόσο το διπλανό βελοειδές διάγραμμα ορίζει συνάρτηση από το A στο B. Να βρείτε έναν τύπο που συνδέει τα στοιχεία του A με τα στοιχεία του B.

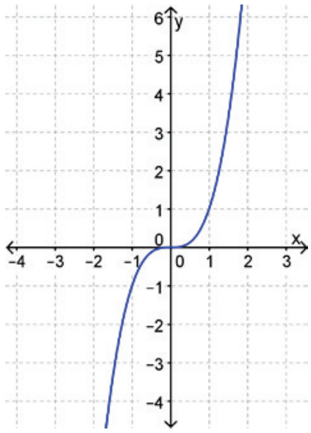


4. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω γραφικές παραστάσεις ορίζουν συνάρτηση.

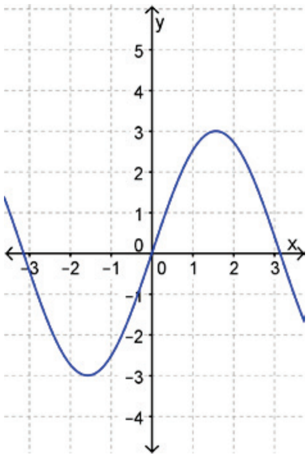
(α)



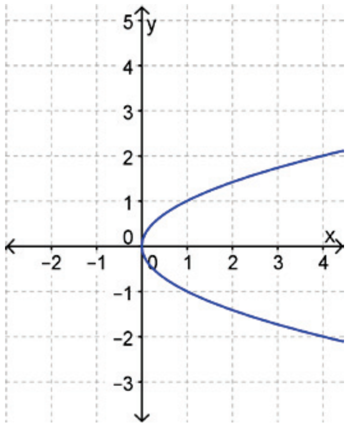
(β)



(γ)



(δ)



5. Δίνονται τα σημεία $A(-2,-1)$, $B(1,4)$, $\Gamma(-1,-2)$.

(α) Να εξετάσετε κατά πόσο τα σημεία A, B, Γ ανήκουν στις ευθείες:

$\varepsilon_1 : y = 3x + 1$

$\varepsilon_2 : \ x + y = -3$

(β) Να βρείτε τη λύση του συστήματος: $\left.\begin{aligned} y &= 3x + 1 \\ x + y &= -3 \end{aligned}\right\}$

6. Να βρείτε την τιμή του κ, ώστε η ευθεία (ε) να διέρχεται από το σημείο A στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) ε: $y = (3\kappa + 2)x$, $\ A(1,8)$ (β) ε: $y = \frac{5}{6}x$, $\ A(\kappa - 1, \kappa)$

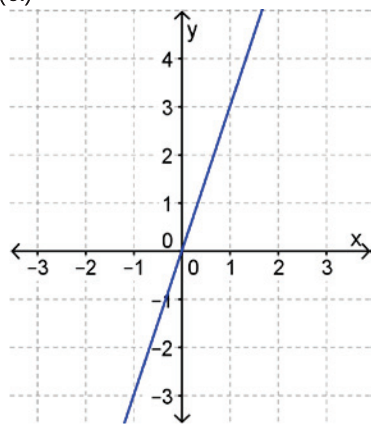
(γ) ε: $y = (\kappa - 1)x$, $\ A(2, \kappa + 3)$ (δ) ε: $y = \kappa x + 3$, $\ A(1, 5)$

7. Να εξετάσετε κατά πόσο το ζεύγος αριθμών $x = 3$, $y = 2$ είναι η λύση του συστήματος: $\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$

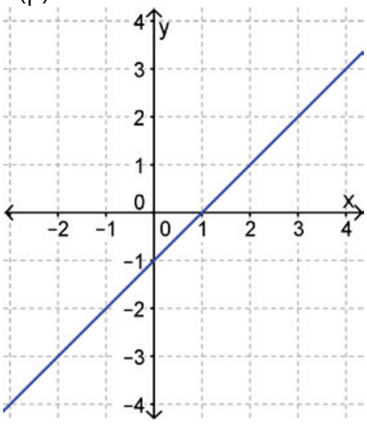
8. Οι μαθητές ενός τμήματος ενός γυμνασίου θα επισκεφτούν ένα μουσείο το οποίο χρεώνει €8,50 είσοδο για κάθε μαθητή. Για τη μεταφορά των μαθητών στο μουσείο, η εταιρεία των λεωφορείων χρεώνει συνολικά €50.
   (α) Να βρείτε και να περιγράψετε τον τύπο που υπολογίζει το κόστος της επίσκεψης των μαθητών.
   (β) Να εξετάσετε κατά πόσο είναι γραμμική συνάρτηση.

9. Να βρείτε την κλίση των πιο κάτω ευθειών:

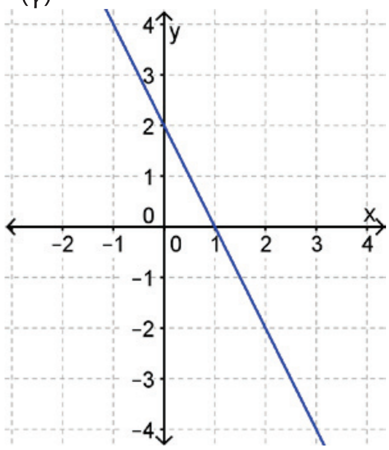
(α)



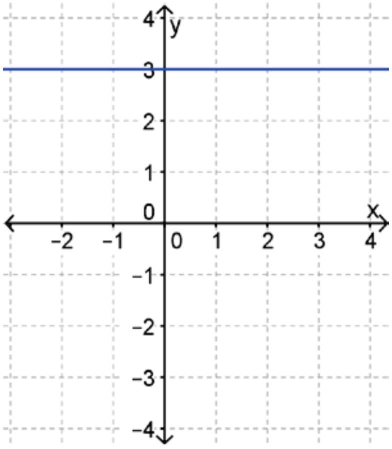
(β)



(γ)

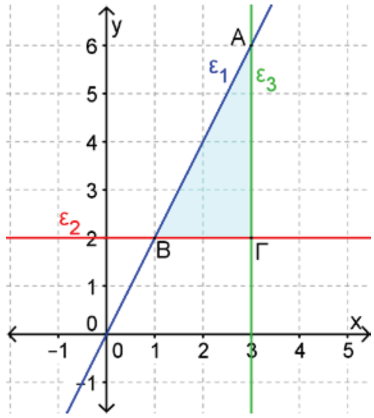


(δ)



10. Να γράψετε τις εξισώσεις δύο ευθειών για καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:
   (α) να περνούν από την αρχή των αξόνων,
   (β) να έχουν κλίση 3,
   (γ) να τέμνουν τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο (0,1),
   (δ) να διέρχονται από το σημείο (1,2).

11. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3, που σχηματίζουν το τρίγωνο $ΑΒΓ$.

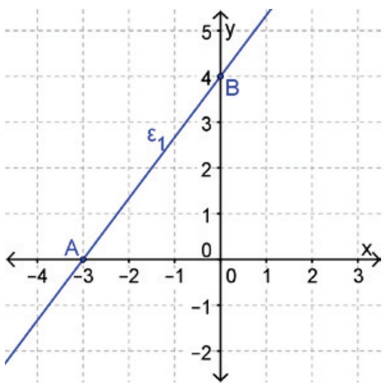


12. Δίνεται η συνάρτηση $y = \alpha x$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.
    (α) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράστασή της.
    (β) Να υπολογίσετε την τιμή του α.

13. Να εξετάσετε κατά πόσο τα δεδομένα του πιο κάτω πίνακα συνδέονται με γραμμική σχέση. Αν ναι, να υπολογίσετε την κλίση και να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα των τεταγμένων.

x	2	3	5	8	12
y	5	8	14	23	35

14. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ευθείας ε_1:
    (α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε_1.
    (β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1.
    (γ) Δίνεται η ευθεία $\varepsilon_2: 2x + 3y = -6$. Να βρείτε τα σημεία τομής $Γ$ και $Δ$ της ευθείας ε_2 με τους άξονες των x και y αντίστοιχα και να την παραστήσετε γραφικά στο ίδιο ορθογώνιο σύστημα αξόνων με την ευθεία ε_1.
    (δ) Αν $Δ(0,-2)$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΔ$.



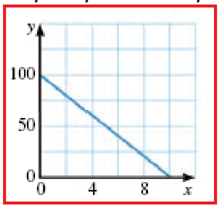
15. Να λύσετε τα συστήματα:

(α) $\begin{array}{l} 2x - y = 9 \\ x = 7 - 2y \end{array}$ (β) $\begin{array}{l} \alpha - 3\beta = -2 \\ 2\alpha + \beta = 3 \end{array}$

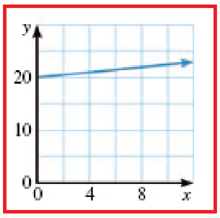
(γ) $\begin{array}{l} 3x + 2y = 9 \\ 2x - y = 13 \end{array}$ (δ) $\begin{array}{l} x - 1 = -2y \\ 3x - 5(y + 1) = 0 \end{array}$

16. Να αντιστοιχίσετε τις γραφικές παραστάσεις της πρώτης στήλης με τις περιγραφές της δεύτερης στήλης του πίνακα και να επεξηγήσετε σε κάθε περίπτωση τι αντιπροσωπεύει η κλίση της γραφικής παράστασης.

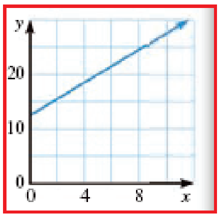
<u>*Γραφική παράσταση.*</u> <u>*Περιγραφή*</u>

Α. 

Ένας υπάλληλος πληρώνεται € 12,50 και επιπλέον €1,50 για κάθε προϊόν που κατασκευάζει.

Β. 

Ένα άτομο πρέπει να καλύψει απόσταση 100 m, περπατώντας με ταχύτητα 10 m/min.

Γ. 

Ένας επαγγελματίας οδηγός εισπράττει καθημερινά €20 και επιπλέον €0,32 για κάθε χιλιόμετρο που καλύπτει.

17. Μια παρέα 26 ατόμων θα πάνε εκδρομή και θα μεταφερθούν με 8 οχήματα – αυτοκίνητα και μοτοσυκλέτες. Με κάθε αυτοκίνητο μεταφέρονται 4 άτομα ενώ με κάθε μοτοσυκλέτα 2. Να βρείτε πόσα αυτοκίνητα και πόσες μοτοσυκλέτες θα χρησιμοποιήσουν.

18. Να βρείτε το κόστος ενοικίασης μιας ομπρέλας, μελετώντας τον πιο κάτω πίνακα.

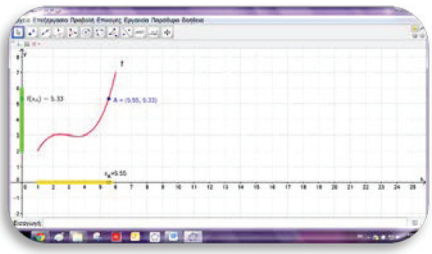
	Κρεβατάκια	Ομπρέλες	Κόστος ενοικίασης
Κύριος Άλκης	3	1	€7,25
Κυρία Μιράντα	5	2	€13,00

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Σε ένα ζαχαροπλαστείο ο βοηθός ζαχαροπλάστης ετοιμάζει 6 γλυκά την ώρα. Ο ζαχαροπλάστης ετοιμάζει 10 γλυκά την ώρα, αλλά ξεκινά να εργάζεται δύο ώρες ύστερα από τον βοηθό ζαχαροπλάστη. Οι δύο ζαχαροπλάστες πρέπει να ετοιμάσουν συνολικά 92 γλυκά.
   Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης, η οποία υπολογίζει τον αριθμό των γλυκών που ετοιμάζονται σε x ώρες από τη στιγμή που θα ξεκινήσει να εργάζεται ο βοηθός ζαχαροπλάστης.
   Σε πόσες ώρες, θα έχουν τελειώσει;

2. Το πλήθος των κατοίκων σε μια πόλη αυξήθηκε κατά 20% τα τελευταία πέντε χρόνια. Έστω y ο αριθμός των κατοίκων σήμερα και x ο αριθμός των κατοίκων πριν πέντε χρόνια.
   (α) Να αποδείξετε ότι η σχέση που συνδέει τα x και y είναι η $y = \frac{6}{5}x$.
   (β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $y = \frac{6}{5}x$.
   (γ) Να βρείτε το πλήθος των κατοίκων σήμερα αν πριν πέντε χρόνια ήταν 55 χιλιάδες.

3. Να ανοίξετε το αρχείο «B_En5_PO_PT.ggb». Να μετακινήσετε το σημείο A και να βρείτε:
   (α) Τις τιμές $f(2)$ και $f(5)$.
   (β) Το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης f.
   (γ) Το Πεδίο Τιμών της συνάρτησης f.



4. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ, έτσι ώστε η ευθεία $(\kappa + 2)x + (\lambda - 1)y = 7$ να είναι:
   (α) παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων,
   (β) κάθετη με τον άξονα των τετμημένων.

5. Δίνεται η εξίσωση $6x + 8y = 2013$. Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχουν ακέραιες τιμές που να επαληθεύουν την πιο πάνω εξίσωση.

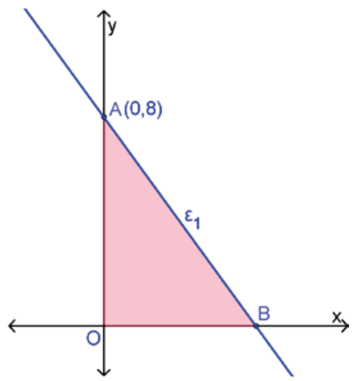
6. Να βρείτε δύο τιμές του α, έτσι ώστε η εξίσωση $6x + 8y = \alpha$ να έχει ακέραιες λύσεις.

7. Ο Μιχάλης και ο Αντώνης αναχωρούν με το ποδήλατο από το σπίτι τους για το σχολείο την ίδια ώρα. Οι αποστάσεις (σε μέτρα) των θέσεων του Μιχάλη και του Αντώνη από το σχολείο συναρτήσει του χρόνου (σε λεπτά) δίνονται από τους τύπους $\delta_1 = 4000 - 400t$ και $\delta_2 = 3500 - 250t$ αντίστοιχα. Με τη βοήθεια κατάλληλης γραφικής παράστασης, να βρείτε ποιος από τους δύο θα φτάσει πρώτος στο σχολείο. Υπάρχει κάποια χρονική στιγμή που τα δύο αγόρια θα ισαπέχουν από το σχολείο;

8. Οι ευθείες ε_1: $x + 2\psi = 2$ και ε_2: $\mu x + (\mu - 5)\psi = 6$ τέμνουν τον άξονα x στο ίδιο σημείο. Να βρείτε την τιμή του μ.

9. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 σχηματίζουν ένα ισοσκελές τρίγωνο:
   ε_1: $y = 0$
   ε_2: $-3x + 2y = 6$
   ε_3: $3x + 2y = 6$

10. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1, αν το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι ίσο με $24\ \mu^2$.



11. Δίνεται η ευθεία ε: $y = (3\alpha - 2)x$. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε η ευθεία (ε) να βρίσκεται:
   (α) Στο 1^o και 3^o τεταρτημόριο
   (β) Στο 2^o και 4^o τεταρτημόριο

ΕΝΟΤΗΤΑ 6

Ευθέως – Αντιστρόφως Ανάλογα Ποσά

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να διακρίνουμε πότε δύο ποσά είναι ευθέως ανάλογα και πότε αντιστρόφως ανάλογα.
- Να εφαρμόζουμε τις σχέσεις των ευθέως/αντιστρόφως ανάλογων ποσών στην επίλυση προβλημάτων.

Έχουμε μάθει ...

- **Λόγος δύο ομοειδών μεγεθών $\boldsymbol{\alpha}$** και $\boldsymbol{\beta}$, που εκφράζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης, είναι **το πηλίκο των μέτρων τους**.

  Ο λόγος του $\boldsymbol{\alpha}$ προς το $\boldsymbol{\beta}$ μπορεί να γραφεί ως:

  $\boldsymbol{\alpha}$ προς $\boldsymbol{\beta}$ ή $\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\beta}$ ή $\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}$.

  Παράδειγμα:

  Ένα ορθογώνιο έχει πλάτος 4 cm και μήκος 12 cm.
  Ο λόγος του πλάτους προς το μήκος του ορθογωνίου είναι
  4 προς 12 ή $4 : 12$ ή $\frac{4}{12}$ ή πιο απλά $\frac{1}{3}$

- **Αναλογία** ονομάζεται η ισότητα δύο λόγων, $\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\delta}}$

  Παράδειγμα:
  $\frac{5}{15} = \frac{10}{30}$

- Ο λόγος δύο μεγεθών που εκφράζονται με διαφορετική μονάδα μέτρησης (λόγος μη ομοειδών μεγεθών), θα ονομάζεται **ρυθμός μεταβολής** ή πιο απλά ρυθμός του ενός μεγέθους ως προς το άλλο.

  Παράδειγμα:
  Το αυτοκίνητο του κυρίου Κώστα με 50 λίτρα διανύει συνήθως 800 km.
  Άρα, ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης που διανύει προς την ποσότητα βενζίνης που καταναλώνει είναι:

  $$\frac{\alpha\pi\acute{o}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\ (km)}{\pi o\sigma\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ (\lambda\acute{\iota}\tau\rho\alpha)} = \frac{800}{50}\frac{km}{\lambda\acute{\iota}\tau\rho\alpha} = 16\ \frac{km}{\lambda\acute{\iota}\tau\rho o}$$

- Το σύμβολο $\boldsymbol{\alpha}\%$ ονομάζεται **ποσοστό επί τοις εκατό** ή απλούστερα ποσοστό και είναι ίσο με τον λόγο $\frac{\alpha}{100}$.

- Ιδιότητες αναλογιών:

  i. Αν $\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\delta}} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

  Το γινόμενο των άκρων όρων μιας αναλογίας είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων της.

  Παράδειγμα:
  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Leftrightarrow 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$

  ii. Αν $\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\delta}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\delta}}$

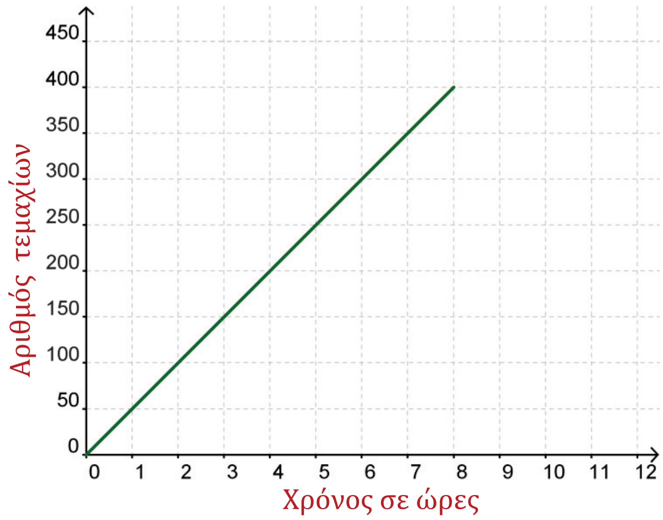
  Ο λόγος που έχει ως αριθμητή το άθροισμα των ηγούμενων όρων και παρονομαστή το άθροισμα των επόμενων όρων μιας αναλογίας, είναι ίσος με τους λόγους της αναλογίας.

  Παράδειγμα:
  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2+4}{3+6}$

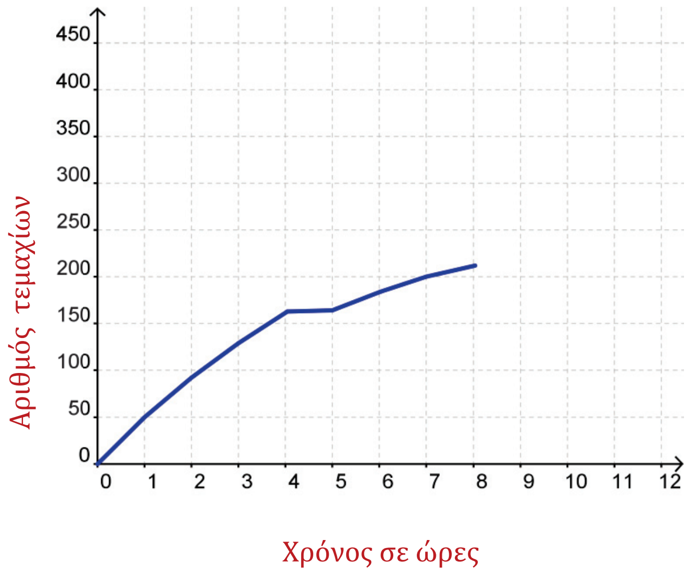
Ευθέως Ανάλογα Ποσά

Εξερεύνηση

Μια ηλεκτρονική μηχανή συσκευάζει αεροστεγώς τα προϊόντα ενός τυροκομείου. Η απόδοση της μηχανής φαίνεται στην πιο κάτω γραφική παράσταση.



Η μηχανή, κατά τη διάρκεια της παραγωγής, βγήκε εκτός λειτουργίας γι΄ αυτό τη συσκευασία των προιόντων ανέλαβε ένας εργάτης. Πιο κάτω φαίνεται η απόδοση του εργάτη.



✓ Να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

Με βάση τη γραφική παράσταση, που παριστάνει την απόδοση της μηχανής, να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα:

Χρόνος σε ώρες	Αριθμός τεμαχίων
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

✓ Αν η μηχανή συνέχιζε τη λειτουργία της για ακόμη μια ώρα, πόσα τεμάχια θα είχε συσκευάσει;

✓ Να γράψετε τη σχέση που συνδέει τον χρόνο λειτουργίας με τον αριθμό τεμαχίων που συσκευάζει η μηχανή.

Διερεύνηση (2)

Η Μαρίλια σπουδάζει βρεφονηπιοκόμος. Στον ελεύθερο της χρόνο ενδιαφέρεται να προσέχει παιδιά. Μια μέρα διάβασε στην εφημερίδα την αγγελία που φαίνεται δίπλα και αποτάθηκε στην οικογένεια Κωνσταντινίδη για εργοδότηση.

> **Ζητείται**
>
> **Η οικογένεια Κ. Κωνσταντινίδη, από τη Λευκωσία, ζητά να προσλάβει κοπέλα, για να φροντίζει τα δύο της παιδιά.**
>
> **Αμοιβή 6 ευρώ την ώρα.**

✓ Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

Χρόνος εργασίας σε ώρες x	Αμοιβή σε ευρώ y
2	
4	
	36
	60

✓ Να εξετάσετε τον τρόπο που μεταβάλλονται τα ποσά χρόνος και αμοιβή.

✓ Να γράψετε τον λόγο δύο τιμών του χρόνου εργασίας και να τον συγκρίνετε με τον λόγο των δύο αντίστοιχων τιμών της αμοιβής. Τι παρατηρείτε;

✓ Να παραστήσετε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) του πίνακα, να κάνετε τη γραφική παράσταση και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

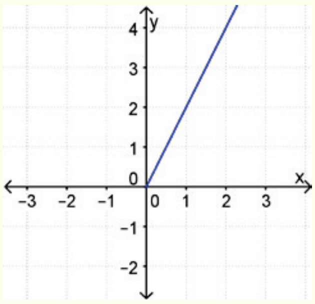
✓ Να κατασκευάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση, αν η αμοιβή της Μαρίλιας ήταν 8 ευρώ την ώρα. Να συγκρίνετε τις δύο γραφικές παραστάσεις.

Μαθαίνω

- Δύο ποσά ονομάζονται **ευθέως ανάλογα** ή απλά **ανάλογα**, όταν οι αντίστοιχες τιμές τους δίνουν πάντα το ίδιο πηλίκο.

  Δηλαδή,
  $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ είναι **ανάλογα** $\Leftrightarrow$ $\frac{y}{x} = \boldsymbol{\alpha}$, όπου α σταθερός αριθμός.
  Άρα, $y = \boldsymbol{\alpha x}$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων.

  Ο σταθερός αριθμός $\boldsymbol{\alpha}$ λέγεται **συντελεστής της αναλογίας**.

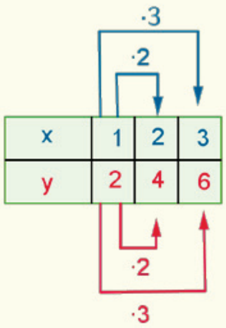


  Παράδειγμα:
  Η τιμή του ενός προϊόντος είναι 2 ευρώ το κιλό.
  Άρα, τα ποσά κόστος(y) και μάζα (x) συνδέονται με τον τύπο $y = 2x$.

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2$$

- Στα ανάλογα ποσά ισχύει ότι:
  - **πολλαπλασιάζοντας (ή διαιρώντας)** τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού **πολλαπλασιάζονται (ή διαιρούνται)** αντίστοιχα με **τον ίδιο αριθμό.**

    Παράδειγμα:
    Ο διπλασιασμός, του ενός ποσού (x), επιφέρει τον διπλασιασμό του άλλου ποσού (y).



x	1	2	3
y	2	4	6

  - **ο λόγος** δύο τιμών του ενός ποσού, $\frac{x_1}{x_2}$, είναι **ίσος** με τον λόγο των αντίστοιχων τιμών του άλλου ποσού $\frac{y_1}{y_2}$.

    Παράδειγμα:
    $\frac{x_1}{x_2} = \frac{2}{3}$, $\frac{y_1}{y_2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ *Δηλαδή ισχύει,* $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$

- Αν ισχύει μια από τις πιο πάνω σχέσεις, τότε τα ποσά είναι ανάλογα.

Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε κατά πόσο τα ποσά που δίνονται στον πιο κάτω πίνακα είναι ανάλογα. Αν είναι ανάλογα, να βρείτε τον συντελεστή της αναλογίας.

κ	0,9	1,2	1,8	3,3
λ	3	4	6	11

Λύση:

Εξετάζουμε τους λόγους $\frac{\kappa}{\lambda}$:

$\frac{0,9}{3} = 0,3$

$\frac{1,2}{4} = 0,3$

$\frac{1,8}{6} = 0,3$

$\frac{3,3}{11} = 0,3$

Παρατηρούμε ότι ο λόγος $\frac{\kappa}{\lambda}$ *των αντίστοιχων τιμών είναι σταθερός. Άρα, τα ποσά είναι ανάλογα. Ο συντελεστής της αναλογίας είναι το* 0,3.

2. Ένας γεωργός, θέλει να ψεκάσει μια καλλιέργεια λαχανικών. Η δοσολογία για το φυτοφάρμακο είναι $20\,ml$ φυτοφάρμακο για κάθε $80\,l$ νερό. Να βρείτε πόσα λίτρα νερό θα χρησιμοποιήσει, για να φτιάξει διάλυμα στο οποίο θα διαλύσει δύο συσκευασίες φυτοφαρμάκου των $30\,ml$.

Λύση:

Τα ποσά είναι ευθέως ανάλογα. Οι αντίστοιχες τιμές που παίρνουν πρέπει να έχουν πάντα το ίδιο πηλίκο (Ποσότητα φυτοφαρμάκου : Ποσότητα νερού).

Έστω ότι η άγνωστη ποσότητα του νερού είναι x.

Ποσότητα φυτοφαρμάκου	Ποσότητα νερού
20	80
$2 \cdot 30 = 60$	x
Ευθέως ανάλογα ποσά	

$\frac{20}{80} = \frac{60}{x} \Leftrightarrow 20x = 60 \cdot 80 \Leftrightarrow 20x = 4800 \Leftrightarrow x = 240$

Θα χρησιμοποιήσει 240 *λίτρα νερό.*

3. Τον Αύγουστο ένα κατάστημα ηλεκτρικών ειδών προσφέρει στους πελάτες του 40% έκπτωση.
   (α) Να γράψετε τη σχέση που συνδέει την αρχική τιμή πώλησης πριν από τις εκπτώσεις με την αναγραφόμενη τιμή κατά τη διάρκεια των εκπτώσεων.
   (β) Να βρείτε την αρχική τιμή πώλησης μιας τηλεόρασης που πωλήθηκε κατά τη διάρκεια των εκπτώσεων €360.

Λύση:

(α) *Αφού η έκπτωση είναι 40% τα διάφορα ηλεκτρικά είδη θα πωλούνται στο 60% της αρχικής τους τιμής.*
Η αρχική τιμή πώλησης και η τιμή πώλησης κατά τη διάρκεια των εκπτώσεων είναι ποσά ανάλογα. Οι λόγοι των δύο ποσών είναι ίσοι.
Θέτουμε:
x: *την αρχική τιμή πώλησης*
y: *την τιμή πώλησης κατά τη διάρκεια των εκπτώσεων*

$$\frac{y}{x} = \frac{60}{100} \Longrightarrow y = 0{,}6 \cdot x$$

(β) $360 = 0{,}6 \cdot x \quad \Leftrightarrow x = 360 : 0{,}6$
$\Leftrightarrow x = 600$

Άρα, η αρχική τιμή πώλησης πριν τις εκπτώσεις ήταν €600.

Δραστηριότητες

1. Δίνεται ο πιο κάτω πίνακας με τις τιμές δύο ποσών A και B. Να εξετάσετε κατά πόσο τα ποσά είναι ευθέως ανάλογα και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)

A	B
6	90
12	45

(β)

A	B
5	7
10	28

(γ)

A	B
9	21
12	28

2. Τα ποσά x και y που δίνονται στους πιο κάτω πίνακες είναι ανάλογα. Να συμπληρώσετε τα κενά με τους κατάλληλους αριθμούς:

(α)

x		2	3	
y	15	6		90

(β)

x	14			56
y		3	5	8

3. Να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω ζεύγη ποσών είναι ανάλογα:

   (α) Η περίμετρος ενός τετραγώνου και το μήκος της πλευράς του.

   (β) Το ύψος ενός ανθρώπου και η μάζα του.

   (γ) Η τιμή ενός υφάσματος και το μήκος του.

   (δ) Η αμοιβή ενός ωρομίσθιου εργάτη και ο χρόνος εργασίας του.

   (ε) Το εμβαδόν ενός τετραγώνου και το μήκος της πλευράς του.

4. Εργάτης παίρνει €800 για 16 ημερομίσθια. Πόσα χρήματα θα πάρει για 12 ημερομίσθια;

5. Ένα αυτοκίνητο διάνυσε σε 3 ώρες μια απόσταση 240 χιλιομέτρων. Πόσα χιλιόμετρα θα διανύσει σε 5,5 ώρες, αν τρέχει με την ίδια ταχύτητα;

6. Αν γνωρίζουμε ότι 120 γραμμάρια άσπρου ψωμιού περιέχουν 125 θερμίδες, να υπολογίσετε πόσες θερμίδες πήρε ο Κωνσταντίνος από τα 300 γραμμάρια ψωμιού που έφαγε με το φαγητό του;

7. Ο Αλέξης είναι σήμερα δύο χρονών και έχει ύψος 85 cm. Ο αδελφός του υπολόγισε ότι, όταν θα γίνει ο Αλέξης 4 χρονών, θα έχει ύψος 1,70 m. Να ελέγξετε την ορθότητα της απάντησής του.

Ηλικία	Ύψος
2	85
4	170

Άρα αφού η ηλικία θα διπλασιαστεί τότε και το ύψος του θα διπλασιαστεί.

8. Μια κλωστοϋφαντουργική μηχανή παράγει 16 km νήμα σε 8 ώρες. Σε πόσες ημέρες θα παραχθούν 500 km νήμα, αν η μηχανή θα λειτουργεί 10 ώρες κάθε ημέρα;

9. Το κρασί που μας δίνει κάποια συγκεκριμένη ποικιλία σταφυλιού είναι το 60% της μάζας του σταφυλιού.
    (α) Να γράψετε τη σχέση που συνδέει τη μάζα των σταφυλιών (x) με την ποσότητα του κρασιού (y) σε κιλά.
    (β) Να υπολογίσετε πόσα κιλά κρασί θα πάρουμε από $1800\ kg$ σταφύλια.
    (γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση.

10. Ο κύριος Ανδρέας θα ταξιδέψει στις Η.Π.Α., για να επισκεφτεί μια έκθεση για μηχανήματα. Υπολόγισε ότι θα χρειαστεί €1500 για το ξενοδοχείο και τα διπλάσια λεφτά για τα προσωπικά του έξοδα. Να υπολογίσετε τι ποσό σε δολάρια θα χρειαστεί να πάρει μαζί του.

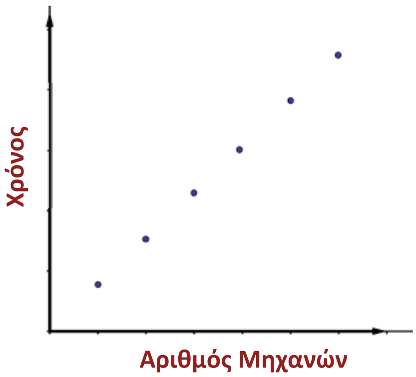
Τιμές Συναλλάγματος σε σχέση με το €			
	GBP	Αγγλική Λίρα	0,85
	USD	Δολάριο Αμερικής	1,30
	JPY	Ιαπωνικό Γεν	100,30
	CHF	Φράγκο Ελβετίας	1,21
	CAD	Δολάριο Καναδά	1,34
	AUD	Δολάριο Αυστραλίας	1,42
	RUB	Ρωσικό Ρούβλι	45,15
	CNY	Κινέζικο Γιουάν	9,25

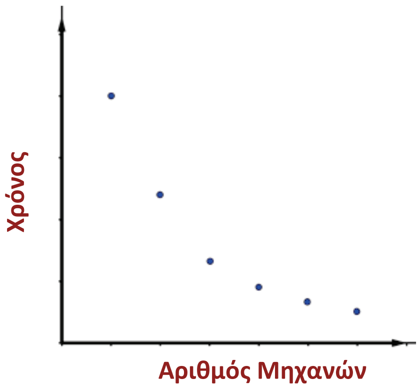
Αντιστρόφως Ανάλογα Ποσά

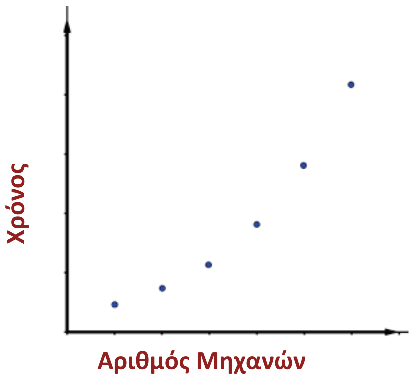
Εξερεύνηση

Ένα εργοστάσιο έχει στη γραμμή παραγωγής του έναν συγκεκριμένο αριθμό μηχανών της ίδιας δυναμικότητας, οι οποίες δουλεύουν ανεξάρτητα. Ο υπεύθυνος παραγωγής θέλει να προγραμματίσει την παραγωγή, ώστε να παραδώσει μια συγκεκριμένη παραγγελία στην ημερομηνία που προνοεί το συμβόλαιο παράδοσής της. Ο υπεύθυνος έχει τη δυνατότητα να θέτει σε λειτουργία διαφορετικό αριθμό μηχανών.

✓ Ποια από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις παριστάνει τον χρόνο ολοκλήρωσης της παραγγελίας σε σχέση με τον αριθμό των μηχανών που τίθενται σε λειτουργία;

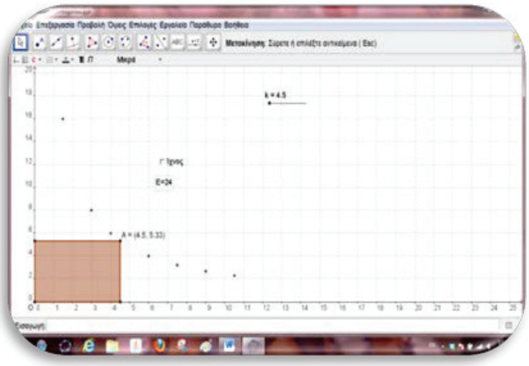






Διερεύνηση

Στο εφαρμογίδιο «B_En_6_emvadon_orthogoniou.ggb» δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με σταθερό εμβαδόν $24\ cm^2$. Η σταθερή κορυφή του είναι στο σημείο $O(0,0)$. Η κορυφή A είναι απέναντι από το σταθερό σημείο O.



✓ Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Μήκος ορθογωνίου x	Πλάτος ορθογωνίου y	Εμβαδόν ορθογωνίου	Συντεταγμένες κορυφής $A(x, y)$
1		24	
	12	24	
	8	24	
4		24	
	3	24	
	2	24	

✓ Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες της κορυφής A.

✓ Να γράψετε τον λόγο δύο τιμών του μήκους x και να τον συγκρίνετε με τον λόγο των δύο αντίστοιχων τιμών του πλάτους y. Τι παρατηρείτε;

✓ Να μετακινήσετε τον δρομέα κ και να παρατηρήσετε τις διάφορες θέσεις που παίρνει η κορυφή A.

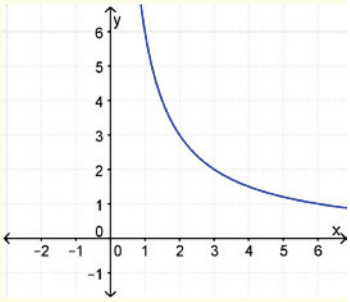
✓ Να επιλέξετε το εικονίδιο ☐ Ίχνος και να παρατηρήσετε τη γραφική παράσταση που σχηματίζεται.

Μαθαίνω

- Δύο ποσά ονομάζονται **αντιστρόφως ανάλογα** όταν το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους είναι πάντα σταθερό.

  Δηλαδή,
  x και y είναι **αντιστρόφως ανάλογα** $\Leftrightarrow$ $y \cdot x = \alpha$, $\alpha \neq 0$, όπου α σταθερός αριθμός.

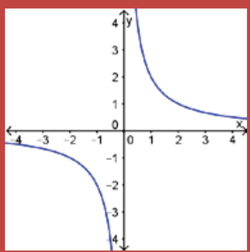
  Άρα, $y = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι υπερβολή.



  Παράδειγμα:
  Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου είναι $6\ m^2$.
  Άρα, τα ποσά μήκος βάσης (x) *και μήκος ύψους* (y) *συνδέονται με τον τύπο* $x \cdot y = 6$

$$x \cdot y = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6 \cdot 1$$

Η υπερβολή αποτελείται από δύο καμπύλες που λέγονται **κλάδοι της υπερβολής**. Οι κλάδοι της υπερβολής όσο και να προεκταθούν **δεν τέμνουν τους άξονες ούτε συμπίπτουν με αυτούς.**



- Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά ισχύει ότι:

  - όταν **πολλαπλασιάζονται** οι τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού **διαιρούνται με τον ίδιο αριθμό**.

    Παράδειγμα:
    Όταν οι τιμές του ενός ποσού (x) ***πολλαπλασιάζονται με*** 2, *οι τιμές του άλλου ποσού* (y) ***διαιρούνται με 2.***

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

  - ο **λόγος** δύο τιμών του ενός ποσού είναι **ίσος με τον αντίστροφο** λόγο των αντίστοιχων τιμών του άλλου ποσού.

    Παράδειγμα:
    $\frac{x_1}{x_2} = \frac{2}{3}$, $\frac{y_1}{y_2} = \frac{3}{2}$ *Δηλαδή ισχύει,* $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$

- Αν ισχύει μια από τις πιο πάνω σχέσεις, τότε τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε κατά πόσο τα ποσά που δίνονται στον πιο κάτω πίνακα είναι αντιστρόφως ανάλογα.

x	1	2	3	4
y	24	12	8	6

Λύση:
Υπολογίζουμε τα γινόμενα $x \cdot y$ των αντίστοιχων τιμών:
$1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = 24$

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο $x \cdot y$ των αντίστοιχων τιμών είναι σταθερό. Άρα, τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

2. Σε ένα εργοστάσιο 12 μηχανές είναι σε λειτουργία 15 ώρες για να ολοκληρώσουν την ημερήσια παραγωγή η οποία είναι σταθερή. Αν μια συγκεκριμένη ημέρα 2 μηχανές θα είναι εκτός λειτουργίας για συντήρηση, πόσες ώρες πρέπει να λειτουργήσουν οι υπόλοιπες μηχανές, για να μην επηρεαστεί η ημερήσια παραγωγή του εργοστασίου;

Λύση:
Τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, γιατί όταν οι τιμές του ενός ποσού (αριθμός μηχανών) πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό, οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού (ώρες) διαιρούνται με τον ίδιο αριθμό.
Άρα, οι αντίστοιχες τιμές που παίρνουν πρέπει να έχουν πάντα το ίδιο γινόμενο (Αριθμός Μηχανών · Ώρες).

Αριθμός Μηχανών	*Ώρες*
12	15
$12 - 2 = 10$	x
Αντιστρόφως ανάλογα ποσά	

$10x = 12 \cdot 15 \Leftrightarrow 10x = 180 \Leftrightarrow x = 18$

Οι υπόλοιπες μηχανές πρέπει να δουλέψουν 18 ώρες.

Δραστηριότητες

1. Δίνεται ο πιο κάτω πίνακας με τις τιμές δύο ποσών A και B. Να εξετάσετε αν τα πιο κάτω ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:

(α)

A	B
6	90
18	45

(β)

A	B
12	30
36	10

(γ)

A	B
6	18
9	27

2. Κατά τη διάρκεια υποβρύχιων ελέγχων σε ένα μέρος ενός ωκεανού, μια επιστημονική ομάδα παρατήρησε ότι η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου (℃) είναι αντιστρόφως ανάλογη του βάθους σε χιλιόμετρα (km). Αν σε βάθος $4\ km$ κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας, κατέγραψαν θερμοκρασία 6℃, να βρείτε:
   (α) τη θερμοκρασία αν θα καταδυθούν σε βάθος $8\ km$,
   (β) σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι 2 ℃.

3. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, ώστε τα ποσά να είναι αντιστρόφως ανάλογα.

x	1	2		12
y	40		8	

4. Ο Απόστολος παρατήρησε ότι όσο πιο πολύ χρόνο αφιερώνει στην παρακολούθηση τηλεόρασης τόσο λιγότερο χρόνο αφιερώνει για την καθημερινή μελέτη των μαθημάτων του. Τη Δευτέρα είδε τηλεόραση για 1,5 ώρα, και διάβασε για άλλη 1,5 ώρα. Την Τρίτη είδε τηλεόραση 2 ώρες και διάβασε μόνο 1 ώρα και την Τετάρτη είδε μόνο μισή ώρα τηλεόραση και διάβασε 2,5 ώρες. Με βάση τα δεδομένα αυτά, ο Απόστολος κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ο χρόνος που βλέπει τηλεόραση και ο χρόνος που αφιερώνει για διάβασμα καθημερινά είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Έχει δίκιο ή όχι και γιατί;

5. Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από τη Λάρνακα, για να πάει στη Λευκωσία με σταθερή ταχύτητα $90\,Km/h$. Αν σε 30 λεπτά καλύπτει τη μισή απόσταση, να βρείτε πόσο πρέπει να αυξήσει την ταχύτητά του, ώστε να καλύψει την υπόλοιπη απόσταση σε 25 λεπτά.

6. Ένα σύστημα αυτόματου ποτίσματος παίρνει νερό από μια δεξαμενή. Αν το σύστημα λειτουργεί 3 ώρες την ημέρα, το νερό της δεξαμενής επαρκεί για 30 ημέρες. Αν το σύστημα λειτουργεί για 5 ώρες την ημέρα, για πόσες ημέρες επαρκεί το νερό της δεξαμενής; (*Ο όγκος του νερού στη δεξαμενή είναι ο ίδιος στις δύο περιπτώσεις*)

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Τα ποσά x και y είναι ανάλογα.
   (α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	1	2	4		
y		4		12	20

   (β) Να βρείτε τον συντελεστή αναλογίας και να γράψετε τη σχέση που συνδέει το y με το x.
   (γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της πιο πάνω συνάρτησης.

2. Ο καφές χάνει το $\frac{1}{6}$ του βάρους του, όταν καβουρδιστεί. Πόσα κιλά καφέ χρειαζόμαστε για να πάρουμε $2\,kg$ καβουρδισμένου καφέ;

3. Δύο αυτοκίνητα αναχωρούν την ίδια χρονική στιγμή. Το A με σταθερή ταχύτητα $80\,Km/h$ ενώ το B αυτοκίνητο με σταθερή ταχύτητα $100\,Km/h$. Σε κάποια στιγμή σταματούν και τα δύο αυτοκίνητα ταυτόχρονα. Να βρείτε πόση απόσταση διένυσε το αυτοκίνητο B, αν το αυτοκίνητο A διένυσε μια απόσταση $180\,Km$.

4. Σε ένα εργοστάσιο αναψυκτικών 12 μηχανές εργάστηκαν για 6 ώρες, για να ολοκληρώσουν την ημερήσια παραγωγή η οποία είναι σταθερή. Δυστυχώς την επόμενη μέρα χάλασαν το $\frac{1}{4}$ των μηχανών. Πόσες ώρες πρέπει να δουλέψουν οι υπόλοιπες μηχανές, για να έχουμε την ίδια ημερήσια παραγωγή;

5. Ένας μελισσοκόμος μπορεί να τοποθετήσει το μέλι του σε 200 μπουκάλια των $450\,gr$ το καθένα.
   (α) Αν χρησιμοποιήσει μπουκάλια των $750\,gr$ το καθένα, πόσα μπουκάλια θα χρειαστεί;
   (β) Αν κάθε μπουκάλι των $450\,gr$ κοστίζει $50\,σεντ$ και κάθε μπουκάλι των $750\,gr$ κοστίζει $75\,σεντ$, ποια συσκευασία συμφέρει να χρησιμοποιήσει;

6. Ο Αλέξανδρος υποστηρίζει ότι η μάζα του ανθρώπου είναι ανάλογη του ύψους του. Κατέγραψε στον πιο κάτω πίνακα τη μάζα και το ύψος τεσσάρων συμμαθητών του. Να επιβεβαιώσετε ή να απορρίψετε τον ισχυρισμό του Αλέξανδρου.

Μάζα σε kg	58	71	56	68
Ύψος σε m	1,60	1,65	1,62	1,72

7. Σε ένα τυπογραφείο 3 μηχανές, όταν δουλεύουν για 4 ώρες κάθε μέρα εκτυπώνουν 36000 έντυπα A. Αν ο υπεύθυνος αγοράσει ακόμα μια μηχανή του ίδιου τύπου, για πόσες ώρες την ημέρα πρέπει να είναι σε λειτουργία οι μηχανές, για την εκτύπωση 60 000 εντύπων A.

8. Η Ελένη διάβασε σε ένα άρθρο ότι κάθε άτομο, μετά την ηλικία των 30 χρόνων, χάνει περίπου 0,06 cm από το ύψος του κάθε χρόνο.
   (α) Αν ο ογδοντάχρονος παππούς της Ελένης έχει ύψος 1,76 cm, ποιο θα ήταν το ύψος του παππού, όταν ήταν 30 χρόνων.
   (β) Ο θείος της Εβελίνας, ο Νικόλας, είναι 30 χρόνων και έχει ύψος 1,80 cm. Με βάση τα στοιχεία του άρθρου, να υπολογίσετε πόσο ύψος θα έχει ο Νικόλας, όταν θα γίνει 55 χρόνων.

9. Ένα κατάστημα που πωλεί ηλεκτρονικά παιχνίδια, προσφέρει 30% έκπτωση σε όλα τα προϊόντα του.
   (α) Να βρείτε την αρχική τιμή μιας ηλεκτρονικής κονσόλας που πωλήθηκε τελικά €280.
   (β) Ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι είχε αρχική τιμή €80 ευρώ. Πόσα θα πωληθεί τελικά με την έκπτωση;
   (γ) Να εκφράσετε την τιμή πώλησης ενός προϊόντος y συναρτήσει της αρχικής τιμής x.

10. Οι οδηγίες στη συσκευασία μιας αντιβίωσης λένε ότι κάθε 2 ml αντιβίωσης πρέπει να διαλύονται σε 10 λίτρα νερού.
   (α) Να εξηγήσετε γιατί τα ποσά είναι ανάλογα.
   (β) Να εκφράσετε την ποσότητα νερού y που χρειάζονται συναρτήσει της ποσότητας της αντιβίωσης x και να συμπληρώσετε τον πίνακα.

x σε ml	1		3		ν
y σε l		20		90	

   (α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει τα ποσά x και y.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Η γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει τα ποσά x και y είναι μια ημιευθεία με αρχή το σημείο $O(0,0)$. Αν το σημείο $(2,10)$ είναι σημείο της πιο πάνω ημιευθείας:
   (α) Να εξηγήσετε γιατί τα ποσά x και y είναι ανάλογα και να βρείτε τον συντελεστή αναλογίας.
   (β) Να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα ποσά x και y και να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	1	3	
y			20

   (γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει τα ποσά x και y.

2. Μια υπεραγορά πωλεί το ψωμί προς 110 $σεντ$. Χθες εισέπραξε €171,60 από την πώληση των ψωμιών. Να βρείτε πόσα κιλά σιτάρι χρησιμοποιήθηκαν, για να παρασκευαστεί η ποσότητα της χθεσινής ημέρας, αν γνωρίζουμε ότι 100 κιλά σιτάρι δίνουν 80 kg αλεύρι και 100 kg αλεύρι δίνουν 130 ψωμιά.

ΕΝΟΤΗΤΑ
7

Στατιστική-Πιθανότητες

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να περιγράφουμε στατιστικά δεδομένα υπολογίζοντας μέτρα θέσης (μέση τιμή, διάμεσος, επικρατούσα τιμή).
- Να εξετάζουμε πώς μεταβάλλονται τα μέτρα θέσης με την προσθήκη ή αφαίρεση τιμών.
- Να συγκρίνουμε χαρακτηριστικά δύο ή περισσότερων πληθυσμών με βάση τα μέτρα θέσης.
- Να αναπαριστούμε τον δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης και να βρίσκουμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος αυτού.
- Να αναπαριστούμε με δενδροδιάγραμμα τον δειγματικό χώρο ενός πειράματος που εκτελείται σε δύο ή περισσότερες φάσεις.
- Να υπολογίζουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου.

Έχουμε μάθει ...

- **Μεταβλητή** είναι το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο μελετούμε τα στοιχεία ενός πληθυσμού. Οι τιμές των μεταβλητών που καταγράφουμε για καθένα από τα μέλη του πληθυσμού, όταν συλλέγουμε δεδομένα ονομάζονται και **παρατηρήσεις**.

- **Συχνότητα** μιας τιμής ονομάζεται ο φυσικός αριθμός που εκφράζει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή αυτή.

- Ένας από τους σκοπούς της στατιστικής είναι η παρουσίαση των δεδομένων με τρόπο οργανωμένο και παραστατικό, ώστε να δίνεται όσο το δυνατόν ταχύτερη, πληρέστερη και πιο σαφής εικόνα των δεδομένων. Για τον σκοπό αυτό, μεταξύ άλλων, χρησιμοποιούνται οι πίνακες συχνοτήτων και διάφορα στατιστικά διαγράμματα (ραβδόγραμμα, ιστόγραμμα, κυκλικό διάγραμμα).

Άθλημα	Αριθμός Ατόμων
Ποδόσφαιρο	8
Κολύμπι	5
Άλλο	6

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Μέτρα Θέσης

Εξερεύνηση

Στους αγώνες ρυθμικής γυμναστικής, έξι κριτές βαθμολογούν τους διαγωνιζόμενους από το 1 μέχρι το 10. Αφού αφαιρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη βαθμολογία, αθροίζουν τις υπόλοιπες τέσσερις και διαιρούν το άθροισμα με το 4. Αυτή είναι η τελική βαθμολογία του κάθε διαγωνιζόμενου.
Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει τη βαθμολογία των ολυμπιονικών, στους Ολυμπιακούς αγώνες της Αθήνας το 2004.

ΑΘΛΗΤΡΙΕΣ	ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ ΚΡΙΤΩΝ					
Carly Patterson, USA	9,80	9,75	9,80	9,75	9,75	9,80
Alexandra Eremia, ROM	9,70	9,70	9,70	9,70	9,65	9,70
Catalina Ponor, ROM	9,80	9,80	9,80	9,75	9,75	9,80

- ✓ Γιατί, νομίζετε, ότι αφαιρείται η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή;

- ✓ Να υπολογίσετε τη βαθμολογία της αθλήτριας που πήρε το χρυσό.

Διερεύνηση (1)

Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει τον αριθμό των γραμμάτων του ονοματεπώνυμου των 21 μαθητών ενός τμήματος.

7	7	8	11	11	11	11	12	12	12	12	13	13	13	14	14	15	15	17	19	19

- ✓ Πόσα γράμματα έχει το μικρότερο ονοματεπώνυμο και πόσα το μεγαλύτερο ονοματεπώνυμο;
- ✓ Ποιος αριθμός γραμμάτων εμφανίζεται τις περισσότερες φορές;
- ✓ Αν διπλώσουμε στη μέση το χαρτί που είναι γραμμένος ο πιο πάνω πίνακας, ποια παρατήρηση θα βρούμε εκεί που διπλώνει το χαρτί; Να σχολιάσετε την παρατήρησή σας.
- ✓ Αν τη συγκεκριμένη μέρα απουσίαζε ο μαθητής Χρίστος Γεωργίου, να εξετάσετε πώς θα επηρεαστεί η διαδικασία στο πιο πάνω ερώτημα αν συμπεριληφθεί το όνομά του;
- ✓ Αν ο μαθητής που απουσίαζε ονομαζόταν Χρυσοβαλάντης Παπαχριστοδούλου, θα άλλαζε η απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα;
- ✓ Να αφαιρέσετε δύο ονόματα, έτσι ώστε η μεσαία παρατήρηση:
  - ➢ να μην αλλάξει,
  - ➢ να μεγαλώσει.

Μαθαίνω

- **Μέση Τιμή** ενός συνόλου παρατηρήσεων λέγεται το πηλίκο του αθροίσματος των τιμών των παρατηρήσεων διά του πλήθους των παρατηρήσεων.

$$Μέση\ τιμή = \frac{Άθροισμα\ παρατηρήσεων}{Πλήθος\ των\ παρατηρήσεων}$$

Παράδειγμα:
Η μέση τιμή των παρατηρήσεων $12, 15, 16, 19$ *είναι:*

$$\bar{X} = \frac{12+15+16+19}{4} = \frac{62}{4} = 15{,}5$$

- **Διάμεσος** ενός συνόλου παρατηρήσεων διατεταγμένων σε αύξουσα σειρά είναι:
  - η μεσαία τιμή– παρατήρηση για περιττό αριθμό παρατηρήσεων,
  - η μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων για άρτιο αριθμό παρατηρήσεων.

  Παράδειγμα:
  Η διάμεσος των παρατηρήσεων:
  $12, 14, 15, 18, 19$ *είναι το* 15
  $12, 14, 14, 18, 19, 20$ *είναι το* $\frac{14+18}{2} = 16$

- **Επικρατούσα τιμή** ενός συνόλου παρατηρήσεων είναι η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα (εμφανίζεται τις περισσότερες φορές).

  Παράδειγμα:
  Δίνονται οι θερμοκρασίες σε βαθμούς Κελσίου που καταγράφηκαν το πρώτο δεκαπενθήμερο του Ιουλίου στη Λευκωσία:

  $$36, 37, 37, 38, 40, 40, 39, 36, 37, 38, 37, 39, 39, 40, 40$$

  Παρατηρούμε ότι οι θερμοκρασίες 37 και 40 βαθμοί Κελσίου είναι οι θερμοκρασίες με τη μεγαλύτερη συχνότητα (καταγράφηκαν από 4 φορές η καθεμιά). Άρα, οι επικρατούσες τιμές είναι 37 και 40.

Η μέση τιμή, η επικρατούσα τιμή και η διάμεσος των παρατηρήσεων ονομάζονται και **Μέτρα Θέσης** του συνόλου των παρατηρήσεων.

Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες έχουμε περισσότερες από μία επικρατούσες τιμές.

Παραδείγματα

1. Δίνονται οι βαθμοί που πήραν στο διαγώνισμα των μαθηματικών 11 μαθητές. Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των βαθμολογιών.

   79 84 63 95 89 71 90 81 77 54 75

   Λύση:
   Μέση τιμή $= \frac{\text{άθροισμα των βαθμών}}{\text{πλήθος βαθμών}}$

   $$= \frac{79+84+63+95+89+71+90+81+77+54+75}{11}$$

   $$= \frac{858}{11} = 78$$

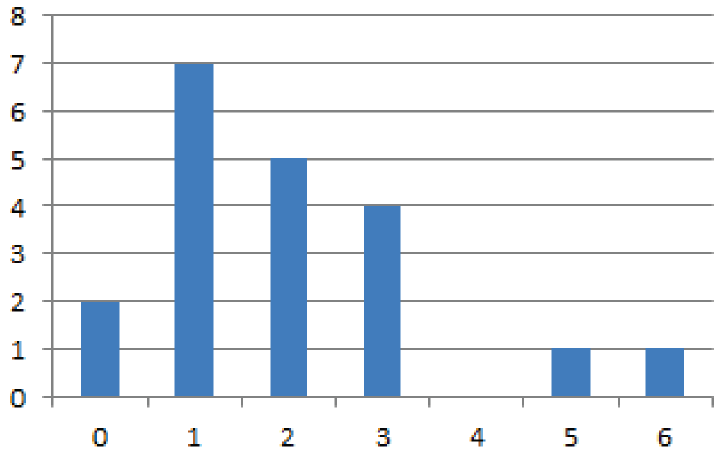
   Η μέση τιμή των βαθμών είναι 78.

Για να βρούμε τη ***διάμεσο*** *πρέπει να διατάξουμε τις βαθμολογίες από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη:*

$$\overbrace{54, 63, 71, 75, 77}^{\text{5 παρατηρήσεις}}, 79, \overbrace{81, 84, 89, 90, 95}^{\text{5 παρατηρήσεις}}$$

Το πλήθος των βαθμών είναι περιττός αριθμός (11). Άρα, η ***διάμεσος*** *είναι ο μεσαίος αριθμός (ο $6^{ος}$ δηλαδή αριθμός), δηλαδή το 79.*

2. Το διάγραμμα που ακολουθεί δείχνει πόσα αδέλφια έχουν οι μαθητές ενός τμήματος. Να υπολογίσετε την επικρατούσα τιμή, τη διάμεσο και τη μέση τιμή.



Λύση:

Η επικρατούσα τιμή, όπως φαίνεται στο διάγραμμα, είναι ένας αδελφός αφού στην τιμή 1 αντιστοιχεί η μεγαλύτερη συχνότητα που είναι το 7.

Υπάρχουν 20 αριθμοί, έτσι η διάμεσος είναι η μέση τιμή των δύο μεσαίων αριθμών δηλαδή του $10^{ου}$ και του $11^{ου}$ αριθμού. Ο $10^{ος}$ και $11^{ος}$ είναι 2 και 2. Άρα, η διάμεσος είναι 2 αδέλφια.

$$\overbrace{0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,}^{\text{10 παρατηρήσεις}}\ 2, 2,\ \overbrace{2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 5, 6}^{\text{10 παρατηρήσεις}}$$

Μέση τιμή$= \frac{2\cdot 0+7\cdot 1+5\cdot 2+4\cdot 3+1\cdot 5+1\cdot 6}{20} = 2$ *αδέλφια*

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε και να συγκρίνετε τη μέση τιμή των βαθμολογιών του Γιάννη και της Μαίρης στο μάθημα της Βιολογίας.

Γιάννης
Βαθμολογίες: 17, 16, 15

Μαίρη
Βαθμολογίες: 14, 15, 19

2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α) Η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων $0, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 7$ είναι ο αριθμός 7.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β) Η διάμεσος των παρατηρήσεων $0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5$ είναι ο αριθμός 2.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ) Η διάμεσος των παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν ο αριθμός τους είναι περιττός.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ) Αν αντικαταστήσουμε τη μεγαλύτερη παρατήρηση με μια πολύ μεγαλύτερη τιμή, τότε η διάμεσος των παρατηρήσεων θα αλλάξει.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε) Η μέση τιμή των παρατηρήσεων θα μπορούσε να ήταν και η επικρατούσα τιμή.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

3. Ο πίνακας δίνει τις μέγιστες θερμοκρασίες (σε ℃) για τις πρώτες 15 μέρες του Ιανουαρίου.

15	15	12	9	5
11	15	16	15	16
16	14	12	13	11

Να υπολογίσετε τα μέτρα θέσης των πιο πάνω δεδομένων.

4. Ο αριθμός των μαθητών των 16 τμημάτων ενός Λυκείου είναι: $22,\ 24,\ 23,\ 25,\ 24,\ 22,\ 21,\ 20,\ 21,\ 22,\ 19,\ 21,\ 23,\ 22,\ 22,\ 20.$ Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της μεταβλητής «ο αριθμός μαθητών ανά τμήμα».

5. Η μέση τιμή επτά αριθμών είναι το 5. Οι πέντε από αυτούς τους αριθμούς είναι οι $3, 4, 5, 6, 11$. Να βρείτε τους άλλους δύο αριθμούς, αν ο ένας είναι διπλάσιος του άλλου.

6. Δίνεται ο πιο κάτω πίνακας δεδομένων:

95	93	91	95	100	99	92

Να προσθέσετε ακόμα μια τιμή στον πιο πάνω πίνακα ώστε η μέση τιμή, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή να μη διαφοροποιηθούν.

7. Σε ποιο από τα πιο κάτω σύνολα δεδομένων η μέση τιμή, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή είναι ο ίδιος αριθμός;
   (α) $6, 2, 5, 4, 3, 4, 1$
   (β) $2, 3, 7, 3, 8, 3, 2$
   (γ) $3, 1, 2, 1, 3, 2, 2$
   (δ) $4, 3, 4, 3, 4, 6, 4$

8. Τα ύψη (σε cm) 8 αθλητών μιας ομάδας καλαθόσφαιρας είναι:

$$172, 175, 183, 177, 190, 193, 189, 195.$$

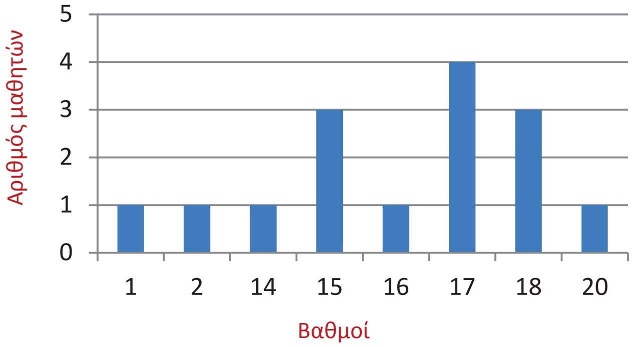
   (α) Να βρείτε:
      i. το μέσο ύψος των αθλητών,
      ii. τη διάμεσο των υψών.
   (β) Να υπολογίσετε ξανά τη μέση τιμή και τη διάμεσο, για τις πιο κάτω περιπτώσεις:
   Περίπτωση 1: *Αν από την ομάδα φεύγει ο αθλητής με ύψος* $172\ cm$.
   Περίπτωση 2: *Αν στην ομάδα έρχεται ακόμα ένας αθλητής με ύψος* $197\ cm$.
   Περίπτωση 3: *Αν από την ομάδα φεύγει ο αθλητής με ύψος* $195\ cm$ *και έρχεται ένας αθλητής με ύψος* $198\ cm$.

9. Δίνονται οι πιο κάτω τιμές δεδομένων:

10	7	9	5	13	10	7	14	8	11

Να κάνετε μια ερώτηση που να αφορά τα μέτρα θέσης και να έχει ως απάντηση την τιμή 9,5.

10. Το πιο κάτω διάγραμμα παρουσιάζει τους βαθμούς των μαθητών μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα των μαθηματικών. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.



11. Ο Γιάννης έκανε τέσσερα διαγωνίσματα στα Μαθηματικά. Ποιες βαθμολογίες μπορεί να πήρε ο Γιάννης σε κάθε περίπτωση, ώστε:
    (α) η μέση τιμή των διαγωνισμάτων να είναι 15
    (β) η επικρατούσα τιμή να είναι 15
    (γ) η διάμεσος να είναι 14,5
    (δ) η μέση τιμή να είναι 15 και η επικρατούσα τιμή να είναι 14.

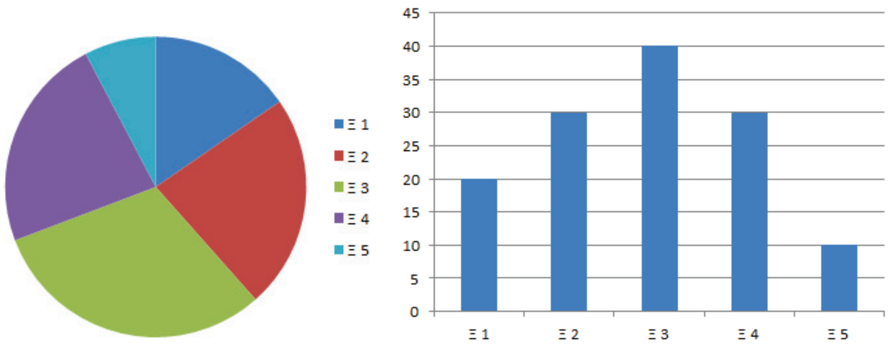
Στατιστική με Χρήση Λογιστικού Φύλλου στον Υπολογιστή

Σε όλους τους υπολογιστές σήμερα υπάρχουν εγκατεστημένα λογιστικά φύλλα, τα οποία μας επιτρέπουν να επεξεργαζόμαστε δεδομένα.

Δημιουργία Διαγραμμάτων

<u>Ραβδόγραμμα ή Κυκλικό Διάγραμμα:</u> Μπορούμε εύκολα να δημιουργήσουμε ένα Ραβδόγραμμα ή Κυκλικό Διάγραμμα, ακολουθώντας την πιο κάτω διαδικασία:

i. Καταγράφουμε τον πίνακα συχνοτήτων στο λογιστικό φύλλο κι επιλέγουμε την περιοχή αυτή (A1:B6)
ii. Επιλέγουμε τη γραμμή εργαλείων «Εισαγωγή (Insert)».
iii. Επιλέγουμε ένα από τα γνωστά μας διαγράμματα, ραβδόγραμμα ή κυκλικό διάγραμμα:



Ο υπολογιστής θα δημιουργήσει αυτόματα ένα από τα δύο διαγράμματα. Ακολούθως υπάρχουν πολλές επιλογές για καλύτερη μορφοποίηση του διαγράμματος, αν το επιθυμείτε.

Υπολογισμός Περιγραφικών Μέτρων

	A
1	**Δεδομένα**
2	11
3	12
4	12
5	14
6	17
7	15
8	14
9	13
10	14
11	10

Καταχωρίζουμε τα δεδομένα στο λογιστικό φύλλο, όπως φαίνεται στον πίνακα. Χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες συναρτήσεις στον υπολογιστή, υπολογίζουμε γνωστά περιγραφικά μέτρα:

Συνάρτηση στο λογιστικό φύλλο	Στατιστικό περιγραφικό μέτρο	Αποτέλε-σμα
=AVERAGE(A2:A11)	Μέσος όρος	13,2
=MODE(A2:A11)	Επικρατούσα τιμή	14
=MEDIAN(A2:A11)	Διάμεσος	13,5

Δραστηριότητες

1. **<u>Ομαδική Εργασία:</u>**

   Μια Διεθνής Εκπαιδευτική Έρευνα στην οποία συμμετείχε η Κύπρος είναι η έρευνα TIMSS. Μερικά από τα δεδομένα που έχουν συλλεγεί στο πλαίσιο της έρευνας δίνονται στο αρχείο: «B_En7_DATA.xlsx» (*Δεδομένα από Έρευνα TIMSS*). Τα δεδομένα αναφέρονται σε μαθητές της Β΄ Γυμνασίου ενός σχολείου της Κύπρου.

   (α) Να επεξεργαστείτε τα δεδομένα κατασκευάζοντας στον υπολογιστή κατάλληλα διαγράμματα ή υπολογίζοντας μέτρα θέσης.

   (β) Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επεξεργασία των δεδομένων.

   (γ) Τι εισηγήσεις θα μπορούσατε να κάνατε προς τους συμμαθητές ή προς τους καθηγητές σας με βάση τα αποτελέσματα αυτά;

2. **<u>Ομαδική Εργασία:</u>**

   Να βρείτε από την ιστοσελίδα της Στατιστικής Υπηρεσίας: *http://www.mof.gov.cy/cystat* στατιστικά στοιχεία για την Κύπρο, να τα επεξεργαστείτε με κατάλληλες μεθόδους και να τα παρουσιάσετε στους συμμαθητές σας.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Πείραμα Τύχης – Αρχή της Απαρίθμησης

Έχουμε μάθει ...

- Σε ένα πείραμα τύχης, με ισοπίθανα αποτελέσματα, ο λόγος του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων ενός ενδεχομένου Α προς το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων ονομάζεται **πιθανότητα του ενδεχομένου Α**.

Δηλαδή: $\mathrm{P(A)} = \dfrac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων του A}}{\text{πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων}} = \dfrac{\nu(A)}{\nu(\Omega)}$

Παράδειγμα:

Στη ρίψη ενός ζαριού, το ενδεχόμενο $B = \{2, 4, 6\}$ *έχει πιθανότητα πραγματοποίησης:*

$$P(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Δηλαδή, η πιθανότητα να φέρω άρτια ένδειξη είναι 50%.

- Ένα ενδεχόμενο που περιλαμβάνει όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης ονομάζεται **βέβαιο ενδεχόμενο**.
  Η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός βέβαιου ενδεχομένου είναι ίση με 1.

  Το ενδεχόμενο αυτό είναι ίσο με τον δειγματικό χώρο Ω.

  Παράδειγμα:
  Στη ρίψη ενός ζαριού, το ενδεχόμενο
  Α:Να φέρω ένδειξη μικρότερη του 7, $(A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$
  έχει πιθανότητα πραγματοποίησης: $P(A) = \frac{6}{6} = 1$

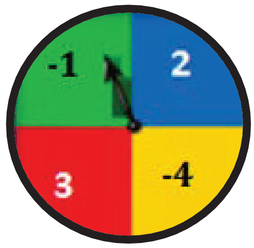
- Το ενδεχόμενο που δεν περιλαμβάνει κανένα δυνατό αποτελέσματα του πειράματος τύχης (το κενό σύνολο), ονομάζεται **αδύνατο ενδεχόμενο**.
  Η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός αδύνατου ενδεχομένου είναι ίση με 0.

  Παράδειγμα:
  Στη ρίψη ενός ζαριού, το ενδεχόμενο
  Α:Να φέρω ένδειξη 7, $(A = \emptyset)$
  έχει πιθανότητα πραγματοποίησης: $P(A) = \frac{0}{6} = 0$

- Οποιοδήποτε άλλο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα πραγματοποίησης μεγαλύτερη από 0 και μικρότερη από 1.

  Άρα, για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$.

Διερεύνηση



Ο Παύλος και η Μυρτώ παίζουν με τον διπλανό τροχό της τύχης. Γυρίζουν τον δείκτη δύο φορές και καταγράφουν τα αποτελέσματά τους. Αν το άθροισμα είναι θετικός αριθμός, κερδίζει ο Παύλος. Αν είναι αρνητικός αριθμός, κερδίζει η Μυρτώ.

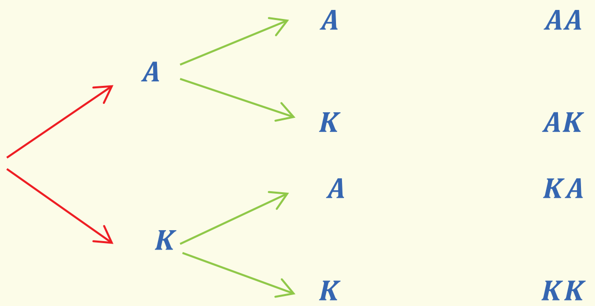
✓ Ποιος έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει;

Μαθαίνω

- Όταν η εκτέλεση ενός πειράματος τύχης πραγματοποιείται σε δύο ή περισσότερες φάσεις, όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος μπορούν να βρεθούν και με τη βοήθεια ενός δενδροδιαγράμματος.

Παράδειγμα:
Τα πιθανά αποτελέσματα γέννησης δύο παιδιών σε μια οικογένεια:

1η Γέννηση 2η Γέννηση Δυνατά αποτελέσματα



$\Omega = \{AA, AK, KA, KK\}$

- Όταν ένα πείραμα εκτελείται σε δύο ή περισσότερες ***φάσεις*** και κάθε φάση μπορεί να πραγματοποιηθεί με ***κ***, ***λ***, ***μ***, ... ***τρόπους***, αντίστοιχα, τότε το πείραμα έχει $\boldsymbol{\kappa \cdot \lambda \cdot \mu} \cdot \ldots$ δυνατά αποτελέσματα.

  Η πιο πάνω διαδικασία ονομάζεται «**Αρχή της απαρίθμησης**».

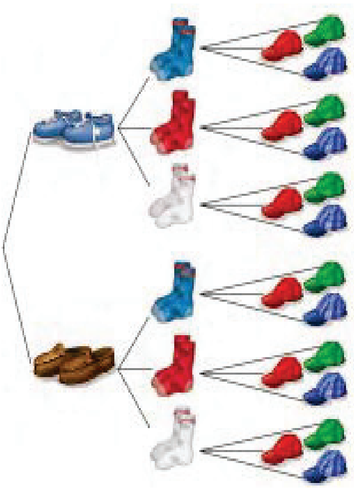
Παράδειγμα:
Ο αριθμός των περιπτώσεων για τη γέννηση των δύο παιδιών είναι:

$$\nu(\Omega) = 2 \cdot 2 = 4$$

Παραδείγματα

1. Σε ένα παιχνίδι επιλέγουμε διαδοχικά, ένα ζευγάρι από δύο διαφορετικά ζεύγη παπουτσιών, ένα από τρία διαφορετικά ζεύγη καλτσών και ένα από τρία διαφορετικά χρώματα καπέλων. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τα τρία αντικείμενα.

   Λύση:
   Μπορούμε να βρούμε όλους τους δυνατούς τρόπους με τη χρήση δενδροδιαγράμματος. Δηλαδή,



➔ μπλε παπούτσια μπλε κάλτσες πράσινο καπέλο
➔ μπλε παπούτσια μπλε κάλτσες κόκκινο καπέλο
➔ μπλε παπούτσια μπλε κάλτσες μπλε καπέλο

.
.
.
.
.
.
.

➔ καφέ παπούτσια άσπρες κάλτσες πράσινο καπέλο
➔ καφέ παπούτσια άσπρες κάλτσες κόκκινο καπέλο
➔ καφέ παπούτσια άσπρες κάλτσες μπλε καπέλο

Ο δειγματικός χώρος του πιο πάνω πειράματος περιλαμβάνει:

$$3+3+3+3+3+3 = 18 \; στοιχεία$$

Αν εφαρμόσουμε την ***αρχή της απαρίθμησης*** *θα έχουμε:*
$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ *στοιχεία.*

Γ' φάση:
Έχω τρία καπέλα για να επιλέξω

Α' φάση:
Έχω δύο ζευγάρια παπούτσια για να επιλέξω

Β' φάση:
Έχω τρία ζευγάρια κάλτσες για να επιλέξω

2. Να καταγράψετε όλα τα πιθανά αποτελέσματα από τη ρίψη δύο ζαριών. Ακολούθως να υπολογίσετε την πιθανότητα:
   (α) τα δύο ζάρια να έχουν την ίδια ένδειξη,
   (β) τουλάχιστον ένα από τα δύο ζάρια να φέρει την ένδειξη 6.

Λύση:
Για να βρούμε τον δειγματικό χώρο του πειράματος χρησιμοποιούμε τον πιο κάτω πίνακα. Όπως φαίνεται στον πίνακα, υπάρχουν 36 δυνατά αποτελέσματα.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$\nu(\Omega) = 36$ ή $\nu(\Omega) = 6 \cdot 6$ *(Αρχή Απαρίθμησης)*

(6 δυνατοί τρόποι σε καθεμιά από τις 2 φάσεις)

(α) A: *ίδια ένδειξη*

Παρατηρούμε ότι έχουμε έξι αποτελέσματα στα οποία τα δύο ζάρια έχουν την ίδια ένδειξη:

$$(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)$$

Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι $\nu(A) = 6$.

$$P(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(β) B: τουλάχιστον μια ένδειξη 6

Παρατηρούμε ότι έχουμε έντεκα αποτελέσματα στα οποία τουλάχιστο το ένα ζάρι φέρει την ένδειξη 6:

$$(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6),$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5).$$

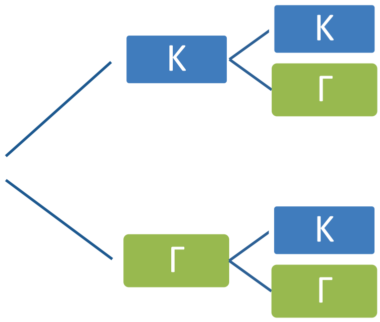
Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι $\nu(B) = 11$

$$P(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)} = \frac{11}{36}$$

3. Ο Ανδρέας και ο Λεωνίδας, για να επιλέξουν ποιος θα παίξει πρώτος με ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι, αποφάσισαν να ρίξουν διαδοχικά δύο νομίσματα του ενός ευρώ. Συμφώνησαν ότι θα παίξει πρώτος ο Ανδρέας, αν τα νομίσματα έχουν την ίδια όψη. Διαφορετικά θα παίξει πρώτος ο Λεωνίδας. Να εξετάσετε κατά πόσο ο τρόπος που επέλεξαν είναι δίκαιος.

Λύση:
*Ονομάζουμε τη μια όψη του νομίσματος «Κορώνα» και τη συμβολίζουμε με «**Κ**» και την άλλη όψη «Γράμματα» και τη συμβολίζουμε με «**Γ**».*

Κατασκευάζουμε το πιο κάτω δενδροδιάγραμμα:



Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$

- *Η πιθανότητα να ξεκινήσει ο Ανδρέας το παιχνίδι είναι:*

  $P(ίδιες\ ενδείξεις) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

- *Η πιθανότητα να ξεκινήσει ο Λεωνίδας το παιχνίδι είναι:*

  $P(διαφορετικές\ ενδείξεις) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Τα δύο ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Έτσι το πείραμα τύχης δίνει την ίδια πιθανότητα και στα δύο παιδιά. Άρα, είναι ένας δίκαιος τρόπος να αποφασίσουν.

Δραστηριότητες

1. Το κεντρικό μαθητικό συμβούλιο ενός σχολείου αποφάσισε ότι η επιτροπή αξιολόγησης στον διαγωνισμό καθαριότητας του σχολείου θα αποτελείται από ένα άτομο από την επιτροπή περιβάλλοντος και ένα άτομο από την επιτροπή εκδηλώσεων. Να βρείτε όλους τους δυνατούς τρόπους σύνθεσης της επιτροπής.

Επιτροπή Περιβάλλοντος
Άννα
Μάριος
Αντρέας
Παναγιώτης

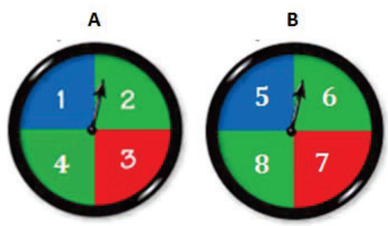
Επιτροπή Εκδηλώσεων
Γιώργος
Ειρήνη

2. Τρία ζάρια, ένα κόκκινο, ένα μαύρο και ένα άσπρο, τοποθετούνται σε ένα κουτί. Σε ένα πείραμα επιλέγουμε τυχαία ένα ζάρι από το κουτί, το ρίχνουμε και καταγράφουμε πρώτα το χρώμα και ακολούθως την ένδειξή του. Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου του πειράματος.

3. Ρίχνουμε πρώτα ένα νόμισμα και ακολούθως ένα ζάρι.
   (α) Να καταγράψετε τον δειγματικό χώρο.
   (β) Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει στο νόμισμα η ένδειξη κορώνα και στο ζάρι ο αριθμός 6.

4. Σε ένα τουρνουά ποδοσφαίρου κληρώθηκαν να παίξουν στον ίδιο όμιλο οι ομάδες M, A, Π και Γ. Οι 4 ομάδες παίζουν μεταξύ τους δύο αγώνες (εντός και εκτός έδρας).
   (α) Να καταγράψετε τον δειγματικό χώρο.
   (β) Να καταγράψετε τις περιπτώσεις στις οποίες η ομάδα M αγωνίζεται εκτός έδρας.
   (γ) Να καταγράψετε τις περιπτώσεις στις οποίες η ομάδα Π θα παίξει με την ομάδα Γ.

5. Γυρίζουμε τον τροχό τύχης A και ακολούθως τον τροχό B. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των πιο κάτω ενδεχομένων:
   (α) στον πρώτο τροχό να εμφανιστεί 2 και στον δεύτερο 7,
   (β) και στους δύο τροχούς να εμφανιστεί άρτιος αριθμός,
   (γ) το άθροισμα των δύο ενδείξεων να είναι 9,
   (δ) οι ενδείξεις των δύο τροχών να διαφέρουν κατά 1.



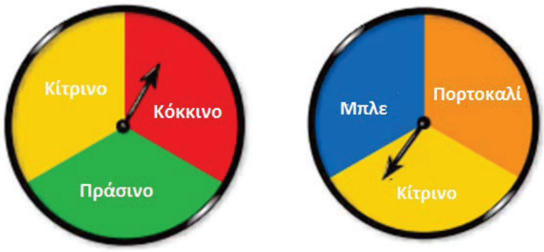
6. Ο Μηνάς και ο Χαράλαμπος θα παίξουν το παιχνίδι «Πρόβλεψη γινομένου». Θα ρίξουν δύο ζάρια. Αν το γινόμενο των ενδείξεων των δύο ζαριών είναι άρτιος, ο Μηνάς παίρνει έναν βαθμό. Αν όμως το γινόμενο είναι περιττός, έναν βαθμό παίρνει ο Χαράλαμπος.
   (α) Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα για να βρείτε όλα τα πιθανά γινόμενα από τη ρίψη των δύο ζαριών.

·	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

   (β) Να βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει ο Μηνάς το παιχνίδι.

7. Ο Ανδρέας και ο Αλέξης κρατούν από ένα ζάρι και το ρίχνουν διαδοχικά από μία φορά. Κάθε φορά προσπαθούν να προβλέψουν το άθροισμα των δύο ζαριών. Αυτός που θα προβλέψει σωστά κερδίζει. Ο Ανδρέας προβλέπει άθροισμα 5, ο Αλέξης 7 και ακολούθως ρίχνουν τα ζάρια. Αφού καταγράψετε τον δειγματικό χώρο, να εξετάσετε ποιος έκανε την καλύτερη πρόβλεψη. Ποια είναι η πιθανότητα να μην κερδίσει κανένας από τους δύο;

8. Σε ένα παιχνίδι, ο διαγωνιζόμενος γυρίζει δύο τροχούς και κερδίζει, όταν το αποτέλεσμα των δύο τροχών είναι κίτρινο.



   Να υπολογίσετε την πιθανότητα ένας διαγωνιζόμενος να κερδίσει.

9. Ένας διψήφιος αριθμός σχηματίζεται από τα ψηφία $2, 5, 8$. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
   A: ο αριθμός που θα σχηματιστεί να διαιρείται με το 3,
   B: ο αριθμός που θα σχηματιστεί να διαιρείται με το 2,
   Γ: ο αριθμός που θα σχηματιστεί να είναι περιττός.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Στον πιο κάτω πίνακα καταγράφονται οι θερμοκρασίες σε συγκεκριμένες ώρες τεσσάρων ημερών.

ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΕΣ (σε °C)					
	6 π.μ.	9 π.μ.	μεσημέρι	3 μ.μ.	8 μ.μ.
Δευτέρα	15°	17°	20°	21°	19°
Τρίτη	15°	15°	15°	10°	9°
Τετάρτη	8°	10°	14°	13°	15°
Πέμπτη	8°	11°	14°	17°	20°

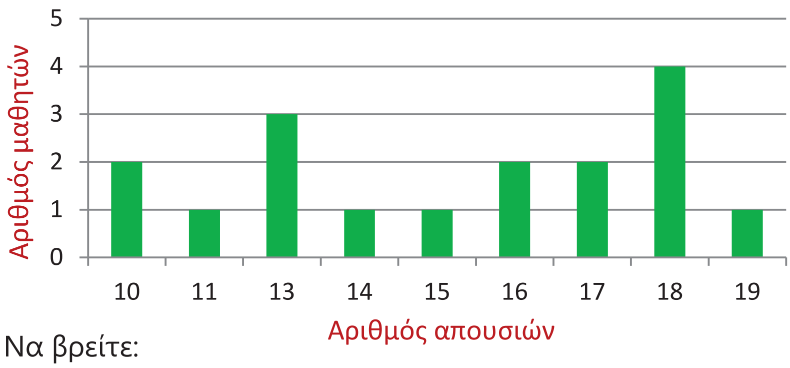
(α) Ποια στιγμή σημειώθηκε η χαμηλότερη και ποια στιγμή η ψηλότερη θερμοκρασία;
(β) Να υπολογίσετε τη μέση θερμοκρασία κάθε μέρας.
(γ) Ποια μέρα είχαμε τη ψηλότερη και ποια τη χαμηλότερη Μέση Θερμοκρασία;

2. Ο πιο κάτω πίνακας περιλαμβάνει την ποσότητα χαρτιού (σε τόνους) που ανακυκλώθηκε στην Κύπρο από το 2000 μέχρι το 2007.

Έτος	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**
	6,45	6,60	6,85	6,99	7,97	8,77	9,82	10,21

(α) Σε ποιο έτος παρουσιάζεται η μεγαλύτερη και σε ποιο έτος η μικρότερη ποσότητα ανακύκλωσης χαρτιού;
(β) Σε ποιο έτος σημειώθηκε η μεγαλύτερη αύξηση σε σχέση με το προηγούμενο έτος; Πόσους τόνους αυξήθηκε;
(γ) Πόση ήταν η μέση ποσότητα ανακύκλωσης χαρτιού για τα πιο πάνω έτη;
(δ) Ποια έτη ανακυκλώθηκε μεγαλύτερη ποσότητα χαρτιού από τη μέση ποσότητα της περιόδου 2000 – 2007;

3. Το διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζει τον αριθμό των απουσιών 17 μαθητών ενός τμήματος στο τέλος του β΄ τετραμήνου.



Να βρείτε:

(α) Ποια είναι η μέση τιμή, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή των απουσιών των 17 μαθητών;

(β) Τι ποσοστό των μαθητών έχουν αριθμό απουσιών μικρότερο από τη μέση τιμή;

(γ) Να εξετάσετε πώς θα μεταβληθούν τα μέτρα θέσης, αν στο τμήμα μεταφερθεί ακόμη ένας μαθητής με αριθμό απουσιών:

i. 55
ii. 0
iii. 13

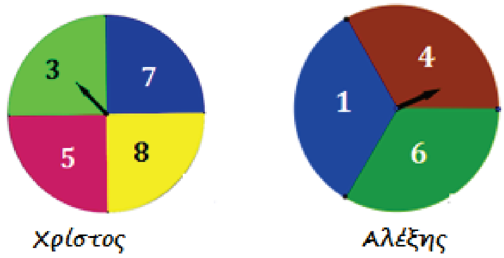
4. Να περιγράψετε ένα πείραμα τύχης το οποίο να έχει $4 \cdot 5$ πιθανά αποτελέσματα.

5. Στο μάθημα ξένης γλώσσας οι φοιτητές πρέπει να επιλέξουν και να κάνουν μία παρουσίαση μεταξύ 8 θεμάτων και να γράψουν μία γραπτή εργασία για ένα θέμα από άλλα 5 θέματα. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να κάνει επιλογή ένας φοιτητής.

6. Για τις ανάγκες επιλογής ενός τριψήφιου κωδικού πρέπει το πρώτο ψηφίο να είναι άρτιος αριθμός, το δεύτερο ψηφίο ένας από τους αριθμούς 4 ή 5 και το τελευταίο ψηφίο ένας από τους αριθμούς $2, 4, 6$ ή 8. Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί κωδικοί μπορούν να κατασκευαστούν.

7. Σε ένα παιχνίδι η Ελευθερία και ο Μιχάλης ρίχνουν δύο ζάρια ο καθένας. Αν το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ζαριών είναι πρώτος αριθμός, κερδίζει η Ελευθερία. Αν όμως το άθροισμα των ενδείξεων είναι σύνθετος αριθμός, κερδίζει ο Μιχάλης. Αφού καταγράψετε τον δειγματικό χώρο, να εξετάσετε ποιος είναι πιο πιθανόν να κερδίσει.

8. Ο Χρίστος και ο Αλέξης γυρίζουν από έναν τροχό της τύχης από μία φορά. Κερδίζει όποιος πετύχει μεγαλύτερο αριθμό από τον άλλο. Αφού καταγράψετε τον δειγματικό χώρο, να βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει ο Αλέξης.

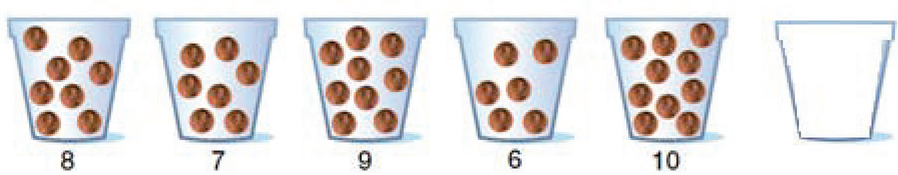


9. Ρίχνουμε δύο ζάρια. Αφού καταγράψετε τον δειγματικό χώρο, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
   A: το άθροισμα των δύο ενδείξεων να είναι μικρότερο του 6,
   Β: η ένδειξη και στα δύο ζάρια να είναι 5,
   Γ: το γινόμενο των δύο ενδείξεων να είναι άρτιος αριθμός,
   Δ: η μια τουλάχιστον ένδειξη να είναι 4,
   Ε: τα ζάρια να μην έχουν την ίδια ένδειξη.

10. Στον διπλανό πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα των διαγωνισμάτων ενός τμήματος. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών.

Αριθμός Διαγωνισμάτων	Αποτελέσματα Διαγωνισμάτων
2	6
5	8
4	7
5	9
2	10

11. Τα πιο κάτω δοχεία περιέχουν αριθμό βόλων.



Να εξετάσετε πόσους βόλους έχει το $6^{ο}$ ποτήρι, για να ισχύει ότι:
(α) η επικρατούσα τιμή είναι 7
(β) η διάμεσος είναι 7,5
(γ) η μέση τιμή είναι 8

12. Να γράψετε ένα σύνολο 5 δεδομένων τα οποία να έχουν μέση τιμή 15, διάμεσο 15 και επικρατούσες τιμές 13 και 15.

13. Να διαγράψετε τον αριθμό 1000 από τα δεδομένα του πιο κάτω πίνακα και να εκτιμήσετε ποιο από τα μέτρα θέσης θα επηρεαστεί περισσότερο;

50	100	75	60	75	1000	90	100

14. Η μέση τιμή πέντε αριθμών είναι 18. Αν αυξήσω τον πρώτο αριθμό κατά 1, τον δεύτερο κατά 2, τον τρίτο κατά 3, τον τέταρτο κατά 4 και τον πέμπτο κατά 5, ποια θα είναι η μέση τιμή των πέντε νέων αριθμών**;**

15. Ο κύριος και η κυρία Νικολάου έχουν τρία παιδιά. Να βρείτε τις πιο κάτω πιθανότητες:
A: όλα τα παιδιά να είναι αγόρια
B: δύο παιδιά να είναι αγόρια και ένα παιδί να είναι κορίτσι
Γ: δύο παιδιά να είναι αγόρια και ένα να είναι κορίτσι
Δ: τουλάχιστον δύο να είναι κορίτσια
E: τα πρώτα δύο παιδιά να είναι αγόρια και το τρίτο να είναι κορίτσι.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να εξηγήσετε ποιο μέτρο θέσης επηρεάζεται πιο πολύ αν συμπεριλάβουμε ακόμα μια τιμή στο σύνολο των δεδομένων μας.

2. Να μελετήσετε τον πίνακα που παρουσιάζει τους βαθμούς των μαθητών μιας τάξης στο διαγώνισμα των Μαθηματικών και της Φυσικής. Να παρουσιάσετε τα αποτελέσματα αυτά στους συμμαθητές σας, χρησιμοποιώντας κατάλληλες στατιστικές μεθόδους.
   Να συγκρίνετε και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα στα δύο μαθήματα.

Μάθημα	**Βαθμοί**
Μαθηματικά	$17, 18, 18, 16, 1, 15, 15, 17, 18, 15, 20, 14, 17, 2, 17$
Φυσική	$17, 18, 17, 17, 15, 17, 17, 17, 20, 17, 17, 20, 17, 17, 17$

3. *<u>ΟΜΑΔΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ</u>*
   Να συγκεντρώσετε δεδομένα για κάποιο θέμα που σας ενδιαφέρει. Στη συνέχεια, να οργανώσετε και να παρουσιάσετε τα δεδομένα χρησιμοποιώντας κατάλληλες στατιστικές μεθόδους. Να σχολιάσετε και να καταγράψετε διάφορα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν εύκολα με βάση τον τρόπο που οργανώσατε τα δεδομένα ή με βάση τις στατιστικές μεθόδους που χρησιμοποιήσατε.

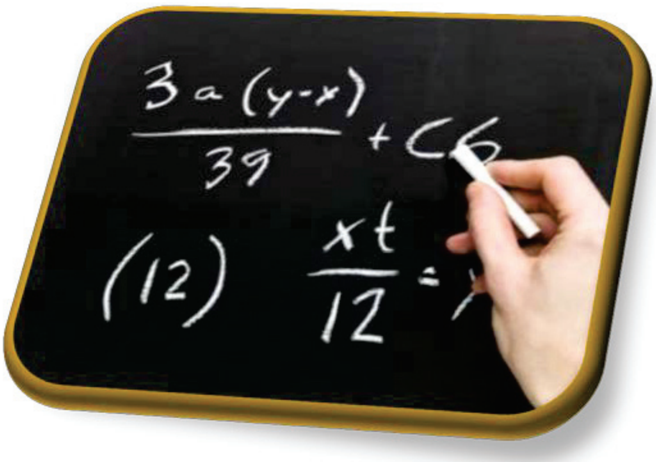
4. Ρίχνουμε δύο ζάρια, ένα άσπρο με ενδείξεις τους αριθμούς $0, 2, 4, 6, 8, 10$ και ένα μαύρο με ενδείξεις τους αριθμούς $1, 3, 5, 7, 9, 11$.
   (α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.
   (β) Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
   A: η ένδειξη του άσπρου ζαριού να είναι μικρότερη από την ένδειξη του μαύρου,
   B: το άθροισμα των ενδείξεων να είναι 8,
   $Γ$: το γινόμενο των ενδείξεων να είναι άρτιος αριθμός,
   $Δ$: το γινόμενο των ενδείξεων να είναι 0,
   E: το άθροισμα των ενδείξεων να είναι πρώτος αριθμός.

5. Ρίχνουμε ένα νόμισμα διαδοχικά μέχρι να φέρουμε μία φορά γράμμα (Γ) ή τρεις συνεχόμενες φορές κορώνα (K). Να γράψετε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.

6. Να εξετάσετε πώς θα μεταβληθεί η μέση τιμή, η επικρατούσα και η διάμεσος, αν σε κάθε παρατήρηση προστεθεί ο αριθμός κ.

Απαντήσεις Δραστηριοτήτων

Β΄ τεύχους



ΕΝΟΤΗΤΑ 4: Εξισώσεις-Ανισώσεις α΄ Βαθμού

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ						*Σελίδα 12*
Δραστηριότητα		Απαντήσεις				
1.	(α)	$x = -2$	(β)	$x = -1$	(γ)	αδύνατη
	(δ)	$\alpha = \frac{1}{4}$	(ε)	αόριστη	(στ)	αδύνατη
2.	(α)	Μία λύση	(β)	Άπειρες λύσεις	(γ)	Δεν έχει λύση
	(δ)	Μία λύση	(ε)	Άπειρες λύσεις	(στ)	Άπειρες λύσεις
3.	(α)	ΣΩΣΤΟ	(β)	ΛΑΘΟΣ	(γ)	ΛΑΘΟΣ
	(δ)	ΣΩΣΤΟ	(ε)	ΣΩΣΤΟ		
4.	(α)	A	(β)	Δ		
	(γ)	Γ	(δ)	B		
5.	(α)	$\lambda = 3$	(β)	$\beta = -2$		
	(γ)	$\lambda = -4$	(δ)	$\lambda = -9$		
6.	(α)	$\alpha = -3$	(β)	$\alpha = 6$		
	(γ)	$\alpha = 5$	(δ)	$\alpha = -1$		
7.	(α)	$\alpha = 4$ $\beta = -2$	(β)	$\alpha = 5$ $\beta = -1$		

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ				*Σελίδα 27*
Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	Π.χ. $2\frac{1}{2}, 8, 4\frac{1}{9}, 106, 2017$		
	(β)	$3, 4, 5$		
	(γ)	Έχει άπειρες λύσεις.		
2.	(α)	$x < 3$		
	(β)	Π.χ. $-3, \frac{1}{2}, 0$		
3.		$-2,\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -6\frac{1}{3}$		
4.		$x = -2$		
6.	(α)	Γ	(β)	Δ
	(γ)	Γ	(δ)	A
7.	(α)	$\alpha > 1$	(β)	$x < 2$
	(γ)	$x \geq -1$	(δ)	αδύνατη
	(ε)	$\alpha \leq 2$	(στ)	$\alpha < -17$
8.	(α)	$48\ m^3$	(β)	Λιγότερο από 19 ώρες και 12 λεπτά

9.		Τουλάχιστον €20000		
10.	(α)	$x \geq \frac{2}{3}$	(β)	$x \leq 4$

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ *Σελίδα 33*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις				
1.	(α)	$[-3,-1)$	(β)	$[-1,2]$	(γ)	$(-\infty,-6]$
3.	(α)	$2 < x < 7$	(β)	$-3 < x < 3$	(γ)	$-4 \leq x \leq 4$
	(δ)	$x < -5$	(ε)	$\sqrt{3} < x \leq 8$	(στ)	$x < \pi$
	(ζ)	$x \leq 5$	(η)	$-2 < x$	(θ)	$-2 \leq x < \sqrt{5}$
4.		$[26000, 33000]$				
5.	(α)	$65 \leq x \leq 100$	(β)	$[65, 100]$		
6.	(α)	$x \geq 1$ $x < 5$	(β)	$x = 1$		
	(γ)	Π.χ. $\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3$				
	(δ)	$x = 4$	(ε)	$x \in [1,5)$		
7.	(α)	$x < -3$	(β)	$-3 \leq x < -1$		
	(γ)	Δεν συναληθεύουν				
8.	(α)	$x \in [-2,5)$	(β)	Δεν συναληθεύουν		
	(γ)	$y \in [2, 7\frac{1}{2}]$	(δ)	$x \in (-\infty, 5)$		
9.	(α)	$x \in (-1,3)$	(β)	$x \in (-\infty,0)$		
	(γ)	$x \in (-\infty, -5)$	(δ)	$x \in [-2, -\infty)$		
10.	318					
11.	(α)	Π.χ. $2\frac{1}{2}$	(β)	2014		
	(γ)	Π.χ. 4	(δ)	Π.χ. 4		
12.	Μέχρι και 77,5 km.					

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ *Σελίδα 37*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις				
1.	(α)	$[-6,-3)$	(β)	$(-1,-3)$	(γ)	$[-5, 0]$
2.	(α)	$-1 \leq x \leq 5$	(β)	$-2 < x < \frac{3}{5}$	(γ)	$x \leq -1$
	(δ)	$-3 < x \leq 1$	(ε)	$-2 \leq x < \pi$	(στ)	$x > -9$
3.	(α)	Καμιά λύση	(β)	$x = 0$	(γ)	$x = -1$
	(δ)	$a = \frac{1}{8}$	(ε)	Καμιά λύση	(στ)	$x = -22$

	(ζ)	Άπειρες λύσεις	(η)	Καμιά λύση				
4.	$x < 2$							
5.	A							
6.	(α)	ΛΑΘΟΣ			(β)	ΛΑΘΟΣ		
	(γ)	ΣΩΣΤΟ			(δ)	ΛΑΘΟΣ		
7.	(α)	$x > -1$	(β)	$x < -3$	(γ)	$x > -4\frac{2}{3}$	(δ)	$x \leq -1$
	(ε)	$x > -1$	(στ)	$x > 8$	(ζ)	$x \leq \frac{5}{7}$	(η)	$x \leq 3\frac{1}{2}$
8.	(α)	$-5 \leq x < 0$			(β)	$x < 0$		
	(γ)	Δεν συναληθεύουν						
9.	Λάθος ο συλλογισμός.							
10.	$\alpha = 3$							
11.	$\lambda = -6$							
12.	Έχουν δύο ακέραιες κοινές λύσεις.							
13.	Το πολύ 25 βαρέλια.							
14.	Τουλάχιστον 16 επισκέψεις.							
15.	(α) Τουλάχιστον 63. (β) Όποια βαθμολογία και να πάρει δεν μπορεί να εξασφαλίσει βαθμολογία A.							

Δραστηριοτητες Εμπλουτισμου				*Σελίδα 40*
Δραστηριότητα	Απαντήσεις			
1.	$x \in (2,3]$			
2.	Η (δ) σχέση είναι αληθής.			
3.	(α)	Δεν έχει λύσεις	(β)	$x = 0$
	(γ)	$\mathbb{R}$	(δ)	Δεν έχει λύσεις
4.	(α)	$-7 < x < 1$	(β)	$-3 \leq x \leq 1$
5.	(α)	$-5 < A < 5$	(β)	$-3 < B < 7$
7.	$\frac{1}{5} \leq x \leq 3$			

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: Συναρτήσεις

Η Έννοια Αντιστοιχιας – Συναρτησης				*Σελίδα 49*
Δραστηριότητα	Απαντήσεις			
1.	(α)	Δεν ορίζει συνάρτηση	(β)	Ορίζει συνάρτηση
	(γ)	Δεν ορίζει συνάρτηση	(δ)	Ορίζει συνάρτηση

2.	(δ)	Ορίζει συνάρτηση				

3\. (α)

Εβδομάδες (x)	1	2	3	4	5
Αμοιβή (y)	30	60	90	120	150

(β) $y = 30 \cdot x$

4\. Δεν ορίζει συνάρτηση

6\. (α) Ορίζει συνάρτηση (β) Ορίζει συνάρτηση

7\. (α) Δεν ορίζει συνάρτηση (β) Ορίζει συνάρτηση

(γ) Ορίζει συνάρτηση (δ) Ορίζει συνάρτηση

Γραμμική Συνάρτηση – Ευθεία *Σελίδα 56*

Δραστηριότητα Απαντήσεις

2\. Τα δεδομένα του πίνακα συνδέονται με τη σχέση $y = 2x + 5$

3\. (α) Δεν ανήκει / Ανήκει / Ανήκει / Δεν ανήκει

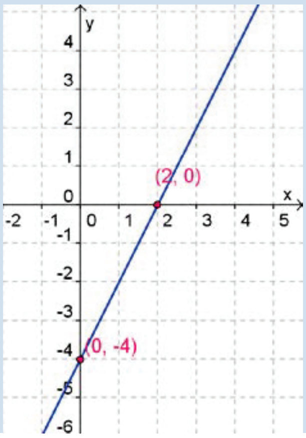
(β) Π.χ. $(0,3)$, $(2,-1)$, $(-1,5)$

4\. (α) $\alpha = -3$ (β) Π.χ. $(0,0)$, $(1,-3)$

5\. (α) $\beta = 2$

6\. (α) Τομή με xx': $(2,0)$ (β) Τομή με yy': $(0,-4)$

(γ)



7\. Τομή με yy': $(0,-\frac{3}{2})$

8\. (α) $y = \frac{3}{2}x + 1$ (β) $y = 2x + 4$

10\. (α) ΝΑΙ (β) ΟΧΙ

(γ) ΝΑΙ (δ) ΟΧΙ

11\. i. (α) Τομή με xx': $(-1,0)$ Τομή με yy': $(0,-1)$ (β) Π.χ. $(-2,1)$, $(1,-2)$

(γ) Π.χ. $(1,1)$, $(1,-1)$ (δ) $y = -x - 1$

ii.	(α)	Τομή με τους άξονες: $(0,0)$	(β)	Π.χ. $(1,2)$ $(2,4)$
	(γ)	Π.χ. $(1,1)$ $(-2,-2)$	(δ)	$y=2x$
12.	(α)	$y=3x+3$	(β)	$y=-x-2$
13.	(α)	$y=0{,}03x+15$ x:*χρόνος ομιλίας σε λεπτά*	(β)	Ορίζεται γραμμική συνάρτηση.

Ειδικές Περιπτώσεις Ευθειών — *Σελίδα 62*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις					
1.	(α)	ε_1: $x=-2$ ε_2: $y=-4$	(β)	ε_1: $y=-x$ ε_2: $y=x$		
3.	(β)	Ανήκουν στην ευθεία ε_1: A, Γ Ανήκουν στην ευθεία ε_2: Δ, Γ	(γ)	Κοινό σημείο: $\Gamma(3,4)$	(δ)	Κοινό σημείο: $(-14, 2014)$
4.	Το $(0,0)$					
5.	(α) Ii		(β) iv	(γ) i		(δ) ii
6.	14 *λίτρα* βενζίνη					
7.	ε_1: $y=x$ ε_2: $y=-3x$ ε_3: $y=3x$ ε_4: $y=\frac{1}{3}x$					
8.	(α)	200 λίτρα χυμού	(β)	$f(x)=0{,}4\cdot x$		
	(γ)	750 kg πορτοκάλια				
9.	(α)	Π.χ. $y=-x+2$	(β)	$y=-2x$	(γ)	$y=4$

Κλίση Γραμμικής Συνάρτησης – Ευθείας — *Σελίδα 69*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις							
1.	(α)	$\lambda=\frac{1}{12}$	(β)	$\lambda=\frac{1}{3}$	(γ)	$\lambda=\frac{2}{25}$	(δ)	$\lambda=-1\frac{1}{4}$
2.	(α)	$\lambda=3$	(β)	$\lambda=-2$	(γ)	$\lambda=-\frac{3}{4}$	(δ)	$\lambda=-2$
	(ε)	$\lambda=3$	(στ)	$\lambda=4$	(ζ)	$\lambda=0$	(η)	λ: *δεν ορίζεται*
3.	(α)	$y=3x+6$	(β)	$y=-x$				
	(γ)	$y=2x+1$	(δ)	$y=-3x$				
4.	(α)	$\lambda=1$	(β)	$\lambda=\frac{1}{2}$				
	(γ)	$\lambda=2$	(δ)	$\lambda=-2$				
5.	(α)	$\kappa=2$	(β)	$\kappa=-5$				

6.	(α)	Αυξάνεται	(β)	Μειώνεται	(γ) Μένει σταθερή, δεν μεταβάλλεται

Γραμμικά Συστήματα Δύο Εξισώσεων με Δύο Αγνώστους *Σελίδα 76*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις									
1.	Το (γ).									
2.		$x=-1$ $y=-2$								
3.	(α)	(β) (γ)	$x=0$ $y=3$	(δ)	(ε) (στ)	$x=\frac{3}{4}$ $y=\frac{3}{2}$	(ζ	(η) (θ)	$x=3$ $y=-2$	
	(ι)	(ια) (ιβ)	$\alpha=9$ $\beta=3$	(ιγ)	(ιδ) (ιε)	$\varphi=1$ $\omega=13$	(ιστ	(ιζ) (ιη)	$\kappa=1$ $\lambda=2$	
4.	i.	Μία λύση		ii.	Μία λύση					
	iii.	Καμία λύση		iv.	Άπειρες λύσεις					
5.	Στέφανος=€70 Μαρίλια=€50									
6.	20 σκηνές των 4 ατόμων 30 σκηνές των 6 ατόμων									
7.	45 αγόρια και 15 κορίτσια									
8.	10 συνταξιούχοι									
9.	$y=2x-1$									

Δραστηριότητες Ενότητας *Σελίδα 78*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις							
1.	(α)	Δεν ορίζει	(β)	Ορίζει	(γ)	Δεν ορίζει	(δ)	Ορίζει
2.	(α)	Ορίζει	(β)	$ΠΟ: \{1,2,3,4,5,6\}$ $ΠΤ: \{9,10,12,13,15\}$				
3.	$y=4x$							
4.	(α)	Ορίζει	(β)	Ορίζει	(γ)	Ορίζει	(δ)	Δεν ορίζει
5.	(α)	Ανήκουν στην ευθεία ε_1: $Β, Γ$ Ανήκουν στην ευθεία ε_2: $Α, Γ$	(β)	$(-1,-2)$				
6.	(α)	$\kappa=2$	(β)	$\kappa=-5$				
	(γ)	$\kappa=5$	(δ)	$\kappa=2$				
7.	Δεν είναι λύση του συστήματος.							
8.	(α)	$y=8{,}5x+50$ x:αριθμός μαθητών	(β)	Είναι γραμμική συνάρτηση.				
9.	(α)	$\lambda=3$	(β)	$\lambda=1$				
	(γ)	$\lambda=-2$	(δ)	$\lambda=0$				

11.	$\varepsilon_1: y = 2x$ $\varepsilon_2: y = 2$ $\varepsilon_3: x = 3$				
12.	$y = 2x$				
13.	(α)	Συνδέονται με γραμμική σχέση. $y = 3x - 1$	(β)	$\lambda = 3$	
	(γ)	Τομή με yy': $(0, -1)$			
14.	(α)	$\lambda = \frac{4}{3}$	(β)	$y = \frac{4}{3}x + 4$	
	(γ)	Τομή με xx': $(-3,0)$ Τομή με yy': $(0, -2)$	(δ)	$E = 9\ \tau.\mu.$	
15.	(α)	$x = 5$ $y = 1$	(β)	$\alpha = 1$ $\beta = 1$	
	(γ)	$x = 5$ $y = -3$	(δ)	$x = 1\frac{4}{11}$ $y = -\frac{2}{11}$	
16.	Α. ii		Β. iii		Γ. i
17.	Άτομα 5 Μοτοσυκλέτες 3				
18.	Ομπρέλα €2,75				

Δραστηριοτητες Εμπλουτισμου				Σελίδα 83
Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**			
1.	Θα έχουν τελειώσει σε 7 ώρες.		$y = 16x - 20$	
2.	(α)	66000 κάτοικοι σήμερα		
4.	(α)	$\kappa = -2, \quad \lambda \neq 1$	(β)	$\kappa \neq -2, \quad \lambda = 1$
6.	Π.χ. $\alpha = 12$ $\alpha = 24$			
7.	Θα φτάσει πρώτος ο Μιχάλης. Σε 3 λεπτά και 20 δευτερόλεπτα θα ισαπέχουν από το σχολείο.			
8.	$\mu = 3$			
10.	$y = -\frac{4}{3}x + 8$			
11.	(α)	$\alpha > \frac{2}{3}$	(β)	$\alpha < \frac{2}{3}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: Λόγοι – Αναλογίες

Ευθεως Αναλογα Ποσα				Σελίδα 91
Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**			
1.	(α)	Δεν είναι ανάλογα, $\frac{6}{90} \neq \frac{12}{45}$	(β)	Δεν είναι ανάλογα, $\frac{5}{7} \neq \frac{10}{28}$

	(γ)	Είναι ανάλογα, $\frac{9}{21}=\frac{12}{28}$

2. (α)

x	5	2	3	30
y	15	6	9	90

(β)

x	14	21	35	56
y	2	3	5	8

3. (α) ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΛΟΓΑ (β) ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΛΟΓΑ (γ) ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΛΟΓΑ

(δ) ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΛΟΓΑ (ε) ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΛΟΓΑ

4. €600

5. 440 km

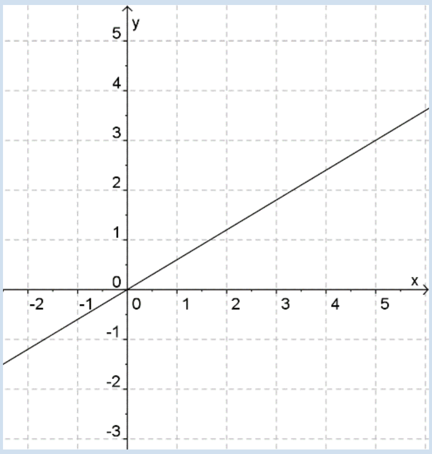
6. 312,5 θερμίδες

7. ΛΑΘΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ

8. Σε 25 μέρες

9. (α) $y=0,6\cdot x$ (β) 1080 kg

(γ)



10. $ 5850

Αντιστροφως Αναλογα Ποσα *Σελίδα 98*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1. (α)	Δεν είναι αντιστρόφως ανάλογα (β) Είναι αντιστρόφως ανάλογα
(γ)	Δεν είναι αντιστρόφως ανάλογα
2. (α)	3°C (β) 12 km

3.

x	1	2	5	12
y	40	20	8	$3\frac{1}{3}$

4. ΛΑΘΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ, $1{,}5 \cdot 1{,}5 \neq 2 \cdot 1 \neq 0{,}5 \cdot 2.5$

5. Πρέπει να αυξήσει την ταχύτητά του κατά $18\ km/h$

6. Για 18 ημέρες

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ *Σελίδα 100*

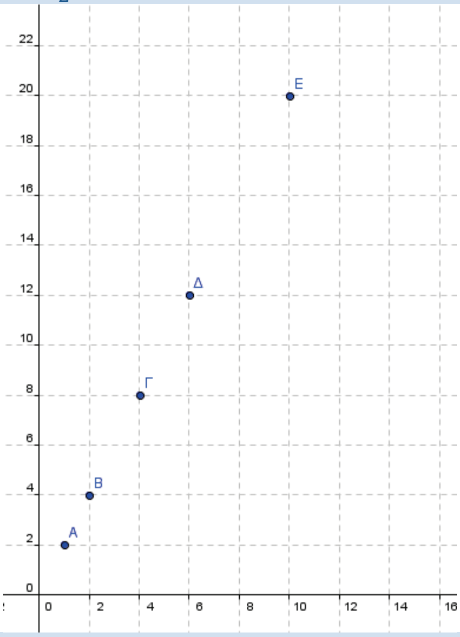
Δραστηριότητα	Απαντήσεις

1. (α)

x	1	2	4	6	10
y	2	4	8	12	20

(β) $y = \frac{1}{2}x$

(γ)



2. $2{,}4\ kg$ καφέ

3. $225\ km$

4. 8 ώρες

5. (α) 120 βάζα (β) Των $750g$

6. ΛΑΘΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ, $58 \cdot 1{,}60 \neq 71 \cdot 1{,}65$

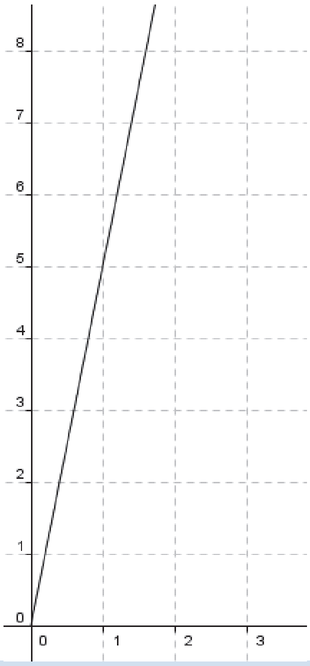
7. 5 ώρες την ημέρα

8. (α) $1{,}79\ cm$ (β) $1{,}785\ cm$

9. (α) €400 (β) €56 (γ) $y = 0{,}7 \cdot x$

10. (β)

x σε ml	1	4	3	18	ν
y σε l	5	20	15	90	5ν

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ		*Σελίδα 102*
Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α)	Είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας 5. $y = 5x$
	(β)	
	(γ)	
2.	$150\ kg$ σιτάρι	

x	1	3	4
y	5	15	20

ΕΝΟΤΗΤΑ 7: Στατιστική-Πιθανότητες

ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ						*Σελίδα 109*
Δραστηριότητα	Απαντήσεις					
1.	$MT_{Γιάννη} = MT_{Μαίρη} = 16$					
2.	(α)	ΛΑΘΟΣ	(β)	ΣΩΣΤΟ	(γ)	ΣΩΣΤΟ
	(δ)	ΛΑΘΟΣ	(ε)	ΣΩΣΤΟ		
3.	$Μέση\ Τιμή = 13$ $Διάμεσος = 14$ $Επικρατούσα\ Τιμή = 15$					
4.	$Μέση\ Τιμή = 21{,}94$					

5.	$2, 4$	
6.	95	
7.	Στο (γ).	
8.	(α)	Μέσο ύψος: 184,25 cm Διάμεσος τιμή: 186 cm
	(β)	Περίπτωση Ι Μέσο ύψος: 186 cm Διάμεσος τιμή: 189 cm Περίπτωση ΙΙ Μέσο ύψος: 185,67 cm Διάμεσος τιμή: 189 cm Περίπτωση ΙΙΙ Μέσο ύψος: 184,625 cm Διάμεσος τιμή: 186 cm
9.		Ποια είναι η διάμεσος των παρατηρήσεων;
10.	$Μέση\ Τιμή = 14{,}67$ $Διάμεσος = 17$ $Επικρατούσα\ Τιμή = 17$	
11.	(α)	Π.χ. $14, 16, 17, 13$
	(β)	Π.χ. $14, 15, 15, 16$
	(γ)	Π.χ. $14, 15, 14, 16$
	(δ)	Π.χ. $14, 15, 14, 17$

Πιθανοτητες – Αρχη Απαριθμησης *Σελίδα 119*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(Άννα, Γιώργος), (Άννα, Ειρήνη), (Μάριος, Γιώργος), (Μάριος, Ειρήνη), (Αντρέας, Γιώργος), (Αντρέας, Ειρήνη), (Παναγιώτης, Γιώργος), (Παναγιώτης, Ειρήνη)	
2.	$\nu(\Omega) = 18$	
3.	(α)	$\Omega = \begin{Bmatrix} (K,1),(K,2),(K,3),(K,4),(K,5),(K,6), \\ (\Gamma,1),(\Gamma,2),(\Gamma,3),(\Gamma,4),(\Gamma,5),(\Gamma,6) \end{Bmatrix}$
	(β)	$\frac{1}{12}$
4.	(α)	$\Omega = \begin{Bmatrix} (M,A),(M,\Pi),(M,\Gamma),(A,M),(A,\Pi),(A,\Gamma), \\ (\Pi,M),(\Pi,A),(\Pi,\Gamma),(\Gamma,M),(\Gamma,A),(\Gamma,\Pi) \end{Bmatrix}$
	(β)	$A = \{(A,M),(\Pi,M),(\Gamma,M)\}$
	(γ)	$B = \{(\Pi,\Gamma),(\Gamma,\Pi)\}$
5.	$\Omega = \{(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8),$ $(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8)\}$	
	(α)	$\frac{1}{16}$
	(β)	$\frac{1}{4}$
	(γ)	$\frac{1}{4}$
	(δ)	$\frac{1}{16}$

6. (α)

$\cdot$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

(β) $\frac{3}{4}$

7.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$P(\text{να κερδίσει ο Αντρέας}) = \frac{1}{9}$

$P(\text{να κερδίσει ο Αλέξης}) = \frac{1}{6}$

Καλύτερη πρόβλεψη έκανε ο Αλέξης

$P(\text{να μην κερδίσει κανένας}) = \frac{13}{18}$

8. $\frac{1}{9}$

9. $\Omega = \{25, 52, 28, 82, 58, 85\}$

$P(A) = 0$

$P(B) = \frac{2}{3}$

$P(\Gamma) = \frac{1}{3}$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ		*Σελίδα 121*
Δραστηριότητα		**Απαντήσεις**
1.	(α)	Χαμηλότερη Θερμοκρασία: την Τετάρτη και την Πέμπτη στις $6\pi.\mu.$ Ψηλότερη Θερμοκρασία: τη Δευτέρα στις $3\mu.\mu.$
	(β)	Δευτέρα: 18,4℃ Τρίτη: 12,8℃ Τετάρτη: 12℃ Πέμπτη: 14℃
	(γ)	Ψηλότερη Μέση Θερμοκρασία: τη Δευτέρα Χαμηλότερη Μέση Θερμοκρασία: την Τετάρτη
2.	(α)	Μεγαλύτερη ποσότητα: το 2007 Μικρότερη ποσότητα: το 2000
	(β)	Το 2006 αυξήθηκε κατά 1,05 τόνους.

(γ) Μέση ποσότητα ανακύκλωσης= 7,96

(δ) Τα έτη 2004,2005,2006,2007

3. (α) $Μέση\ Τιμή = 15{,}05$
$Διάμεσος = 16$
$Επικρατούσα\ Τιμή = 18$

(β) Το 47,05%.

5. 40 διαφορετικοί τρόποι

6. 40 διαφορετικοί κωδικοί

7.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Πιο πιθανόν είναι να κερδίσει ο Μιχάλης

8. $Ω = \begin{Bmatrix} (3,1), (3,4), (3,6), (5,1), (5,4), (5,6), \\ (7,1), (7,4), (7,6), (8,1), (8,4), (8,6) \end{Bmatrix}$

$P(να\ κερδίσει\ ο\ Αλέξης) = \frac{1}{4}$

9.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$P(A) = \frac{5}{18}$, $P(B) = \frac{1}{36}$, $P(Γ) = \frac{3}{4}$, $P(Δ) = \frac{11}{36}$, $P(E) = \frac{5}{6}$

10. $Μέση\ Τιμή\ = 8{,}06$

11. (α) 7

(β) Οποιοδήποτε αριθμός μικρότερος του 8

(γ) 8

12. 13,13,15,15,19

13. Η μέση τιμή

14. $Μέση\ Τιμή = 21$

15. $P(A) = \frac{1}{8}$
$P(B) = P(Γ) = \frac{3}{8}$
$P(Δ) = \frac{1}{2}$
$P(E) = \frac{1}{8}$

Δραστηριότητα		Απαντήσεις
4.	(β)	$P(A) = \frac{7}{12}$ $P(B) = 0$ $P(\Gamma) = 1$ $P(\Delta) = \frac{1}{6}$ $P(E) = \frac{25}{36}$
5.		$\Omega = \{\Gamma, K\Gamma, KK\Gamma, KKK\}$
6.		Μέση Τιμή: $\mu + \kappa$ Νέα επικρατούσα: $\varepsilon + \kappa$ Διάμεσος: $\delta + \kappa$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

$\in$	ανήκει
$\notin$	δεν ανήκει
$\forall$	για κάθε
$\exists$	υπάρχει
$\cup$	ένωση συνόλων
$\cap$	τομή συνόλων
$\subset$	γνήσιο υποσύνολο
$\subseteq$	υποσύνολο
$\emptyset$ ή $\{\ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
$\neq$	άνισο
$\equiv$	ταυτοτικά ίσο
$\cong$	κατά προσέγγιση ίσο
$\mathbb{N}$	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}$	ακέραιοι αριθμοί $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}^+$	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}^-$	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1,-2,-3,-4,\ldots\}$
$\mathbb{Q}$	ρητοί αριθμοί $\{\alpha/\beta:\ \alpha,\beta\in Z$ και $\beta\neq0\}$
$\mathbb{Q}^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{Q}_0^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
$\mathbb{Q}^-$	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{R}$	πραγματικοί αριθμοί
$\Rightarrow$	απλή συνεπαγωγή
$\Leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
$\perp$	κάθετες
$\parallel$	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή

=		Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)
.		Υποδιαστολή
EXP		Εκθέτης δύναμης με βάση το 10
Ans		Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος
$x^{\square}$	ή x^y ή ^	Δύναμη
		Ποντίκι (Mouse)
SHIFT	ή 2nd F	Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί
AC		Επανεκκίνηση υπολογιστικής
DEL		Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή
Abs		Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)
(-)		Εισαγωγή Προσήμου –
a b/c	ή $\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$	Κλάσμα
S⇔D	ή a b/c	Μετατροπή Κλάσμα⇔ Δεκαδικός
CLR		Σβήσιμο μνήμης
M+		Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη
M-		Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη
M		Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3+4$	3 + 4 =	3+4 7
2,34 – 1,1	2 . 3 4 – 1 . 1 =	2.34 – 1.1 1.24
$3 \cdot 2$	3 x 2 =	$3X2$ 6
2^5	2 x^y 5 =	2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$	5 EXP 3 =	$5E3$ ή $5X103$ 5000
$\frac{3}{4}$	a b/c 3 ↓ 4 → = ή 3 a b/c 4 =	$\frac{3}{4}$ 3⌟4
$2\frac{3}{4}$	SHIFT ▪/▪ 2 → 3 ↓ 4 = ή 2 a b/c 3 a b/c 4 =	$2\frac{3}{4}$ 2 ⌟3 ⌟4
$\sqrt{4}$	√ 4 =	$\sqrt{4}$ 2
5^2	5 X² =	5^2 25
$2 \cdot (7-3)$	2 x (7 – 3) =	$2X(7-3)$ 8
$2 \cdot (7-3)$	7 – 3 = 2 x Ans =	$2XAns$ 8
$2-(-3)$	2 – ((-) 3) =	$2-(-3)$ 5
$\lvert -3 \rvert$	Abs (-) 3 =	$\lvert -3 \rvert$ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης	S⇔D ή SHIFT a b/c	$\frac{1}{4}$
$9-6:2$	Υπολογισμός και αποθηκευση 9 – 6 ÷ 2 = M+	$9-6:\ 2M+$ 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9-6:2) - 6:(9-6:2)$	3 X M – 6 ÷ M =	$3XM-6:\ M$ 17