ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ Γυμνασίου

Α΄ Τεύχος

Αναθεωρημένη Έκδοση

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ Γυμνασίου

Α΄ τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Β΄ Γυμνασίου, Α΄ Τεύχος

Συγγραφή: Αθανασίου Ανδρέας
Αντωνιάδης Μάριος
Γιασουμής Νικόλας
Έλληνα Αγγέλα
Ματθαίου Κυριάκος
Μουσουλίδου – Νικολαΐδου Μαριλένα
Παπαγιάννης Κωνσταντίνος
Τιμοθέου Σάββας
Φιλίππου Ανδρέας

Συντονιστής: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*

Εποπτεία: Θεοφίλου Στέλιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Κωστή Αντώνιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παντελή Παντελής, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*

Γλωσσική επιμέλεια: Παλάτου – Χριστόφια Μαριάννα, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Σχεδιασμός εξωφύλλου: Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης: Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Α΄ έκδοση 2012
Β΄ έκδοση 2014

Εκτύπωση: Ariagraf & ΣΙΑ ΕΕ

ISBN: 978-9963-0-4728-4

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε δύο τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Στην αρχή κάθε ενότητας γίνεται παράθεση των στόχων και οι μαθητές/τριες προϊδεάζονται ως προς το τι «... θα μάθουμε». Ακολουθεί, στο «Έχουμε μάθει ...», η παρουσίαση της αναγκαίας προϋπάρχουσας γνώσης που οι μαθητές/τριες πρέπει να διαθέτουν, κάτι που βοηθά τους/τις εκπαιδευτικούς στον καταρτισμό καλύτερης διαγνωστικής και διαμορφωτικής αξιολόγησης. Στη συνέχεια, οι νέες μαθηματικές έννοιες διερευνώνται με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών/τριών, όπως ορίζουν οι αρχές των Εκσυγχρονισμένων Αναλυτικών Προγραμμάτων των Μαθηματικών. Η προσπάθεια κλιμακώνεται με παραδείγματα και διαβαθμισμένες δραστηριότητες, με έμφαση στη λύση προβλήματος και στην ανάδειξη της τεχνολογίας ως αναπόσπαστου μέρους της Μαθηματικής εκπαίδευσης.

Όλες οι εκδόσεις για τα Μαθηματικά των τελευταίων χρόνων βρίσκονται υπό συνεχή αξιολόγηση, διαμόρφωση και βελτίωση στη βάση της ανατροφοδότησης και των παρατηρήσεων που προέρχονται και από τους/τις μάχιμους/ες καθηγητές/τριες των Μαθηματικών. Αναμένω από τους διδάσκοντες/ουσες να εκφράσουν τις απόψεις τους και να υποβάλουν τις εισηγήσεις τους, τόσο σε σχέση με το περιεχόμενο του βιβλίου και το επίπεδο των ασκήσεων και δραστηριοτήτων όσο και σε σχέση με τον τρόπο προσέγγισης της ύλης.

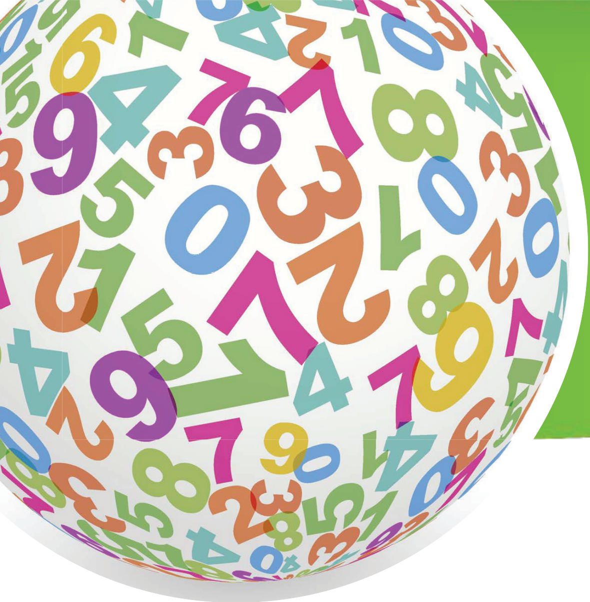
Όλο το υλικό που παράγεται για το μάθημα των Μαθηματικών αποσκοπεί στη βοήθεια τόσο των μαθητών/τριών, όσο και των καθηγητών/τριών, στην πορεία τους μέσα από τα Εκσυγχρονισμένα Αναλυτικά Προγράμματα, με στόχο το καλύτερο αποτέλεσμα. Είναι εμποτισμένο με τον σύγχρονο τρόπο σκέψης και προσηλωμένο στην προαγωγή και στην ανάδειξη των βασικών δεξιοτήτων των μαθητών/τριών μας, που αποτελεί πρώτιστο μέλημά μας. Η προσπάθεια συνεχίζεται και οι προοπτικές είναι λαμπρές.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τον κύριο Κωνσταντίνο Χρίστου, Καθηγητή στο Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Σάββας Αντωνίου

Αναπληρωτής Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ



Επανάληψη

από την Α΄ Γυμνασίου

Επανάληψη από την Α΄ Γυμνασίου

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

(α) *Το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών είναι πάντοτε αρνητικός αριθμός.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β) *Το άθροισμα ενός θετικού αριθμού και ενός αρνητικού είναι πάντα αρνητικός αριθμός.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ) *Το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών είναι πάντοτε θετικό.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ) *Ο αντίθετος του $+7$ είναι το 7.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε) *Αν η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι ίση με 8, τότε ο αριθμός μπορεί να είναι είτε το 8 είτε το -8.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $<, =, >$, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

(α) $+12 \; \ldots\ldots \; -17$ (β) $-4 \; \ldots\ldots \; -15$

(γ) $-9 \; \ldots\ldots \; +9$ (δ) $0 \; \ldots\ldots \; -2$

(ε) $|-4| \ldots\ldots |-15|$ (στ) $|-9| \; \ldots\ldots \; 0$

(ζ) $(-2)\cdot(-6) \ldots\ldots -4+16$ (η) $24 : (-4) \ldots\ldots -3$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $-19+24$ (β) $-32-15$

(γ) $(+8)+(+13)$ (δ) $4+(-11)$

(ε) $(-10)-(+13)$ (στ) $-5-(-5)$

(ζ) $(-9)\cdot(-8)$ (η) $(+25):(-5)$

(θ) $-8\cdot(+3)$ (ι) $0\cdot(-8)$

(ια) $-5\frac{1}{4}-2\frac{1}{4}$ (ιβ) $-2\frac{1}{3}+1\frac{1}{5}$

(ιγ) $3\frac{1}{6}\cdot\left(-1\frac{2}{3}\right)$ (ιδ) $\left(-2\frac{1}{6}\right):\left(-1\frac{3}{4}\right)$

4. Να συμπληρώσετε με τον κατάλληλο αριθμό:

(α)	$-2+\square=-4$	(β)	$(-2)-\square=-4$
(γ)	$\square:(-2)=-4$	(δ)	$(-2)\cdot\square=-4$
(ε)	$(-2+6):\square=-4$	(στ)	$(-1)\cdot 24\cdot\square:(+12)=-4$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

(α)	$-5+9-6+2$	(β)	$+2-6+8+0-4+5$
(γ)	$-25+(-4)-(-9)$	(δ)	$-7+(-12)-(+9)-(-4)$
(ε)	$-9+(-7)\cdot(+3)+16$	(στ)	$(1-15):(19-12)$
(ζ)	$-2\cdot(-4+7)$	(η)	$-7+6\cdot(+4-4)$
(θ)	$-5\cdot(+2)-18:(-3)$	(ι)	$-7\cdot(-4)-(+12)+8$

6. Να αναλύσετε τους αριθμούς 32, 48 και 80 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Στη συνέχεια να βρείτε το $ΜΚΔ$ και το $ΕΚΠ$ τους.

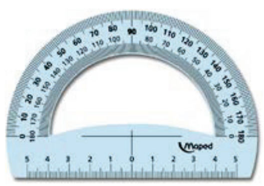
7. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α)	$(-2)^2$	(β)	$(+4)^1$
(γ)	$(-3)^3$	(δ)	$(-6+5)^{22}$
(ε)	$\left(-\frac{1}{8}\right)^0$	(στ)	$\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)^2$

8. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α)	$4x+5=9$	(β)	$-3\alpha+12=0$
(γ)	$3(2-x)+x=6x-10$	(δ)	$7x-3(2x-5)=20$
(ε)	$2(x-1)-3x=16-3(x+2)$	(στ)	$\frac{2y}{5}-\frac{4}{3}=\frac{2}{5}+\frac{5y}{6}$
(ζ)	$\frac{\kappa+14}{6}+1=\frac{10-\kappa}{3}$	(η)	$\frac{5x-7}{2}-\frac{2x+7}{3}=3x-14$

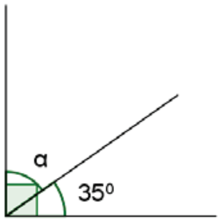
9. Να γράψετε δίπλα από κάθε γωνία το είδος της (οξεία, αμβλεία, ορθή, ευθεία, πλήρης, μη κυρτή, μηδενική).



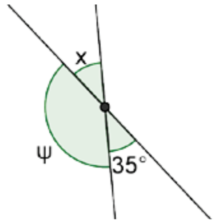
Μέτρο Γωνίας	Είδος Γωνίας	Μέτρο Γωνίας	Είδος Γωνίας
98°		0°	
270°		90°	
180°		225°	
81°		360°	

10. Να υπολογίσετε την τιμή του αγνώστου σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

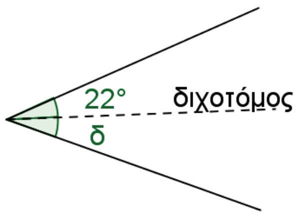
(α)



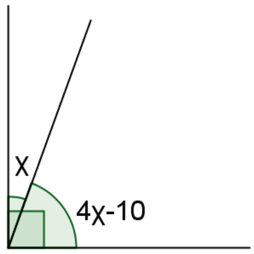
(β)



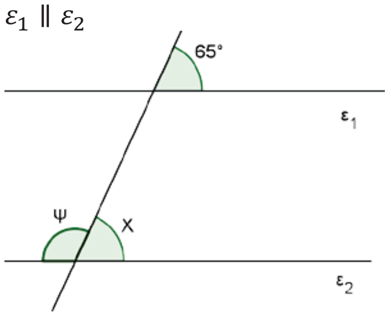
(γ)



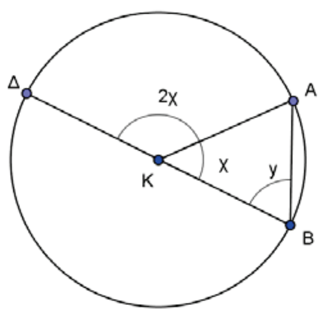
(δ)



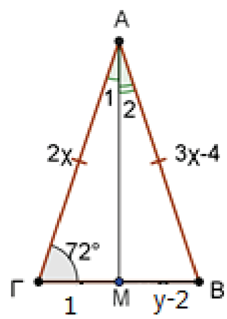
(ε) $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$



11. Στον διπλανό κύκλο τα σημεία Δ, K, B είναι συνευθειακά.
   (α) Να υπολογίσετε τις γωνίες x και y.
   (β) Να χαρακτηρίσετε τα πιο κάτω στοιχεία του κύκλου:
      i. KA
      ii. AB
      iii. $B\Delta$

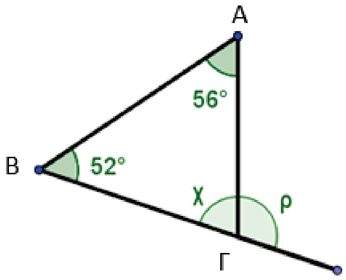


12. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και η AM διάμεσος. Αν $\hat{\Gamma} = 72°$. Να βρείτε:
   (α) τις τιμές των x, y.
   (β) το μήκος των πλευρών $A\Gamma$ και $B\Gamma$
   (γ) τις γωνίες $\hat{B}, \hat{A}_1$ και $\hat{A}_2$

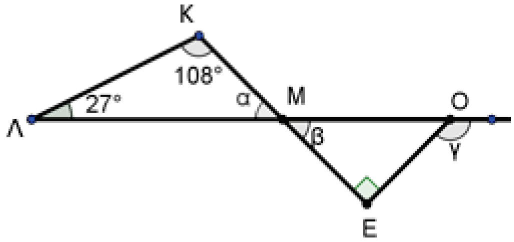


13. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\chi, \rho, \alpha, \beta, \gamma$ στα πιο κάτω σχήματα και να βρείτε το είδος των τριγώνων ως προς τις πλευρές και ως προς τις γωνίες τους:

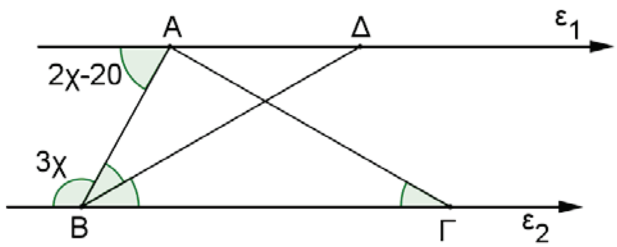
(α)



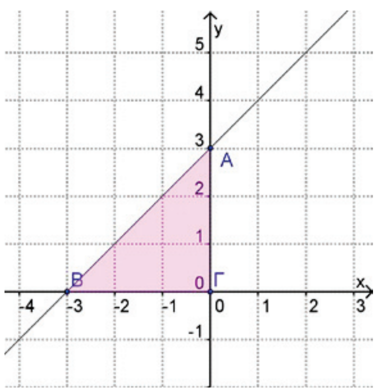
(β)



14. Στο πιο κάτω σχήμα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, $AB \perp A\Gamma$ και $B\Delta$ διχοτόμος της γωνίας $AB\Gamma$. Να υπολογίσετε:
   (α) την τιμή του χ
   (β) τις γωνίες B_1, B_2, Γ, Δ
   (γ) το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις γωνιές του.
   (δ) το είδος του τριγώνου $AB\Delta$ ως προς τις πλευρές του.



15. Στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα αξόνων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.
   (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου $A\Gamma B$.
   (β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $A\Gamma B$.
   (γ) Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης και να βρείτε τον τύπο της.



x				
y				
(x, y)				
Τύπος της συνάρτησης:				

16. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = 2x - 1$.
    (α) Να κατασκευάσετε πίνακα τιμών και να την παραστήσετε γραφικά.
    (β) Να εξετάσετε κατά πόσο το σημείο $(0{,}0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης .

17. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = 3x$.
    (α) Να βρείτε δύο σημεία που να ανήκουν και δύο σημεία που να μην ανήκουν στη γραφική παράσταση της πιο πάνω συνάρτησης.
    (β) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x$.

18. Ένα κατάστημα, που πωλεί ηλεκτρονικά παιχνίδια, προσφέρει 30% έκπτωση σε όλα τα αντικείμενα που πωλεί.
    (α) Να γράψετε τη σχέση που συνδέει την τιμή πώλησης y με την αναγραφόμενη τιμή x.
    (β) Ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι είχε αρχική τιμή €80 ευρώ. Πόσα θα πωληθεί τελικά με την έκπτωση;
    (γ) Να βρείτε την αρχική τιμή μιας ηλεκτρονικής κονσόλας που πωλήθηκε τελικά €280.

19. Ένας έμπορος πώλησε εμπορεύματα και εισέπραξε €40000. Αν το κέρδος του εμπόρου ήταν 25%, να υπολογίσετε την αξία των εμπορευμάτων.

20. Ο κύριος Ιάκωβος αγόρασε ένα αυτοκίνητο €15000 και το πώλησε €13200. Πόσα τοις εκατόν ζήμιωσε;

21. Ρίχνουμε ένα ζάρι μια φορά. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των πιο κάτω ενδεχομένων:

    A: *η ένδειξη να είναι μικρότερη του* 7

    B: *η ένδειξη να είναι άρτιος αριθμός*

    Γ: *η ένδειξη να είναι πρώτος αριθμός*

    Δ: *να μην είναι η ένδειξη ο αριθμός* 5

    E: *η ένδειξη να είναι μεγαλύτερη του* 6

22. Σε ένα γυμνάσιο 400 μαθητών έγινε έρευνα όσον αφορά την ομάδα αίματός τους με τα εξής αποτελέσματα:

Ομάδα αίματος	A	B	AB	O
Αριθμός μαθητών	100	140		

(α) Αν οι μαθητές που έχουν ομάδα αίματος AB αποτελούν το 10% του συνολικού αριθμού μαθητών που έδωσαν αίμα, να βρείτε πόσοι μαθητές έχουν ομάδα αίματος AB.

(β) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν ομάδα αίματος O.

(γ) Να παρουσιάσετε τα πιο πάνω αποτελέσματα σε ένα κυκλικό διάγραμμα.

(δ) Αν επιλέξω τυχαία έναν μαθητή, ποια είναι η πιθανότητα να:

i. έχει ομάδα αίματος A,

ii. μην έχει ομάδα αίματος O.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Πραγματικοί Αριθμοί

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε δυνάμεις ρητών με βάση ρητό αριθμό και εκθέτη ακέραιο αριθμό.
- Να διερευνούμε και να εφαρμόζουμε τις ιδιότητες δυνάμεων ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο αριθμό.
- Να υπολογίζουμε αριθμητικές παραστάσεις με δυνάμεις.
- Να διατυπώνουμε, να επιλύουμε προβλήματα με δυνάμεις και να ελέγχουμε τη λογικότητα της απάντησής μας.
- Να ορίζουμε και να υπολογίζουμε την τετραγωνική και την κυβική ρίζα μη αρνητικού αριθμού.
- Να ορίζουμε τις ιδιότητες των τετραγωνικών και των κυβικών ριζών και να τις εφαρμόζουμε, για να υπολογίζουμε παραστάσεις με τετραγωνικές και κυβικές ρίζες.
- Να διατυπώνουμε το πυθαγόρειο θεώρημα και να το εφαρμόζουμε στην επίλυση προβλημάτων.
- Να εξετάζουμε κατά πόσο ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
- Να ορίζουμε τους άρρητους αριθμούς και το σύνολο των πραγματικών αριθμών.
- Να αναγνωρίζουμε τη διαφορά ρητών και άρρητων αριθμών από τη μορφή του δεκαδικού αναπτύγματός τους.
- Να εκφράζουμε την τετραγωνική ρίζα αριθμών κατά προσέγγιση.

Έχουμε μάθει ...

- Το γινόμενο, $\underbrace{\boldsymbol{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \cdots \cdot \alpha}}_{\boldsymbol{\nu}\ \textbf{παράγοντες}}$ που αποτελείται από $\boldsymbol{\nu}$ παράγοντες, ίσους με $\boldsymbol{\alpha}$**,** όπου $\nu > 1$, συμβολίζεται ως $\boldsymbol{\alpha^{\nu}}$ και ονομάζεται **δύναμη του** $\boldsymbol{\alpha}$ **στη** $\boldsymbol{\nu}$ ή **νιοστή δύναμη του** $\boldsymbol{\alpha}$**.**

  Το $\boldsymbol{\alpha}$ ονομάζεται **βάση** της δύναμης και το $\boldsymbol{\nu}$ ονομάζεται **εκθέτης** της.

  Παράδειγμα:
  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ *και* $3^4 = 81$
  Το 3 είναι η βάση και το 4 ο εκθέτης της δύναμης.

- Ορίζεται:
  - $\boldsymbol{\alpha^1 = \alpha}$**,** όπου $\alpha \in \mathbb{N}$
  - $\boldsymbol{\alpha^0 = 1}$**,** όπου $\alpha \in \mathbb{N}$

  Παραδείγματα:
  $2^0 = 1$, $5^1 = 5$

- Η σειρά με την οποία πρέπει να κάνουμε τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση (**προτεραιότητα πράξεων**) είναι η ακόλουθη:
  - Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
  - Στη συνέχεια, εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
  - Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

  Αν υπάρχουν στην παράσταση παρενθέσεις, τότε με βάση την προηγούμενη σειρά εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.

Έχουμε μάθει …

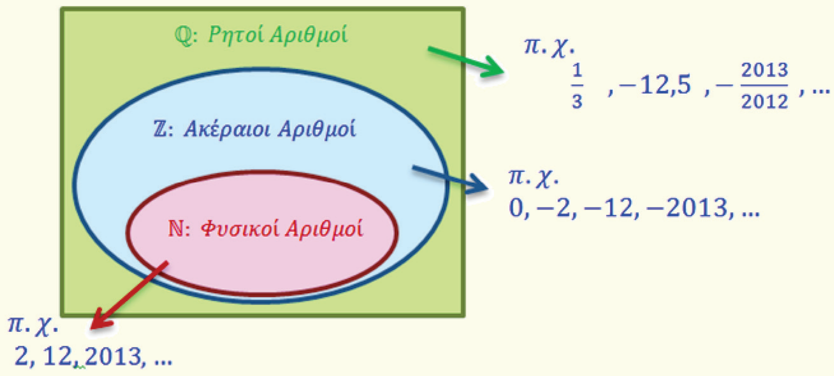
- Ένας δεκαδικός αριθμός ονομάζεται **περιοδικός δεκαδικός**, όταν έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία και από ένα ψηφίο και μετά αποτελείται από ένα επαναλαμβανόμενο «τμήμα». Το επαναλαμβανόμενο «τμήμα» του αριθμού ονομάζεται **περιοδικό τμήμα**.

  Παράδειγμα:

  $0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$, *το 3 είναι το περιοδικό τμήμα του αριθμού.*

  $-34{,}23181818\ldots = -34{,}23\overline{18}$, *το 18 είναι το περιοδικό τμήμα.*

- **Ρητοί** είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$ όπου μ, ν είναι ακέραιοι αριθμοί και ν είναι διαφορετικός από το μηδέν. Δηλαδή, $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\mu}{\nu} \;/\; \mu \in \mathbb{Z},\ \nu \in \mathbb{Z},\ \nu \neq 0 \right\}$



- Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως **δεκαδικός** με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων ή ως **περιοδικός δεκαδικός.** Αντίστροφα, κάθε δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος ή κάθε περιοδικός δεκαδικός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή.

  Παράδειγμα:

  $2{,}666\ldots = 2\frac{2}{3}$

  $-0{,}25 = -\frac{1}{4}$

Ιδιότητες Δυνάμεων

Εξερεύνηση

Ο Αρχιμήδης ($3^{ος}$ αιώνας π.Χ.), ο μεγαλύτερος ίσως φυσικομαθηματικός της αρχαιότητας, στο βιβλίο του «Ψαμμίτης» (Άμμου Καταμέτρης), υποστηρίζει ότι ο αριθμός των κόκκων της άμμου δεν είναι άπειρος, όπως πίστευαν πολλοί, αλλά πεπερασμένος αριθμός.

Προκειμένου να υπολογίσει τους κόκκους της άμμου, έπρεπε πρώτα να επινοήσει ένα σύστημα ονομασίας μεγάλων αριθμών. Ξεκίνησε λοιπόν από τον μεγαλύτερο αριθμό εκείνης της εποχής, τη μυριάδα μυριάδων. Η **μυριάδα** ισούται με 10000, συνεπώς η **μυριάδα μυριάδων**, ήταν η μυριάδα στο τετράγωνο. Ο Αρχιμήδης συνειδητοποίησε ότι με απλούς υπολογισμούς δεν μπορούσε να φθάσει εύκολα στο αποτέλεσμα που ήθελε. Χρησιμοποιώντας τη μυριάδα μυριάδων ως βάση, δημιούργησε μεγαλύτερους αριθμούς, **υψώνοντας δύναμη σε δύναμη**, αφού με αυτό τον τρόπο οι αριθμοί αυξάνονται εντυπωσιακά.

Τελικά σταμάτησε στον αριθμό: $\left((10^8)^{(10^8)}\right)^{10^8} = 10^{8\cdot 10^{16}}$ ο οποίος είναι μία μυριάδα μυριάδων στη μυριοστή μυριάδα και όλο στη μυριοστή μυριάδα. Ο αριθμός αυτός είναι ασύλληπτα μεγάλος και αποτελείται από το 1 ακολουθούμενο από $8\cdot 10^{16}$ μηδενικά. Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη αστρονομικές μετρήσεις υπολόγισε το μέγεθος του Σύμπαντος και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι δεν χρειάζονται πάνω από 10^{63} κόκκοι άμμου, για να γεμίσει ολόκληρο το Σύμπαν.

Το όνομα του αριθμού ήταν ιδέα του εννιάχρονου ανιψιού του, Milton Sirotta και δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά το 1940 στο βιβλίο του «Μαθηματικά και Φαντασία». Αργότερα, ο Kasner δημιούργησε και τον αριθμό *googloplex*, τον οποίο περίγραψε ως τον αριθμό με πρώτο ψηφίο τη μονάδα και μετά τόσα μηδενικά που βαριέσαι να τα γράψεις.

Πρόσφατα, τον $20^{ο}$ αιώνα, ο Αμερικανός μαθηματικός Edward Kasner, δημιούργησε τον αριθμό *googol*, για να εκφράσει πολύ μεγάλους αριθμούς. Ο αριθμός *googol* ισούται με 10^{100}.

✓ Να συγκρίνετε τον αριθμό του Αρχιμήδη με τον αριθμό του Kasner.

Διερεύνηση (1)

Στον πιο κάτω πίνακα υπολογίζονται δυνάμεις του 2.

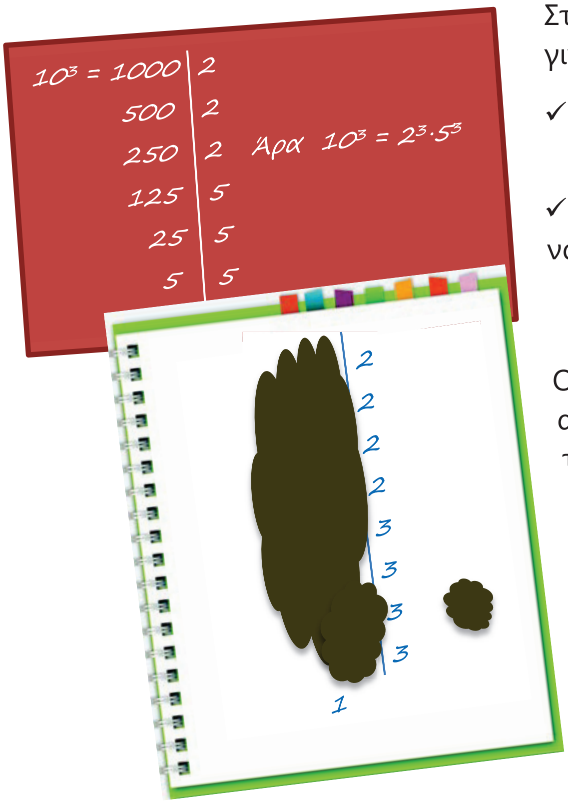
- ✓ Πώς μπορείτε, χρησιμοποιώντας τις τιμές του διπλανού πίνακα, να υπολογίσετε το 2^{10}; Να αναφέρετε διαφορετικούς τρόπους που μπορείτε να το υπολογίσετε.
- ✓ Πώς μπορείτε, χρησιμοποιώντας τις τιμές του πίνακα, να υπολογίσετε το 2^{10}, κάνοντας μόνο μια διαίρεση;
- ✓ Ο Αλέξης ισχυρίζεται ότι μπορεί να βρει την τιμή του 2^{10}, διαιρώντας το 2^{20} με το 2. Να εξετάσετε αν είναι ορθός ο ισχυρισμός του.

Δύναμη	Αποτέλεσμα
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	;
⋮	⋮
2^{15}	32 768
⋮	⋮
2^{20}	1 048 576

- ✓ Να συμπληρώσετε τους πιο κάτω πίνακες και να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας.

Γινόμενο δυνάμεων	Αναλύεται:	Δύναμη
$2^4 \cdot 2^3$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	2^7
$\alpha^3 \cdot \alpha^5$		
$(3{,}1)^2 \cdot (3{,}1)^4$		
$(-3)^2 \cdot (-3)^3 \cdot (-3)$		
$\boldsymbol{\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu}$		
Πηλίκο δυνάμεων	**Αναλύεται:**	**Δύναμη**
$\frac{2^7}{2^3}$	$\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot\cancel{2\cdot2\cdot2}}{\cancel{2\cdot2\cdot2}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	2^4
$\frac{x^5}{x^2}$		
$5^8 : 5^2$		
$\boldsymbol{\alpha^\mu : \alpha^\nu}$		
Δύναμη σε δύναμη	**Αναλύεται:**	**Δύναμη**
$(7^2)^4$	$(7^2) \cdot (7^2) \cdot (7^2) \cdot (7^2)$	7^8
$[\alpha^3]^5$		
$\boldsymbol{(\alpha^\mu)^\nu}$		

Διερεύνηση (2)



Στο διπλανό παράδειγμα δίνεται η ανάλυση του 10^3 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

✓ Να αναλύσετε το 10^4 με αντίστοιχο τρόπο και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

✓ Μπορείτε να βρείτε πώς θα αναλυθεί το 10^5 χωρίς να κάνετε την πιο πάνω διαδικασία;

Ο Χρίστος ακολούθησε τα πιο πάνω βήματα, για να αναλύσει τη δύναμη που τους ζήτησε ο καθηγητής του. Στο τετράδιό του, όμως, χύθηκε μελάνι και τώρα δεν φαίνονται όλοι οι αριθμοί.

✓ Μπορείτε να βρείτε ποια δύναμη έχει αναλύσει ο Χρίστος;

✓ Να συμπληρώσετε τους πιο κάτω πίνακες και να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας.

Γινόμενο σε δύναμη	Αναλύεται:	Δύναμη
$(7 \cdot x)^4$	$7 \cdot x \cdot 7 \cdot x \cdot 7 \cdot x \cdot 7 \cdot x = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$	$7^4 \cdot x^4$
$(5 \cdot \lambda)^2$		
$(3 \cdot x \cdot y)^2$		
$\boldsymbol{(\alpha \cdot \beta)^\nu}$		
Πηλίκο σε δύναμη	**Αναλύεται:**	**Δύναμη**
$\left(\frac{3}{5}\right)^4$	$\left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$	$\frac{3^4}{5^4}$
$\left(\frac{2}{x}\right)^3$		
$\left(\frac{\kappa}{5}\right)^3$		
$\boldsymbol{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}$		

Μαθαίνω

- Για να **πολλαπλασιάσουμε** δυνάμεις με την **ίδια βάση**, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών.
  Δηλαδή, $\boldsymbol{\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}}$ όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}$

  Παράδειγμα:
  $(+3)^2 \cdot (+3)^4 = (+3)^{2+4} = (+3)^6$

- Για να **διαιρέσουμε** δυνάμεις με την **ίδια βάση**, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου.
  Δηλαδή, $\boldsymbol{\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}}$ όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, $\mu > \nu$ και $\alpha \neq 0$

  $$\boldsymbol{\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}} \quad \text{όπου } \mu, \nu \in \mathbb{N},\ \mu > \nu \text{ και } \alpha \neq 0$$

  Παράδειγμα:
  $(-2)^6 : (-2)^3 = (-2)^{6-3} = (-2)^3$ *ή*
  $\frac{(-2)^6}{(-2)^3} = (-2)^{6-3} = (-2)^3$

- Για να υψώσουμε μία δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών.
  Δηλαδή, $\boldsymbol{(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu}}$ όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}$

  Παράδειγμα:
  $(2^5)^4 = 2^{5 \cdot 4} = 2^{20}$

- Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό.
  Δηλαδή, $\boldsymbol{(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha, \beta \neq 0$

  Παράδειγμα:
  $(2 \cdot 3)^9 = 2^9 \cdot 3^9$

- Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε καθένα από τους όρους του πηλίκου στον εκθέτη αυτό.
  Δηλαδή, $\boldsymbol{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}$ και $\beta \neq 0$

  Παράδειγμα:
  $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3^2}{7^2}$

- Αν δύο δυνάμεις με την ίδια βάση είναι ίσες, τότε και οι εκθέτες τους είναι ίσοι.
  Δηλαδή, $\boldsymbol{\alpha^{\mu} = \alpha^{\nu} \Leftrightarrow \mu = \nu}$ όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq \pm 1$

  Παράδειγμα:
  $(+5)^x = (+5)^2 \Leftrightarrow x = 2$

Παραδείγματα

1. Να γράψετε σε μορφή μιας δύναμης τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $5^3 \cdot 5$ (β) $\left(-\frac{3}{5}\right)^7 : \left(-\frac{3}{5}\right)^2$ (γ) $3 \cdot 9 \cdot 81$

(δ) $(-3)^2 \cdot (+3)^3$ (ε) $3^5 + 7 \cdot 3^5 - 3^5 + 2 \cdot 3^5$

Λύση:

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων:

(α) $5^3 \cdot 5 = 5^3 \cdot 5^1 = 5^{3+1} = 5^4$

(β) $\left(-\frac{3}{5}\right)^7 : \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)^{7-2} = \left(-\frac{3}{5}\right)^5$

(γ) $3 \cdot 9 \cdot 81 = 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^4 = 3^{1+2+4} = 3^7$

Γράφουμε κάθε αριθμό ως δύναμη με την <u>ίδια βάση.</u>

(δ) $(-3)^2 \cdot (+3)^3 = (+3)^2 \cdot (+3)^3 = (+3)^{2+3} = (+3)^5$

Παρατηρούμε ότι δεν έχουν την ίδια βάση. Επειδή ισχύει $(-3)^2 = (+3)^2$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $(-3)^2$ με $(+3)^2$ για να εφαρμόσουμε την ιδιότητα.

(ε) $3^5 + 7 \cdot 3^5 - 3^5 + 2 \cdot 3^5 = (1 + 7 - 1 + 2) \cdot 3^5 = 9 \cdot 3^5 = 3^2 \cdot 3^5 = 3^7$

2. Να γράψετε τις παραστάσεις σε μορφή μιας δύναμης:

(α) $(5^4)^2$ (β) $\left(\left(-\frac{3}{7}\right)^4\right)^7$ (γ) 125^4

Λύση:

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων:

(α) $(5^4)^2 = 5^{4 \cdot 2} = 5^8$

(β) $\left(\left(-\frac{3}{7}\right)^4\right)^7 = \left(-\frac{3}{7}\right)^{4 \cdot 7} = \left(-\frac{3}{7}\right)^{28}$

(γ) $125^4 = (5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4} = 5^{12}$ *Γράφουμε το $125 = 5^3$*

3. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{10} \cdot 5^{10}$ (β) $\frac{(6^2)^4}{(-2)^6 \cdot (-3)^6}$

Λύση:

Για να υπολογίσουμε πιο εύκολα το αποτέλεσμα κάθε παράστασης, εφαρμόζουμε ιδιότητες των δυνάμεων:

(α) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{10} \cdot 5^{10} = \left(-\frac{1}{5} \cdot 5\right)^{10}$
$= (-1)^{10}$
$= +1$

Αφού, ισχύει
$\alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} = (\alpha \cdot \beta)^{\nu}$

(β) $\frac{(6^2)^4}{(-2)^6 \cdot (-3)^6} = \frac{(6^2)^4}{[(-2) \cdot (-3)]^6}$
$= \frac{6^8}{(+6)^6}$
$= 6^8 : 6^6$
$= 6^{8-6}$
$= 6^2$
$= 36$

Αφού, ισχύει
$\alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} = (\alpha \cdot \beta)^{\nu}$

και

$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω σχέσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

(α)	$(-2)^5 + (-2)^3 = (-2)^8$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$(-5)^7 : (-5)^3 = (-5)^4$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$5^{10} : 3^2 = 5^8$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$2^3 \cdot 5^2 = 10^5$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	$3^7 : 9 = 3^5$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων, να γράψετε τις παραστάσεις υπό μορφή μιας δύναμης:

(α)	$5^3 \cdot 5^6$	(β)	$y^4 : y$
(γ)	$(-7)^5 : (-7)^3$	(δ)	$\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5$
(ε)	$(0{,}1)^9 \cdot (0{,}1)^2 \cdot (0{,}1)^2$	(στ)	$(-2)^4 \cdot (-2)^2 : (-2)^3$
(ζ)	$(11^5 : 11^2) \cdot 11^3$	(η)	$5^3 \cdot (5^6 : 5^4)$
(θ)	$(\alpha^5 \cdot \alpha \cdot \alpha^4) : \alpha^9$	(ι)	$(\beta^{15} : \beta^3) \cdot (\beta^7 : \beta^6)$

3. Το pH ενός διαλύματος περιγράφει την οξύτητά του. Για κάθε μονάδα που μειώνεται το pH σε ένα διάλυμα, αυξάνεται η οξύτητά του κατά 10 φορές. Το pH του αποσταγμένου νερού είναι 7, ενώ το pH του χυμού λεμονιού είναι 3. Να βρείτε πόσο πιο οξύ είναι ο χυμός λεμονιού από το νερό.

4. Να συμπληρώσετε τα κενά με τον κατάλληλο εκθέτη, ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

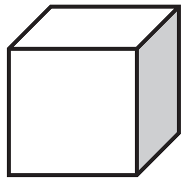
(α)	$2^4 \cdot 2^{10} = 2^{\square}$	(β)	$(+2)^{12} \cdot (+2)^{\square} = (+2)^{20}$
(γ)	$2^{\square} : 2^3 = 2^7$	(δ)	$7^3 \cdot 7 = 7^{\square} : 7^2$
(ε)	$(-2)^{\square} \cdot (-2)^{\square} = (-2)^{10}$	(στ)	$(-3{,}1)^4 : (-3{,}1)^{\square} = -3{,}1$
(ζ)	$(-3)^2 \cdot (-3)^{\square} \cdot (-3) = (-3)^8$	(η)	$\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 : \left(\frac{1}{5}\right)^{\square} = \left(\frac{1}{5}\right)$
(θ)	$(+2)^3 \cdot (+2)^{\square} = 16$	(ι)	$5^{\square} : 5^3 = 25$

5. Σε έναν υπολογιστή υπάρχουν κάποια μολυσμένα αρχεία. Ο συγκεκριμένος ιός τριπλασιάζει καθημερινά τα μολυσμένα αρχεία. Αν σήμερα το πλήθος των μολυσμένων αρχείων είναι 3^7, ποιο ήταν το πλήθος των μολυσμένων αρχείων πριν από 4 μέρες;

6. Να γράψετε τις παραστάσεις, με τη βοήθεια των ιδιοτήτων, υπό μορφή μιας δύναμης ή γινόμενου δυνάμεων.

(α)	$(3^2)^3$	(β)	$(\alpha^3)^2$
(γ)	$(x^2 \cdot x^3)^4$	(δ)	$\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right)^4$
(ε)	$(2a^2)^3$	(στ)	$(\alpha^4)^2 \cdot (\alpha^2)^3$
(ζ)	$(x \cdot y^4)^7$	(η)	$(a^2 \cdot \beta^5)^3$

7. Να εκφράσετε το εμβαδόν της έδρας ενός κύβου και τον όγκο του σε μορφή δύναμης ή δυνάμεων, όταν δίνεται η ακμή:



(α) $7\ cm$ (β) $(\alpha^5\beta^2\ )\ cm$

(γ) Να περιγράψετε πώς επηρεάζεται ο όγκος ενός κύβου, όταν:
   i. διπλασιαστεί η ακμή του,
   ii. τριπλασιαστεί η ακμή του.

8. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $\frac{20^3}{5^3}$ (β) $(-2)^5 \cdot (-5)^5$

(γ) $\frac{(-6)^5}{12^5}$ (δ) $\frac{(+2)^8 \cdot (+5)^8}{1000}$

(ε) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2014} \cdot 3^{2014}$ (στ) $\frac{(-8)^3 \cdot 3^3}{(-6)^3}$

9. Να γράψετε τις παραστάσεις σε μορφή μιας δύναμης:

(α) $25 \cdot 5^3$ (β) $4 \cdot 16 \cdot (+2)^7$

(γ) $9^2 \cdot (+3)^3 \cdot 27$ (δ) $(-3)^5 \cdot (+3)^6$

(ε) $(-2)^3 \cdot (+2)^4$ (στ) $(-7)^5 \cdot (+7)^2 \cdot (-7)^4$

(ζ) $(-8) \cdot 16 \cdot 4$ (η) $(-3) \cdot 9 \cdot (-27)$

10. Να γράψετε τις παραστάσεις σε μορφή μιας δύναμης:

(α) $2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3$

(β) $3 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^3 - 7^3$

(γ) $2^7 : 2^2 + 2 \cdot 2^4 + 7 \cdot 2^5 - 2^2 \cdot 2^3$

(δ) $3^{12} : 3^4 + (3^4)^2 + 2 \cdot 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^2 - 3^8$

11. Να γράψετε τις παραστάσεις σε μορφή δυνάμεων, αν $\alpha = 3^2 \cdot (-7)^5$, $\beta = 2^3 \cdot 3 \cdot (-7)^3$ και $\gamma = 2^2 \cdot (-7)$,

(α) $\alpha \cdot \beta$

(β) $\frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma}$

(γ) $(\alpha \cdot \beta)^2 : \gamma^3$

12. Να βρείτε την τιμή του x, για να ισχύουν οι πιο κάτω ισότητες:

(α) $2^{x-1} = 2^8$ (β) $25^{x+1} = 5^6$

Δυνάμεις Ρητών με Ακέραιο Εκθέτη

Διερεύνηση (1)

Το Ινστιτούτο Γενετικής συμμετέχει σε ένα ερευνητικό πρόγραμμα στο οποίο μελετούν την εξέλιξη ενός είδους βακτηριδίων. Παρατηρούν ότι κάθε μέρα ο όγκος της καλλιέργειας περίπου διπλασιάζεται. Στις 19 Σεπτεμβρίου ένας γενετιστής άρχισε να παρατηρεί και να καταγράφει τις μετρήσεις στον πιο κάτω πίνακα.

Ημερομηνία	Όγκος καλλιέργειας σε κ.μ.	Δύναμη
⋮		
17 Σεπτεμβρίου		
18 Σεπτεμβρίου		
19 Σεπτεμβρίου	1	2^0
20 Σεπτεμβρίου		
21 Σεπτεμβρίου		
22 Σεπτεμβρίου		
22 Σεπτεμβρίου		
23 Σεπτεμβρίου		
24 Σεπτεμβρίου		
25 Σεπτεμβρίου		
26 Σεπτεμβρίου		
⋮		

- ✓ Αν στις 19 Σεπτεμβρίου ο όγκος της καλλιέργειας ήταν 1 $\kappa.\mu.$, να βρείτε πόσος θα είναι ο όγκος στις 21 του Σεπτέμβρη.

- ✓ Να υπολογίσετε πότε ο όγκος θα γίνει 128 $\kappa.\mu.$.

- ✓ Να υπολογίσετε πόσος ήταν ο όγκος της καλλιέργειας στις 17 Σεπτεμβρίου που ξεκίνησε η έρευνα.

Διερεύνηση (2)

Ο Νικόλας και η Αριάνα έχουν να κάνουν τη διαίρεση, $7^3 : 7^6 =$ ... Η άσκηση ζητά να γράψουν την παράσταση σε μορφή μιας δύναμης. Αφού τελείωσαν την άσκηση, έλεγξαν το αποτέλεσμα και διαπίστωσαν ότι έχουν βρει την απάντηση με διαφορετικό τρόπο.

Αριάνα:

$$7^3 : 7^6 = 7^{3-6} = 7^{-3}$$

Αφού έχω διαίρεση δυνάμεων με την ίδια βάση, η ιδιότητα λέει ότι αφαιρώ τους εκθέτες.

Νικόλας:

$$7^3 : 7^6 = \frac{7^3}{7^6} = \frac{\cancel{7\cdot 7\cdot 7}}{\cancel{7\cdot 7\cdot 7}\cdot 7\cdot 7\cdot 7} = \frac{1}{7\cdot 7\cdot 7} = \frac{1}{7^3}$$

Αλλά ισχύει, $\frac{1}{7^3} = \frac{1^3}{7^3} = \left(\frac{1}{7}\right)^3$

Άρα, $7^3 : 7^6 = \left(\frac{1}{7}\right)^3$

✓ Να εξετάσετε τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκαν και την ορθότητα του συλλογισμού τους.

Μαθαίνω

- Η παράσταση $\alpha^{-\nu}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}$, δεν προκύπτει από τον ορισμό της δύναμης.
  Ορίζεται: $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$, όπου $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha \neq 0$.

Παραδείγματα:

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

$\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3} = (-4)^3 = -64$

Παρατήρηση:
Το 0^0 δεν ορίζεται.

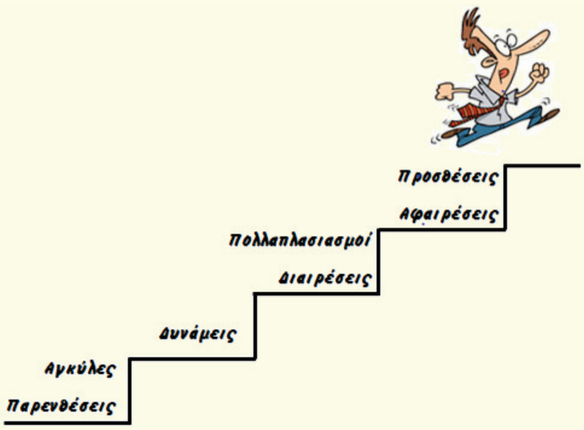
Οι **ιδιότητες** των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό αριθμό, που είδαμε προηγουμένως, ισχύουν και στις περιπτώσεις που ο εκθέτης των δυνάμεων είναι οποιοσδήποτε **ακέραιος αριθμός**.

- Μια δύναμη με **ακέραιο εκθέτη** είναι ίση με τη δύναμη που έχει ως βάση τον **αντίστροφο** της αρχικής βάσης και ως εκθέτη τον **αντίθετο** του αρχικού εκθέτη.

  Δηλαδή, $\boldsymbol{\alpha^{-\mu}} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}}\right)^{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha^{\mu}}}$ όπου $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\alpha \neq 0$

  Παραδείγματα:
  $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3^2}$ *και* $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^3$

- Στις αριθμητικές παραστάσεις με δυνάμεις ρητών αριθμών εφαρμόζουμε τους κανόνες προτεραιότητας πράξεων που έχουμε ήδη μάθει.



Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:
   (α) 10^{-3} (β) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}$

   Λύση:
   Μετατρέπουμε τις δυνάμεις σε δυνάμεις με θετικό εκθέτη:
   (α) $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$

   (β) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = +\frac{25}{4}$

2. Να γράψετε τις παραστάσεις υπό μορφή μιας δύναμης:
   (α) $2^2 \cdot 2^{-3} : 2^2$
   (β) $(-7)^2 : (-7)^{-3}$
   (γ) $(-2)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot (-2)^{-1} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

Λύση:

(α) $2^2 \cdot 2^{-3} : 2^2 = 2^{2+(-3)} : 2^2 = 2^{-1} : 2^2 = 2^{-1-2} = 2^{-3}$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα του γινομένου δυνάμεων με την ίδια βάση και ακολούθως την ιδιότητα του πηλίκου δυνάμεων με την ίδια βάση.

(β) $(-7)^2 : (-7)^{-3} = (-7)^{2-(-3)} = (-7)^{2+3} = (-7)^5$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα του πηλίκου δυνάμεων με την ίδια βάση.

(γ) *Μετατρέπουμε τις δυνάμεις με την* ***<u>ίδια βάση</u>*** *και εφαρμόζουμε τις ιδιότητες.*

$$(-2)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot (-2)^{-1} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = (-2)^3 \cdot (-2)^4 \cdot (-2)^{-1} : (-2)^3$$
$$= (-2)^{3+4+(-1)} : (-2)^3$$
$$= (-2)^6 : (-2)^3$$
$$= (-2)^{6-3}$$
$$= (-2)^{6-3}$$
$$= (-2)^3$$

3. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $(-2)^{-3} - (8-9)^{-9} + \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$

(β) $(-2)^{10} : (-2)^7 - (-3)^3 + (+1)^{99}$

Λύση:

(α) *Για να υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης πρέπει να εφαρμόσουμε τους* ***κανόνες προτεραιότητας*** *των πράξεων. Υπολογίζουμε αρχικά το αποτέλεσμα της παρένθεσης.*

$$(-2)^{-3} - (8-9)^{-9} + \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$$
$$= (-2)^{-3} - (-1)^{-9} + \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - (-1)^9 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2$$
$$= -\frac{1}{8} - (-1) + \left(+\frac{9}{4}\right)$$
$$= -\frac{1}{8} + 1 + \frac{18}{8}$$
$$= +1\frac{17}{8}$$
$$= +3\frac{1}{8}$$

Μετατρέπουμε τις δυνάμεις με αρνητικό εκθέτη σε δυνάμεις με θετικό εκθέτη και ακολούθως τις υπολογίζουμε.

(β) *Στην άσκηση αυτή είναι πιο εύκολο να εφαρμόσουμε αρχικά την ιδιότητα του πηλίκου δυνάμεων με την ίδια βάση και ακολούθως να υπολογίσουμε τις δυνάμεις.*

$(-2)^{10} : (-2)^{7} - (-3)^3 + (+1)^{99}$	$= (-2)^3 - (-3)^3 + (+1)^{99}$
Υπολογίζουμε τις δυνάμεις.	$= (-8) - (-27) + (+1)$
	$= -8 + 27 + 1$
Εκτελούμε την πρόσθεση και την αφαίρεση.	$= -8 + 28$
	$= +20$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

(α) 3^{-3} (β) 1^{-5}

(γ) $(-5)^{-2}$ (δ) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$

(ε) $(2\alpha)^{-3}$ (στ) $[(-2)^2]^{-2}$

2. Ο Χριστόφορος έκανε τις πράξεις όπως φαίνεται δίπλα. Να εξετάσετε την ορθότητα των πράξεών του.

(α) $(-2)^3 = -8$

(β) $(+2)^{-3} = -8$

(γ) $(-1)^{-3} = +3$

(δ) $-2^2 = +4$

(ε) $-3 \cdot (-2)^2 = (+6)^2 = 36$

3. Να επιλέξετε τρία κλάσματα μεταξύ του 0 και του 1. Να βρείτε την τιμή του κάθε κλάσματος, όταν υψωθεί σε δύναμη με εκθέτη -1. Ποια είναι η σχέση μεταξύ του αρχικού κλάσματος και του κλάσματος υψωμένου στην -1.

4. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

(α) 4^{-2} και $(-4)^2$ (β) 8^8 και 16^6

(γ) 2^8 και 3^8 (δ) 2^{-8} και 3^{-8}

5. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $-3 \cdot (-3)^{-2}$

(β) $6 - (-2 + 1)^{-5}$

(γ) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} + 3^2 - (-1)^{-3} + \left(+\frac{1}{2}\right)^{-3}$

(δ) $(-3)^5 : (-3)^7 + (-2)^{-3} + 5^0$

(ε) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} - (-2)^2 - (-5)^2 : \left(+2\frac{1}{2}\right) - (-3)^2$

6. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$$A = (-1)^{-1} + (-1)^{-2} + (-1)^{-3} + \cdots + (-1)^{-2017} + (-1)^{-2018}$$

7. Αν $x = -2$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{8x^{-3}+2^x}{x+1}$

8. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $=$ ή $\neq$, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

(α) $(-1756)^0$ …… $(-1)^{-8}$ (β) $(-1)^{99}$ …….. $(+1)^{-99}$

(γ) $x^{11} : x^{-3}$ …… x^8, $x \neq 0$ (δ) $\frac{15^5}{5^5}$ ……… $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$

9. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις ως δυνάμεις με βάση το 3:

(α) 9 (β) 1 (γ) 27^2

(δ) $\frac{1}{81}$ (ε) $(-3)^4$ (στ) $\frac{1}{9^3}$

10. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση για τις πιο κάτω προτάσεις:

(α) Ο αριθμός 4 ΔΕΝ μπορεί να γραφεί ως:

Α. $(+2)^2$ Β. $(-4)^{-1}$ Γ. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ Δ. $(-2)^2$

(β) Αν $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 1$, ποια από τις ακόλουθες αριθμητικές παραστάσεις ΔΕΝ ισούται με τις υπόλοιπες;

Α. $\alpha^2 \cdot \alpha^4$ Β. $\alpha^6 : \alpha$ Γ. $\alpha \cdot \alpha^3 : \alpha^{-2}$ Δ. $(\alpha^3)^2$

11. Να γράψετε σε μορφή δύναμης με μη αρνητικό εκθέτη τα πιο κάτω:

(α) $5^4 : 5^8$ (β) $5^{-3} \cdot 5^6$

(γ) $6^7 : 6^{-2}$ (δ) $\alpha^{-3} : \alpha^2$

(ε) $\frac{5^4}{5^{-3}}$ (στ) $\frac{7^6}{7^{14}}$

(ζ) $(-5)\cdot(-5)^4 : (-5)^{-3}$ (η) $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-12}$

(θ) $\frac{1}{9} \cdot 3^3$ (ι) $(+2)^3 \cdot \left(+\frac{1}{2}\right)^4$

(ια) $2^{-8} \cdot 8^3 \cdot 16$ (ιβ) $(-3)^{-4} \cdot (-3)^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$

12. Να υπολογίσετε την τιμή του x, ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω ισότητες:

(α) $(-3)^{-5} \cdot (-3)^x = (-3)^8$ (β) $(-0{,}2)^7 \cdot (-0{,}2)^x = (-0{,}2)^{-5}$

(γ) $\left(\frac{2}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{5}{2}$ (δ) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^4$

Τετραγωνική και Κυβική Ρίζα Αριθμού

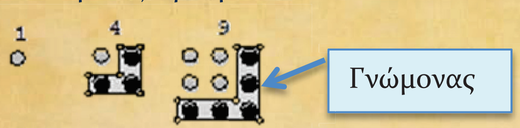
Εξερεύνηση

Οι Αρχαίοι Έλληνες ασχολήθηκαν με τη μελέτη των αριθμών. Οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποιούσαν χαλίκια τα οποία διέτασσαν με διάφορους τρόπους, για να εξετάσουν τις ιδιότητες των αριθμών. Τις διατάξεις αυτές τις αναπαριστούσαν με κουκκίδες.
Η μελέτη των διάφορων τρόπων διάταξης των αριθμών οδήγησε στην ταξινόμηση των αριθμών σε πολλές κατηγορίες: άρτιους, περιττούς, τρίγωνους, τετράγωνους, τέλειους, φίλους κ.λπ.

- ✓ Να αναπαραστήσετε σχηματικά τους πέντε πρώτους τετράγωνους αριθμούς.
- ✓ Πόσοι τετράγωνοι αριθμοί υπάρχουν μέχρι το 100;
- ✓ Να εξετάσετε αν ο αριθμός 169 είναι τετράγωνος αριθμός.
- ✓ Να εξηγήσετε πώς μπορούμε να εξετάζουμε αν ένας αριθμός είναι τετράγωνος.

Οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν ότι:

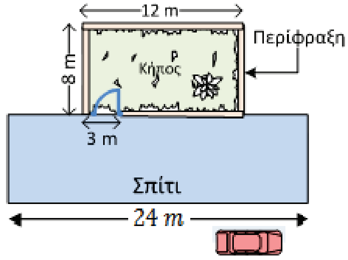
- Κάθε **τετράγωνος** αριθμός σχηματίζεται από τον προηγούμενο με πρόσθεση ενός «γνώμονα».



- Κάθε **τετράγωνος** αριθμός ν^2 είναι ίσος με το άθροισμα των ν πρώτων περιττών αριθμών.
  Παράδειγμα: $5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

Διερεύνηση (1)

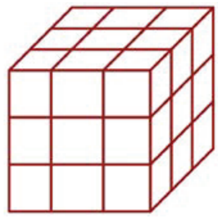
Η οικογένεια Αντωνίου έχει έναν κήπο στο πίσω μέρος του σπιτιού και θέλει να τον επεκτείνει. Ο κήπος που έχει σήμερα η οικογένεια είναι σχήματος ορθογωνίου με μήκος $12\ m$ και πλάτος $8\ m$. Ο νέος κήπος που θέλει να κατασκευάσει θα πρέπει να έχει εμβαδόν $225\ m^2$, να έχει σχήμα τετράγωνο ή ορθογώνιο και το μήκος των πλευρών του να είναι ακέραιοι αριθμοί μικρότεροι από το μήκος του σπιτιού.



- ✓ Ποιες είναι οι διαστάσεις του νέου κήπου και τι σχήμα θα έχει;

Διερεύνηση (2)

Στο σχήμα δίνεται ένας κύβος, ο οποίος κατασκευάστηκε χρησιμοποιώντας 27 μικρότερους κύβους ακμής $1\ cm$.



- ✓ Να υπολογίσετε το μήκος της ακμής του μεγάλου κύβου.
- ✓ Να σχεδιάσετε πώς θα είναι ο κύβος με 64 μικρούς κύβους.
- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο μπορεί να κατασκευαστεί κύβος με 216 μικρούς κύβους.
- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο μπορεί να κατασκευαστεί ένας κύβος με 300 και ένας άλλος με 343 μικρούς κύβους *(Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την υπολογιστική σας).*

Μαθαίνω

- **Τετραγωνική ρίζα** μη αρνητικού αριθμού α ($\alpha \geq 0$), λέγεται ο μη αρνητικός αριθμός β, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α.
  Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$. Το α ονομάζεται υπόριζο και το σύμβολο $\sqrt{\ }$ ονομάζεται ριζικό.

  ριζικό $\longrightarrow \sqrt{\alpha} \longleftarrow$ υπόριζο

$$\sqrt{\alpha} = \beta \quad \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha \text{ , όπου } \alpha \geq 0 \text{ , } \beta \geq 0$$

Παραδείγματα:

$\sqrt{169} = 13,$ γιατί $13^2 = 169$

$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2},$ γιατί $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$\sqrt{0{,}25} = 0{,}5\ ,$ γιατί $(0{,}5)^2 = 0{,}25$

Παρατήρηση:
Η τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού δεν ορίζεται, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός.

Στην υπολογιστική αριθμομηχανή υπάρχει το πλήκτρο

$\sqrt{x}$

για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας.

Προσοχή!
$(-9)^2 = 81$, αλλά $\sqrt{81} \neq -9$

Στην υπολογιστική αριθμομηχανή υπάρχει το πλήκτρο

$\sqrt[3]{x}$

για τον υπολογισμό της κυβικής ρίζας.

- Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας έχουμε:
  - $\sqrt{\boldsymbol{a}^2} = |\boldsymbol{a}|$.

    Παραδείγματα:

    $\sqrt{3^2} = |3| = 3$ *και* $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

  - Αν $a \geq 0$, *τότε* $(\sqrt{\boldsymbol{a}})^2 = \boldsymbol{a}$

    Παράδειγμα:

    $(\sqrt{4})^2 = 4$

- **Κυβική ή τρίτη ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α, λέγεται ο μη αρνητικός αριθμός β, ο οποίος, όταν υψωθεί στην τρίτη δύναμη, δίνει τον αριθμό α. Η κυβική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt[3]{\alpha}$.

$$\sqrt[3]{\alpha} = \beta \quad \Leftrightarrow \beta^3 = \alpha \,, \acute{o}\pi o\upsilon \; \alpha \geq 0 \,, \beta \geq 0$$

Παράδειγμα:

$\sqrt[3]{8} = 2$ *γιατί* $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$ *γιατί* $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

$\sqrt[3]{0{,}064} = 0{,}4$ *γιατί* $(0{,}4)^3 = 0{,}064$

- Από τον ορισμό της κυβικής ρίζας έχουμε:
  - Αν $a \geq 0$, *τότε* $(\sqrt[3]{\boldsymbol{a}})^3 = \boldsymbol{a}$

    Παράδειγμα:

    $(\sqrt[3]{8})^3 = 8$

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

   (α) $\sqrt{36}$ (β) $\sqrt{121}$

   (γ) $\sqrt{0{,}36}$

Λύση:

Ψάχνουμε να βρούμε τον μη αρνητικό αριθμό που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, να είναι ίσος με τον αριθμό αυτό.

(α) $\sqrt{36} = 6$ *γιατί* $6^2 = 36$

(β) $\sqrt{121} = 11$ *γιατί* $11^2 = 121$

(γ) $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$ *γιατί* $0{,}6^2 = 0{,}36$

2. Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

(α) $\sqrt[3]{1}$ (β) $\sqrt[3]{64}$

(γ) $\sqrt[3]{0{,}001}$

Λύση:

Ψάχνουμε να βρούμε τον αριθμό που όταν υψωθεί στον κύβο δίνει αποτέλεσμα ίσο με τον αριθμό αυτό.

(α) $\sqrt[3]{1} = 1$ *γιατί* $1^3 = 1$

(β) $\sqrt[3]{64} = 4$ *γιατί* $4^3 = 64$

(γ) $\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$ *γιατί* $0{,}1^3 = 0{,}001$

3. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $\sqrt{8\sqrt{4}}$.

Λύση:

Αρχικά υπολογίζουμε την $\sqrt{4} = 2$. *Ακολούθως υπολογίζουμε την τιμή της παράστασης* $\sqrt{8\sqrt{4}} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

(α)	$\sqrt{64}$	(β)	$\sqrt{25}$	(γ)	$\sqrt[3]{8}$
(δ)	$\sqrt{0{,}36}$	(ε)	$\sqrt[3]{343}$	(στ)	$\sqrt{2{,}25}$
(ζ)	$-\sqrt{0{,}09}$	(η)	$\sqrt{0{,}0001}$	(θ)	$\sqrt{0{,}16}$
(ι)	$-\sqrt{\frac{1}{64}}$	(ια)	$\sqrt{\frac{4}{9}}$	(ιβ)	$-\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$

2. Η οργανωτική επιτροπή μιας συναυλίας θέλει να τοποθετήσει 900 καθίσματα σε ένα κλειστό γήπεδο. Τα καθίσματα θα τοποθετηθούν σε τετράγωνη διάταξη. Πόσα καθίσματα θα τοποθετήσουν σε κάθε σειρά;

3. Να βρείτε την ακμή κύβου που έχει όγκο 216 mm^3.

4. Να εξετάσετε την ορθότητα καθεμιάς από τις απαντήσεις που έδωσε η Λίζα στις πιο κάτω παραστάσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(α) $\sqrt{36} = -6$ (β) $\sqrt{25} = 5$

(γ) $\sqrt{(-3)^2} = -3$ (δ) $\sqrt[3]{64} = -4$

(ε) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ (στ) $\sqrt{-64} = -8$

5. Να υπολογίσετε την τιμή των παρατάσεων:

(α) $\sqrt{13^2}$ (β) $\sqrt{(-11)^2}$

(γ) $\sqrt{26 \cdot 26}$ (δ) $\sqrt[3]{8 \cdot 8 \cdot 8}$

(ε) $\left(\sqrt[3]{19+8}\right)^3$ (στ) $\sqrt{(-3)^2} + \sqrt{(-9)^2}$

(ζ) $\left(\sqrt{2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}}\right)^2$ (η) $\sqrt[3]{3^6}$

6. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

(α) $\sqrt{16} = 8$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β) $\sqrt{16+9} = 5$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ) $-\sqrt[3]{8} = -2$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ) $\left(\sqrt{36}\right)^2 = 36$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε) $\sqrt{(-3)^2} = 3$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

7. Να υπολογίσετε την περίμετρο ενός τετραγώνου του οποίου το εμβαδόν είναι:
(α) $49\ cm^2$ (β) $81\ cm^2$ (γ) $121\ cm^2$

8. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $\sqrt{50+50}$ (β) $-\sqrt{4} + 2\sqrt{16}$

(γ) $\sqrt{3\sqrt{9}}$ (δ) $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{8}}$

(ε) $\sqrt[3]{1+3+4}$ (στ) $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{8}}{2} + \sqrt{64}}$

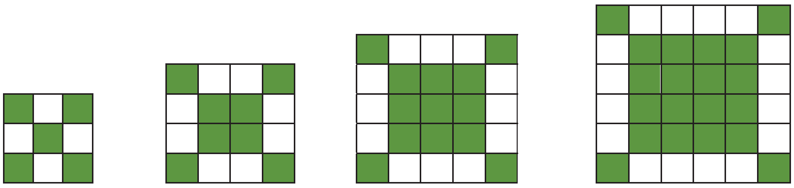
9. Να δείξετε ότι:

(α) $\sqrt[3]{8} = \sqrt{4}$ (β) $\sqrt{(-3+4)^{12}} = \sqrt[3]{(9-2^3)}$

10. Η πυραμίδα του Χέοπα είναι η μεγαλύτερη στον κόσμο. Η βάση της πυραμίδας είναι τετράγωνη με εμβαδόν 52 900 m^2. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς της βάσης της πυραμίδας.

Η Μεγάλη Πυραμίδα της Γκίζα ή η Πυραμίδα του Χέοπα, είναι το αρχαιότερο σωζόμενο μνημείο από τα επτά θαύματα του αρχαίου κόσμου.
Για την αποπεράτωσή της χρειάστηκαν 30 χρόνια δουλειάς από 100 000 εργάτες-δούλους, πολλοί από τους οποίους πέθαναν κατά τη διάρκεια κατασκευής της.

11. Να βρείτε τον αριθμό των σκιασμένων τετραγώνων σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα του μοτίβου:



Ποιο σχήμα θα έχει 173 σκιασμένα τετράγωνα;

12. Να βρείτε την τιμή του x, όπου $x > 0$, έτσι ώστε να ισχύει η πιο κάτω ισότητα:

$$\sqrt{x + \sqrt{16 + \sqrt{92 - \sqrt{121}}}} = 4$$

Ιδιότητες Ριζών

Διερεύνηση (1)

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha+\beta}$
16	9								
25	16								
4	36								

- ✓ Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των στηλών $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ και $\sqrt{\alpha\beta}$. Τι παρατηρείτε;
- ✓ Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των στηλών $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ και $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$. Τι παρατηρείτε;
- ✓ Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των στηλών $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ και $\sqrt{\alpha+\beta}$. Τι παρατηρείτε;
- ✓ Να εξετάσετε τι ισχύει και για τις παραστάσεις $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ και $\sqrt{\alpha-\beta}$.

Να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας.

- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο ισχύουν οι πιο πάνω ιδιότητες και για τις κυβικές ρίζες.

Μαθαίνω

■ **Ιδιότητες Ριζών**

➢ **Τετραγωνική ρίζα**

i. $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}, \qquad \alpha,\ \beta \geq 0.$

ii. $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}, \qquad \alpha \geq 0,\ \beta > 0.$

➢ **Κυβική ρίζα**

iii. $\sqrt[3]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\beta}\,, \qquad \alpha, \beta \geq 0.$

iv. $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}}, \qquad \alpha \geq 0,\ \beta > 0.$

Απόδειξη Ιδιότητας(i):

Με δεδομένο ότι $\sqrt{\alpha\beta} \geq 0$ και $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} \geq 0$, υψώνουμε το κάθε μέλος της (i) στο τετράγωνο.

$A_\mu^2 = \left(\sqrt{\alpha \cdot \beta}\right)^2 = \alpha \cdot \beta\,,$ με $\alpha, \beta \geq 0$.

$B_\mu^2 = \left(\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{\beta}\right)^2 = \alpha \cdot \beta\,,$ με $\alpha, \beta \geq 0$.

Άρα, έχουμε ότι $A_\mu^2 = B_\mu^2$. Επομένως, $A_\mu = B_\mu$

$$\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}\,, \quad \text{με} \quad \alpha, \beta \geq 0.$$

Απόδειξη ιδιότητας (ii):

Με δεδομένο ότι $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \geq 0$ και $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \geq 0$, υψώνουμε το κάθε μέλος της (ii) στο τετράγωνο.

$A_\mu^2 = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2 = \frac{\alpha}{\beta}\,,$ με $\alpha \geq 0,\ \beta > 0$

$B_\mu^2 = \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{\beta}\right)^2} = \frac{\alpha}{\beta}\,,$ με $\alpha \geq 0,\ \beta > 0$

Άρα, έχουμε ότι $A_\mu^2 = B_\mu^2$. Επομένως, $A_\mu = B_\mu$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,, \quad \text{με} \quad \alpha \geq 0,\ \beta > 0.$$

Σημείωση:
Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε τις ιδιότητες (iii) και (iv) υψώνοντας και τα δύο μέλη στην τρίτη δύναμη.

Για δύο θετικούς αριθμούς A και B και $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:
Αν $A^\nu = B^\nu$ τότε $A = B$.

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt{\frac{144}{81}}$ (β) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$

(γ) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ (δ) $\sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3}$

Λύση:

(α) *Για να υπολογίσουμε τη ρίζα του πηλίκου των δύο αριθμών, υπολογίζουμε αρχικά την κάθε ρίζα και ακολούθως το πηλίκο τους. Δηλαδή,*

$$\sqrt{\frac{144}{81}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{81}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

(β) *Για να υπολογίσουμε το γινόμενο των δύο ριζών, υπολογίζουμε τη ρίζα του γινομένου των δύο θετικών αριθμών. Δηλαδή,*

$$\sqrt{18}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{18\cdot 2} = \sqrt{36} = 6$$

(γ) *Για να υπολογίσουμε το πηλίκο των δύο ριζών, υπολογίζουμε τη ρίζα του πηλίκου των δυο θετικών αριθμών.*

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

(δ) *Για να υπολογίσουμε το πηλίκο των δύο κυβικών ριζών, μπορούμε να υπολογίσουμε την κυβική ρίζα του πηλίκου των δυο αριθμών.*

$$\sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3} = \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

2. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $3\sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{7}$ (β) $\sqrt{5}(2 - 4\sqrt{5})$

(γ) $\left(2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16}\right) : \sqrt[3]{2}$ (δ) $(2 - 3\sqrt{2})(5 + \sqrt{2})$

Λύση:

(α) $3\sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{7} = 2\sqrt{7} + \sqrt{5}$ *Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων*

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα και ακολούθως εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των ριζών.

(β) $\sqrt{5}\left(2-4\sqrt{5}\right)=2\sqrt{5}-4\sqrt{5}\sqrt{5}$

$$=2\sqrt{5}-4\cdot 5$$
$$=2\sqrt{5}-20$$

(γ) $\left(4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}\,\right):\ \sqrt[3]{2}=\frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}+\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

$$=4+\sqrt[3]{\frac{16}{2}}$$
$$=4+\sqrt[3]{8}$$
$$=4+2$$
$$=6$$

(δ) $\left(2-3\sqrt{2}\right)\left(5+\sqrt{2}\right)=10+2\sqrt{2}-15\sqrt{2}+3\sqrt{2}\sqrt{2}$

$$=10-13\sqrt{2}+3\cdot 2$$
$$=10-13\sqrt{2}+6$$
$$=16-13\sqrt{2}$$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	$\sqrt{4\alpha^2}=2\alpha,\ \alpha>0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$\sqrt{36+\beta^2}=6+\beta,\ \beta>0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{36}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\sqrt{\frac{7}{\gamma^2}}=\frac{7}{\gamma},\ \gamma>0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Να γράψετε τις πιο κάτω παραστάσεις στην πιο απλή μορφή:

(α) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}$ (β) $14\sqrt{5}+\sqrt{2}-2\sqrt{5}$

(γ) $3+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}$ (δ) $\sqrt{10}+\sqrt{10}+\sqrt[3]{10}$

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $\sqrt{44} : \sqrt{11} + \sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ (β) $14 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

(γ) $32 + \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$ (δ) $(3\sqrt{10})(5\sqrt{10})$

(ε) $(3\sqrt{27}) : (\sqrt{3})$ (στ) $\frac{\sqrt{8}}{3} \cdot \frac{9}{\sqrt{2}}$

(ζ) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{27}}{\sqrt{2}}$ (η) $\frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32}}{\sqrt{64}}$

4. Να αντιστοιχίσετε κάθε αριθμό της πρώτης στήλης με τον ίσο αριθμό της δεύτερης στήλης.

$1^{η}$ Στήλη	$2^{η}$ Στήλη
i. $\sqrt{25 \cdot 6}$	Α. $6\sqrt{5}$
ii. $\sqrt{\frac{36}{5}}$	Β. $\frac{\sqrt{5}}{6}$
iii. $\sqrt{36 \cdot 5}$	Γ. $\frac{6}{\sqrt{5}}$
iv. $\sqrt{\frac{5}{36}}$	Δ. $5\sqrt{6}$

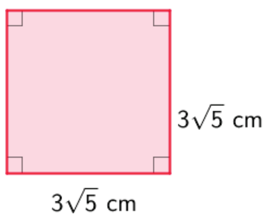
5. Αν $\alpha = 9$ και $\beta = 16$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

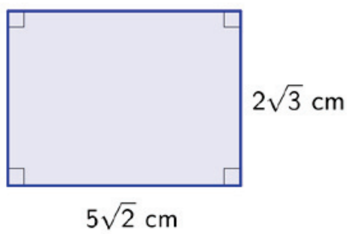
$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$$

$$B = \sqrt{\beta + \alpha} - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\Gamma = \sqrt{16 - \sqrt{\alpha} - \sqrt{9\beta}}$$

6. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο των πιο κάτω σχημάτων:





7. Να συγκρίνετε το εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρά μήκους $\sqrt{\alpha}$ με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $\sqrt{\frac{\alpha}{8}}$ και $\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$.

8. Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $\sqrt{2}\cdot(\sqrt{8}+\sqrt{32})$ (β) $\left(\sqrt{27}-\sqrt{48}\right):\sqrt{3}$

(γ) $\left(2-\sqrt{2}\right)(\sqrt{2}+3)$ (δ) $\left(3-\sqrt{10}\,\right)\left(3+\sqrt{10}\right)$

9. Για να εκτιμήσει η αστυνομία την ταχύτητα (σε km/h) ενός τύπου οχήματος τη στιγμή που πατά τα φρένα ο οδηγός, χρησιμοποιεί τον τύπο: $u=16\sqrt{\frac{d}{0{,}25}}$, όπου d το μήκος (σε m) του αποτυπώματος των λαστίχων στην άσφαλτο.

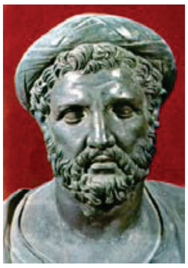
(α) Να εκτιμήσετε την ταχύτητα ενός αυτοκινήτου του οποίου τα λάστιχα άφησαν αποτυπώματα μήκους:

i. $4\ m$
ii. $9\ m$
iii. $25\ m$

(β) Ένας αστυνομικός για να υπολογίζει πιο γρήγορα την ταχύτητα έχει μετασχηματίσει τον τύπο ως εξής: $\mathrm{u}=\frac{16\sqrt{\mathrm{d}}}{0{,}5}$. Να εξετάσετε την ορθότητα του συλλογισμού του.

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Εξερεύνηση

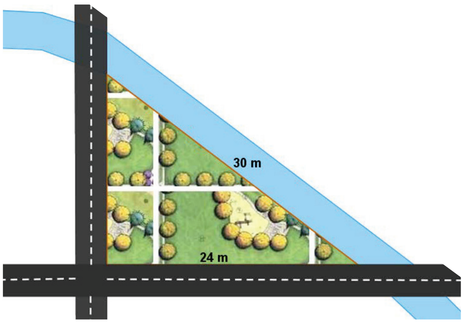


Στην εικόνα φαίνεται το γραμματόσημο της Ελληνικής Δημοκρατίας που εκδόθηκε στις 20 Αυγούστου του 1955 με την ευκαιρία του συνεδρίου για τον Πυθαγόρα. Σε αυτό απεικονίζεται ένα τρίγωνο και τρία τετράγωνα.

✓ Να εξετάσετε τη σχέση μεταξύ των εμβαδών των τριών τετραγώνων.

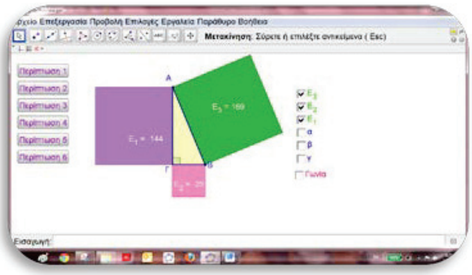
Ο Πυθαγόρας (572 – 497 π.Χ.) υπήρξε σημαντικός Έλληνας φιλόσοφος, μαθηματικός, γεωμέτρης, θεωρητικός της μουσικής και ιδρυτής της πυθαγόρειας σχολής.
Θεωρείται ο κατεξοχήν θεμελιωτής των ελληνικών μαθηματικών. Ήταν ο Έλληνας φιλόσοφος ο οποίος απόδειξε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και ο πρώτος που ανακάλυψε τα μουσικά διαστήματα από μία χορδή. Η γνώση του για το Πυθαγόρειο Θεώρημα οδήγησε στην ανακάλυψη νέων αριθμών που ήταν άγνωστοι μέχρι τότε.

Διερεύνηση (1)



Στην πλατεία του Δήμου έγινε ψες μια συγκέντρωση των φίλων του Συνδέσμου Προστασίας των Ζώων. Την επόμενη μέρα ένας δημοσιογράφος έγραψε στο άρθρο του πως στη συγκέντρωση παραβρέθηκαν περισσότεροι από 1500 δημότες. Η συγκεκριμένη πλατεία έχει σχήμα ορθογώνιου τριγώνου με πλευρές $24\,m$ και $30\,m$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

✓ Με δεδομένο ότι σε ένα τετραγωνικό μέτρο μπορούν να σταθούν όρθιοι το πολύ 5 άνθρωποι, πώς θα μπορούσατε να εξετάσετε τον ισχυρισμό του δημοσιογράφου; Ποια στοιχεία έχετε και ποια άλλα χρειάζονται;



Μπορείτε να διερευνήσετε τη σχέση που συνδέει τις τρεις πλευρές του τριγώνου με το εφαρμογίδιο «B_En_2_Pythagorio.ggb», ή ακολουθώντας τις πιο κάτω οδηγίες.

<u>Βήμα 1:</u> Να κατασκευάσετε δύο κάθετες ευθείες ε_1 και ε_2 που να τέμνονται σε σημείο A.
<u>Βήμα 2:</u> Να κατασκευάσετε τρίγωνο $AB\Gamma$ με το σημείο B στην ε_1 και το σημείο Γ στην ε_2. Στη συνέχεια να αποκρύψετε τις δύο ευθείες.
<u>Βήμα 3:</u> Να βρείτε το μήκος των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$.
<u>Βήμα 4:</u> Να κατασκευάσετε τρία τετράγωνα, έξω από το τρίγωνο, με πλευρές τις $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.
<u>Βήμα 5:</u> Να βρείτε το εμβαδόν των τετραγώνων.

✍ Να συμπληρώσετε τον πινάκα, για διαφορετικές περιπτώσεις ορθογώνιων τριγώνων και να βρείτε μια σχέση που να συνδέει τα τρία εμβαδά των τετραγώνων.

ΑΒ	ΑΓ	ΒΓ	E_1	E_2	E_3

✍ Ποια σχέση συνδέει τις τρεις πλευρές του ορθογώνιου τριγώνου;

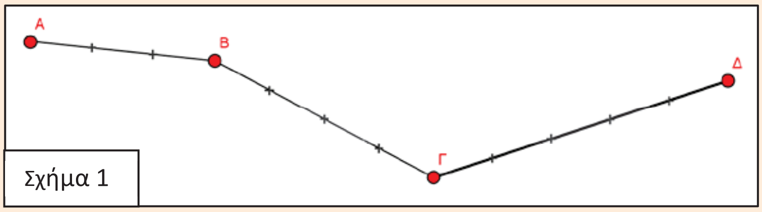
✍ Να μετακινήσετε τις κορυφές του τριγώνου A, B, Γ για να εξετάσετε κατά πόσο η σχέση που έχετε ανακαλύψει εξακολουθεί να ισχύει για οποιοδήποτε ορθογώνιο τρίγωνο.

✍ Να εξετάσετε αν η σχέση που έχετε βρει ισχύει και για άλλα είδη τριγώνων.

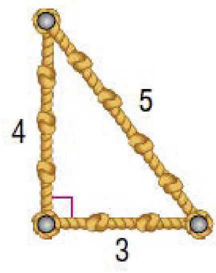
✓ Να εξετάσετε αν είναι τελικά αληθής ο ισχυρισμός του δημοσιογράφου.

Διερεύνηση (2)

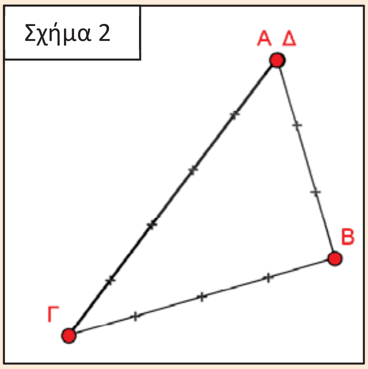
Στην Αρχαία Αίγυπτο, η διαδικασία επαναπροσδιορισμού των ορίων των χωραφιών μετά την πλημμύρα του Νείλου, γινόταν με ένα όργανο που ονομαζόταν αρπεδόνη. Η αρπεδόνη ήταν ένα σχοινί με 13 κόμβους σε καθορισμένες θέσεις που χώριζαν το σκοινί σε 12 ίσα τμήματα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1



Οι αρπεδονάπτες, οι ειδικοί που χρησιμοποιούσαν την αρπεδόνη και είχαν τον ρόλο του τοπογράφου της εποχής, κάρφωναν τα δύο πρώτα καρφιά στις θέσεις A και B ώστε το σχοινί AB να είναι τεντωμένο. Στη συνέχεια μετακινούσαν το $Δ$, ώστε να ταυτιστεί με το A και στη συνέχεια μετακινούσαν το $Γ$ ώστε να τεντώσουν τα τμήματα $BΓ$ και $ΓΔ$ (όπως φαίνεται στο Σχήμα 2).



Σχήμα 2

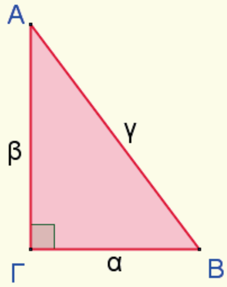
- ✓ Γιατί νομίζετε ότι το τρίγωνο που κατασκεύαζαν με τον τρόπο αυτό είναι ορθογώνιο, με ορθή τη γωνία στην κορυφή B;

Μαθαίνω

- **Πυθαγόρειο Θεώρημα (Π.Θ.)**
Σε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του.

Παράδειγμα:
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{Γ} = 90°$) με υποτείνουσα τη $γ$ και κάθετες πλευρές τις $α$ και $β$ ισχύει:

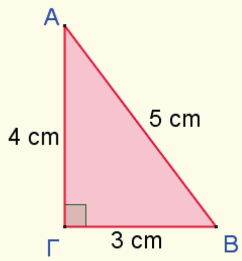
$$α^2 + β^2 = γ^2$$



- Επίσης ισχύει και το **αντίστροφο**. Δηλαδή, αν σε τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Παράδειγμα:
Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχει πλευρές $ΑΒ = 5\ cm$, $ΑΓ = 3\ cm$ και $ΒΓ = 4\ cm$ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία τη $\hat{Γ}$, γιατί ισχύει:

$$ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2$$
$$5^2 = 4^2 + 3^2$$



- **Πυθαγόρεια τριάδα** είναι μια τριάδα φυσικών αριθμών ($0 < α < β < γ$) που συνδέονται με τη σχέση $\boldsymbol{α^2 + β^2 = γ^2}$.

Παρατήρηση:
Οι αριθμοί $μ^2 - ν^2$, $2μ \cdot ν$ και $μ^2 + ν^2$ αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα όταν $μ, ν$ φυσικοί αριθμοί με $μ, ν \neq 0$ και $μ > ν$.

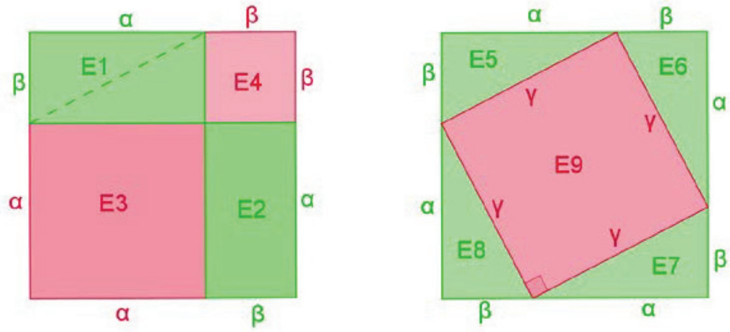
Παράδειγμα:
Αν $μ = 2$, $ν = 1$ έχουμε ότι:
$α = 2^2 - 1^2 = 3$,
$β = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$,
$γ = 2^2 + 1^2 = 5$.
Οι αριθμοί $3, 4, 5$ αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα.

Στην πιο πάνω πλάκα, η οποία χρονολογείται το 1900 $\pi.X.$, αναγράφονται μερικές Πυθαγόρειες τριάδες όπως:
1679 – 2400 – 2929.

Για το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουν δοθεί ίσως οι πιο πολλές διαφορετικές αποδείξεις που έχουν δοθεί για θεώρημα στα Μαθηματικά. Ο καθηγητής Elisha Scott Loomis (1852 – 1940) στο βιβλίο του "The Pythagorean Propositionσ" συγκέντρωσε 367 διαφορετικές αποδείξεις! Στις αποδείξεις αυτές συμπεριλαμβάνονται η απόδειξη που αποδίδεται στον Leonardo da Vinci (1452 – 1519), η απόδειξη του 20ου προέδρου των Η.Π.Α. James Abram Garfield (1831 – 1881) και φυσικά η απόδειξη που έδωσε ο μεγάλος μαθηματικός της αρχαιότητας και θεμελιωτής της Γεωμετρίας Ευκλείδης (~325 – 265 π.Χ.), που είναι και η αρχαιότερη γνωστή απόδειξη.
Σύμφωνα με την παράδοση, ο Πυθαγόρας, μόλις αποδείχθηκε το θεώρημα, πρόσφερε θυσίες στους θεούς θυσιάζοντας 100 βόδια! Γι' αυτό, το θεώρημα αυτό λέγεται και «Θεώρημα της Εκατόμβης».
Το θεώρημα, όπως αποδεικνύεται από ευρήματα, το γνώριζαν πριν από τον Πυθαγόρα διάφοροι αρχαίοι λαοί, όπως οι Ινδοί, οι Κινέζοι, οι Βαβυλώνιοι, οι Αιγύπτιοι κ.ά. Όμως, οι λαοί αυτοί, όπως φαίνεται, δεν είχαν ασχοληθεί με την απόδειξή του.

Απόδειξη:

Δίνεται τετράγωνο με πλευρά $(\alpha + \beta)$.



Το εμβαδόν (E) του τετραγώνου είναι:

1η περίπτωση:

$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$

$E = \alpha\beta + \alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2$

$E = 2\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2$

2η περίπτωση:

$E = E_5 + E_6 + E_7 + E_8 + E_9$

$E = \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\alpha\beta}{2} + \gamma^2$

$E = 2\alpha\beta + \gamma^2$

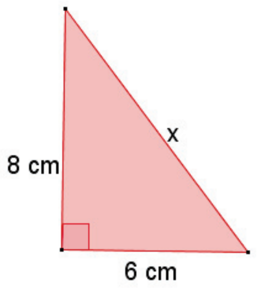
Άρα, ισχύει: $2\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta + \gamma^2$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$

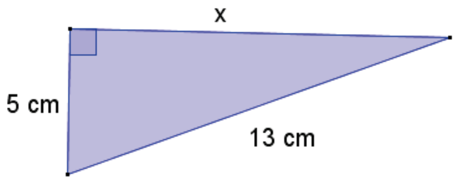
Παραδείγματα

1. Να βρεθεί το μήκος x σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις.

(α)



(β)



Λύση:

Τα τρίγωνα είναι ορθογώνια. Άρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα:

(α)
$$x^2 = 8^2 + 6^2$$
$$\Rightarrow\ x^2 = 64 + 36$$
$$\Rightarrow x^2 = 100$$
$$\Rightarrow\ x = \sqrt{100}$$
$$\Rightarrow\ x = 10\ cm$$

(β)
$$13^2 = x^2 + 5^2$$
$$\Rightarrow 169 = x^2 + 25$$
$$\Rightarrow x^2 = 169 - 25$$
$$\Rightarrow x^2 = 144$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{144}$$
$$\Rightarrow x = 12\ cm$$

Την εξίσωση $x^2 = 100$ επαληθεύουν δύο τιμές του x: $x = -10$ και $x = 10$. Επειδή το x είναι το μήκος της πλευράς του τριγώνου δεν μπορεί να είναι αρνητικό. Άρα, δεχόμαστε μόνο τη θετική τιμή.

2. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω τριάδες αριθμών είναι πυθαγόρειες.

(α) 3, 4, 5

(β) 1,5 , 2, 2,5

Λύση:

(α) *Οι αριθμοί 3,4,5 είναι φυσικοί αριθμοί με $3 < 4 < 5$. Άρα, θα πρέπει να ελέγξουμε κατά πόσο ικανοποιείται η ζητούμενη σχέση.*

Υπολογίζουμε το τετράγωνο του μεγαλύτερου φυσικού αριθμού: $5^2 = 25$ *και*

το άθροισμα των τετραγώνων των δύο μικρότερων αριθμών: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

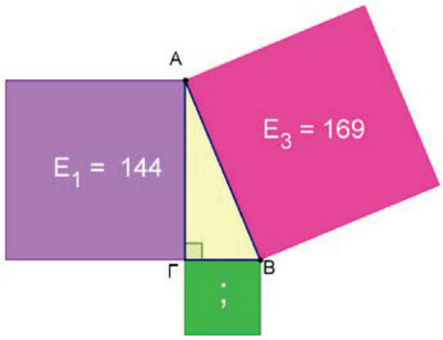
Ισχύει: $5^2 = 3^2 + 4^2$. *Άρα, ικανοποιείται η ζητούμενη σχέση, επομένως οι αριθμοί 3, 4, 5 αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα.*

(β) *Οι αριθμοί δεν είναι φυσικοί και επομένως δεν αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα.*

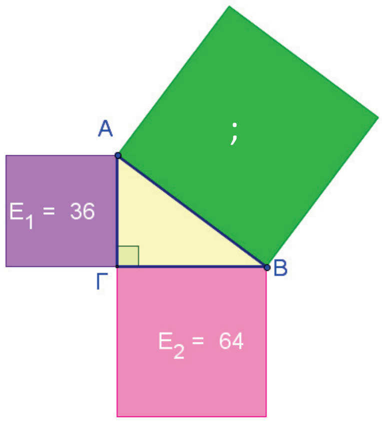
Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πράσινου τετραγώνου στα πιο κάτω σχήματα:

(α)

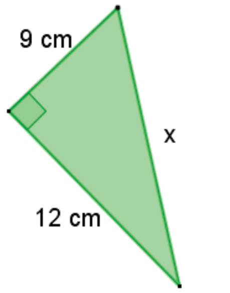


(β)

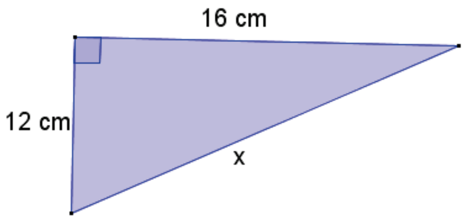


2. Να υπολογίσετε το μήκος x σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

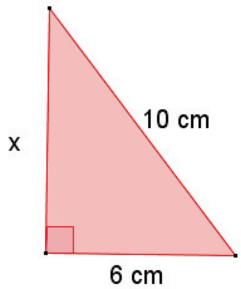
(α)



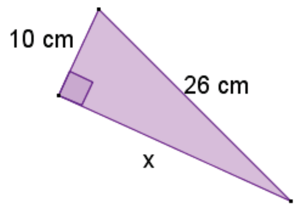
(β)

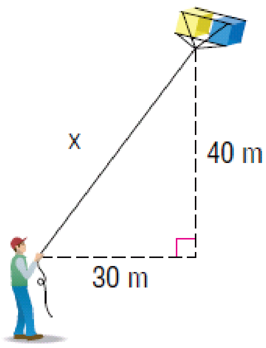


(γ)



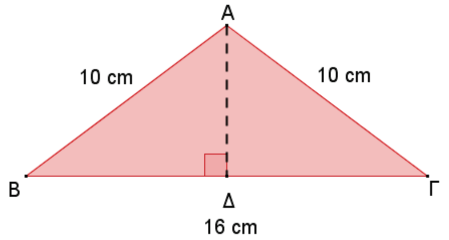
(δ)

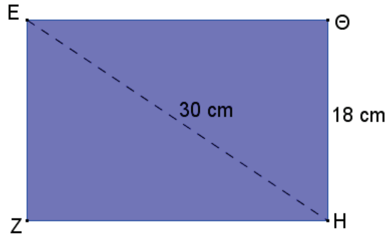




3. Να υπολογίσετε το μήκος του σχοινιού που χρησιμοποιεί ο Ανδρέας, για να πετάξει τον χαρταετό του.

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο των πιο κάτω σχημάτων:



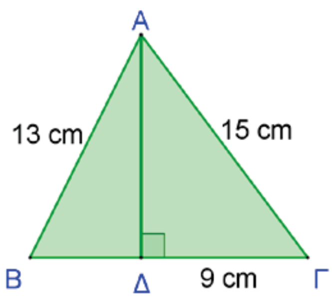


5. Να παραστήσετε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τα σημεία A, B, Γ και να εξετάσετε κατά πόσο το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις.
   (α) $A(3,0),\ B(6,0),\ \Gamma(3,4)$
   (β) $A(-3,-2),\ B(4,-2),\ \Gamma(-3,5)$

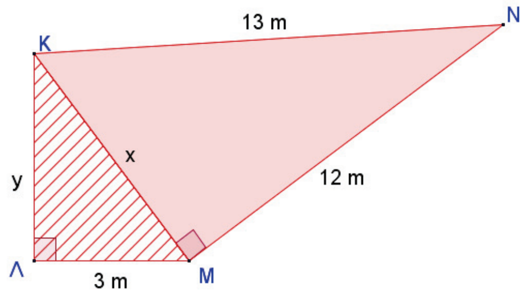
6. Ένας οικοδόμος, για να σχηματίσει ορθή γωνία, κόβει τρία ξύλα μήκους $3\,m,\ 4\,m$ και $5\,m$. Στη συνέχεια με αυτά σχηματίζει ένα τρίγωνο. Να εξηγήσετε γιατί είναι σίγουρος ότι έχει σχηματίσει ορθή γωνία.

7. Να εξετάσετε κατά πόσο το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις. Αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, να εντοπίσετε την ορθή γωνία.
   (α) $AB = 7\,m,\ B\Gamma = 24\,m,\ A\Gamma = 25\,m$
   (β) $AB = 2\,cm,\ B\Gamma = 2\,cm,\ A\Gamma = 4\,cm$

8. Στο πιο κάτω σχήμα $A\Gamma = 15\,m,\ AB = 13\,m$ και $\Delta\Gamma = 9\,m$. Να εξετάσετε κατά πόσο το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.



9. Να βρείτε τις τιμές των x και y στο πιο κάτω σχήμα δικαιολογώντας την απάντησή σας.



10. Ένα καλάμι μήκους $3\,m$ έσπασε και έπεσε στο έδαφος, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Το σημείο που έπεσε η κορυφή του απέχει $90\,cm$ από τη βάση του καλαμιού. Να βρείτε σε ποιο ύψος έσπασε το καλάμι.

Το διπλανό πρόβλημα είναι ένα αρχαίο κινέζικο πρόβλημα που γράφτηκε το 250 π.Χ. σε ένα κινέζικο βιβλίο Μαθηματικών, το ‘Chui-chang suanshu’.

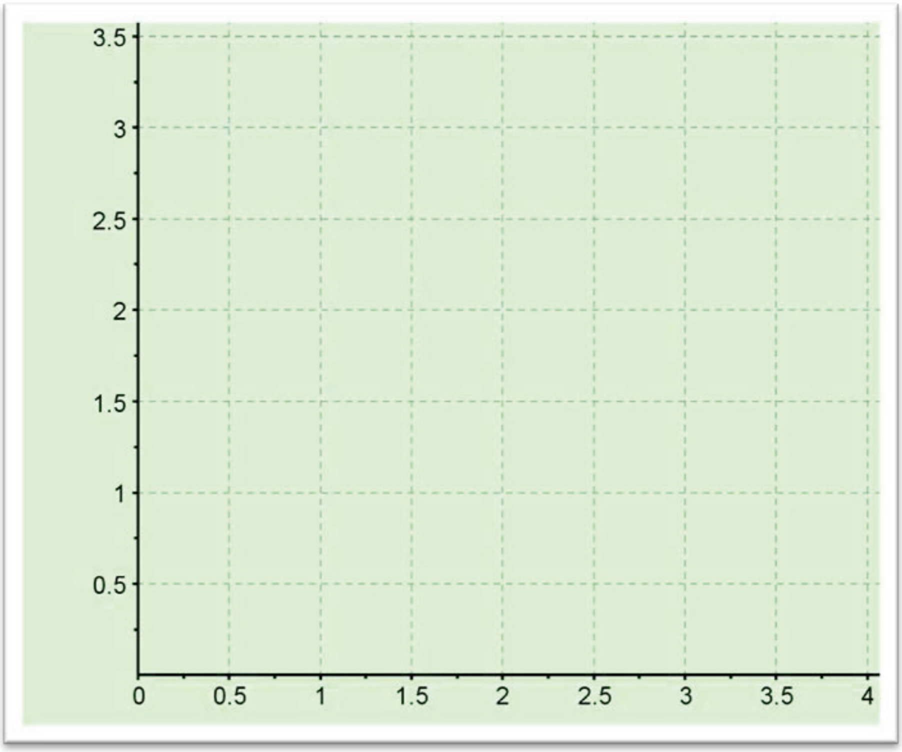
11. Να βρείτε τρεις διαφορετικές πυθαγόρειες τριάδες, χρησιμοποιώντας τους τύπους: $\alpha = \mu^2 - \nu^2$, $\beta = 2\mu \cdot \nu$ και $\gamma = \mu^2 + \nu^2$ όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ και $\mu > \nu$.

Πραγματικοί Αριθμοί

Διερεύνηση (1)

Να κατασκευάσετε, στο πιο κάτω τετραγωνισμένο χαρτί, τετράγωνα A, B, Γ, Δ και E με εμβαδόν:

- A: 0,25 $\tau.\mu.$
- B: 1 $\tau.\mu.$
- Γ: 2 $\tau.\mu.$
- E: 4 $\tau.\mu.$



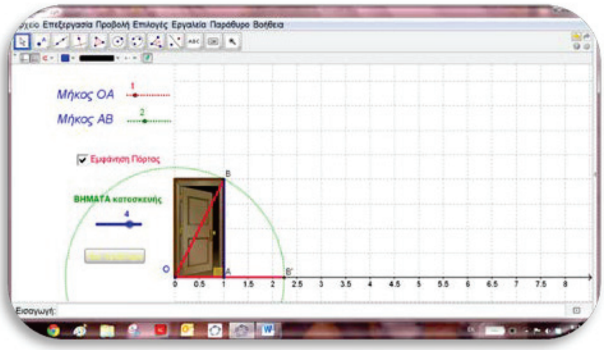
✓ Ποιο είναι το μήκος της πλευρά του κάθε τετραγώνου;

Διερεύνηση (2)

Η κυρία Νικολέττα παρήγγειλε έναν καθρέφτη σχήματος τετραγώνου πλευράς $2{,}10\,m$ για το σαλόνι της. Η πόρτα της εισόδου ενός σπιτιού έχει πλάτος $1\,m$ και ύψος $2\,m$.

- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο ο καθρέφτης είναι δυνατό να περάσει από την πόρτα της εισόδου. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μπορείτε να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο με το εφαρμογίδιο «B_En2_Arritoi.ggb».



- ✓ Να μετακινήσετε προς τα δεξιά τον δρομέα «ΒΗΜΑΤΑ Κατασκευής» και να κάνετε τις παρατηρήσεις σας.

- ✓ Πατώντας την εικόνα του φακού  να μεγεθύνετε το σημείο B' και να βρείτε το μήκος OB' .

- ✓ Να μεταβάλετε κατάλληλα τις διαστάσεις OA και OB, έτσι ώστε να κατασκευάσετε τους αριθμούς $\sqrt{2}\,, \sqrt{10}\,, \sqrt{8}$ και να βρείτε τη θέση τους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Μαθαίνω

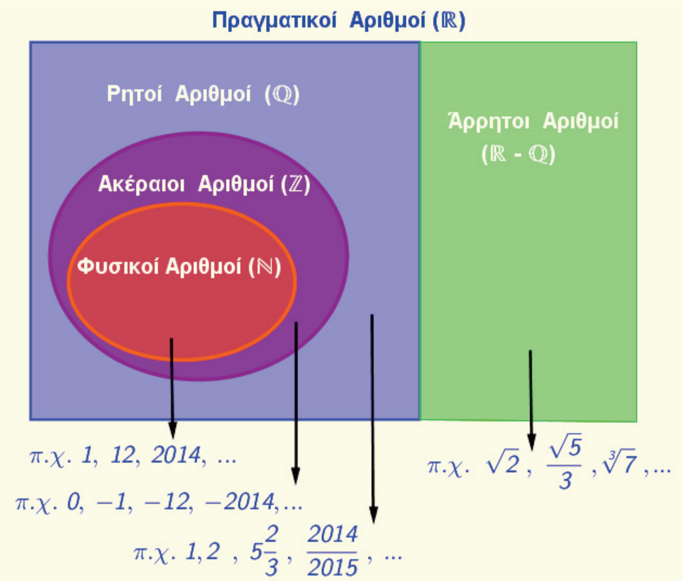
- Κάθε πραγματικός αριθμός που δεν είναι ρητός, ονομάζεται **άρρητος αριθμός**. Δηλαδή, ένας άρρητος αριθμός είναι ένας αριθμός ο οποίος δεν μπορεί να γραφεί ως λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α και β είναι ακέραιοι και ο $\beta \neq 0$.

  Παραδείγματα:
  $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$
  $\sqrt[3]{2} = 1{,}25992105\ldots$
  $-\sqrt{3} = -1{,}732050807\ldots$

Το σύνολο των **πραγματικών αριθμών** $\mathbb{R}$ σχηματίζεται από την ένωση των συνόλων των **ρητών** αριθμών **και** των **άρρητων** αριθμών.

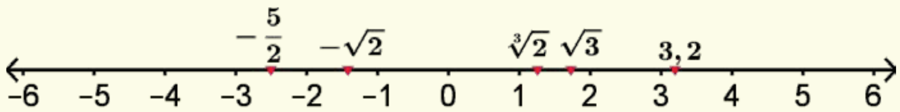
Παραδείγματα αριθμών που είναι άρρητοι:

- όλες οι τετραγωνικές ρίζες των αριθμών που δεν είναι τετράγωνοι $\sqrt{2}, \sqrt{3}, , \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \ldots$
- όλες οι κυβικές ρίζες αριθμών που δεν είναι κύβοι, $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{5}, \ldots$
- άλλοι αριθμοί όπως οι αριθμοί που συμβολίζονται με τα γράμματα π, e, φ



Τα σύνολα των **ρητών και** των **άρρητων** αριθμών είναι μεταξύ τους **ξένα.** Δηλαδή δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο.

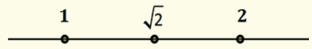
- Οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να παρασταθούν σε μια ευθεία την οποία ονομάζουμε **ευθεία ή άξονα των πραγματικών αριθμών.**



Μπορούμε να προσεγγίσουμε τους άρρητους αριθμούς με ρητούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας την ακόλουθη διαδικασία:

Παράδειγμα:

Για να προσεγγίσουμε τον αριθμό $x = \sqrt{2}$:



Ισχύει:

$1 < 2 < 4$.

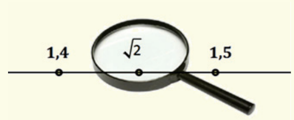
Άρα, $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$

$1 < \sqrt{2} < 2$

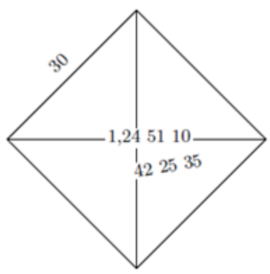
Ισχύει:

$1{,}96 = 1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2 = 2{,}25$.

Άρα, $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$



$\vdots$

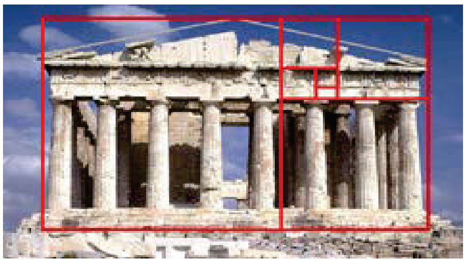


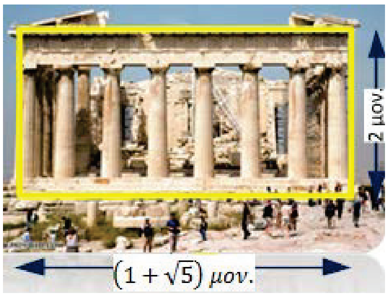
Η επιγραφή αργίλου με κωδικό «YBC 7289», που ανήκει στη βαβυλώνια συλλογή του Πανεπιστημίου του Yale και χρονολογείται μεταξύ $1800 - 1600$ π.Χ., αποδεικνύει ότι οι Βαβυλώνιοι ήξεραν να υπολογίζουν την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού με καταπληκτική ακρίβεια (την ίδια που έχει σήμερα μια υπολογιστική μηχανή).

Η διπλανή εικόνα δείχνει μια πλάκα η οποία χρονολογείται από το 1900 π.Χ. και είναι γραμμένη με σφηνοειδή γραφή. Πάνω στην πλάκα είναι σκαλισμένο ένα τετράγωνο με πλευρές μήκους 30. Στις διαγώνιές του υπάρχουν σκαλισμένα τα ψηφία $1,245110$ και $42,2535$. Η ανακάλυψη αυτή είναι μια ένδειξη ότι οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν για τους άρρητους αριθμούς από το 1900 π.Χ.

Παραδείγματα

1. Το ***χρυσό ορθογώνιο*** εμφανίζεται στην κατασκευή του Παρθενώνα. Το μήκος της μεγαλύτερης πλευράς του διαιρούμενο με το μήκος της μικρότερης πλευράς του είναι ίσο με $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Να υπολογίσετε την τιμή αυτή κατά προσέγγιση δεκάτου.





Λύση:

Αρχικά θα υπολογίσουμε τη $\sqrt{5}$.

Εξετάζουμε να βρούμε μεταξύ ποιων δύο τετράγωνων αριθμών βρίσκεται ο αριθμός 5.

1	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**...**

5

Ισχύει: $4 < 5 < 9$

Δηλαδή, $2^2 < 5 < 3^2$

Άρα, $2 < \sqrt{5} < 3$

Στη συνέχεια εξετάζουμε τους αριθμούς $(2{,}1)^2, (2{,}2)^2, \ldots, 3^2$.

Ελέγχουμε μεταξύ ποιων δύο αριθμών βρίσκεται ο αριθμός 5.

$\mathbf{2,1^2}$	$\mathbf{2,2^2}$	$\mathbf{2,3^2}$	$\mathbf{2,4^2}$	$\mathbf{2,5^2}$	$\mathbf{2,6^2}$	**...**
4,41	**4,84**	**5,29**	**5,76**	**6,25**	**6,76**	**...**

5

Ισχύει: $4{,}84 < 5 < 5{,}29$

Δηλαδή, $2{,}2^2 < 5 < 2{,}3^2$

Άρα, $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$

Άρα, $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ *η τετραγωνική ρίζα του 5 είναι ανάμεσα στο 2,2 και στο 2,3. Επειδή ο αριθμός 5 είναι πιο κοντά στο 4,84 παρά στο 5,29, η προσέγγιση σε δέκατα είναι 2,2.*

Άρα, $\sqrt{5} \cong 2{,}2$

Επομένως: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong \frac{1+2{,}2}{2} = \frac{3{,}2}{2} = 1{,}6$

Ο **χρυσός λόγος** ορίζεται ως το πηλίκο των θετικών αριθμών $\frac{\alpha}{\beta}$ όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ και είναι ίσο περίπου με 1,618.

Με βάση τον χρυσό λόγο δημιουργήθηκαν πολλά έργα της κλασικής εποχής, όπως ο Παρθενώνας, και της αναγεννησιακής εποχής, όπως είναι ζωγραφικά έργα του Λεονάρντο ντα Βίντσι. Ακόμη και σήμερα χρησιμοποιείται για την απόδοση της αρμονίας σε έργα, ή στην πλαστική χειρουργική.

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τους πιο κάτω αριθμούς με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων, χρησιμοποιώντας υπολογιστική μηχανή.
   (α) $\sqrt{7}$ (β) $\sqrt{3,5}$
   (γ) $\sqrt{125}$ (δ) $\sqrt[3]{3}$

2. Να εξετάσετε σε ποια σύνολα αριθμών ανήκει καθένας από τους πιο κάτω αριθμούς, συμπληρώνοντας με ✓ τις κατάλληλες στήλες:

Αριθμός	Φυσικός $\mathbb{N}$	Ακέραιος $\mathbb{Z}$	Ρητός $\mathbb{Q}$	Άρρητος $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$	Πραγματικός $\mathbb{R}$
13	✓	✓	✓		✓
$8,4$					
$\frac{3}{5}$					
$-\sqrt{25}$					
$\frac{24}{5}$					
$8,\overline{17}$					
$\sqrt{6}$					
$\sqrt[3]{5}$					
$-\sqrt[3]{7}$					
$\sqrt{36}$					
$\sqrt[3]{27}$					
$-\sqrt{20}$					
$0,44444$					
π					

3. Να προσεγγίσετε την τιμή των πιο κάτω άρρητων αριθμών με την πλησιέστερη ακέραια μονάδα:
   (α) $\sqrt{28}$ (β) $\sqrt{21}$ (γ) $\sqrt{52}$
   (δ) $\sqrt{135}$ (ε) $\sqrt{38,7}$ (στ) $\sqrt{79,2}$

4. Να βρείτε δύο αριθμούς α και β, έτσι ώστε να ισχύει:
   $7 < \sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta} < 8$

5. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $<, >, =$, ώστε οι σχέσεις που θα προκύψουν να είναι αληθείς:
   (α) $\sqrt{7}$ ... $\frac{8}{3}$ (β) $1,\bar{5}$ ... $\sqrt{2,25}$
   (γ) $\sqrt{17}$ ... $\sqrt[3]{17}$ (δ) $\sqrt{6,25}$ ... $\frac{5}{2}$

6. Να εξετάσετε κατά πόσο η πρόταση «Όλες οι τετραγωνικές ρίζες είναι άρρητοι αριθμοί» είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

7. Να τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:
   (α) $7,\quad 9,\quad \sqrt{50},\quad \sqrt{85}$

   (β) $\sqrt{91},\quad 7,\quad 5,\quad \sqrt{38}$

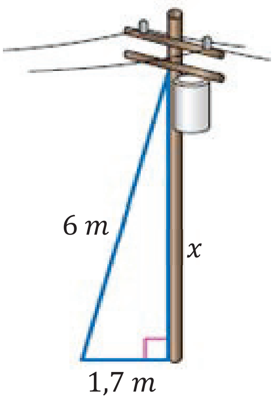
   (γ) $0{,}4\overline{7}\,,\quad 0{,}\overline{474}\,,\quad 0{,}\overline{47}\,,\quad \sqrt{0{,}23}$

8. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω ανισότητες, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

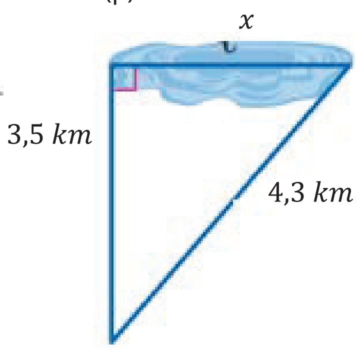
(α) $6 < \sqrt{7} < 8$	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β) $2 < \sqrt[3]{5} < 3$	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ) $3 < \sqrt{15} < 9$	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(δ) $\sqrt[3]{5} < \sqrt{5} < 5$	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ε) $3 < \sqrt[3]{29} < 4$	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

9. Να υπολογίσετε το μήκος x στις πιο κάτω περιπτώσεις κατά προσέγγιση δεκάτου:

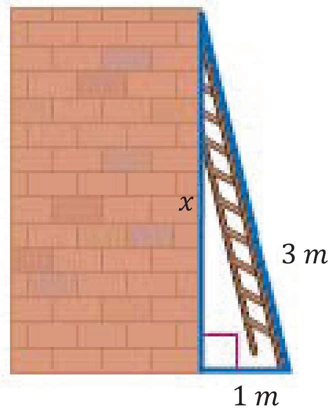
(α)



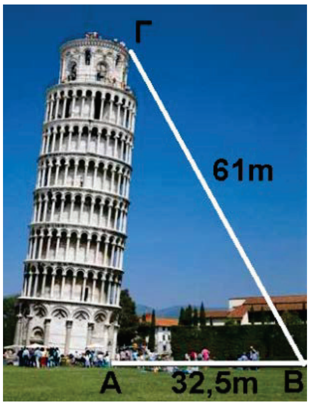
(β)



(γ)

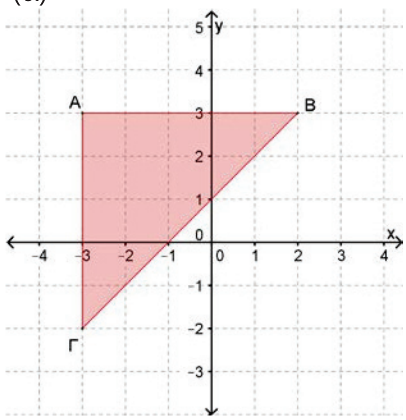


10. Να αποδείξετε ότι ο περίφημος πύργος της Πίζας που έχει ύψος 55 m, δεν είναι τοποθετημένος σε όρθια θέση.

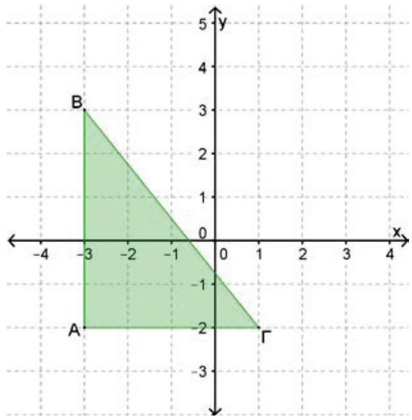


11. Να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας στο καθένα από τα πιο κάτω τρίγωνα:

(α)



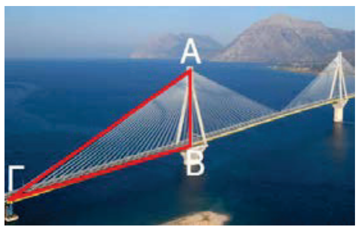
(β)



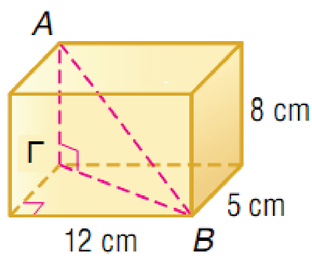
Όταν μια τηλεόραση χαρακτηρίζεται π.χ. 40 ιντσών σημαίνει ότι το μήκος της διαγωνίου της είναι 40 ίντζες και όχι το μήκος της πλευράς της!

12. Η τηλεόραση του πιο κάτω σχήματος έχει μήκος 20 $ίντσες$* και πλάτος 12 $ίντσες$*. Να υπολογίσετε τη διαγώνιο x κατά προσέγγιση ακεραίου *(*η ίντσα είναι μία άλλη μονάδα μέτρησης και μία ίντσα αντιστοιχεί με* $2{,}51\ cm$*)*.

13. Στη διπλανή φωτογραφία φαίνεται η γέφυρα που ενώνει το Ρίο με το Αντίρριο. Η γέφυρα στηρίζεται σε 5 πυλώνες. Από την κορυφή κάθε πυλώνα ξεκινούν καλώδια που καταλήγουν στο κατάστρωμα της γέφυρας. Αν το ύψος του πυλώνα AB είναι $100\ m$ και το μεγάλο καλώδιο $AΓ$ καταλήγει σε απόσταση $280\ m$ από τη βάση του πυλώνα, να υπολογίσετε το μήκος $AΓ$ του καλωδίου.



14. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα χάρτινο κιβώτιο με μήκος $12\ cm$, πλάτος $5\ cm$ και ύψος $8\ cm$. Να υπολογίσετε τη διαγώνιο AB κατά προσέγγιση ακεραίου.



Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω δυνάμεις:

(α) 3^{-2} (β) $(+1)^{-5}$

(γ) $(-2)^{-3}$ (δ) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}$

(ε) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}$ (στ) $-(-2)^{-3}$

(ζ) $(-6-1)^{-2}$ (η) $\left(+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2014}\right)^{3}$

(θ) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^{-2}$ (ι) $\frac{14^5}{7^5}$

2. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $<, >, =$, ώστε οι σχέσεις που θα προκύψουν να είναι αληθείς:

(α) $(-1)^{-2016}$ …… $(-2016)^0$ (β) $-(-5)^2$ …… $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-3}$

(γ) $(-2)^{-2009}$ …… $(+2)^{-2009}$ (δ) $2^2 : 4$ …… $4 \cdot 2^{-2}$

3. Να χρησιμοποιήσετε τις πληροφορίες του πίνακα για να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων *(χωρίς να κάνετε τις πράξεις)*:

(α) $81 \cdot 243$

(β) $19683 \cdot 9$

(γ) $6561 : 81$

(δ) $\frac{531441}{59049}$

(ε) $\frac{6561^2}{2187}$

(στ) Να βρείτε ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του αποτελέσματος της δύναμης 3^{2000}.

Δύναμη	Αποτέλεσμα
3^1	3
3^2	9
3^3	27
3^4	81
3^5	243
3^6	729
3^7	2187
3^8	6561
3^9	19683
3^{10}	59049
3^{11}	177147
3^{12}	531441

4. Να γράψετε 5 διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους θα μπορούμε να γράψουμε τον αριθμό *googol* 10^{100} σε μορφή δύναμης.

5. Να συμπληρώσετε τα κενά με τον κατάλληλο αριθμό, ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

(α) $(-2)^9 \cdot (-2) \cdot (-2)^{\square} = (-2)^{12}$ (β) $(3^2)^{\square} = 3^{-12}$

(γ) $(+5)^4 \cdot (+5) \cdot (+5)^{\square} = (+5)^{-1}$ (δ) $5^{\square} \cdot 5^3 : 5^6 = 1$

(ε) $(+2)^4 \cdot (+2)^{\square} = (+2)^{-8}$ (στ) $\frac{2^{14} \cdot 2^{\square}}{2^5 \cdot 2^6} = 2^5$

(ζ) $(-3)^4 \cdot (-3)^{\square} = \left(-\frac{1}{3}\right)^2$ (η) $\left(3^{\square} \cdot 3^2\right) : 3^{-4} = 3^8$

6. Να γράψετε σε μορφή δύναμης ή δυνάμεων τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $11 \cdot 11^{-3} \cdot 11^5$ (β) $5^6 \cdot 5 : 5^{-4}$

(γ) $25 \cdot (-5)^3$ (δ) $9 \cdot 3^{-4} \cdot 27$

(ε) $\frac{1}{8} \cdot 2^5$ (στ) $(-2)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{4}$

(ζ) $\frac{2^6 \cdot 3^6}{36}$ (η) $2^{10} \cdot \frac{40^3}{5^3}$

(θ) $9 \cdot 3^5 \cdot 27 + 3^6 : 3^{-4} + (3^5)^2$

(ι) $3^3 \cdot 27 + 2 \cdot 3^4 \cdot 3^2 + 7 \cdot \frac{3^8}{3^2} - (3^2)^3$

7. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $(-3)^{19} : (-3)^{17} - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 : \left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}$

(β) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} - \left(+\frac{1}{5}\right)^{-2} - 3^0 \cdot (7-8)^{21}$

(γ) $\frac{5^{12} \cdot (2^3 \cdot 5^2)^4}{(5^8 \cdot 2^4)^2}$

(δ) $\frac{(-2)^2 - (-2)^{14} : (-2)^{12}}{(-1)^{2009} - (-2+4)^3}$

8. Αν $\alpha = +2$, $\beta = -1$ και $\gamma = -\frac{1}{2}$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $3\alpha + 4(\alpha + \beta)^{-2}$

(β) $\alpha^{-3} - \beta^5 : \alpha^0 - \gamma^{-2}$

9. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\alpha+\beta$	$\alpha,\beta>0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$-\sqrt{9}=-3$		ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$\sqrt[3]{8}=\sqrt{4}$		ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν $\sqrt{x}=5$, τότε $x=10$		ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Οι αριθμοί $12,\ 9\ ,13$ αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα.		ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	$\sqrt{4\alpha}=2\cdot\sqrt{\alpha}$	$\alpha\geq 0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	$\sqrt[3]{\alpha^3\cdot\beta^3}=\alpha\cdot\beta$	$\alpha,\beta\geq 0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

10. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

(α) $\sqrt{64}$ (β) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ (γ) $\sqrt{1{,}21}$ (δ) $\sqrt{(-5)^2}$

(ε) $\sqrt[3]{125}$ (στ) $\sqrt[3]{5^3\cdot 2^3}$ (ζ) $\sqrt[3]{4\cdot\sqrt{4}}$ (η) $\sqrt[3]{0{,}027}$

11. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

(α) $A=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2$

(β) $B=\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt[3]{7}\right)^3-\sqrt{8^2}$

(γ) $\Gamma=\sqrt{20\sqrt[3]{125}}$

12. Αν $\alpha=2$, $\beta=4$ και $\gamma=9$, να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω αριθμοί είναι ρητοί ή άρρητοι.

(α) $\sqrt{\alpha}$ (β) $\sqrt[3]{\alpha^3+1}$

(γ) $\sqrt{\beta+\gamma}$ (δ) $\sqrt[3]{\beta-3}$

(ε) $\sqrt{\beta^2+\gamma}$ (στ) $\sqrt[3]{\beta^2+\gamma}$

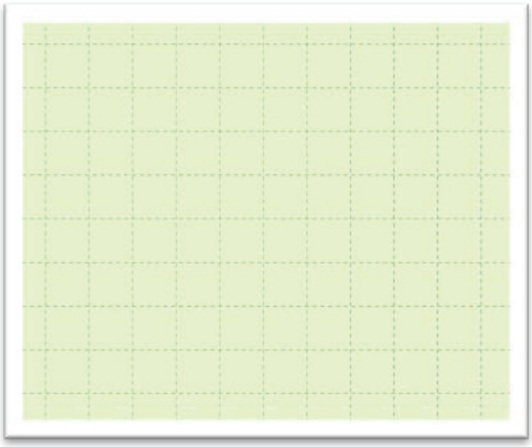
13. Να συμπληρώσετε με τα κατάλληλα σύμβολα $<,>,=$, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

(α) $\sqrt{5}$ __ $\sqrt{7}$ (β) $\sqrt{30}$ __ 6

(γ) $\sqrt[3]{8}$ __ $\sqrt{4}$ (δ) $\sqrt[3]{9}$ __ $\sqrt{9}$

(ε) $\sqrt[3]{28}$ __ $\sqrt{8}$ (στ) $\sqrt{5}$ __ $1{,}2$

14. Στο τετραγωνισμένο χαρτί να κατασκευάσετε τετράγωνα με:
    (α) εμβαδόν $8\ \tau.\mu.$
    (β) εμβαδόν $10\ \tau.\mu.$
    (γ) με διαγώνιο $4\ \mu.$

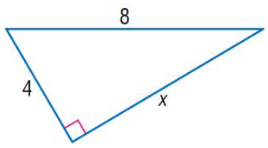


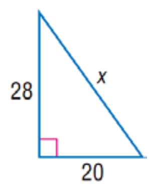
15. Να τοποθετήσετε σε αριθμητική γραμμή τους πιο κάτω αριθμούς:

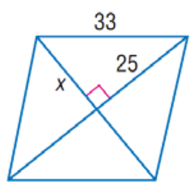
$$\sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{5} \qquad \sqrt[3]{8} \qquad \sqrt[3]{29} \qquad \sqrt{29}$$

16. Να βρείτε έναν ρητό και έναν άρρητο αριθμό μεταξύ των αριθμών 8 και 9.

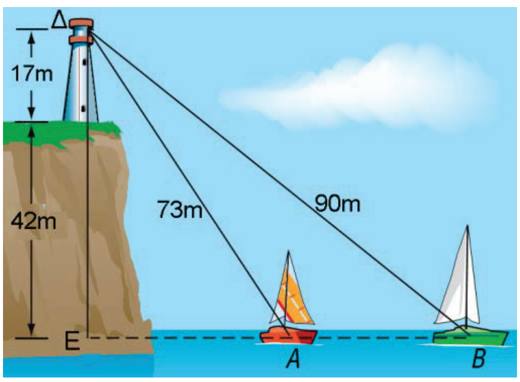
17. Να υπολογίσετε την τιμή του x σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α)


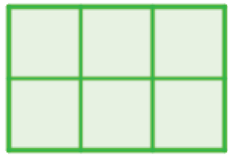
(β)


(γ)


18. Να υπολογίσετε κατά προσέγγιση ακεραίου την απόσταση που έχουν μεταξύ τους οι δύο βάρκες του σχήματος που βρίσκονται στις θέσεις A και B.

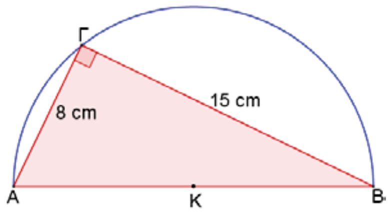


19. Το διπλανό ορθογώνιο αποτελείται από έξι ίσα τετράγωνα. Αν η διαγώνιος του κάθε τετραγώνου είναι ίση με $\sqrt{2}$, να βρείτε το μήκος της διαγωνίου του ορθογωνίου.

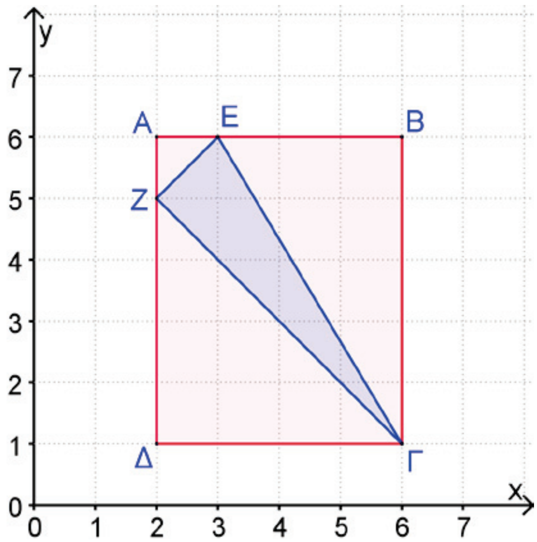


20. Αν οι κορυφές ενός τριγώνου βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου τότε το τρίγωνο ονομάζεται εγγεγραμμένο. Όλα τα τρίγωνα που είναι εγγεγραμμένα πάνω σε ημικύκλια είναι ορθογώνια τρίγωνα.

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο και ορθογώνιο. Αν $A\Gamma = 8\ cm$ και $B\Gamma = 15\ cm$, να βρείτε το μήκος του AB.



21. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ZE\Gamma$ στο πιο κάτω σχήμα είναι ορθογώνιο τρίγωνο με ορθή γωνία την $\hat{Z}$.



Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να γράψετε την παράσταση $A = 0{,}3^3 \cdot (0{,}01 \cdot 9)^4 \cdot \left(\frac{27}{1000}\right) \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2$ σε μορφή δύναμης.

2. Αν οι αριθμοί x, y είναι αντίστροφοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης:
$A = [\,(x^7y^{-2})^2 : (xy^7)^{-3}]^{2015}$

3. Να δείξετε τις πιο κάτω σχέσεις:
(α) $16^{50} = 2^{200}$
(β) $(-25)^{500} = 5^{1000}$
(γ) $\frac{(10+20+30+\cdots+90)^{2013}}{(1+2+3+\cdots+9)^{2013}} = 10^{2013}$

4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Γ αν:
$\mathrm{A} = 11 \cdot 12^7 + 12^4 \cdot 12 \cdot 12^2$ και
$\mathrm{B} = \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot 3^2 \cdot 3^6$ και
$\Gamma = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^7$

5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης, αν ο α είναι άρτιος αριθμός και ο β περιττός αριθμός:
$(-1)^{-\alpha} + (+1)^{-\beta} - (-1)^{\beta} + 1 + \alpha^{2011} + (-\alpha)^{2011}$

6. Αν ν φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός $2^{\nu} + 2^{\nu+1} + 2^{\nu+2}$ είναι πολλαπλάσιο του 7

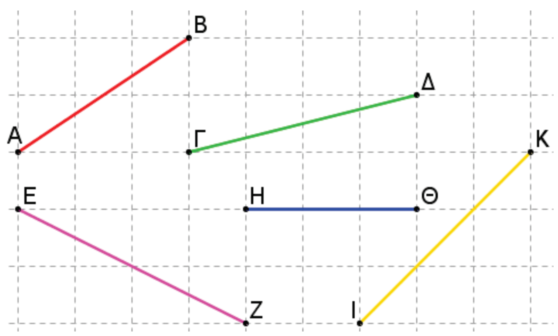
7. Να δείξετε ότι:
(α) $\sqrt{22 + \sqrt{7 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}} = 5$ (β) $\sqrt{\frac{\sqrt{4}}{2} + \sqrt{9}} = 2$

8. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ιδιότητες που αφορούν την κυβική ρίζα:
(α) $\sqrt[3]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0.$
(β) $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}}$, $\alpha \geq 0, \beta \geq 0\ \beta \neq 0.$

9. Να κατατάξετε κατά αύξουσα σειρά τους αριθμούς $\alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$ αν:
(α) $\alpha > 1$
(β) $\alpha = 1$
(γ) $0 < \alpha < 1$
(δ) $\alpha = 0$

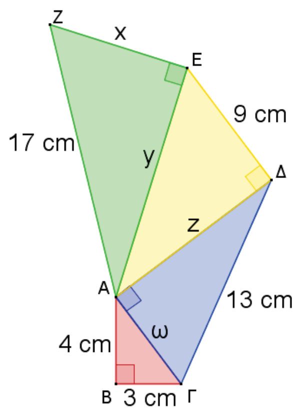
10 . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$, όπου α είναι το μήκος της πλευράς του τριγώνου. Στη συνέχεια να υπολογίσετε την πλευρά ισόπλευρου τριγώνου, αν το εμβαδόν του είναι ίσο με $16\sqrt{3}\ cm^2$.

11 . Να αντιστοιχίσετε κάθε ευθύγραμμο τμήμα με το αντίστοιχο μήκος του.



Ευθύγραμμο τμήμα	Μήκος
AB	$\sqrt{18}\ \mu.$
$\Gamma\Delta$	$3\ \mu.$
EZ	$\sqrt{13}\mu.$
$H\Theta$	$\sqrt{20}\ \mu.$
IK	$\sqrt{17}\ \mu.$
	$\sqrt{5}\ \mu.$
	$\sqrt{6}\ \mu.$

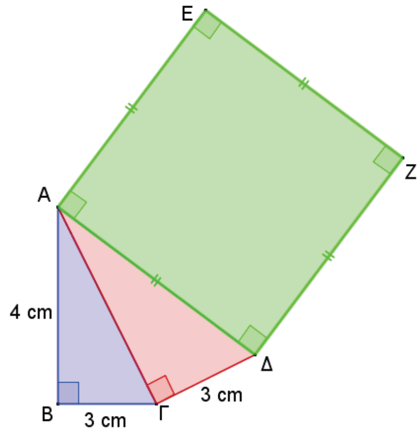
12 . Να υπολογίσετε την τιμή του x στο διπλανό σχήμα:



13 . Να εξετάσετε κατά πόσο καθεμιά από τις πιο κάτω παραστάσεις είναι άρρητος αριθμός, βάζοντας σε κύκλο τον κατάλληλο χαρακτηρισμό:

Αν $x \geq 0$ τότε:		Είναι άρρητος αριθμός
(α)	$\sqrt{x}$	ΠΟΤΕ / ΚΑΠΟΤΕ / ΠΑΝΤΟΤΕ
(β)	$\sqrt{x+4}$	ΠΟΤΕ / ΚΑΠΟΤΕ / ΠΑΝΤΟΤΕ
(γ)	$\sqrt[3]{x^3}$	ΠΟΤΕ / ΚΑΠΟΤΕ / ΠΑΝΤΟΤΕ
(δ)	$\frac{\sqrt{x}}{2}$	ΠΟΤΕ / ΚΑΠΟΤΕ / ΠΑΝΤΟΤΕ

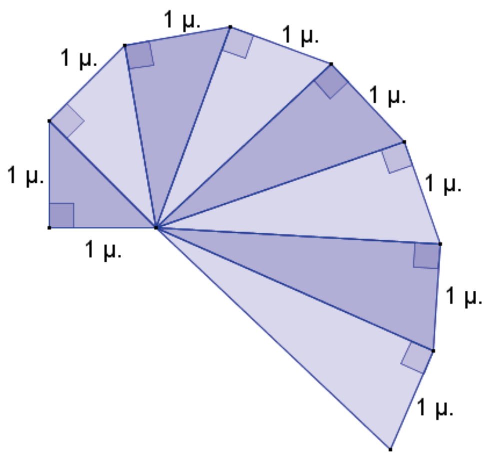
14 . Στο διπλανό σχήμα τα $ΑΒΓ$ και $ΑΓΔ$ είναι ορθογώνια τρίγωνα. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου $ΑΔΖΕ$.



15 . Στο πιο κάτω σχήμα κάθε επόμενο τρίγωνο έχει κάθετη πλευρά την υποτείνουσα του προηγούμενου τριγώνου.

(α) Να υπολογίσετε το μήκος της υποτείνουσας κάθε τριγώνου.

(β) Πόσο θα είναι το μήκος των πλευρών του $20^{ου}$ τριγώνου;



ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Αλγεβρικές Παραστάσεις

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε και να διακρίνουμε είδη αλγεβρικών παραστάσεων όπως μονώνυμο και πολυώνυμο.
- Να ορίζουμε και να διακρίνουμε τον βαθμό των μονωνύμων και των πολυωνύμων.
- Να εκτελούμε πράξεις μονωνύμων και πολυωνύμων.
- Να εφαρμόζουμε αλγεβρικές τεχνικές, για να κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων και να απλοποιούμε αλγεβρικές παραστάσεις.
- Να αποδεικνύουμε αλγεβρικές ταυτότητες.

Έχουμε μάθει ...

- Μια μαθηματική έκφραση που περιλαμβάνει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές ονομάζεται **αλγεβρική παράσταση.**

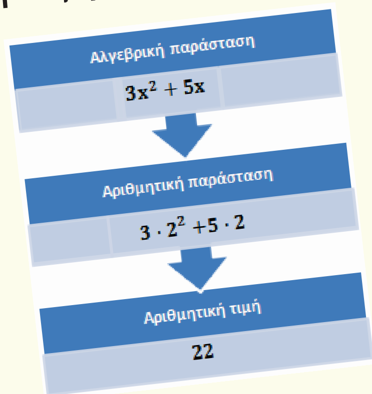
- Μια μαθηματική έκφραση που περιλαμβάνει πράξεις μόνο με αριθμούς ονομάζεται **αριθμητική παράσταση.**

- Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικατασταθούν οι μεταβλητές με συγκεκριμένους αριθμούς και εκτελεστούν οι πράξεις, τότε το αποτέλεσμα ονομάζεται **αριθμητική τιμή** της αλγεβρικής παράστασης.

  Παράδειγμα:

  Η αριθμητική τιμή της $3x^2 + 5x$ *για $x = 2$ είναι:*

  $3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2$
  $= 12 + 10$
  $= 22$



- Ιδιότητες δυνάμεων:

  - $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$
  - $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$
  - $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$
  - $(\alpha \cdot \beta)^\mu = \alpha^\mu \cdot \beta^\mu$
  - $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu = \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}, \quad \beta \neq 0$

  Παράδειγμα:

  $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4}$

  $3^6 : 3^4 = 3^{6-4}$

  $(5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2}$

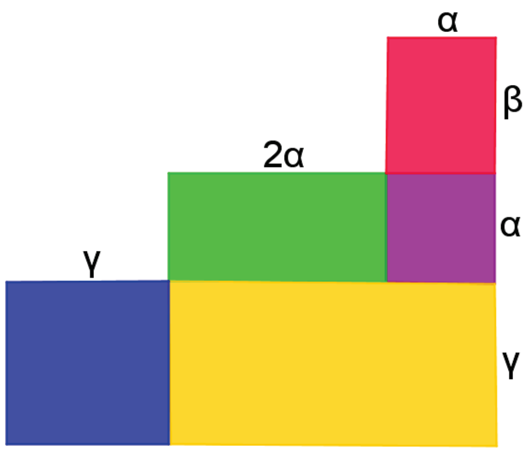
  $(4 \cdot 9)^3 = 4^3 \cdot 9^3$

  $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5}$

Αλγεβρικές Παραστάσεις
Μονώνυμα

Διερεύνηση

Να μελετήσετε το πιο κάτω σχήμα και να απαντήσετε τα ερωτήματα:



- ✓ Να βρείτε τις αλγεβρικές παραστάσεις που εκφράζουν τις περιμέτρους του μπλε και του κόκκινου ορθογωνίου. Από πόσους όρους αποτελείται η κάθε παράσταση;

- ✓ Ποιου σχήματος η αλγεβρική παράσταση της περιμέτρου αποτελείται από έναν μόνο όρο;

Μαθαίνω

- **Μονώνυμο** ονομάζεται μια αλγεβρική παράσταση που περιλαμβάνει μόνο την πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ αριθμού και μεταβλητών και οι μεταβλητές της έχουν εκθέτη μη αρνητικό ακέραιο αριθμό.

  Παράδειγμα:
  $-3x$, x^2 , -5 , $\frac{4}{3}\alpha\beta$, $-x^2y^3$, $\frac{\alpha^3\beta^2}{7}$

Ο συντελεστής 1 συνήθως παραλείπεται και γράφουμε μόνο το κύριο μέρος.

Παράδειγμα:
$1x^2y = x^2y$

- Σε ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας ονομάζεται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο των μεταβλητών του ονομάζεται **κύριο μέρος.**

  Παράδειγμα: $-2\,x^2y$

  Κύριο μέρος

  Συντελεστής

Οι αριθμοί θεωρούνται μονώνυμα και ονομάζονται **σταθερά μονώνυμα.** Ο αριθμός μηδέν ονομάζεται **μηδενικό μονώνυμο.**

- Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή, ενώ βαθμός του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του.

  Παράδειγμα:
  Το μονώνυμο $-2x^2y$ είναι:
  $2^{ου}$ *βαθμού ως προς x*
  $1^{ου}$ *βαθμού ως προς y*
  $3^{ου}$ *βαθμού ως προς x και y*

- Τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος ονομάζονται **όμοια μονώνυμα**.

  Παράδειγμα:
  Τα μονώνυμα $-8\alpha^3\beta$ και $2\alpha^3\beta$ είναι όμοια, γιατί έχουν το ίδιο κύριο μέρος ($\alpha^3\beta$).

- Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται **ίσα μονώνυμα**, ενώ τα όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές λέγονται **αντίθετα μονώνυμα**.

  Παράδειγμα:
  Τα μονώνυμα $2x^2y$ και $2yx^2$ είναι ίσα.
  Τα μονώνυμα $-2x^2y$ και $+2x^2y$ είναι αντίθετα.

Παράδειγμα

1. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω παραστάσεις είναι μονώνυμα. Να βρείτε τον συντελεστή, το κύριο μέρος και τον βαθμό του κάθε μονωνύμου (ως προς όλες τις μεταβλητές του):

(α)	$4x\omega^3 + 3y$	(β)	$-\frac{7xy^2}{8}$	(γ)	-3
(δ)	$\frac{\alpha^2}{\beta^3}$	(ε)	x^2y^{-5}	(στ)	$5\alpha \cdot 2\beta$

Λύση:

(α) *Η παράσταση* $4x\omega^3 + 3y$ *δεν είναι μονώνυμο, γιατί περιέχει την πράξη της πρόσθεσης.*

(β) *Η παράσταση* $-\frac{7x^3y^2}{8} = -\frac{7}{8} \cdot x^3y^2$ *είναι μονώνυμο με:*
Συντελεστή: $-\frac{7}{8}$
Κύριο μέρος: x^3y^2
Βαθμό: 5

(γ) *Η παράσταση* -3 *είναι μονώνυμο με:*
Συντελεστή: -3
Βαθμό: 0

(δ) *Η παράσταση* $\frac{\alpha^2}{\beta^3}$ *δεν είναι μονώνυμο, γιατί σημειώνεται διαίρεση μεταξύ των μεταβλητών του.*

(ε) *Η παράσταση* x^2y^{-5} *δεν είναι μονώνυμο, γιατί ο εκθέτης του* y *είναι αρνητικός.*

(στ) *Η παράσταση* $5\alpha \cdot 2\beta = 10\alpha\beta$ *είναι μονώνυμο με:*
Συντελεστή: 10
Κύριο μέρος: $\alpha\beta$
Βαθμό: 2

Ένα μονώνυμο είναι γραμμένο στην **τελική μορφή**, όταν και μόνο όταν έχουν γίνει όλες οι πράξεις μεταξύ σταθερών και μεταβλητών που περιέχει.

Δραστηριότητες

1. Να σημειώσετε «✓» στις αλγεβρικές παραστάσεις που είναι μονώνυμα:

☐ $+2x$	☐ $3x + y$	☐ $3xy^7$
☐ $-\frac{3}{4}\alpha\beta + 2\omega$	☐ $\frac{xy\omega}{6}$	☐ $x(x+1)$
☐ $+\frac{2xy^2}{3}$	☐ 1234	☐ $\frac{\alpha}{5\beta}$

2. Να γράψετε δύο όμοια μονώνυμα για καθένα από τα πιο κάτω:

(α) $7x$ (β) $+\frac{4xy}{9}$ (γ) $-3y^2\omega$

3. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα, συμπληρώνοντας κατάλληλα τις δύο πρώτες στήλες. Αν είναι μονώνυμα, να συμπληρώσετε και τις υπόλοιπες στήλες του πίνακα:

	Δεν είναι μονώνυμο	Είναι μονώνυμο	Συντε-λεστής	Κύριο μέρος	Βαθμός
$\frac{+3x^2}{8}$					
x^2y^2					
$-3x^3y^5$					
$\frac{2}{7}x^3y+4$					
$3a^2\beta^{-3}$					
$-\frac{1}{4}\alpha$					

4. Δίνεται το μονώνυμο $-3x^2y$. Να βρείτε:
   (α) τον βαθμό του
   (β) δύο όμοια μονώνυμα με το πιο πάνω μονώνυμο
   (γ) το αντίθετο του πιο πάνω μονωνύμου
   (δ) ένα μονώνυμο του ίδιου βαθμού με το πιο πάνω, αλλά όχι όμοιό του.

5. Να βρείτε τις τιμές των μ και ν σε κάθε περίπτωση, ώστε τα πιο κάτω ζεύγη μονωνύμων να είναι όμοια.
   (α) $3\alpha^2$, $-2\alpha^\nu$
   (β) $4x^4\omega^\nu$, $+6x^\mu\omega^6$

6. Να βρείτε το μονώνυμο που περιγράφει η Ειρήνη:
   «Έχει συντελεστή -2 και μεταβλητές α και β. Είναι $2^{ου}$ βαθμού ως προς α και $5^{ου}$ βαθμού ως προς α και β».

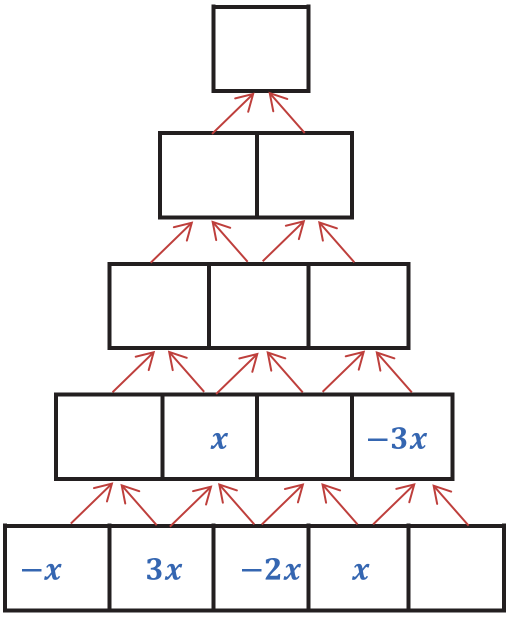
7. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

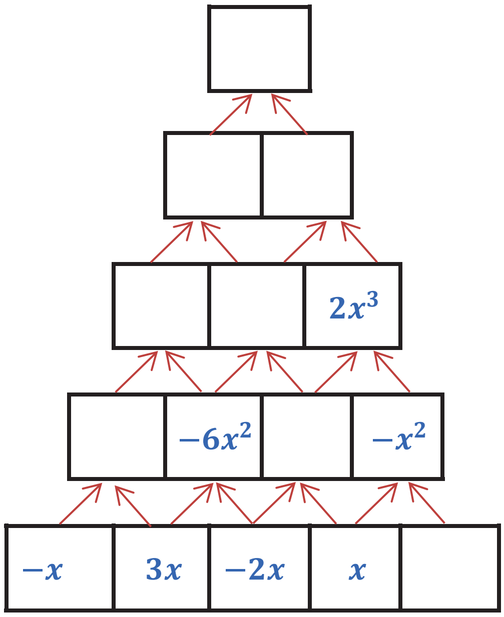
(α)	Το μονώνυμο xy^4 έχει συντελεστή το 4.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Το μονώνυμο $8x^4y$ είναι μηδενικού βαθμού ως προς y.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Το μονώνυμο $8x^4y$ είναι $5^{\text{ου}}$ βαθμού ως προς x και y.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Το κύριο μέρος του μονωνύμου $9\beta^3\gamma^2$ είναι το $\beta\gamma$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Τα μονώνυμα $-2\alpha^2\beta$ και $+2\alpha\beta^2$ είναι αντίθετα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Δύο όμοια μονώνυμα έχουν τον ίδιο βαθμό.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Πράξεις Μονωνύμων

Διερεύνηση

Να συμπληρώσετε τις πυραμίδες με τα κατάλληλα μονώνυμα και να εξηγήσετε τον τρόπο που εργαστήκατε.





Μαθαίνω

- **Άθροισμα μονωνύμων**

  Για να υπολογίσουμε το άθροισμα δύο ή περισσότερων μονωνύμων πρέπει τα μονώνυμα να είναι **όμοια**.

  Το άθροισμα **όμοιων** μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά, το οποίο έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους. Η πρόσθεση όμοιων μονωνύμων ονομάζεται **αναγωγή ομοίων** όρων.

  ➢ *Η διαφορά δύο μονωνύμων μετατρέπεται σε άθροισμα του αντίθετου του αφαιρετέου.*

Το άθροισμα δυο αντίθετων μονωνύμων είναι το μηδενικό μονώνυμο.

Παραδείγματα:

$3y^2 + 7y^2 = (3+7)y^2 = 10y^2$ *και*

$3xy^2 - (-7xy^2) = 3xy^2 + 7xy^2 = 11xy^2$

- **Πολλαπλασιασμός μονωνύμων**
  Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο που έχει ως συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και ως κύριο μέρος το γινόμενο των κύριων μερών τους.

  Παράδειγμα:
  $(-2\alpha^2)\cdot(3\alpha\beta^4) = (-2\cdot 3)\cdot \alpha^2\cdot\alpha\cdot\beta^4 = -6\alpha^{2+1}\beta^4 = -6\alpha^3\beta^4$

- **Διαίρεση μονώνυμων**
  Για να διαιρέσουμε δύο μονώνυμα, διαιρούμε τους συντελεστές τους και διαιρούμε και τα κύρια μέρη τους.

  Παραδείγματα:
  $12x^2 : (-4x) = \frac{12}{-4}\cdot\frac{x^2}{x} = -3x^{2-1} = -3x$
  $(8\alpha^5\gamma) : (4\alpha^2\gamma^3) = \frac{8\alpha^5\gamma}{4\alpha^2\gamma^3} = \frac{8}{4}\cdot\alpha^{5-2}\cdot\gamma^{1-3} = 2\alpha^3\gamma^{-2} = \frac{2\alpha^3}{\gamma^2}$

Παρατηρούμε ότι το πηλίκο δύο μονωνύμων δεν είναι πάντοτε μονώνυμο.

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε το άθροισμα των πιο κάτω μονωνύμων:
   (α) $3y^4, -4y^4$ (β) $3\alpha\beta^2, -2\alpha\beta^2, -3\alpha\beta^2$

   Λύση:
   Για να βρούμε το άθροισμα όμοιων μονωνύμων αφήνουμε ίδιο το κύριο μέρος και προσθέτουμε τους συντελεστές τους.

   (α) $3y^4 + (-4y^4) = (3-4)y^4 = -y^4$
   (β) $3\alpha\beta^2 + (-2\alpha\beta^2) + (-3\alpha\beta^2) = 3\cancel{\alpha\beta^2} - 3\cancel{\alpha\beta^2} - 2\alpha\beta^2 = -2\alpha\beta^2$

2. Να κάνετε τις πράξεις:
   (α) $(4x^2y)\cdot(-3xy)$ (β) $(-3\alpha\gamma^3)^2$

   Λύση:
   (α) $(4x^2y)\cdot(-3xy) = (-4\cdot 3)\cdot x^{2+1}\cdot y^{1+1} = -12x^3y^2$
   (β) $(-3\alpha\gamma^3)^2 = (-3\alpha\gamma^3)\cdot(-3\alpha\gamma^3) = +9\alpha^2\gamma^6$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα των δυνάμεων $\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$.

3. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $-2\alpha^2\beta : (2\alpha\beta)$ (β) $(-12x^3) : (-6x^5)$

Λύση:

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα των δυνάμεων $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$.

(α) $-2\alpha^2\beta : (2\alpha\beta) = \frac{-2\alpha^2\beta}{2\alpha\beta} = \left(-\frac{2}{2}\right) \cdot \alpha^{2-1} \cdot \beta^{1-1} = -\alpha$

(β) $(-12x^3) : (-6x^5) = \frac{-12x^3}{-6x^5} = \frac{2}{x^2}$

Δραστηριότητες

1. Να αντιστοιχίσετε κάθε αλγεβρική παράσταση της στήλης A, με το άθροισμά της στη στήλη B.

Στήλη Α
α. $x + 3x - 5x$
β. $4x^2 - 3x^2 - 9x^2$
γ. $7x^3 - 4x^3 + x^3$
δ. $7x^2 - 3x^2 - 2x^2$

Στήλη Β	
i.	$2x^2$
ii.	$4x^3$
iii.	$5x$
iv.	$7x^3$
v.	$-x$
vi.	$-8x^2$

2. Να συμπληρώσετε τους πιο κάτω πίνακες:

$\cdot$	$2x$	-5
$3x$		
$8x^2$		

$:$	$2x$	$4x^3$
$16x^2$	$8x$	
$-32x^5$		

3. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $5y + 3y - 2y$ (β) $-3\alpha\beta - 5\alpha\beta + 6\alpha\beta$

(γ) $-2x^2 + 3x^2$ (δ) $3xy^2 - 12xy^2 + 4xy^2$

(ε) $3\omega^3 + 4\omega^3 - 6$ (στ) $-2\beta^2 + \frac{1}{3}\beta^2$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $2x^2 \cdot x^3$ (β) $(-3x^2) \cdot (-4x^3)$

(γ) $(-3a^2) \cdot (-a^5) \cdot a^6$ (δ) $2xy^2 \cdot (3x^4y)$

(ε) $(-2y) \cdot (-3y^2x)$ (στ) $5\alpha^2\beta^3 \cdot (-2\alpha^3\beta^2)$

(ζ) $4x^2y \cdot (-3x^3)$ (η) $(-2x^3)^2$

(θ) $(2\alpha\beta^2)^2$ (ι) $\left(-\frac{3}{4}\omega^2\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\omega\right)$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(12\alpha^2) : (2\alpha)$ (β) $(-12x^5) : (-6x^5)$

(γ) $(-6xy^2) : (3y)$ (δ) $(21\alpha^5\beta^3) : (-3\alpha\beta^2)$

(ε) $(-18x^4y^2) : (-3xy)$ (στ) $(-2x^2\omega) : (-4x^5\omega^2)$

6. Να συμπληρώσετε το τετράγωνο, ώστε να είναι μαγικό (το άθροισμα οριζόντια, κάθετα και διαγώνια να είναι το ίδιο).

$-x^2$		x^2
	$-2x^2$	
		$-3x^2$

7. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(2x^4) : (2x^2) + 3x^2$ (β) $4x^2 + (3x)(5x)$

(γ) $(6x^3) : (-2x) + (-3x)(-2x)$ (δ) $2xy + (30x^3y^2) : (6x^2y)$

8. Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω ισότητες:

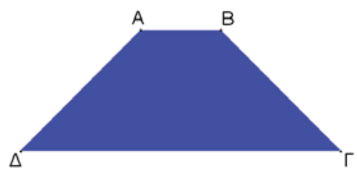
(α) $-7x^2 + \square = 3x^2$ (β) $4x^2y^3 - \square = -5x^2y^3$

(γ) $\square - (-2\beta^5) = -6\beta^5$ (δ) $8\alpha^3 - 2\alpha^3 + \square = -3\alpha^3$

(ε) $5\beta \cdot \square = -25\beta^3$ (στ) $18x^2y^5 : \square = -3xy^2$

(ζ) $9\alpha\gamma^3 \cdot \square = 9\alpha^2\gamma^4$ (η) $\square : (-2y^5) = -3xy^2$

9. Το διπλανό σχήμα είναι ένα ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ ($ΒΓ = ΑΔ$). Αν η πλευρά $ΓΔ$ είναι τετραπλάσια της $ΑΒ$ και οι πλευρές $ΒΓ$ και $ΑΔ$ είναι διπλάσιες της $ΑΒ$, να βρείτε την αλγεβρική παράσταση της περιμέτρου του τραπεζίου.



10. Να υπολογίσετε:

(α) το μήκος ορθογωνίου που έχει πλάτος $8x^3y^2$ και εμβαδόν $24x^5y^3$,

(β) το ύψος τριγώνου που έχει μήκος βάσης $2\alpha^3\beta^2$ και εμβαδόν $20\alpha^3\beta^3$.

Πολυώνυμα
Πρόσθεση Πολυωνύμων

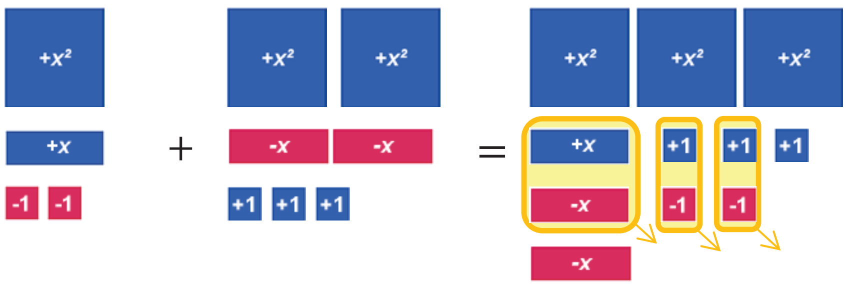
Διερεύνηση (1)

Ένα σύνολο αλγεβρικών πλακιδίων χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση αριθμών και μεταβλητών, όπως φαίνεται στους πιο κάτω πίνακες:

Πλακίδιο	Αναπαριστά
+1	τον αριθμό $+1$
+x	τη μεταβλητή x
+x²	το τετράγωνο της μεταβλητής x

Πλακίδιο	Αναπαριστά
-1	τον αριθμό -1
-x	το αντίθετο της μεταβλητής x
-x²	το αντίθετο του τετραγώνου της μεταβλητής x.

Ο Μιχάλης, για να παρουσιάσει την πρόσθεση των αλγεβρικών παραστάσεων $(x^2+x-2)+(2x^2-2x+3)$, δούλεψε ως εξής:

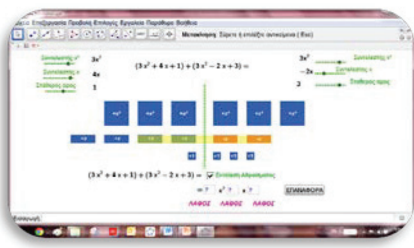


Άρα, $(x^2+x-2)+(2x^2-2x+3)=3x^2-x+1$

✓ Να μελετήσετε το μοντέλο που χρησιμοποίησε ο Μιχάλης και να περιγράψετε τη διαδικασία.

✓ Με βάση το μοντέλο με τα πλακίδια ή με άλλο τρόπο να υπολογίσετε το άθροισμα: $(2x^2+x+1)+(x^2-2x)+(3x-2)$.

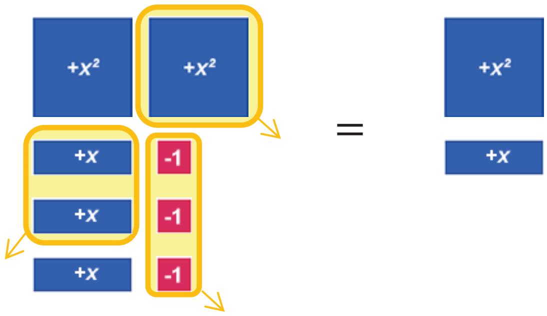
✓  Να ανοίξετε το αρχείο «B_En2_Athroisma_Polionyma.ggb», να μεταβάλετε τους δρομείς και να παρατηρήσετε πώς υπολογίζεται το άθροισμα αλγεβρικών παραστάσεων. Να διατυπώσετε έναν κανόνα για το άθροισμα των αλγεβρικών παραστάσεων.



Διερεύνηση (2)

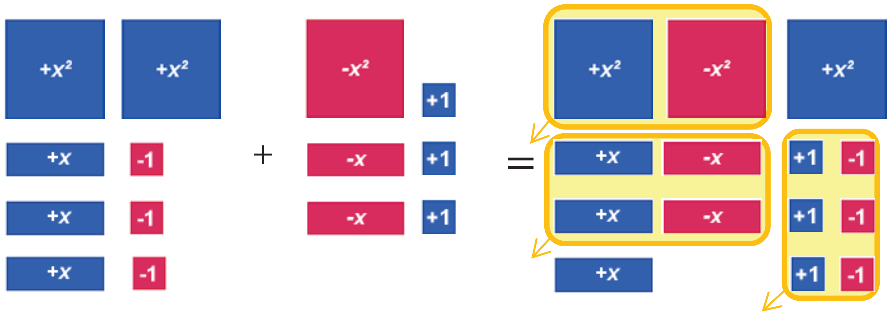
Ο Μιχάλης και η Νικολέττα χρησιμοποίησαν το μοντέλο των πλακιδίων και για την αφαίρεση των αλγεβρικών παραστάσεων $(2x^2 + 3x - 3) - (x^2 + 2x - 3)$. Εργάστηκαν ως εξής:

Ο Μιχάλης σκέφτηκε να αφαιρέσει τα όμοια πλακίδια του αφαιρετέου από τον μειωτέο:



Άρα,
$(2x^2 + 3x - 3) - (x^2 + 2x - 3) = x^2 + x$

Η Νικολέττα σκέφτηκε ότι αντί να αφαιρέσει μπορεί να προσθέσει τα αντίθετα πλακίδια του αφαιρετέου στον μειωτέο:
$(2x^2 + 3x - 3) - (x^2 + 2x - 3) = (2x^2 + 3x - 3) + (-x^2 - 2x + 3)$



Άρα,
$$(2x^2 + 3x - 3) - (x^2 + 2x - 3) = (2x^2 + 3x - 3) + (-x^2 - 2x + 3)$$
$$= x^2 + x$$

✓ Να εξηγήσετε τις δύο διαδικασίες και τα αποτελέσματά τους. Τι παρατηρείτε;

Μαθαίνω

- **Πολυώνυμο** ονομάζουμε την αλγεβρική παράσταση που είναι άθροισμα μη όμοιων μονωνύμων. Τα μονώνυμα που αποτελούν το πολυώνυμο λέγονται **όροι** του πολυωνύμου.

  Παράδειγμα:
  Η αλγεβρική παράσταση $2x^2 - 5 + 2x$ *είναι ένα πολυώνυμο. Οι όροι του πολυωνύμου είναι:* $2x^2$, -5 *και* $2x$.

  Το πολυώνυμο γράφεται κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x ως εξής: $2x^2 + 2x - 5$

Ένα πολυώνυμο θα λέμε ότι είναι γραμμένο κατά τις **φθίνουσες δυνάμεις** μιας μεταβλητής, αν οι όροι του είναι διατεταγμένοι έτσι ώστε οι εκθέτες της μεταβλητής αυτής να ελαττώνονται, ενώ κατά **αύξουσες** αν οι εκθέτες της μεταβλητής αυτής αυξάνονται.

- Ένα πολυώνυμο με δύο όρους ονομάζεται **διώνυμο** και ένα πολυώνυμο με τρεις όρους ονομάζεται **τριώνυμο**.

  Παράδειγμα:
  διώνυμο: $-x^2 + 2$
  τριώνυμο: $3x^2 - 2x + 3$

Για να ονομάσουμε ένα πολυώνυμο χρησιμοποιούμε συνήθως κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου ή μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου.

Παράδειγμα:
$p(x) = 3x^2 - 2x + 3$
Στην παρένθεση φαίνεται η μεταβλητή του πολυωνύμου.

$A(x) = -x^2 + 2$ ή
$A = -x^2 + 2$

- **Βαθμός** ενός πολυωνύμου ως προς μια ή περισσότερες μεταβλητές, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

  Παράδειγμα:
  $-3x^2 + 2x$ $2^{ου}$ *βαθμού*
  $3xy - 2x^3 + 3$ $3^{ου}$ *βαθμού*

Με $p(2)$ συμβολίζουμε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $p(x)$ για $x = 2$.
Δηλ.
$$p(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3.4 - 2.2 + 3 = 12 - 4 + 3 = 11$$

- **Πρόσθεση πολυωνύμων**
  Το άθροισμα δύο ή περισσότερων πολυωνύμων είναι ένα νέο πολυώνυμο με όρους τα αθροίσματα των όμοιων όρων των δοσμένων πολυωνύμων.

  Παράδειγμα:
  $$\begin{aligned}(2x^2 - 5x + 2) + (x^2 - 4x + 1) &= 2x^2 - 5x + 2 + x^2 - 4x + 1\\ &= 2x^2 + x^2 - 5x - 4x + 2 + 1\\ &= 3x^2 - 9x + 3\end{aligned}$$
  Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων

  $$\begin{aligned}(2x^2 - 5x + 2) - (x^2 - 4x + 1) &= 2x^2 - 5x + 2 - x^2 + 4x - 1\\ &= 2x^2 - x^2 - 5x + 4x + 2 - 1\\ &= x^2 - x + 1\end{aligned}$$

Παραδείγματα

1. Δίνεται το τριώνυμο $A = 4x^2 - 5x + 3$ και το διώνυμο $B = 3x - 2$. Να υπολογίσετε:

   (α) $A + B$ (β) $A - B$

Λύση:
Αντικαθιστούμε τα πολυώνυμα:

(α) $A + B = (4x^2 - 5x + 3) + (3x - 2)$
$= 4x^2 - 5x + 3 + 3x - 2$
$= 4x^2 - 5x + 3x + 3 - 2$ *Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων.*
$= 4x^2 - 2x + 1$

ή

Θα μπορούσαμε να προσθέσουμε κατακόρυφα τα δύο πολυώνυμα:

$$\begin{array}{lr} & 4x^2 - 5x + 3 \\ (+) & + 3x - 2 \\ \hline & 4x^2 - 2x + 1 \end{array}$$

Προσθέτω τους όμοιους όρους

(β) *Αντικαθιστούμε τα πολυώνυμα:*
$A - B = (4x^2 - 5x + 3) - (3x - 2)$ *Προσθέτουμε τους αντί-θετους όρους.*
$= 4x^2 - 5x + 3 + (-3x + 2)$
$= 4x^2 - 5x + 3 - 3x + 2$ *Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων*
$= 4x^2 - 8x + 5$

2. Δίνεται το πολυώνυμο $\varphi(x) = 2x^3 - x^2 + 5$.
   (α) Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου.
   (β) Να υπολογίσετε το $\varphi(-1)$.

Λύση:

(α) *Ο βαθμός του πολυωνύμου είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του. Άρα, το πολυώνυμο είναι 3^ου^ βαθμού.*

(β) *Για να βρούμε το $\varphi(-1)$ αντικαθιστούμε το x με -1 και κάνουμε τις πράξεις.*

Δηλαδή, $\varphi(-1) = 2(-1)^3 - (-1)^2 + 5$
$\varphi(-1) = 2(-1) - (+1) + 5$
$\varphi(-1) = -2 - 1 + 5$
$\varphi(-1) = +2$

Δραστηριότητες

1. Να διατάξετε κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x τα πιο κάτω πολυώνυμα και να βρείτε τον βαθμό τους:

   (α) $A = x - x^3 + 3x^2 - 2$

   (β) $B = 4x^3 - x^4 - 2x^2 - x + 1$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

   (α) $-5n^2 + (4n^2 + 7)$

   (β) $(x^2 - 2x + 3) + (2x^2 + 3x + 3)$

   (γ) $(\omega^2 + 2) - (-2\omega^2 + 3\omega)$

   (δ) $(3n^2 + 2) - (-2n^2 + 2n + 1)$

   (ε) $(y^2 - y + 1) - (2y^2 - 7y + 1)$

   (στ) $(x^2 - 4xy + 3) + (x^2 + 3xy)$

3. Δίνονται τα πολυώνυμα:
   $A = 5x^3 - 2x + 7$
   $B = 5x^3 - 2x^2 - 9x + 4$
   Να υπολογίσετε τα εξής:

   (α) $A + B$ (β) $-A$

   (γ) $A - B$

4. Δίνονται τα πολυώνυμα $p(x) = x^2 - 2x + 4$, $q(x) = 3x - 5$ και $r(x) = x^3 + x + 1$. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

   (α) $p(2)$ (β) $r(-1)$

   (γ) $r(x) + p(x)$ (δ) $p(x) - q(x)$

5. Να συμπληρώσετε τα κενά στις πιο κάτω ισότητες:

   (α) $(\square - 8x - \square) + (9x^2 - \square + 8) = 12x^2 - 9x + 4$

   (β) $(n^2 + 3) + (\square + 3) = -n^2 + \square$

   (γ) $(x^2 + \square + 3) - (x^2 + 2x + \square) = x$

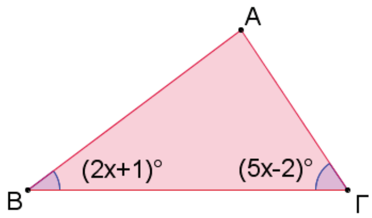
   (δ) $(-2x^3 + \square - 7) - (\square + 7x^2 + \square + \square) = -4x^3 + 14x^2 + 5x - 10$

6. Ποιο πολυώνυμο πρέπει να προσθέσουμε στο $2\alpha^2 + 5\alpha + 7$, για να έχουμε άθροισμα $8\alpha^2 + 4\alpha - 5$;

7. Να συμπληρώσετε το τετράγωνο, ώστε να είναι μαγικό (το άθροισμα οριζόντια, κάθετα και διαγώνια να είναι το ίδιο).

$8x^2-1$	$3x^2-x$	
x^2+5x-6		
$6x^2-2x+1$		

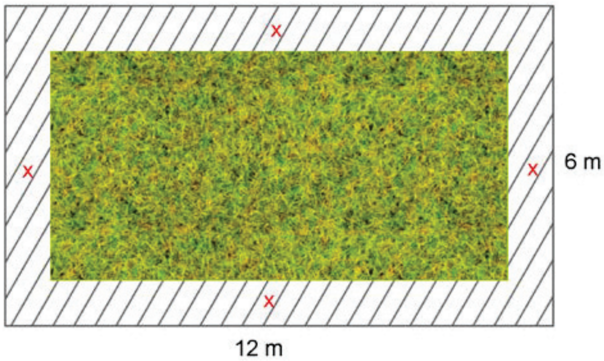
8. (α) Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει το μέτρο της τρίτης γωνίας του πιο κάτω τριγώνου.
(β) Να βρείτε το μέτρο των τριών γωνιών του τριγώνου, αν $x=15$.



Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων

Διερεύνηση (1)

Ο κύριος Ιάκωβος θέλει να ανακατασκευάσει τον κήπο του σπιτιού του, που έχει σχήμα ορθογώνιο με διαστάσεις $6\,m$ και $12\,m$. Θα τοποθετήσει χλοοτάπητα και περιμετρικά του χλοοτάπητα θέλει να κατασκευάσει διάδρομο από μπετόν, πλάτους (x).



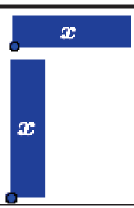
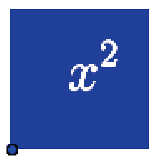
✓ Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει το εμβαδόν του διαδρόμου.

✓ Να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής που θα καλυφθεί με χλοοτάπητα.

✓ Να υπολογίσετε το κόστος της ανακαίνισης, αν ο διάδρομος από μπετόν θα στοιχίζει €20 το τετραγωνικό μέτρο, ενώ ο χλοοτάπητας θα στοιχίζει €35 το τετραγωνικό μέτρο.

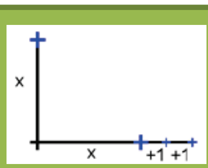
Διερεύνηση (2)

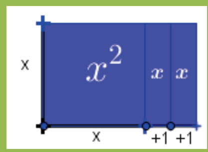
Τα πιο κάτω αλγεβρικά πλακίδια καλύπτουν επιφάνεια ως εξής:

Πλακίδιο			
Καλύπτει	*τετράγωνο με πλευρά 1 μονάδα*	*ορθογώνιο με διαστάσεις 1 και x μονάδες*	*τετράγωνο με πλευρά x μονάδες*

Η Κωνσταντίνα για τον υπολογισμό του γινομένου $x(x+2)$, χρησιμοποίησε το μοντέλο με τα αλγεβρικά πλακίδια ως εξής:

Το γινόμενο $x(x+2)$ αντιστοιχεί σε ορθογώνιο με διαστάσεις x και $(x+2)$. Καλύπτουμε την επιφάνεια του ορθογωνίου με τα αντίστοιχα πλακίδια.
Άρα,
$x(x+2) = x^2 + 2x$





✓ Να εξηγήσετε γιατί καλύπτεται η επιφάνεια με τα συγκεκριμένα πλακίδια που φαίνονται στην εικόνα.

✓ Να ερμηνεύσετε το μοντέλο των πλακιδίων με τη χρήση των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού.

Μαθαίνω

- **Πολλαπλασιασμός μονωνύμου με πολυώνυμο**
Για να πολλαπλασιάσουμε ένα μονώνυμο με ένα πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Παράδειγμα:
$(-2x)\cdot(x+1) = (-2x)\cdot(x) + (-2x)\cdot 1 = -2x^2 - 2x$

- **Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου με πολυώνυμο.**
Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πολυώνυμα, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Παράδειγμα:
$$(\alpha - 2)\cdot(\alpha + 4) = \alpha\cdot(\alpha+4) - 2\cdot(\alpha+4)$$
$$= \alpha^2 + 4\alpha - 2\alpha - 8$$
$$= \alpha^2 + 2\alpha - 8$$

- **Αλγεβρική ταυτότητα** είναι κάθε ισότητα ανάμεσα σε δύο αλγεβρικές παραστάσεις, η οποία αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών που περιέχει.

Παράδειγμα:
$\omega(x+y) = \omega\cdot x + \omega\cdot y$

Για τον πολλαπλασιασμό των πολυωνύμων χρησιμοποιούμε την **επιμεριστική ιδιότητα**.

Όταν έχουμε να αποδείξουμε μια ταυτότητα μπορούμε να ξεκινήσουμε από το ένα μέλος ($A\mu$) και κάνοντας τις πράξεις να καταλήξουμε στο άλλο μέλος ($B\mu$).
$$A_\mu = \ldots = B_\mu$$
$$B_\mu = \cdots = A_\mu$$

Μπορούμε, επίσης, κάνοντας τις πράξεις σε κάθε μέλος της ξεχωριστά να δείξουμε ότι τα δύο μέλη ισούνται με την ίδια παράσταση. Δηλαδή:
$A_\mu = \Gamma$ **και**
$B_\mu = \Gamma$ **τότε** $A_\mu = B_\mu$

Παραδείγματα

1. Να κάνετε τους πιο κάτω πολλαπλασιασμούς πολυωνύμων:

(α) $x(x+3)$ (β) $2x(x-1)$

(γ) $-x(y+1)$ (δ) $(x+1)(x-3)$

Λύση:

Για να εκτελέσουμε τους πολλαπλασιασμούς εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

(α) $x(x+3) = x^2 + 3x$

(β) $2x(x-1) = 2x^2 - 2x$

(γ) $-x(y+1) = -xy - x$

(δ) $(x+1)(x-3) = x^2 - 3x + x - 3$
$= x^2 - 2x - 3$

Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων.

2. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+1)(\alpha+1) - 1 = \alpha(\alpha+2)$

Λύση:

<u>Α΄ τρόπος:</u>

Ξεκινάμε από το Α΄ μέλος για να φθάσουμε στο Β΄ μέλος:

$$\begin{aligned} A' \, \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma &= (\alpha+1)(\alpha+1) - 1 \\ &= \alpha^2 + 1\alpha + 1\alpha + 1 - 1 \\ &= \alpha^2 + 2\alpha \\ &= \alpha(\alpha+2) \\ &= B' \, \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma \end{aligned}$$

Κάνουμε τον πολλαπλασιασμό και στη συνέχεια αναγωγή όμοιων όρων. Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

ή <u>Β΄ τρόπος:</u>

Αναπτύσσσουμε και τα δύο μέλη της ισότητας:

$$\begin{aligned} A' \, \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma &= (\alpha+1)(\alpha+1) - 1 \\ &= \alpha^2 + \alpha + \alpha + 1 - 1 \\ &= \alpha^2 + 2\alpha \end{aligned}$$

Κάνουμε τον πολλαπλασιασμό και στη συνέχεια αναγωγή όμοιων όρων.

$$\begin{aligned} B' \, \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma &= \alpha(\alpha+2) \\ &= \alpha^2 + 2\alpha \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα

Άρα, $A' \, \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma = B' \, \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma = \alpha^2 + 2\alpha$

Δραστηριότητες

1. Να κάνετε τους πιο κάτω πολλαπλασιασμούς:

   (α) $x(x+1)$ (β) $x(-x+5)$

   (γ) $5\delta(\delta^2-3\delta)$ (δ) $-6x(x-5)$

   (ε) $-a\beta(a-\beta)$ (στ) $2xy(3x^2+xy^2)$

2. Να κάνετε τους πιο κάτω πολλαπλασιασμούς:

   (α) $(x+1)(x+2)$ (β) $(\omega+4)(\omega+3)$

   (γ) $(\kappa-4)(\kappa+4)$ (δ) $(\beta+3)^2$

   (ε) $(y-2)(4-y)$ (στ) $(y-1)^2$

3. Να συμπληρώσετε τα κενά στις πιο κάτω ισότητες:

   (α) $3x\cdot(2+\square)=\square+12x^2$

   (β) $\square\cdot(x+3)=\square+12x^2$

   (γ) $4x^5\cdot(\square-2xy)=20x^6-\square$

   (δ) $(t+1)(\square+3)=t^2+\square+3$

   (ε) $(\square+3)(y-2)=y^2+\square-\square$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

   (α) $(x+2)(x-2)-(3x-5)$ (β) $x(x-1)(1+x)$

   (γ) $2x^2-(x+3)(x-3)$ (δ) $(4x-1)(4x+2)-(4x^2+3)$

5. Αν $A(x)=4x-5$ και $B(x)=x-1$ να υπολογίσετε:

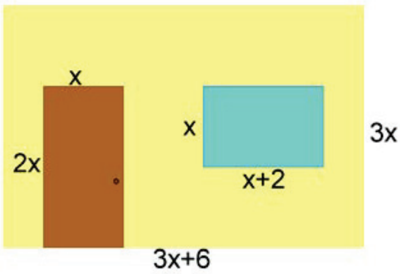
   (α) $2\cdot A(x)$ (β) $A(x)\cdot B(x)$

   (γ) $[B(x)]^2$ (δ) $2\cdot A(x)-3x\cdot B(x)$

   (ε) $A(x)+A(x)\cdot B(x)$

6. Οι μαθητές, στο μάθημα του Σχεδιασμού και Τεχνολογίας, θα κατασκευάσουν θήκες για τηλεχειριστήριο. Η κατασκευή τους θα είναι ένα ξύλινο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (ανοικτό από πάνω). Η βάση του παραλληλεπιπέδου, σύμφωνα με τις οδηγίες του καθηγητή, πρέπει να είναι τετράγωνη και το ύψος του 5 cm μεγαλύτερο από το μήκος της βάσης της. Να βρείτε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει την εξωτερική επιφάνεια του κουτιού.

7. Στο σχήμα δίνεται η πρόσοψη ενός δωματίου στο οποίο υπάρχει μια πόρτα και ένα παράθυρο. Να βρείτε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει το εμβαδόν του τοίχου στην πρόσοψη αυτή.



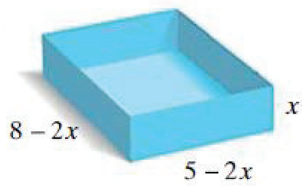
8. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:
   (α) $(\alpha-1)^2+2\alpha=(\alpha-1)(\alpha+1)+2$
   (β) $(x-y)(x+y)+2y^2=(x-y)^2+2xy$
   (γ) $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)-\beta(2a+\beta)=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+\beta^2$

9. Αν $xy=1$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $A=(x-y)(x-y)-(x^2-9)-y^2$.

10. Να βρείτε πιθανές διαστάσεις ενός ορθογωνίου που έχει εμβαδόν $20\beta^2+4\beta$.

11. Ο Αντώνης ισχυρίζεται ότι αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι 2ου βαθμού και το πολυώνυμο $Q(x)$ είναι 3ου βαθμού, τότε το γινόμενο $P(x)\cdot Q(x)$ θα είναι 6ου βαθμού. Να εξετάσετε την ορθότητα του ισχυρισμού του.

12. Να βρείτε τον όγκο του διπλανού κασονιού.

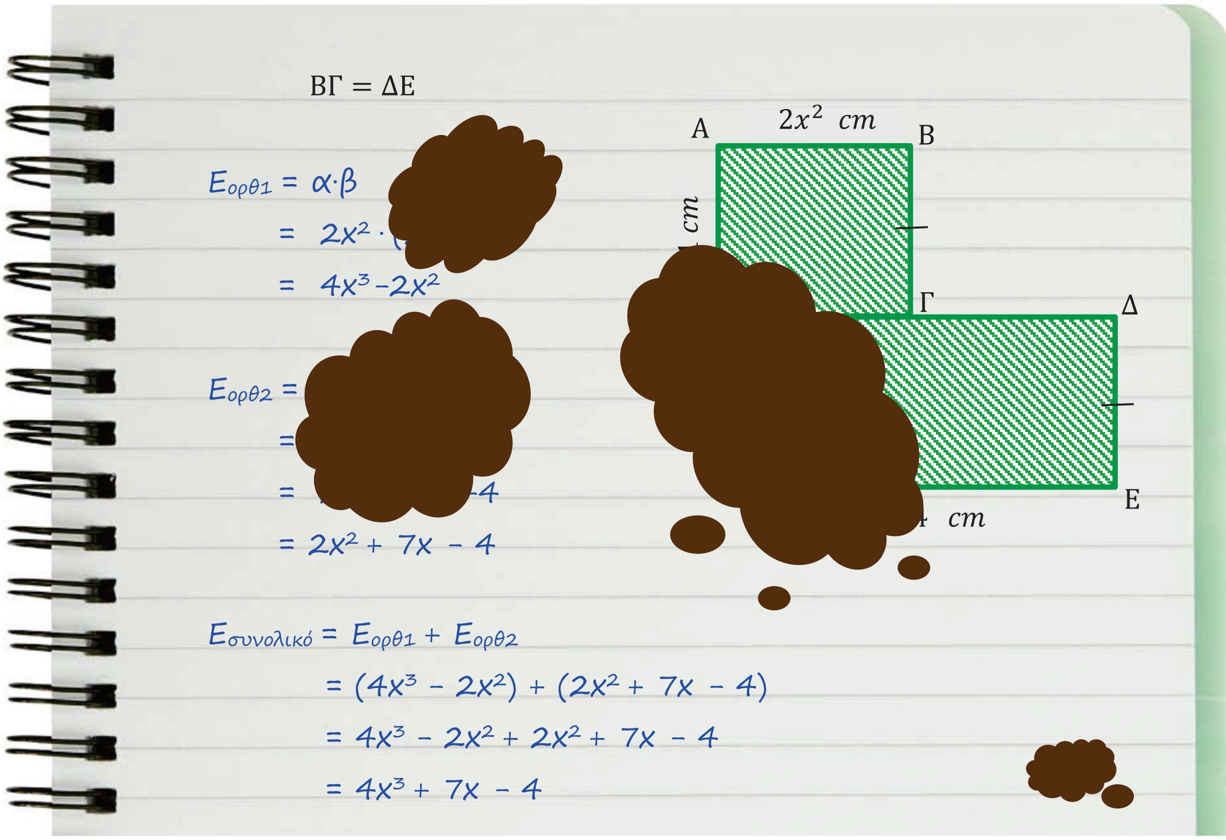


Διαίρεση Πολυωνύμων

Διερεύνηση

Η Νάγια υπολόγισε το εμβαδόν του πιο κάτω σχήματος. Ο μικρός της αδελφός όμως έριξε κατά λάθος γάλα σοκολάτας στο τετράδιό της. Η Νάγια θέλει να ξαναγράψει την άσκηση σε καθαρή σελίδα του τετραδίου της, όμως κάποιοι αριθμοί δεν φαίνονται πλέον.

✓ Πώς μπορεί να υπολογίσει τις διαστάσεις από τα δεδομένα που φαίνονται;



Μαθαίνω

- **Διαίρεση πολυωνύμου με μονώνυμο**

  Για να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με ένα μονώνυμο **διαιρούμε τον κάθε όρο του πολυωνύμου με το μονώνυμο** και προσθέτουμε τα πηλίκα που προκύπτουν.

  Παράδειγμα:

  $(12x^5 - 6x^3) : (2x^3) = (12x^5 : 2x^3) - (6x^3 : 2x^3) = 6x^2 - 3$

- **Διαίρεση πολυωνύμου με πολυώνυμο**

  Αν έχουμε δύο πολυώνυμα $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ κάνουμε τη διαίρεση $\Delta(x) : \delta(x)$ τότε υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, για τα οποία ισχύει:

$$\boldsymbol{\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)}$$

(Ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης)

  όπου το $\upsilon(x)$ μπορεί ή να είναι ίσο με μηδέν ή έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του $\delta(x)$.

$\boldsymbol{\Delta(x)}$: Διαιρετέος
$\boldsymbol{\delta(x)}$: διαιρέτης
$\boldsymbol{\pi(x)}$: πηλίκο
$\boldsymbol{\upsilon(x)}$: υπόλοιπο

Ισχύει ότι ο βαθμός του $\boldsymbol{\Delta(x)}$ είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών του $\boldsymbol{\delta(x)}$ και του $\boldsymbol{\pi(x)}$.

➢ Όταν $\upsilon(x) = 0$, η διαίρεση $\Delta(x) : \delta(x)$ είναι **τέλεια** και το πολυώνυμο $\delta(x)$ είναι **παράγοντας** του πολυωνύμου $\Delta(x)$.

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 3x - 4 & x - 1 \\ \cline{2-2} & x + 4 \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}$$

Διαιρετέος: $\Delta(x) = x^2 + 3x - 4$

διαιρέτης: $\delta(x) = x - 1$

πηλίκο: $\pi(x) = x + 4$

υπόλοιπο $\upsilon(x) = 0$

Η διαίρεση είναι τέλεια. Άρα, το πολυώνυμο $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $x^2 + 3x - 4$.

Παραδείγματα

1. Να κάνετε τις πράξεις:

   (α) $(15\alpha^4 - 3\alpha^3) : (3\alpha^3)$

   (β) $\frac{24x^4y^2 - 30x^3y}{-6x^2y}$

Λύση:

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα:

(α) $(15\alpha^4 - 3\alpha^3) : (3\alpha^3) = \frac{15\alpha^4}{3\alpha^3} - \frac{3\alpha^3}{3\alpha^3}$
$= 5a - 1$

Διαιρούμε κάθε όρο του πολυωνύμου με το μονώνυμο.

(β) $\frac{24x^4y^2 - 30x^3y}{-6x^2y} = \frac{24x^4y^2}{-6x^2y} - \frac{30x^3y}{-6x^2y}$
$= -4x^2y + 5x$

Διαιρούμε κάθε όρο του πολυωνύμου με το μονώνυμο.

2. Να κάνετε τις πράξεις:

   (α) $(a^2 - 4a) : (\alpha - 4)$

   (β) $(6x^2 + 3 + 5x) : (2x + 1)$

Λύση:

(α) *Γράφουμε τον διαιρετέο και τον διαιρέτη κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x.*

$$\begin{array}{r|l} \alpha^2 - 4\alpha & \alpha - 4 \\ \hline & \alpha \end{array}$$

Διαιρούμε τον πρώτο όρο του διαιρετέου με τον πρώτο όρο του διαιρέτη, δηλαδή $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, για να βρούμε τον πρώτο όρο του πηλίκου.

$$\begin{array}{r|l} \alpha^2 - 4\alpha & \alpha - 4 \\ \hline \underline{-\alpha^2 + 4\alpha} & \alpha \end{array}$$

Πολλαπλασιάζουμε το a με τον διαιρέτη $a - 4$ και αφαιρούμε το αποτέλεσμα $a^2 - 4a$ από τον διαιρετέο, δηλαδή προσθέτουμε το αντίθετο πολυώνυμο $-a^2 + 4a$.

$$\begin{array}{r|l} \alpha^2 - 4\alpha & \alpha - 4 \\ \hline \underline{-\alpha^2 + 4\alpha} & \alpha \\ 0 & \end{array}$$

Προσθέτουμε τα δύο πολυώνυμα και βρίσκουμε το άθροισμά τους, που είναι το πρώτο μερικό υπόλοιπο. Αφού το υπόλοιπο είναι μηδέν, η διαίρεση είναι τέλεια.

Άρα, το πηλίκο της διαίρεσης είναι α και το υπόλοιπο 0.

Ισχύει, $\alpha(\alpha - 4) = \alpha^2 - 4\alpha$

(β) *Γράφουμε τα πολυώνυμα του διαιρετέου και του διαιρέτη κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x.*

$$\begin{array}{r|l} 6x^2 + 5x + 3 & 2x + 1 \\ \cline{2-2} & 3x \end{array}$$

Διαιρούμε τον πρώτο όρο του διαιρετέου με τον πρώτο όρο του διαιρέτη, δηλαδή $\frac{6x^2}{2x} = 3x$, για να βρούμε τον πρώτο όρο του πηλίκου.

$$\begin{array}{r|l} 6x^2 + 5x + 3 & 2x + 1 \\ \cline{2-2} -6x^2 - 3x & 3x \end{array}$$

Πολλαπλασιάζουμε το $3x$ με τον διαιρέτη $2x + 1$ και αφαιρούμε το αποτέλεσμα $6x^2 + 3x$ από τον διαιρετέο, δηλαδή προσθέτουμε το αντίθετο πολυώνυμο $-6x^2 - 3x$.

$$\begin{array}{r|l} 6x^2 + 5x + 3 & 2x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^2 - 3x} & 3x \\ +2x + 3 & \end{array}$$

Προσθέτουμε τα δύο πολυώνυμα και βρίσκουμε το άθροισμά τους που είναι το πρώτο μερικό υπόλοιπο.

Θεωρούμε το πρώτο μερικό υπόλοιπο ως νέο διαιρετέο και επαναλαμβάνουμε την πιο πάνω διαδικασία:

$$\begin{array}{r|l} 6x^2 + 5x + 3 & 2x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^2 - 3x} & 3x + 1 \\ +2x + 3 & \\ \underline{-2x - 1} & \\ +2 & \end{array}$$

Διαιρούμε $\frac{+2x}{2x} = 1$
Πολλαπλασιάζουμε:
$1(2x + 1) = 2x + 1$
Προσθέτουμε $-2x - 1$ και βρίσκουμε το νέο μερικό υπόλοιπο.

Η διαδικασία τερματίζεται, αφού το μερικό υπόλοιπο είναι μικρότερου βαθμού από τον διαιρέτη.

Άρα, το πηλίκο της διαίρεσης είναι $3x + 1$ και το υπόλοιπο 2.
Ισχύει, $(2x + 1)(3x + 1) + 2 = 6x^2 + 5x + 3$

Δραστηριότητες

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(4x^3 - 12x) : (-2x)$ (β) $(-12xy^2 + 24x^3) : (6x)$

(γ) $(-12\omega^{10} + 6\omega^5) : (6\omega^5)$ (δ) $(-12\kappa^3\lambda^2 + 15\kappa\lambda^4) : (3\kappa^3\lambda^3)$

(ε) $(\alpha\beta - \alpha\gamma + \alpha\delta) : (-\alpha)$ (στ) $(-4x^3 + 5x^4 + 6x^5) : (-2x^2)$

(ζ) $\frac{x^2+3x-4}{x}$ (η) $\frac{6\alpha\beta^2+3\alpha\beta-9\alpha^2\beta}{3\alpha\beta}$

2. Να διορθώσετε τα λάθη στις διαιρέσεις που φαίνονται στο διπλανό πλαίσιο.

> $(12x^6 - 6x^2) : (-2x^2) = -6x^3 - 3$ ✗
>
> $(15\alpha^3 - 5\alpha) : (5\alpha) = 3\alpha^2$ ✗
>
> $\dfrac{24\alpha^2 - 12\alpha}{3\alpha} = \dfrac{\cancel{3}\alpha^2 - 12\cancel{\alpha}}{\cancel{3\alpha}}$
>
> $= \alpha^2 - 12$ ✗

3. Να κάνετε τις διαιρέσεις:
   (α) $(2\alpha - 4) : (\alpha - 2)$
   (β) $(x^2 - 3x) : (x - 3)$
   (γ) $(\alpha^3 - 3\alpha^2) : (\alpha - 3)$
   (δ) $(6\kappa^2 - 3\kappa) : (2\kappa - 1)$

4. Να κάνετε τις διαιρέσεις:
   (α) $(x^2 - 5x + 4) : (x - 1)$ (β) $(\alpha^2 - \alpha - 6) : (\alpha - 3)$
   (γ) $(\omega^2 - 2\omega - 8) : (\omega - 4)$ (δ) $(\beta^2 + 3\beta + 1) : (\beta + 1)$
   (ε) $(2\kappa^2 - 3\kappa + 3) : (2\kappa + 1)$ (στ) $(9\beta^2 + 6\beta + 1) : (3\beta + 1)$

5. Να συμπληρώσετε τα κενά στις πιο κάτω διαιρέσεις:

   (α) $\dfrac{6\alpha^3 - \square - 2\alpha}{\square} = 2\alpha^2 - \dfrac{1}{\alpha} - \square$

   (β) $\dfrac{6\alpha^3\beta^2 - \square - 2\alpha\beta}{\square} = -3\alpha^2\beta + \dfrac{5}{\beta} + \square$

   (γ)

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x - \square & x - 2 \\ \cline{2-2} -x^2 + \square \quad & x + 4 \\ +4x - \square & \\ \square + 8 & \\ 0 & \end{array}$$

   (δ)

$$\begin{array}{r|l} \square + 2x - \square & x - 1 \\ \cline{2-2} \square + 3x \quad & 3x + \square \\ +5x - \square & \\ \square + 5 & \\ +1 & \end{array}$$

6. Να βρείτε το πολυώνυμο το οποίο όταν διαιρεθεί με το $(x + 5)$, δίνει πηλίκο $(3x - 1)$ και υπόλοιπο 3.

7. Να βρείτε το πολυώνυμο το οποίο όταν διαιρεθεί με το πολυώνυμο $(x^2 + 1)$, δίνει πηλίκο $(3x + 5)$ και υπόλοιπο -1.

8. Να εξετάσετε κατά πόσο το πολυώνυμο $(\alpha - 4)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $(\alpha^2 - 5\alpha + 4)$.

9. Να υπολογίσετε την τιμή του α για να είναι τέλεια η διαίρεση $(x^2 - x + \alpha) : (x - 4)$.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $2x^2 + 4\psi - 7x^2 + 5\psi$

(β) $\alpha \cdot \alpha^3 \cdot \alpha^4$

(γ) $3\beta^2 \cdot \beta^4$

(δ) $(4\omega^3)(2\omega^5)$

(ε) $(+3\alpha^3\beta)(-5\alpha^2\beta^4)$

(στ) $(-3\alpha\gamma^2)(-2\alpha)(4\gamma)$

(ζ) $(-33\alpha^3\beta) : (-11\alpha\beta)$

(η) $(14y^2x^3) : (-2x^2y)$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(t^2 - 8t + 1) + (3t^2 + t - 7)$

(β) $(-3n^2 + n) - (3n^2 + n)$

(γ) $3x^2(x - 2\psi)$

(δ) $2x(x^2 - 2x + 3)$

(ε) $(10x^2 - 12x^3) : (-2x^2)$

(στ) $(a^2\beta - 2\beta^3) : (-2\beta^2)$

(ζ) $(a + 2)(\alpha - 2)$

(η) $(x + y)(x + y)$

(θ) $-3\omega^2 + (3\omega^2 + 7\omega)$

(ι) $(x - 3)(x - 3)$

3. Δίνονται τα πολυώνυμα $p(x) = 2x^2 + x - 3$, $q(x) = x - 5$ και $r(x) = x + 1$. Να υπολογίσετε:

(α) $\mathrm{r}(x) - \mathrm{p}(x)$

(β) $\mathrm{r}(x) + \mathrm{p}(x) + \mathrm{q}(x)$

(γ) $\mathrm{p}(x) \cdot \mathrm{q}(x)$

(δ) $\mathrm{p}(x) : \mathrm{q}(x)$

(ε) $\mathrm{q}(3)$

(στ) $\mathrm{p}(-1)$

4. Να κάνετε τις πιο κάτω διαιρέσεις:

(α) $\frac{40y^2-60xy}{20y^2}$

(β) $\frac{4xy^2-6xy}{2xy}$

(γ) $(y^2 - 10y + 20) : (y - 5)$

(δ) $(8x^2 - 16x + 6) : (2x - 3)$

(ε) $(-5x + 2x^2 + 6) : (x - 2)$

5. Αν $\varphi(x) = 2x^2 + 2x - 9$, να αποδείξετε ότι:

(α) $\varphi(-3) = \varphi(2)$

(β) $3\varphi(1) + \varphi(3) = 0$

6. Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

   (α) $-12\beta^2 + \square + \beta^2 = 3\beta^2$

   (β) $y^4 \; - \; y^2 + \square = \; y^4 \; + \; 7y^2$

   (γ) $\square \cdot (-2\alpha\beta^3) = -2\alpha^4\beta^4$

   (δ) $3y\omega^2 - \square \; = \; 2y\omega^2$

   (ε) $\left(-\frac{2}{5}x^3\lambda\right) \cdot \square = \frac{4}{15}x^4\lambda^5\omega$

   (στ) $(-24\beta^3\gamma^2) : \square \; = \frac{3\beta}{\gamma}$

   (ζ) $\square : (\; 3\kappa^6\mu) \; = \; -4\kappa\mu^6$

   (η) $\square \cdot (\kappa^3 - \square) \; = \; \kappa^5 \; + \; 7\kappa^2$

   (θ) $3\alpha\beta \cdot (\beta^3 - \square) = \square - 27\alpha^2\beta$

   (ι) $(-12\omega^2 + \square) : \square = -6\omega + 1$

7. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση στις πιο κάτω περιπτώσεις:

   (α) Ποια από τις ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμο;

   Α. 4α Β. $\alpha^2 + 9$ Γ. $-2\alpha^4 - 2$ Δ. καμιά από τις προηγούμενες

   (β) Ποιο είναι το αντίθετο μονώνυμο του $-3\alpha\beta^2$;

   Α. $-3\alpha^2\beta$ Β. $-\frac{1}{3}\alpha\beta^2$ Γ. $3\alpha\beta^2$ Δ. κανένα από τα προηγούμενα

   (γ) Ο βαθμός του πολυωνύμου $6\alpha + 3\alpha^3 - 7 + 6\alpha^4$ είναι:

   Α. 7 Β. 4 Γ. 3 Δ. 8

   (δ) Το μονώνυμο $-7x^{\alpha+2}y^3$ είναι $8^{ου}$ βαθμού ως προς x και y όταν:

   Α. $\alpha = 1$ Β. $\alpha = 3$ Γ. $\alpha = -3$ Δ. $\alpha = 2$

8. Να υπολογίσετε το πολυώνυμο το οποίο, αν διαιρεθεί με το $(3\alpha + 1)$, δίνει πηλίκο $(\alpha - 2)$ και υπόλοιπο -5.

9. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $(\alpha^2 - 3\alpha - 4) : (\alpha - 1)$

10. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $(5y + 2)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $25y^2 + 20y + 4$.

11. Ποιο πολυώνυμο έχει παράγοντες το $(3x + 1)$ και το $(x^2 - 2x)$;

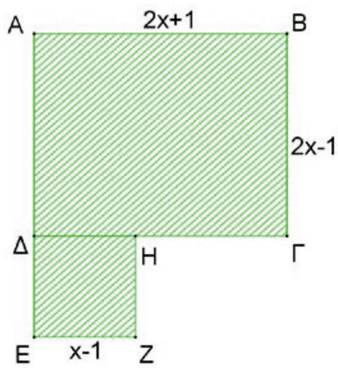
12. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:
   (α) $(\omega - 2)(\omega + 2) - \omega(\omega + 8) = -4(1 + 2\omega)$
   (β) $2x + (x - 2)(x + 3) = x(x + 3) - 6$
   (γ) $(2x^2 - 3) - (x^2 + 1) = (x - 2)(x + 2)$
   (δ) $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2$

13. Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δυο διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με το άθροισμά τους.

14. Ένας τεχνίτης έχει ένα γυαλί σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με μήκος α και πλάτος β. Θέλει να κόψει από κάθε γωνία του γυαλιού ένα κομμάτι σχήματος τετραγώνου με πλευρά x.
   (α) Να βρείτε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει το εμβαδόν του εναπομείναντος γυαλιού.
   (β) Αν $\alpha = 80\ cm$, $\beta = 40\ cm$ και $x = 10\ cm$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του γυαλιού μετά το κόψιμό του.

15. Να βρείτε τις πιθανές διαστάσεις ενός ορθογωνίου που έχει εμβαδόν $2a^2 + 4a$.

16. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του διπλανού γραμμοσκιασμένου σχήματος, αν ΔΗΖΕ είναι τετράγωνο πλευράς $x - 1$ και ΑΒΓΔ ορθογώνιο διαστάσεων $2x + 1$ και $2x - 1$.



Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα με τα κατάλληλα μονώνυμα.

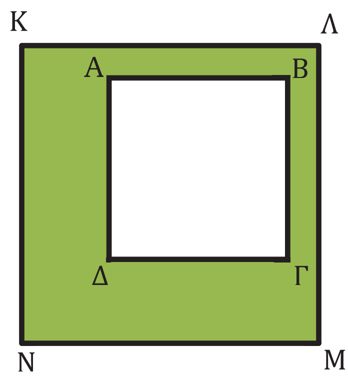
$-3x$	$-$		$+$	$6x$	$= -7x$
$-$		$-$		$-$	
	$:$	$4x$	$+$		$= 10x^2$
$:$		$+$		$:$	
$2x^2$	$+$		$\cdot$		$= 11x^2$
$= x$		$= 9x$		$= 2x$	

2. Ο Σάββας ανακάλυψε ότι το τετράγωνο ενός διψήφιου αριθμού που τελειώνει σε πέντε, είναι ένας αριθμός που τελειώνει σε 25 και για εκατοντάδες έχει το γινόμενο του ψηφίου των δεκάδων επί το ψηφίο αυτό αυξημένο κατά ένα.
Δηλαδή,

E	Δ	M
$x(x+1)$	2	5

Να αποδείξετε γιατί ισχύει αυτό.

3. Να βρείτε την τιμή του α αν ισχύει ότι $P(-1) = P(+1)$, όπου $P(x) = 5x^3 + 3\alpha x^2 + (\alpha - 2)x$.



4. Στο διπλανό σχήμα τα $AB\Gamma\Delta$ και $K\Lambda MN$ είναι τετράγωνα με πλευρές $K\Lambda = x + 1$ και $AB = \frac{x}{2} + 2$.
   (α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας είναι ίσο με $\frac{3x^2-12}{4}$.
   (β) Αν το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας είναι ίσο με $9\ \tau.\mu.$, να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών των τετραγώνων.

5. Μια εταιρεία πωλεί έναν συγκεκριμένο τύπο ψυγείου αξίας €600 και εκτιμά ότι σε έναν χρόνο θα πουλήσει 2000 τέτοια ψυγεία. Αν αυξήσει την τιμή κατά x $ευρώ$, εκτιμάται ότι θα χάσει $5x$ πελάτες. Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει τις εισπράξεις της εταιρείας μετά την αύξηση της τιμής.

6. Να αποδείξετε ότι η παράσταση:
$\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)^2 - \frac{(\alpha^2-\alpha)(\alpha+\alpha^2)}{4} - \frac{(1-\alpha^2)}{4}$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

7. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου είναι $\alpha-3$ και $\alpha+3$. Αν το εμβαδόν του είναι $16\ cm^2$, να βρείτε το μήκος και το πλάτος του.

8. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:
   (α) $(x+\psi+\omega)^2 = x^2+\psi^2+\omega^2+2x\psi+2y\omega+2x\omega$
   (β) $\left(\frac{\alpha-2\beta}{3}\right)^2 - \left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)^2 = -\frac{8\alpha\beta}{9}$
   (γ) $(\alpha^2-\beta^2)[(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta] = \alpha^4-\beta^4$
   (δ) $(\psi+2)^3-6(\psi+1)^2 = \psi^3+2$

9. Να δείξετε ότι η παράσταση $\left(\frac{1}{\beta}+\beta\right)^2 - \left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)^2$ είναι ανεξάρτητη του β και ακολούθως να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left(\frac{12}{34}+\frac{34}{12}\right)^2 - \left(\frac{34}{12}-\frac{12}{34}\right)^2$.

10. Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου:
$$P(a) = 2010a^{10} + 2a(2a^3-2009)^5$$

Ίσα πολυώνυμα είναι τα πολυώνυμα που έχουν ακριβώς τους ίδιους όρους.

11. Να βρείτε τις τιμές των α,β,γ ώστε τα πολυώνυμα $P(x) = (-5x^2+4x-3)-(x^2-2x+1)+(3x^2+x)$ και $Q(x) = ax^2+\beta x+\gamma$, να είναι ίσα.

ΕΝΟΤΗΤΑ

3

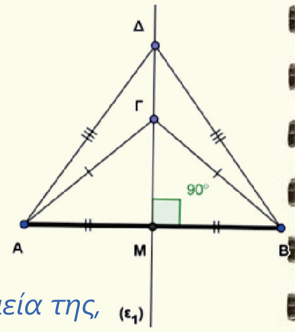
Γεωμετρία

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε και να κατασκευάζουμε συμμετρικά σχήματα (σχήματα με άξονα συμμετρίας και σχήματα με κέντρο συμμετρίας).
- Να αναγνωρίζουμε και να κατασκευάζουμε βασικά είδη τετραπλεύρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο).
- Να αποδεικνύουμε και να εφαρμόζουμε τις ιδιότητες βασικών τετραπλεύρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο) στην επίλυση προβλημάτων.
- Να ανακαλύπτουμε, να αποδεικνύουμε και να εφαρμόζουμε τύπους για την εύρεση του εμβαδού και της περιμέτρου επίπεδων σχημάτων.
- Να υπολογίζουμε την περίμετρο και το εμβαδόν κύκλου και μεικτόγραμμων σχημάτων.
- Να επιλύουμε προβλήματα που εμπεριέχουν σχέσεις μεταξύ ακτίνας, διαμέτρου, εμβαδού και μήκους περιφέρειας κύκλου.
- Να διερευνούμε και να εφαρμόζουμε σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων επίπεδων σχημάτων και του εμβαδού τους.

Έχουμε μάθει …

- **Μεσοκάθετος** ευθύγραμμου τμήματος AB ονομάζεται η ευθεία ε_1 που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα AB και περνά από το μέσο του.

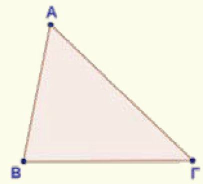


➢ *Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος, ισαπέχει από τα άκρα του.*

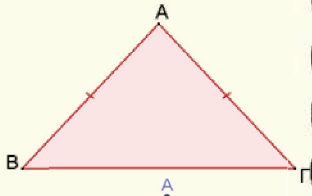
Παράδειγμα:

Αν ε_1 μεσοκάθετος του AB και τα Γ, Δ είναι δύο σημεία της, τότε $A\Gamma = \Gamma B$ και $A\Delta = \Delta B$.

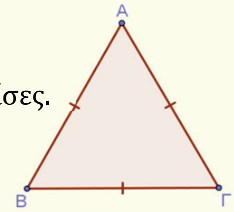
Είδη τριγώνων με βάση τις πλευρές τους



- **Σκαληνό** είναι το τρίγωνο που έχει τις πλευρές του άνισες.
  Παράδειγμα:
  $AB \neq B\Gamma \neq A\Gamma$



- **Ισοσκελές** είναι το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες.
  Παράδειγμα:
  $AB = A\Gamma$



- **Ισόπλευρο** είναι το τρίγωνο που έχει και τις τρεις πλευρές ίσες.
  Παράδειγμα:
  $AB = A\Gamma = B\Gamma$

Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

- **Διάμεσος** τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.

- **Ύψος** τριγώνου ονομάζεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από μια κορυφή του τριγώνου προς την ευθεία που περιέχει την απέναντι πλευρά του (βάση).

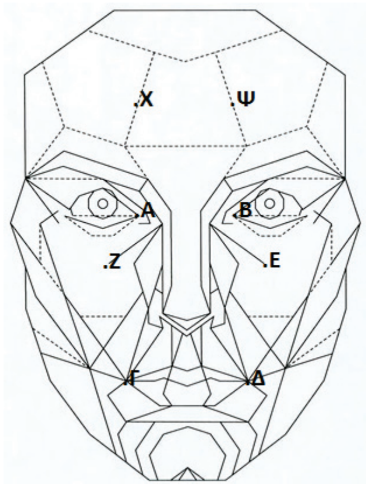
- **Διχοτόμος** τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που διχοτομεί μια γωνία του τριγώνου, ξεκινά από την κορυφή της γωνίας του και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.

➢ *Σε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση είναι και διχοτόμος και διάμεσος.*

➢ *Σε ισόπλευρο τρίγωνο κάθε ύψος είναι και διάμεσος και διχοτόμος.*

Συμμετρία

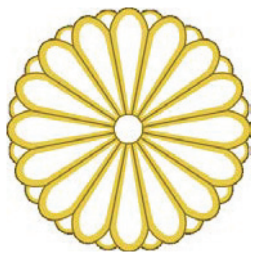
Εξερεύνηση



Δίπλα φαίνεται ένα σκίτσο ενός γλύπτη που θα τον βοηθήσει να κατασκευάσει μια προτομή.

✓ Τι παρατηρείτε για τα σημεία $A, B, Γ, Δ, E, Z, X$ και $Ψ$;

Διερεύνηση (1)

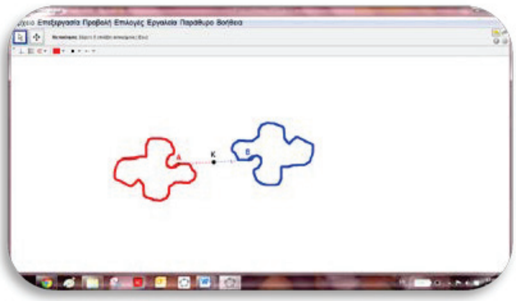


Να παρατηρήσετε το διπλανό σχήμα. Να φέρετε ευθεία $(ε)$ που να χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη, έτσι ώστε όταν διπλώσουμε το χαρτί στο οποίο είναι σχεδιασμένο κατά μήκος της ευθείας ε, τα δυο μέρη να ταυτιστούν.

✓ Πόσες τέτοιες ευθείες μπορείτε να βρείτε;

Διερεύνηση (2)

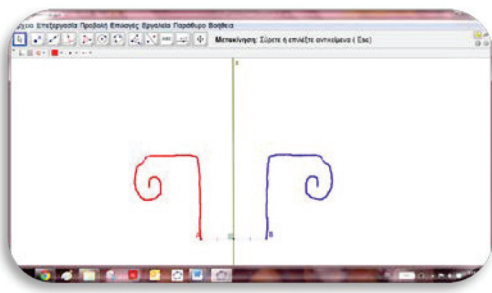
Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «B_En3_Symetria2.ggb».



✓ Να μετακινήσετε το σημείο A και να κατασκευάσετε ένα τυχαίο σχήμα.

✓ Ποια σχέση συνδέει τα σημεία του κόκκινου σχήματος με τα σημεία του μπλε σχήματος;

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «B_En3_Symetria1. ggb»

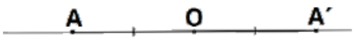


✓ Να μετακινήσετε το σημείο A και να κατασκευάσετε ένα τυχαίο σχήμα.

✓ Ποια σχέση συνδέει τα σημεία του κόκκινου σχήματος με τα σημεία του μπλε σχήματος;

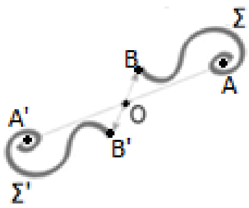
Μαθαίνω

Συμμετρία ως προς σημείο

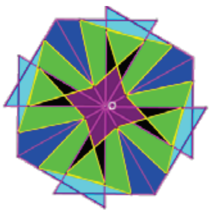


- **Συμμετρικό ενός σημείου** $\boldsymbol{A}$ ως προς σημείο Ο ονομάζεται το σημείο A' που ανήκει στην ευθεία AO με $AO = OA'$. Τότε λέμε ότι τα σημεία A και A' είναι συμμετρικά με **κέντρο συμμετρίας** το O.

  ➢ *Όταν τα σημεία A και A' είναι συμμετρικά ως προς κέντρο συμμετρίας O, τότε το κέντρο συμμετρίας είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματοςAA'.*

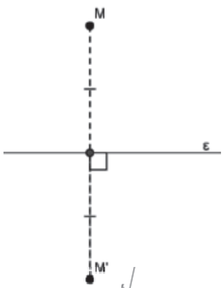


- **Συμμετρικό ενός σχήματος** $\boldsymbol{\Sigma}$ ως προς σημείο O ονομάζεται το σχήμα Σ' που δημιουργείται από το σύνολο των συμμετρικών σημείων του Σ ως προς το O. Τότε λέμε ότι Σ και Σ' είναι συμμετρικά με κέντρο συμμετρίας το O.



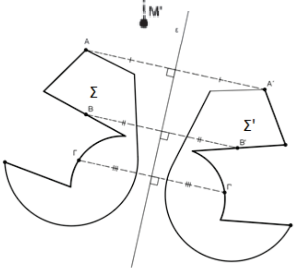
- **Κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος** είναι ένα σημείο O, ως προς το οποίο το συμμετρικό του σχήματος ταυτίζεται με το ίδιο το σχήμα. Δηλαδή, <u>όλα</u> τα σημεία του σχήματος έχουν συμμετρικό, ως προς O, πάνω στο ίδιο σχήμα.

Συμμετρία ως προς άξονα



- **Συμμετρικό του σημείου** $\boldsymbol{M}$ ως προς μια ευθεία ε ονομάζεται το σημείο M', όταν τα M και M' ισαπέχουν από την ευθεία ε και $MM' \perp \varepsilon$. Τότε λέμε ότι τα σημεία M και M' είναι συμμετρικά με **άξονα συμμετρίας** την ευθεία ε.

  ➢ *Όταν τα σημεία M και M' είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ε, η ευθεία ε είναι η <u>μεσοκάθετη</u> του ευθύγραμμου τμήματος MM'.*



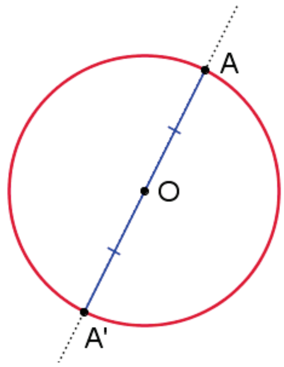
- **Συμμετρικό του σχήματος** $\boldsymbol{\Sigma}$ ως προς την ευθεία ε ονομάζεται το σχήμα Σ' που δημιουργείται από το σύνολο των συμμετρικών σημείων του Σ, ως προς την ε. Τότε λέμε ότι τα σχήματα Σ και Σ′ έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία ε.

- **Άξονας συμμετρίας ενός σχήματος** είναι μια ευθεία ε, ως προς την οποία το συμμετρικό του σχήματος συμπίπτει με το ίδιο το σχήμα. Δηλαδή όλα τα σημεία του σχήματος έχουν συμμετρικό ως προς την ευθεία ε πάνω στο σχήμα.

Παραδείγματα

1. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο.
   (α) Να δείξετε ότι κάθε σημείο του κύκλου είναι συμμετρικό με ένα άλλο σημείο του, με κέντρο συμμετρίας το κέντρο του κύκλου.
   (β) Να εξετάσετε πόσους άξονες συμμετρίας έχει ο κύκλος.

Λύση:

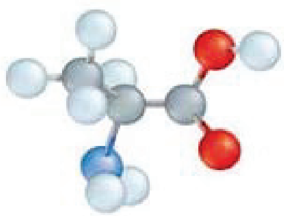


(α) *Αρκεί να αποδείξουμε τον πιο πάνω ισχυρισμό για ένα τυχαίο σημείο A του κύκλου. Τότε θα μπορούμε να πούμε ότι ισχύει για κάθε σημείο του κύκλου.*
Πράγματι, αν κατασκευάσουμε έναν κύκλο (O,ρ) και πάρουμε ένα τυχαίο σημείο του A, τότε η ευθεία που περνά από το A και το O, θα τέμνει τον κύκλο σε ένα άλλο σημείο A'.
Το A' είναι συμμετρικό του A με κέντρο συμμετρίας το O, αφού AA' είναι η διάμετρος του κύκλου και $OA = OA' = \rho$.

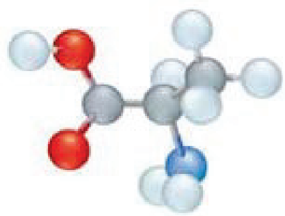
(β) *Σε έναν κύκλο κάθε ευθεία που περνά από το κέντρο του (διάμετρος) είναι άξονας συμμετρίας του. Άρα, ο κύκλος έχει άπειρους άξονες συμμετρίας.*

2. Ένα από τα αμινοξέα, ή σολανίνη (amino acid alanine) έχει δύο μορφές $\Sigma\chi.1$ (laevo) και $\Sigma\chi.2$ (dextro). Να εξετάσετε το είδος της συμμετρίας που παρουσιάζουν οι δύο μοριακές τους δομές όπως φαίνονται στο επίπεδο:

Σχ.1

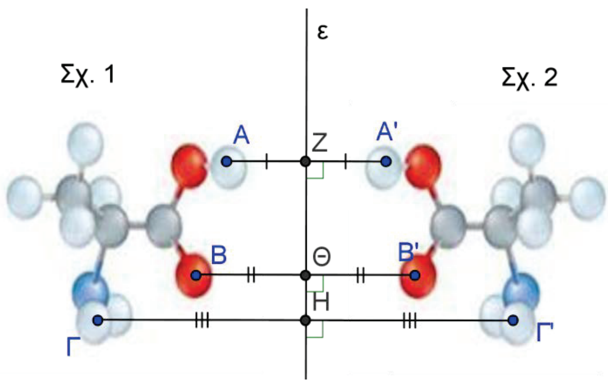


Σχ.2

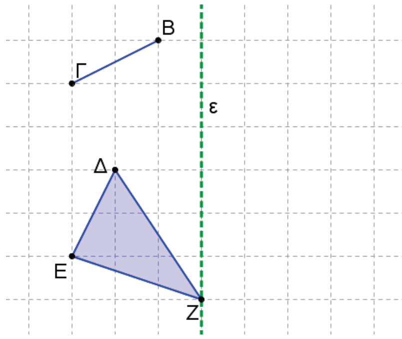


Λύση:

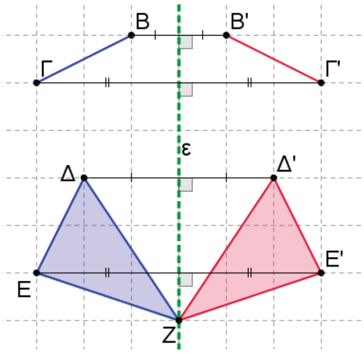
Οι δύο μοριακές δομές είναι συμμετρικές με άξονα συμμετρίας την ευθεία ε, αφού <u>κάθε</u> σημείο του $\Sigma\chi.1$ είναι συμμετρικό με ένα σημείο του $\Sigma\chi.2$ ως προς την ευθεία ε.



3. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό των πιο κάτω σχημάτων ως προς την ευθεία ε:



Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό των σχημάτων κατασκευάζουμε το συμμετρικό του κάθε σημείο ως προς την ευθεία ε.



Δραστηριότητες

1. Πιο κάτω δίνονται διάφορες σημαίες κρατών. Να βρείτε, όπου υπάρχουν, άξονες συμμετρίας:

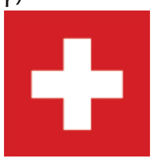
(α)

Μπαχάμες

(β)

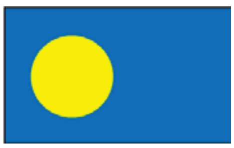
Ελλάδα

(γ)



Ελβετία

(δ)



Παλαού

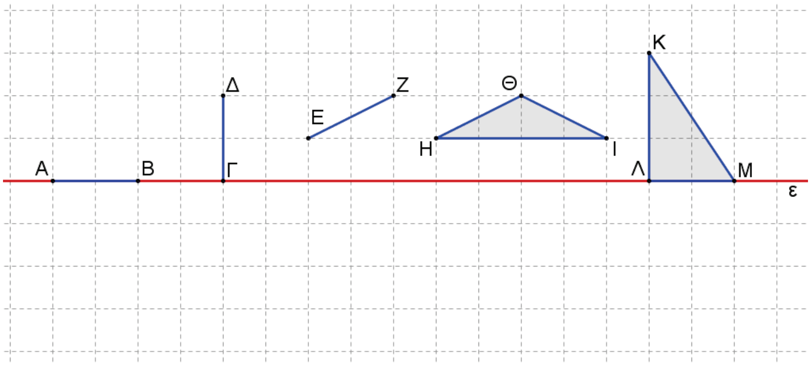
(ε)

Κύπρος

(στ)

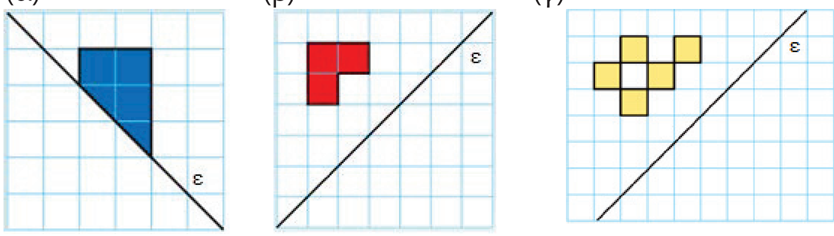
Δανία

2. Να βρείτε το συμμετρικό καθενός από τα πιο κάτω σχήματα ως προς την ευθεία ε.



3. Να κατασκευάσετε τα συμμετρικά των σκιασμένων σχημάτων ως προς την ευθεία ε για κάθε περίπτωση:

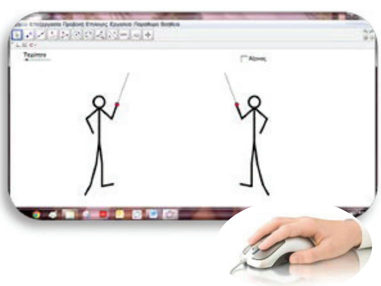
(α) (β) (γ)



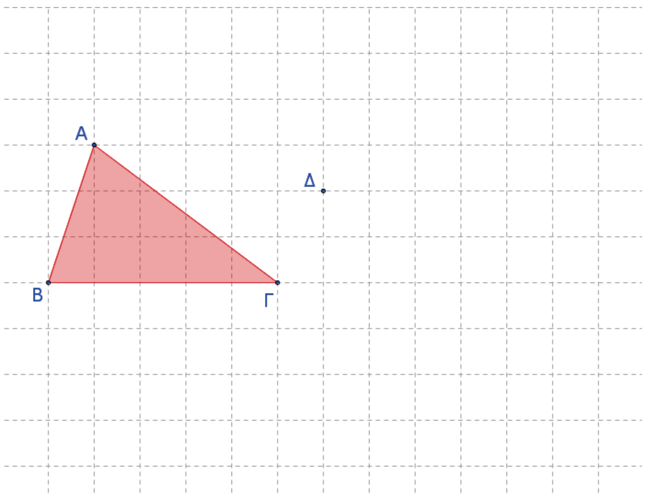
4. Πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών να τοποθετήσετε:
   (α) δυο αριθμούς α και β ώστε να είναι συμμετρικοί με κέντρο συμμετρίας τον αριθμό -3,
   (β) έναν αριθμό γ που να είναι συμμετρικός με τον αριθμό α με κέντρο συμμετρίας το μηδέν,
   (γ) τον αριθμό ο οποίος είναι κέντρο συμμετρίας των αριθμών β και γ.

5. Να εξετάσετε ποια από τα ψηφία έχουν:
   (α) έναν άξονα συμμετρίας,
   (β) δύο άξονες συμμετρίας,
   (γ) κανέναν άξονα συμμετρίας.

6. Σε έναν προσομοιωτή εκμάθησης ξιφασκίας παρουσιάζονται διάφορες κινήσεις των αθλητών. Οι κινήσεις που κάνει ο αθλητής αριστερά αντιγράφονται ακριβώς οι ίδιες από τον αθλητή απέναντί του. Να κατασκευάσετε τον άξονα συμμετρίας των δύο φιγούρων, με τη βοήθεια των εργαλείων του λογισμικού και ακολούθως να επιβεβαιώσετε την απάντησή σας με την επιλογή εμφάνισης του άξονα. Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «B_En3_symmetria_kathreftis.ggb».

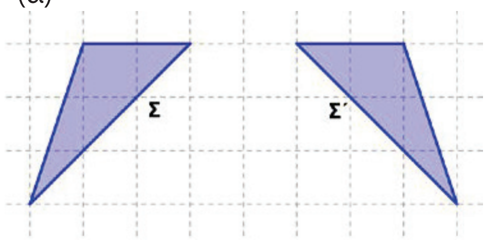


7. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του τριγώνου $ΑΒΓ$ με κέντρο συμμετρίας:
   (α) το σημείο $Γ$,
   (β) το σημείο $Δ$,
   (γ) το σημείο $Μ$, που είναι μέσο του $ΒΓ$.

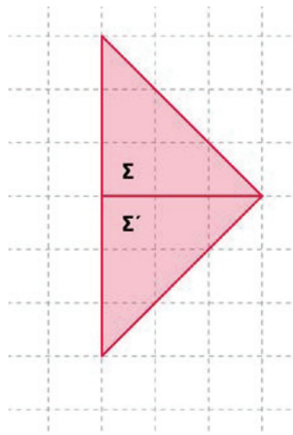


8. Το σχήμα $Σ'$ είναι συμμετρικό του σχήματος $Σ$ με άξονα συμμετρίας την ευθεία $ε$. Να σχεδιάσετε τον άξονα συμμετρίας σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

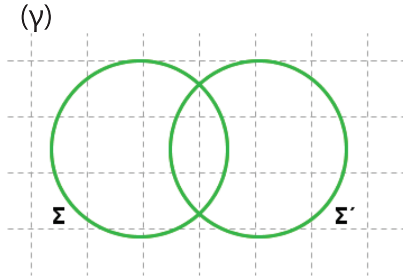
(α)

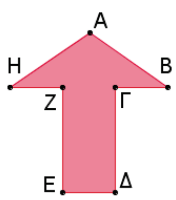


(β)



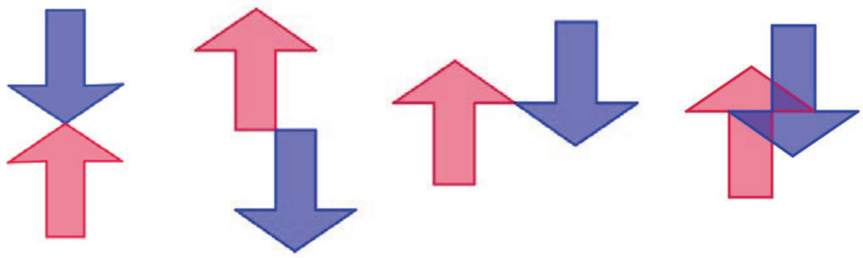
(γ)



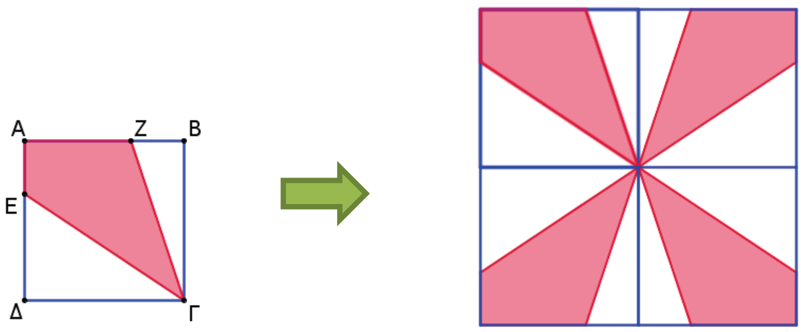


9. Ο Αλέξης κατασκεύασε το συμμετρικό του διπλανού σχήματος ως προς 4 διαφορετικά σημεία του σχήματος. Να βρείτε ως προς ποιο σημείο εφάρμοσε συμμετρία για να προκύψουν τα πιο κάτω σχήματα:

(α) (β) (γ) (δ)



10. Η Εύα έχει σχεδιάσει το πιο κάτω σχήμα. Τι οδηγίες μπορεί να έδωσε στη διπλανή της για να προκύψει το δεύτερο σχήμα.



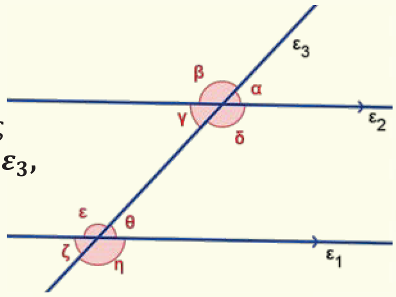
11. Να εξετάσετε πόσους και ποιους άξονες συμμετρίας έχει ένα:
    (α) σκαληνό τρίγωνο,
    (β) ισοσκελές τρίγωνο,
    (γ) ισόπλευρο τρίγωνο.

12. Να σχεδιάσετε μία ευθεία ε και να κατασκευάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΔEZ με $\Delta E = \Delta Z = 5\,cm$ και $\hat{\Delta} = 40°$, έτσι ώστε η ευθεία ε να είναι άξονας συμμετρίας του τριγώνου αυτού.

13. Να σχεδιάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τις διαμέσους του $A\Delta$, BE και ΓZ. Να εξηγήσετε γιατί οι διάμεσοι του τριγώνου:
    (α) είναι άξονες συμμετρίας του,
    (β) είναι διχοτόμοι και ύψη του.

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Έχουμε μάθει …



- Αν ε_1 και ε_2 είναι δύο **παράλληλες** ευθείες οι οποίες τέμνονται από μία **τρίτη ευθεία** ε_3, τότε:
  - οι **«εντός εναλλάξ»** γωνίες είναι **ίσες,**

    Παράδειγμα: $\hat{\gamma} = \hat{\theta}$

  - οι «**εντός και επί τα αυτά**» γωνίες είναι **παραπληρωματικές,**

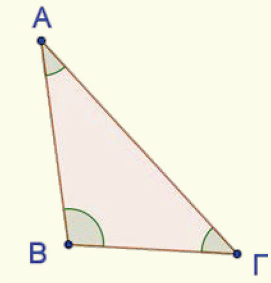
    Παράδειγμα: $\hat{\varepsilon} + \hat{\gamma} = 180°$

  - οι «**εντός – εκτός και επί τα αυτά**» γωνίες είναι **ίσες.**

    Παράδειγμα: $\hat{\alpha} = \hat{\theta}$

- Το **άθροισμα των γωνιών** ενός τριγώνου είναι ίσο με 180°.

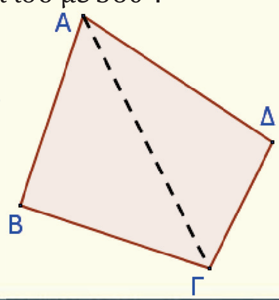
Παράδειγμα:
Στο τρίγωνο ΑΒΓ: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$



- Το πολύγωνο που αποτελείται από 4 πλευρές ονομάζεται τετράπλευρο.

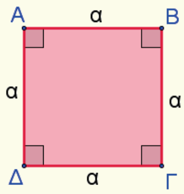
- Το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι ίσο με 360°.

Παράδειγμα:
Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^o$



Μέτρηση τριγώνων και τετραπλεύρων

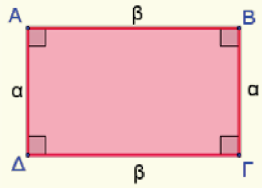
- **Τετράγωνο**



$$\boldsymbol{\Pi_{\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon} = 4 \cdot \alpha}$$

$$\boldsymbol{E_{\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon} = a^2}$$

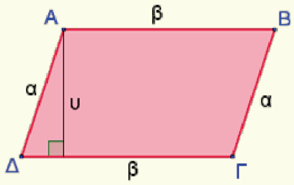
- **Ορθογώνιο**



$$\boldsymbol{\Pi_{\text{ορθογωνίου}} = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)}$$

$$\boldsymbol{E_{\text{ορθογωνίου}} = \alpha \cdot \beta}$$

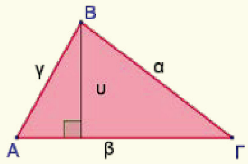
- **Παραλληλόγραμμο**



$$\boldsymbol{\Pi_{\text{παραλληλογράμμου}} = 2\alpha + 2\beta}$$
$$\boldsymbol{= 2(\alpha + \beta)}$$

$$\boldsymbol{E_{\text{παραλληλογράμμου}} = \beta \cdot \upsilon}$$

- **Τρίγωνο**

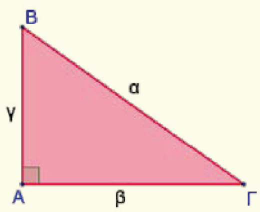


$$\boldsymbol{\Pi_{\text{τριγώνου}} = \alpha + \beta + \gamma}$$

$$\boldsymbol{E_{\text{τριγώνου}} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}}$$

- **Πυθαγόρειο Θεώρημα (Π.Θ.)**
  Σε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του.

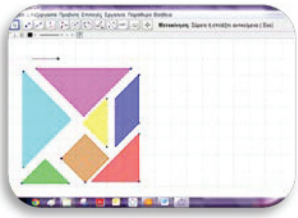
  Παράδειγμα:

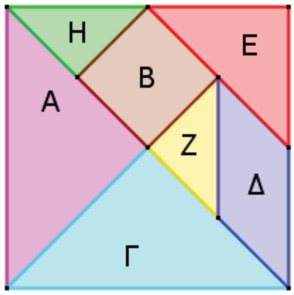


$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Παραλληλόγραμμο

Διερεύνηση (1)





Το Κινέζικο τετράγωνο (ταγκράμ) είναι ένα αρχαίο Κινέζικο παιχνίδι που αποτελείται από 7 κομμάτια, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να χρησιμοποιήσετε το αρχείο «B_En3_tagram.ggb».

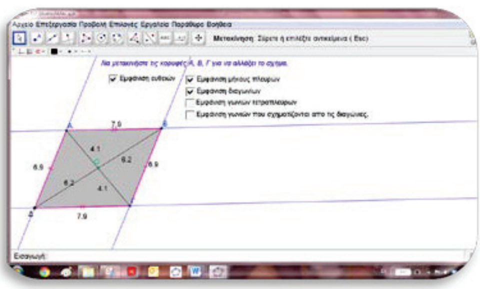
- ✓ Να αναγνωρίσετε κάθενα από τα κομμάτια του ταγκράμ.
- ✓ Να κατασκευάσετε όσο το δυνατόν περισσότερα παραλληλόγραμμα, χρησιμοποιώντας κάθε φορά όσα κομμάτια του ταγκράμ θέλετε.
- ✓ Να δώσετε έναν ορισμό για το παραλληλόγραμμο και να περιγράψετε τις ιδιότητες που έχει το τετράπλευρο αυτό.

Διερεύνηση (2)

Σε ένα φύλλο χαρτί ή και με τη χρήση λογισμικού:

- Να κατασκευάσετε παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2.
- Να φέρετε ευθεία ε_3 που να τέμνει τις ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία A και B αντίστοιχα.
- Να φέρετε ευθεία ε_4 παράλληλη με την ευθεία ε_3 που τέμνει τις ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.
- Να χαρακτηρίσετε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$.

Να ανοίξετε το αρχείο «B_En3_Parallilogrammo.ggb».

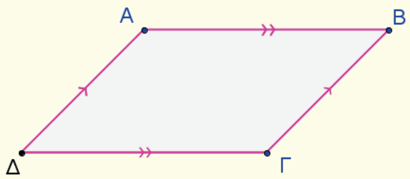


- ✓ Να μετακινήσετε τις κορυφές του παραλληλογράμμου και να παρατηρήσετε το μέτρο των γωνιών και τα μήκη των πλευρών και των διαγωνίων του.
- ✓ Να συγκρίνετε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων AO με $O\Gamma$ και ΔO με OB.

Μαθαίνω

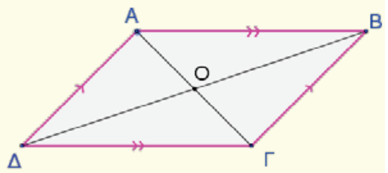
- Παραλληλόγραμμο ονομάζεται το τετράπλευρο επίπεδο σχήμα που έχει τις **απέναντι πλευρές του παράλληλες**.

  Παράδειγμα:
  $ΑΒ \parallel ΔΓ$ *και* $ΑΔ \parallel ΒΓ \Rightarrow ΑΒΓΔ$
  παραλληλόγραμμο

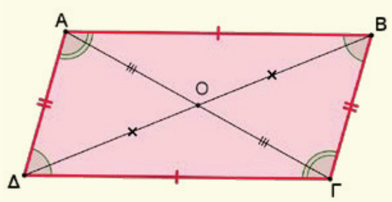


- Το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου ονομάζεται **κέντρο** του παραλληλογράμμου.

  Παράδειγμα:
  Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ:
  Το Ο είναι το σημείο της τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΔΒ $\Rightarrow$
  Άρα, το Ο είναι το κέντρο του ΑΒΓΔ #



- Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι πιο κάτω **ιδιότητες**:



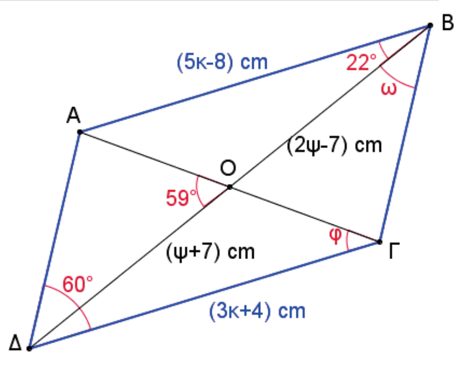
  - Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
    Παράδειγμα:
    $ΑΒ = ΔΓ$ *και* $ΑΔ = ΒΓ$

  - Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
    Παράδειγμα:
    $\hat{Α} = \hat{Γ}$ *και* $\hat{Β} = \hat{Δ}$

  - Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται, δηλαδή το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το μέσο των διαγωνίων του.
    Παράδειγμα:
    $ΟΑ = ΟΓ$ *και* $ΟΒ = ΟΔ$

Παραδείγματα

1. Στο σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.
   Να υπολογίσετε τις τιμές των $κ, ω, ψ$ και $φ$.



Λύση:

Το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Άρα,

- *Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.*

  $ΑΒ = ΔΓ \Rightarrow 5κ - 8 = 3κ + 4$

  $\Rightarrow 2κ = 12$

  $\Rightarrow κ = 6$

- *Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.*

  $ΔΟ = ΟΒ \Rightarrow 2ψ - 7 = ψ + 7$

  $\Rightarrow ψ = 14$

- *Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.*

  $\hat{B} = \hat{Δ} \Rightarrow ω + 22° = 60°$

  $\Rightarrow ω = 60° - 22°$

  $\Rightarrow ω = 38°$

$Α\hat{Ο}Δ = Ο\hat{Α}Β + Α\hat{Β}Ο$ *(εξωτερική γωνία του τριγώνου $ΑΟΒ$)*

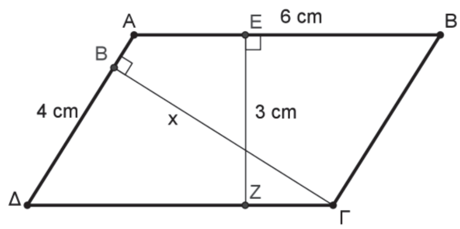
$\Rightarrow 59° = Ο\hat{Α}Β + 22°$

$\Rightarrow Ο\hat{Α}Β = 59° - 22°$

$\Rightarrow Ο\hat{Α}Β = 37°$

$\Rightarrow φ = 37°$ *(εντός εναλλάξ με την $Ο\hat{Α}Β$)*

2. Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο. Να υπολογίσετε:
   (α) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$,
   (β) το ύψος x που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΔ.



Λύση:

(α) $E_{ΑΒΓΔ} = β \cdot υ = 6 \cdot 3 = 18\ cm^2$

(β) $E_{ΑΒΓΔ} = x \cdot 4 \Rightarrow 18 = x \cdot 4$

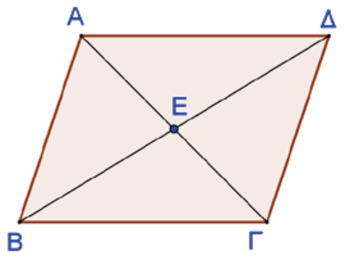
$\Rightarrow 4x = 18$

$\Rightarrow x = 18 : 4$

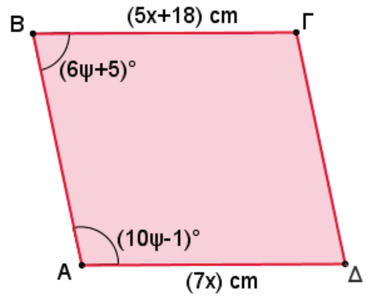
$\Rightarrow x = 4{,}5\ cm$

Δραστηριότητες

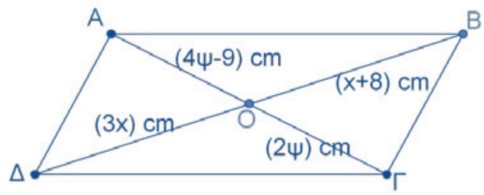
1. Αν το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, να συμπληρώσετε τα πιο κάτω:
   (α) Αν $ΑΒ = 8\ cm$, τότε $ΔΓ = \cdots$
   (β) Αν $ΒΔ = 18\ cm$, τότε $ΒΕ = \cdots$
   (γ) Αν $Δ\hat{Α}Β = 101°$, τότε $Β\hat{Γ}Δ = \cdots$
   (δ) Αν $Α\hat{Β}Γ = 80°$, τότε $Β\hat{Α}Δ = \cdots$



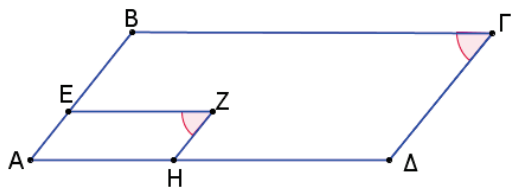
2. Αν $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, να υπολογίσετε:
   (α) Το μήκος των πλευρών $ΒΓ$ και $ΑΔ$.
   (β) Τις γωνίες του παραλληλογράμμου.



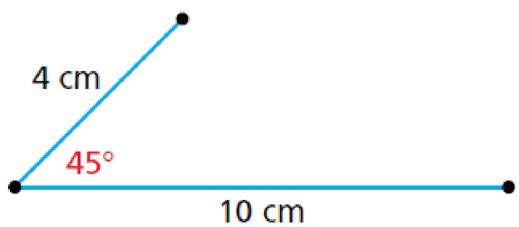
3. Αν $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, να υπολογίσετε το μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων $ΑΟ$ και $ΒΔ$.



4. Αν $ΑΒΓΔ$ και $ΑΕΖΗ$ είναι παραλληλόγραμμα, να δείξετε ότι $\hat{Ζ} = \hat{Γ}$.

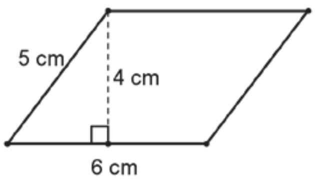


5. Να περιγράψετε πώς θα μπορούσατε να συνεχίσετε την πιο κάτω κατασκευή για να συμπληρωθεί ένα παραλληλόγραμμο.

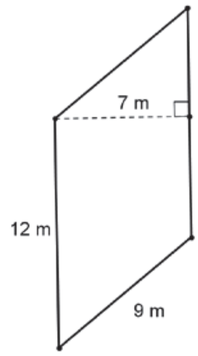


6. Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο των πιο κάτω παραλληλογράμμων.

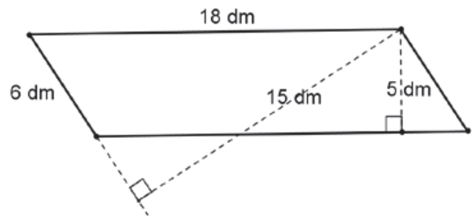
(α)



(β)



(γ)



7. Ένα παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν $120\,cm^2$ και ύψος $15\,cm$. Να υπολογίσετε τη βάση που αντιστοιχεί στο ύψος αυτό.

8. Ένα παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $26\,cm$ και η μία πλευρά του είναι $8\,cm$. Αν το εμβαδόν του είναι $20\,cm^2$, να υπολογίσετε τα ύψη του.

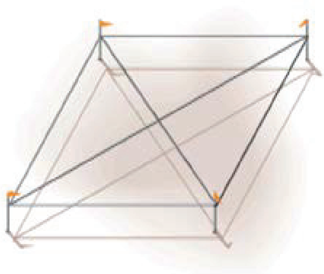
9. Ποιες είναι οι συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής, αν οι τρεις κορυφές ενός παραλληλογράμμου είναι $(-1,1)$, $(2,1)$ και $(0,-4)$;

Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο

Διερεύνηση (1)

Οι οικοδόμοι θέλουν να επιβεβαιώσουν ότι μία κατασκευή σχήματος τετραπλεύρου, έχει σχήμα ορθογώνιο.

✓ Ποιες σχέσεις νομίζετε ότι πρέπει να εξετάσουν για να επιβεβαιώσουν ότι η κατασκευή έχει σχήμα ορθογώνιο;

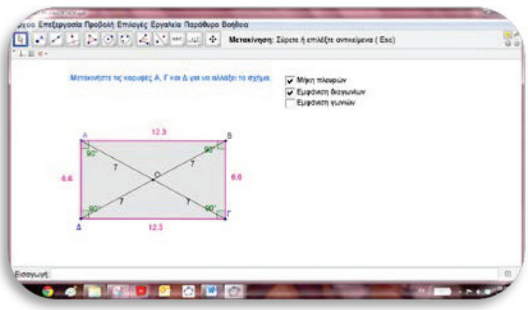


Διερεύνηση (2)

Σε ένα φύλλο χαρτί ή και με τη χρήση λογισμικού:

- Να κατασκευάσετε δύο κάθετες ευθείες ε_1 και ε_2 που να τέμνονται σε σημείο A.
- Να φέρετε ευθεία $\varepsilon_3 \parallel \varepsilon_1$ που τέμνει την ευθεία ε_2 στο σημείο B.
- Να φέρετε ευθεία $\varepsilon_4 \parallel \varepsilon_2$ που τέμνει την ευθεία ε_1 στο σημείο Δ και την ε_3 στο σημείο Γ.
- Να χαρακτηρίσετε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$.

Να ανοίξετε το αρχείο «B_En3_Orthogonio.ggb».



✓ Να μετακινήσετε τις κορυφές του ορθογώνιου παραλληλογράμμου και να παρατηρήσετε το μέτρο των γωνιών, τα μήκη των πλευρών και των διαγωνίων του.

✓ Ποιες ιδιότητες έχει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο;

✓ Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχουν ιδιότητες του ορθογωνίου που δεν ισχύουν στο παραλληλόγραμμο.

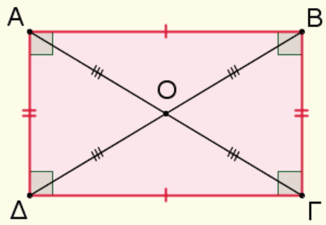
Μαθαίνω

- **Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο** ή πιο απλά ορθογώνιο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει και τις **τέσσερις γωνίες του ορθές**.

- Κάθε ορθογώνιο είναι και **παραλληλόγραμμο.**

Στο ορθογώνιο οι διαγώνιοί του είναι ίσες και διχοτομούνται.
Άρα,
ΟΑ = ΟΓ = ΟΒ = ΟΔ.

- Σε κάθε ορθογώνιο ισχύουν οι πιο κάτω **ιδιότητες**:

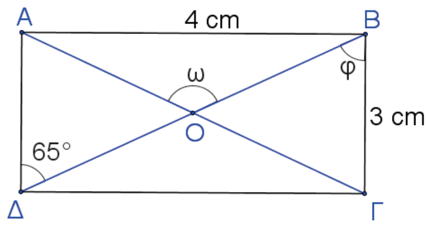


  - Όλες οι ιδιότητες που ισχύουν στο παραλληλόγραμμο.
  - Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

  Παράδειγμα:
  Στο ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$: $ΑΓ = ΒΔ$

Παραδείγματα

1. Στο διπλανό ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ δίνονται: $ΑΒ = 4\ cm$, $ΒΓ = 3\ cm$ και $Α\hat{Δ}Β = 65°$.
Να υπολογίσετε:
(α) τα μήκη των τμημάτων $ΒΔ, ΟΒ, ΟΓ$ και $ΟΑ$,
(β) το μέτρο των γωνιών $ω$ και $φ$.



Λύση:

- *Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Άρα, ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα:*
$(ΑΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΒΓ)^2$
$\Rightarrow (ΑΓ)^2 = 4^2 + 3^2$
$\Rightarrow (ΑΓ)^2 = 16 + 9$
$\Rightarrow (ΑΓ)^2 = 25$
$\Rightarrow ΑΓ = \sqrt{25}$
$\Rightarrow ΑΓ = 5\ cm$

- *Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες και διχοτομούνται:*
  $A\Gamma = B\Delta = 5\ cm$
  $AO = O\Gamma = OB = O\Delta = \frac{A\Gamma}{2} = 2{,}5\ cm$

- *Οι πλευρές του ορθογωνίου είναι παράλληλες $A\Delta \parallel B\Gamma$. Άρα, $\hat{\varphi} = 65°$ (εντός εναλλάξ με τη $A\hat{\Delta}B$)*

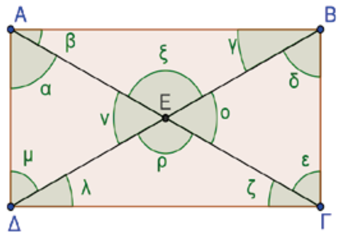
- *Το τρίγωνο ΓOB είναι ισοσκελές, αφού $BO = O\Gamma$:*
  $O\hat{B}\Gamma = O\hat{\Gamma}B = \hat{\varphi} = 65°$

  $\hat{\omega} = 2\hat{\varphi} = 130°$ (*η* $\hat{\omega}$ *είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου* ΓOB)

Δραστηριότητες

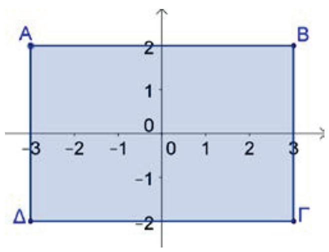
1. Αν $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο και $B\Delta = (30 - x)\ cm$, $A\Gamma = (4x - 60)\ cm$, να υπολογίσετε το x.

2. Να υπολογίσετε τις γωνίες που φαίνονται στο ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, αν $\hat{\beta} = 30°$.



3. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να τοποθετήσετε τα σημεία $A(1{,}1)$, $B(5{,}1)$, $\Gamma(5{,}3)$, $\Delta(1{,}3)$. Να βρείτε:
   (α) το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$,
   (β) το κέντρο συμμετρίας του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

4. Το $AB\Gamma\Delta$ στο διπλανό σχήμα είναι ένα ορθογώνιο, του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται στην αρχή των αξόνων. Να βρείτε:
   (α) το μήκος των AB και $B\Delta$,
   (β) την περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$.



5. Ο Ιάκωβος ισχυρίζεται ότι ένα τετράπλευρο που έχει δύο ορθές γωνίες και ένα ζευγάρι παράλληλες ευθείες είναι ορθογώνιο. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό του.

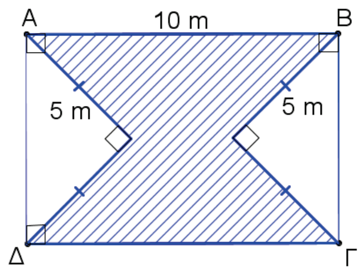
6. Να υπολογίσετε τις διαστάσεις ορθογωνίου με εμβαδόν $72\,m^2$, αν το μήκος του είναι διπλάσιο από το πλάτος του.

7. Ένα παραλληλόγραμμο έχει το ίδιο εμβαδόν και την ίδια περίμετρο με ένα ορθογώνιο που έχει διαστάσεις $6\,dm$ και $4\,dm$. Αν η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι $5\,dm$, να υπολογίσετε τα ύψη του. Τι παρατηρείτε;

Δύο επίπεδα σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν λέγονται **ισοδύναμα ή ισεμβαδικά**.

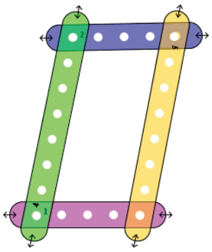
8. Ορθογώνιο είναι ισοδύναμο με τρίγωνο. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $24\,cm$ και το μήκος του $8\,cm$. Η βάση του τριγώνου είναι τετραπλάσια από το ύψος του. Να βρείτε τη βάση και το ύψος του τριγώνου.

9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του διπλανού σκιασμένου σχήματος:



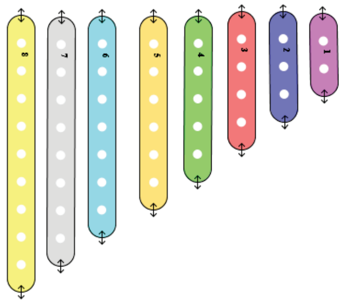
Ρόμβος

Διερεύνηση (1)



Οι πιο κάτω ράβδοι είναι δυνατόν να ενωθούν με βίδες για να κατασκευαστούν διάφορα σχήματα.

✓ Να περιγράψετε πώς θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε τις ράβδους για να κατασκευάσετε έναν ρόμβο.
(έχετε στη διάθεσή σας όσες από τις πιο κάτω ράβδους χρειάζεστε).

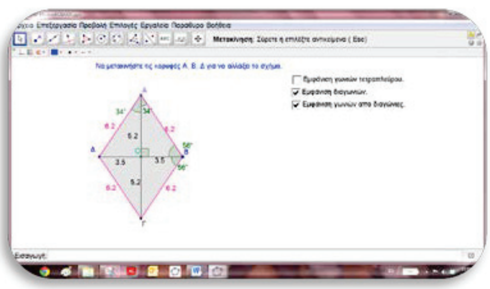


Διερεύνηση (2)

Σε ένα φύλλο χαρτί ή και με τη χρήση λογισμικού:

- Να κατασκευάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα AK.
- Να κατασκευάσετε κύκλο με κέντρο το A και ακτίνα AK.
- Να σημειώσετε δύο σημεία B και Δ στον κύκλο, έτσι ώστε τα σημεία A, B, Δ να μην είναι συνευθειακά.
- Να κατασκευάσετε δύο κύκλους με ακτίνα AK και κέντρο τα σημεία B και Δ αντίστοιχα. Να ονομάσετε Γ το σημείο τομής των δύο κύκλων.
- Να χαρακτηρίσετε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$.

Να ανοίξετε το αρχείο «B_En3_Romvos.ggb», για να διερευνήσετε τις ιδιότητες που έχει ένας ρόμβος.



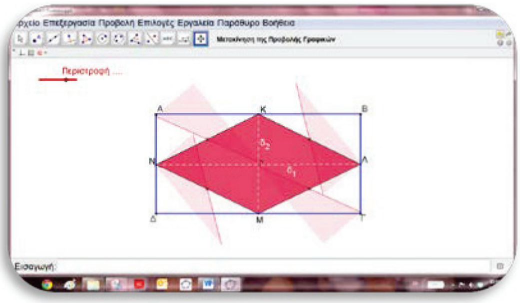
✓ Να μετακινήσετε τις κορυφές του ρόμβου και να παρατηρήσετε τα μήκη των πλευρών και των διαγωνίων του.

✓ Ποια είναι η σχέση μεταξύ των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$;

✓ Τι σχέση έχει η διαγώνιος $A\Gamma$ με τις γωνίες A και Γ;

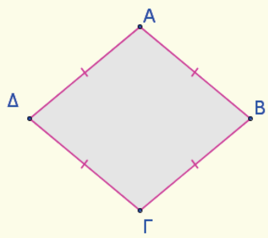
Διερεύνηση (3)

Να ανοίξετε το αρχείο «B_En3_EmvadoRomvou.ggb».

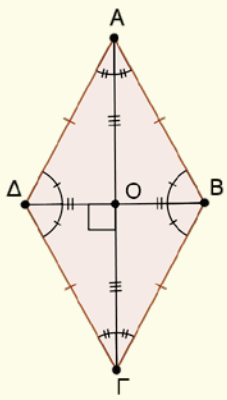


✓ Να μετακινήσετε τις κορυφές του ρόμβου και να βρείτε έναν τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού του, χρησιμοποιώντας τις διαγωνίους του.

Μαθαίνω



- Ρόμβος ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει και τις **τέσσερις πλευρές του ίσες**.
- Κάθε ρόμβος είναι και **παραλληλόγραμμο.**



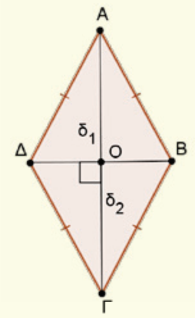
- Σε κάθε ρόμβο ισχύουν οι πιο κάτω **ιδιότητες**:
  - ✓ Όλες οι ιδιότητες που ισχύουν στο παραλληλόγραμμο.
  - ✓ Οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετες.
    Παράδειγμα:
    $A\Gamma \perp B\Delta$
  - ✓ Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.
    Παράδειγμα:
    ΑΓ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}$ *και* $\hat{\Gamma}$
    Δηλαδή, $\Gamma\hat{A}B = \Gamma\hat{A}\Delta$ *και* $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B$

    Στον ρόμβο ισχύει ότι οι απέναντι γωνίες είναι ίσες. Άρα:
    $\Gamma\hat{A}B = \Gamma\hat{A}\Delta = A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B$ *και*
    $A\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}B = A\hat{\Delta}B$.

Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούνται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.

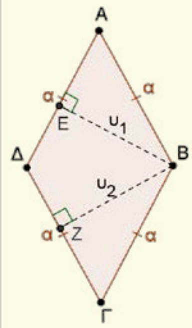
- Το **εμβαδόν του ρόμβου** με διαγωνίους δ_1 και δ_2 είναι ίσο με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.

$$\boldsymbol{E}_{\text{ρόμβου}} = \frac{\boldsymbol{\delta_1 \cdot \delta_2}}{\boldsymbol{2}}$$



Το εμβαδόν του ρόμβου μπορεί να υπολογιστεί και ως εμβαδόν παραλληλογράμμου:

$$\boldsymbol{E}_{\text{ρόμβου}} = \boldsymbol{\alpha \cdot \upsilon} \quad (\upsilon = \upsilon_1 = \upsilon_2)$$

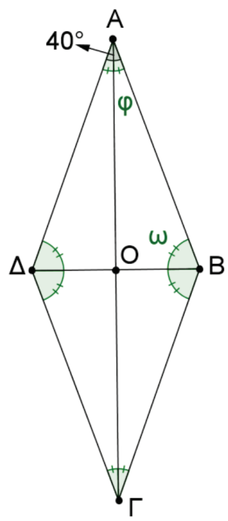


- Η **περίμετρος του ρόμβου** πλευράς α είναι ίση με το τετραπλάσιο της πλευράς του.

$$\boldsymbol{\Pi}_{\text{ρόμβου}} = \boldsymbol{4 \cdot \alpha}$$

Παραδείγματα

1. Δίνεται ένας ρόμβος $ΑΒΓΔ$ με γωνία $\hat{A} = 40°$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του ρόμβου και να δικαιολογήσετε γιατί οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.



Λύση:

- *$ΑΒΓΔ$ ρόμβος άρα $ΑΔ \parallel ΒΓ$:*
  $\hat{A} + \hat{B} = 180°$ *(οι $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά γωνίες)*
  $\Rightarrow \hat{B} = 180° - 40°$
  $\Rightarrow \hat{B} = 140°$

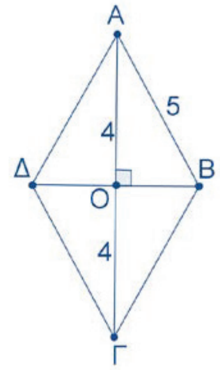
- *Οι απέναντι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες:*
  $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 40°$ *και* $\hat{\Delta} = \hat{B} = 140°$

- *Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του:*
  $\hat{\omega} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{140°}{2} = 70°$ *και* $\hat{\varphi} = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{40°}{2} = 20°$

- $\hat{\omega} + \hat{\varphi} + A\hat{O}B = 180°$ *(άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΟΒ)*
  $\Rightarrow A\hat{O}B = 180° - (70° + 20°)$
  $\Rightarrow A\hat{O}B = 90°$
  $\Rightarrow$ *οι διαγώνιοι του ρόμβου* ***τέμνονται κάθετα***.

2. Δίνεται ο ρόμβος $ΑΒΓΔ$ με κέντρο $Ο$. Αν η πλευρά του ρόμβου είναι $5\,cm$ και η διαγώνιος $ΑΓ = 8\,cm$, να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρό του.

Λύση:



Στον ρόμβο οι διαγώνιοί του είναι κάθετες και διχοτομούνται. Άρα:

$ΟΑ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{8}{2} = 4\ cm$

Το $ΑΟΒ$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο. Άρα, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$(ΟΒ)^2 = (ΑΒ)^2 - (ΟΑ)^2$
$\Rightarrow (ΟΒ)^2 = 5^2 - 4^2$
$\Rightarrow (ΟΒ)^2 = 25 - 16$
$\Rightarrow (ΟΒ)^2 = 9$
$\Rightarrow ΟΒ = \sqrt{9}$
$\Rightarrow ΟΒ = 3\ cm$

$\Rightarrow ΔΒ = 6\ cm$

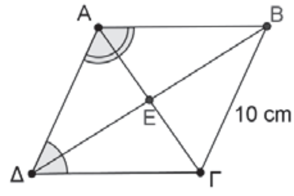
$$Ε_{ΑΒΓΔ} = \frac{δ_1 \cdot δ_2}{2} = \frac{ΑΓ \cdot ΔΒ}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24\ cm^2$$

$Π = 4 \cdot α = 4 \cdot 5 = 20\ cm$

Δραστηριότητες

1. Δίνεται ένας ρόμβος $ΑΒΓΔ$. Το $Ε$ είναι το σημείο της τομής των διαγωνίων του. Αν $ΑΓ = (2x + 3)\ m$, $ΒΓ = 10\ m$ και $ΒΕ = 8\ m$, να υπολογίσετε:
   (α) τη γωνία $Α\hat{Ε}Δ$,
   (β) το μήκος των $ΑΒ, ΕΔ$ και $ΑΓ$,
   (γ) την τιμή του x.

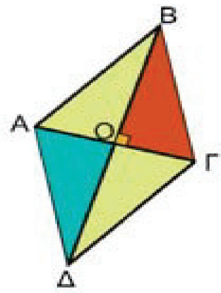
2. Αν $ΑΒΓΔ$ είναι ένας ρόμβος, $Β\hat{Α}Δ = 2Α\hat{Δ}Γ$ και $ΒΓ = 10\ cm$, να υπολογίσετε:
   (α) τις γωνίες $Α\hat{Δ}Γ$, $Β\hat{Γ}Δ$, $Α\hat{Δ}Β$, $Β\hat{Α}Γ$ και $Α\hat{Ε}Β$,
   (β) την περίμετρο του ρόμβου.



3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο ρόμβου με διαγωνίους $24\ m$ και $10\ m$.

4. Ένας ρόμβος έχει εμβαδόν $24\ cm^2$ και η μια διαγώνιός του ισούται με $8\ cm$. Να υπολογίσετε την άλλη διαγώνιό του.

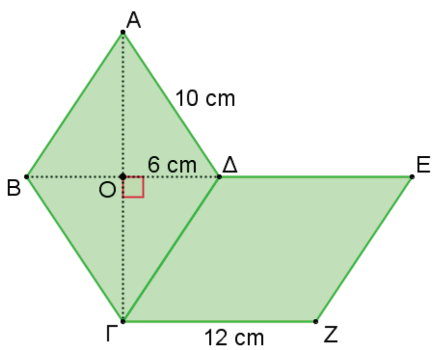
5. Ο χαρταετός του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος με διαγωνίους $12\ dm$ και $16\ dm$. Να υπολογίσετε την περίμετρο του χαρταετού και το εμβαδόν της επιφάνειάς του.



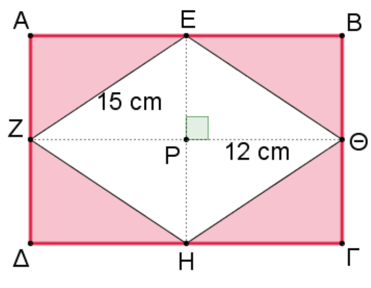
6. Η μια διαγώνιος του ρόμβου είναι τετραπλάσια από την άλλη. Το εμβαδόν του ρόμβου είναι $128\ cm^2$. Να υπολογίσετε τις διαγωνίους του ρόμβου.

7. Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $56\ \mathrm{cm}$ και είναι ισοδύναμο με ρόμβο. Αν το μήκος του ορθογωνίου είναι εξαπλάσιο από το πλάτος του και η μία διαγώνιος του ρόμβου είναι ίση με $16\ \mathrm{cm}$, να υπολογίσετε:
   (α) την άλλη διαγώνιο του ρόμβου,
   (β) την περίμετρο του ρόμβου.

8. Να βρείτε το εμβαδόν των πιο κάτω σκιασμένων σχημάτων:
   (α) (β)



$ΑΒΓΔ$ ρόμβος
$ΓΔΕΖ$ παραλληλόγραμμο



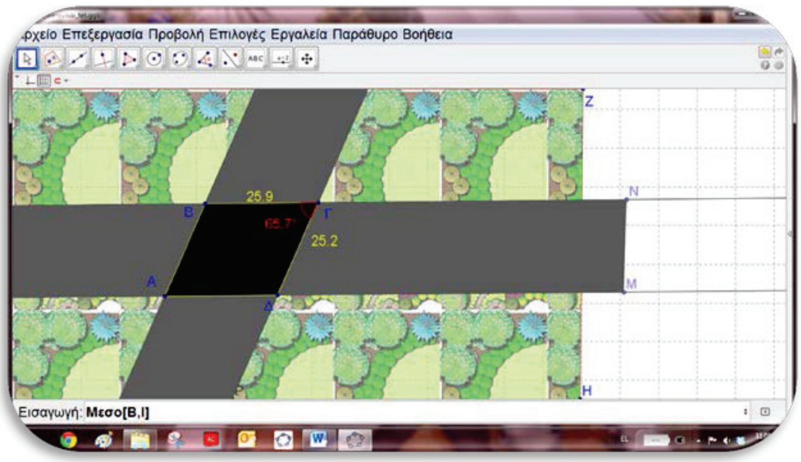
$ΑΒΓΔ$ ορθογώνιο
$ΕΘΗΖ$ ρόμβος

Τετράγωνο

Διερεύνηση (1)

Σε ένα σημείο ενός αυτοκινητόδρομου θα κατασκευαστεί μια διασταύρωση με έναν άλλο αυτοκινητόδρομο. Ο μηχανικός χρησιμοποιεί το πιο κάτω λογισμικό για να διερευνήσει όλα τα πιθανά σχήματα της διασταύρωση που μπορούν να προκύψουν.

✓ Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «B_En3_diastavrosi.ggb» για να βρείτε όλες τις δυνατές περιπτώσεις δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



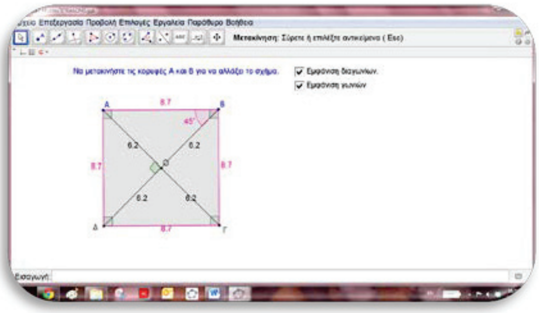
Διερεύνηση (2)

Σε ένα φύλλο χαρτί ή και με τη χρήση λογισμικού:

- Να κατασκευάσετε δύο κάθετες ευθείες ε_1 και ε_2 που να τέμνονται σε σημείο A.
- Να κατασκευάσετε κύκλο με κέντρο το σημείο A που να τέμνει τις ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία B και Δ αντίστοιχα.
- Από το σημείο B να φέρετε ευθεία $\varepsilon_3 \parallel \varepsilon_2$.
- Από το σημείο Δ να φέρετε ευθεία $\varepsilon_4 \parallel \varepsilon_1$. Να ονομάσετε Γ το σημείο τομής της ευθείας ε_4 με ε_3.
- Να χαρακτηρίσετε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$.

✓ Ποιες ιδιότητες έχει ένα τετράγωνο;

Να ανοίξετε το αρχείο «B_En3_Tetragono.ggb».



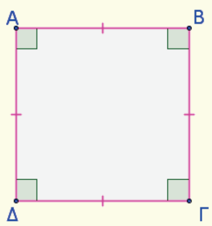
- ✓ Να μετακινήσετε τις κορυφές του τετραγώνου και να παρατηρήσετε το μέτρο των γωνιών, τα μήκη των πλευρών και των διαγωνίων του.

- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο οι ιδιότητες του ρόμβου και του ορθογωνίου ισχύουν και στο τετράγωνο.

  Να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας.

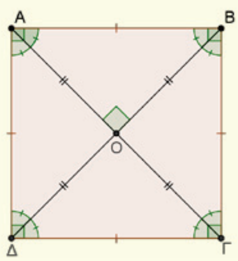
Μαθαίνω

- Τετράγωνο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει τις **πλευρές του ίσες και τις γωνίες του ορθές**.



- Κάθε τετράγωνο είναι **παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο και ρόμβος.**

- Σε κάθε τετράγωνο ισχύουν οι πιο κάτω **ιδιότητες**:



  - ✓ Όλες οι ιδιότητες που ισχύουν στο παραλληλόγραμμο, στο ορθογώνιο και στον ρόμβο.

    Παράδειγμα:

    $A\Gamma \perp B\Delta \quad \text{και}\ AO = BO = \Gamma O = \Delta O$

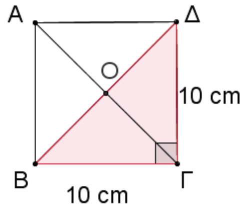
    Στο τετράγωνο όλες οι γωνίες είναι ορθές. Άρα:

    $\Gamma\hat{A}B = \Gamma\hat{A}\Delta = A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}B = A\hat{\Delta}B = 45°.$

Παραδείγματα

1. Δίνεται το τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ με πλευρά $10\ cm$. Να υπολογίσετε το μήκος των $ΒΔ$, $ΑΟ$ και τη γωνία $ΑΒΔ$.

   Λύση:

   Στο τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ ισχύει:
   $ΒΓ = ΓΔ = 10\ cm.$

   Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $ΒΓΔ$:
   $(ΒΔ)^2 = (ΔΓ)^2 + (ΒΓ)^2$
   $\Rightarrow (ΒΔ)^2 = 10^2 + 10^2$
   $\Rightarrow (ΒΔ)^2 = 100 + 100$
   $\Rightarrow (ΒΔ)^2 = 200$
   $\Rightarrow (ΒΔ) = \sqrt{200}\ cm$ ή $ΒΔ = \sqrt{100 \cdot 2}$ *(Ιδιότητες ριζών)*
   $ΒΔ = 10\sqrt{2}\ cm$

   Οι διαγώνιοι του τετραγώνου διχοτομούνται και είναι ίσες:
   $\Rightarrow ΑΟ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΒΔ}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\ cm$

2. Ένα τετράγωνο είναι ισεμβαδικό με ορθογώνιο που έχει περίμετρο $30\ cm$ και το μήκος του είναι διπλάσιο του πλάτους του. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου.

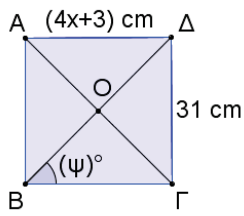
   Λύση:
   Τα δύο σχήματα είναι ισεμβαδικά. Άρα, ισχύει:
   $$E_{ορθ.} = E_{τετρ.}$$

   Έστω $α, β$ οι διαστάσεις του ορθογωνίου και x η πλευρά του τετραγώνου.
   $Π_{ορθογ.} = 30$
   $\Rightarrow 2(α + β) = 30$
   $\Rightarrow α + β = 15$
   $\Rightarrow 2β + β = 15$
   $\Rightarrow 3β = 15$
   $\Rightarrow β = 5\ cm$ $\Rightarrow α = 2β$
   $\Rightarrow α = 10\ cm$

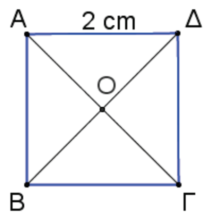
   $E_{ορθ.} = E_{τετρ.}$
   $α \cdot β = x^2$
   $\Rightarrow 5 \cdot 10 = x^2$
   $\Rightarrow x^2 = 50$
   $\Rightarrow x = \sqrt{50}\ cm$ *ή* $x = \sqrt{25 \cdot 2}$ *(Ιδιότητες ριζών)*
   $x = 5\sqrt{2}\ cm$

Δραστηριότητες

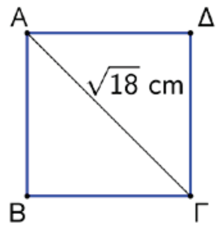
1. Στο πιο κάτω σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο. Να υπολογίσετε τις τιμές των x και ψ.



2. Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο με πλευρά $2\ cm$. Να βρείτε:
   (α) Γωνίες με μέτρο $90°$.
   (β) Γωνίες με μέτρο $45°$.
   (γ) Ευθύγραμμα τμήματα με μήκος $2\ cm$.
   (δ) Ευθύγραμμα τμήματα με μήκος $\sqrt{8}\ cm$.
   (ε) Ευθύγραμμα τμήματα με μήκος $\sqrt{2}\ cm$.



3. Να εξηγήσετε γιατί ένα τετράγωνο είναι και ορθογώνιο και ρόμβος.



4. Αν το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο με διαγώνιο $ΑΓ = \sqrt{18}$, να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του.

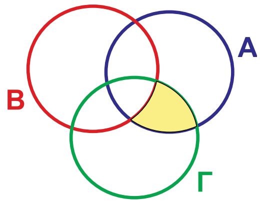
5. Να βρείτε δύο ομοιότητες και δύο διαφορές των γωνιών, των πλευρών και των διαγωνίων των σχημάτων:
   (α) Τετράγωνο – Ρόμβος,
   (β) Τετράγωνο – Ορθογώνιο,
   (γ) Ορθογώνιο – Ρόμβος.

6. Να προσδιορίσετε αν καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις ισχύει ΚΑΠΟΤΕ, ΠΑΝΤΟΤΕ, ΠΟΤΕ:
   (α) Ένα τετράγωνο είναι και ρόμβος.
   (β) Ένα παραλληλόγραμμο είναι και τετράγωνο.
   (γ) Ένα ορθογώνιο είναι και τετράγωνο.
   (δ) Το παραλληλόγραμμο είναι ένα τετράπλευρο.
   (ε) Η διαγώνιος ενός τετραγώνου χωρίζει το τετράγωνο σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.

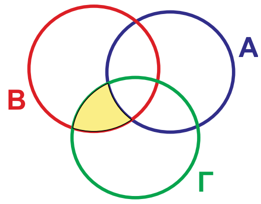
7. Δίνεται ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο OAB με $A\hat{O}B = 90°$ και $OA = OB$. Να βρείτε τα συμμετρικά σημεία A' και B' των A και B αντίστοιχα, ως προς κέντρο συμμετρίας το O και να εξετάσετε το είδος του τετραπλεύρου $ABA'B'$.

8. Δίνονται τα σύνολα:
   Α: Τρίγωνα
   Β: Παραλληλόγραμμα
   Γ: Κανονικά πολύγωνα (τα πολύγωνα που έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες και όλες τις γωνίες τους ίσες)
   Να εξετάσετε αν υπάρχει κάποιο σχήμα στη σκιασμένη περιοχή των συνόλων και αν ναι ποιο σχήμα είναι αυτό;

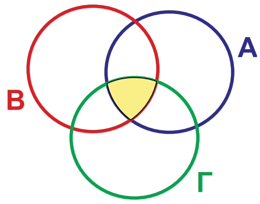
(α)



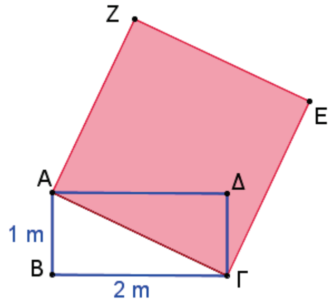
(β)



(γ)

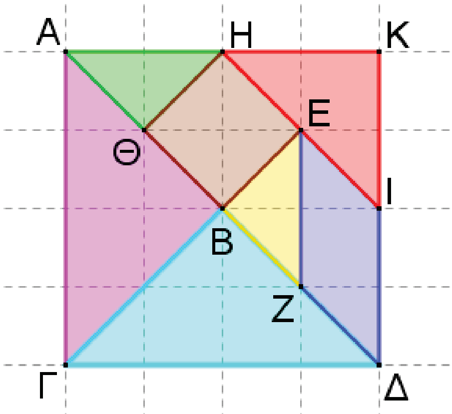


9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του διπλανού σκιασμένου τετραγώνου $ΑΖΕΓ$, αν η πλευρά του είναι ίση με τη διαγώνιο του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$.



10. Να εξετάσετε πώς θα μεταβληθεί το εμβαδόν και η περίμετρος ενός τετραγώνου αν δεκαπλασιαστεί η πλευρά του.

11. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν των 7 σχημάτων που αποτελούν το πιο κάτω τάγκραμ, αν $ΑΓ = 4\ cm$.



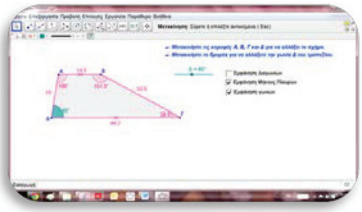
Τραπέζιο

Διερεύνηση (1)

Σε ένα φύλλο χαρτί ή και με τη χρήση λογισμικού:

- Να κατασκευάσετε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2.
- Να φέρετε ευθεία ε_3 που να τέμνει τις ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία A και B αντίστοιχα.
- Να φέρετε ευθεία ε_4 (να μην είναι παράλληλη με την ε_3) που να τέμνει τις ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.
- Να χαρακτηρίσετε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$.

Να ανοίξετε το αρχείο «B_En3_Trapezio.ggb».



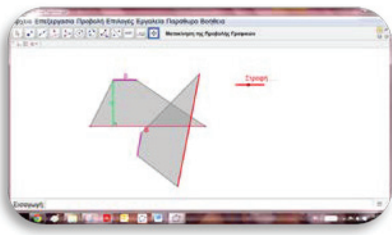
✓ Να μετακινήσετε τις κορυφές του τραπεζίου και να παρατηρήσετε το μέτρο των γωνιών, τα μήκη των πλευρών και των διαγωνίων του.

✓ Να μετακινήσετε τον δρομέα, ώστε η γωνία Δ να γίνει ορθή και να παρατηρήσετε το μέτρο των γωνιών, τα μήκη των πλευρών και των διαγωνίων του.

✓ Να μετακινήσετε τον δρομέα ή και τις κορυφές του τραπεζίου, ώστε οι γωνίες Δ και Γ να γίνουν ίσες. Να παρατηρήσετε το μέτρο των γωνιών του, τα μήκη των πλευρών και των διαγωνίων του.

Διερεύνηση (2)

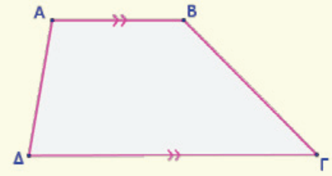
Να ανοίξετε το αρχείο «B_En3_EmvadoTrapeziou.ggb».



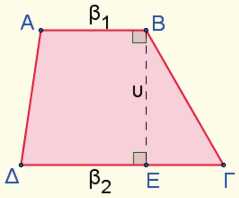
✓ Να μετακινήσετε τις κορυφές του τραπεζίου και να βρείτε έναν τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού του, χρησιμοποιώντας τα μήκη των βάσεών του και του ύψους του.

Μαθαίνω

- **Τραπέζιο** ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει **μόνο τις δύο πλευρές του παράλληλες**.

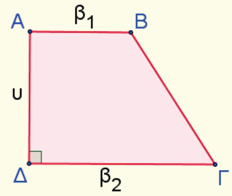


- Οι παράλληλες πλευρές του τραπεζίου ονομάζονται **βάσεις** του τραπεζίου. Η απόσταση των δύο παράλληλων πλευρών του τραπεζίου ονομάζεται **ύψος** του τραπεζίου.

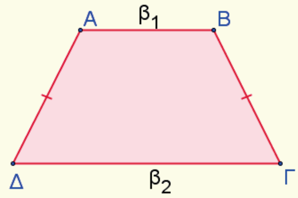


- **Είδη τραπεζίων**

➢ Το τραπέζιο που έχει **μια ορθή γωνία** ονομάζεται **ορθογώνιο τραπέζιο**.

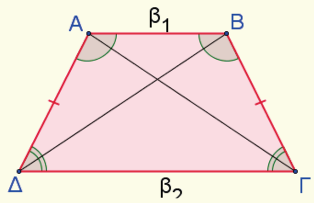


➢ Το τραπέζιο που έχει τις **μη παράλληλες πλευρές του ίσες** ονομάζεται **ισοσκελές τραπέζιο.**

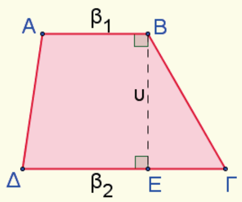


Σε κάθε **ισοσκελές τραπέζιο** ισχύουν οι πιο κάτω **ιδιότητες**:

- Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του είναι ίσες ($\hat{A} = \hat{B}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$).
- Οι διαγώνιοί του είναι ίσες ($A\Gamma = B\Delta$).



- Το **εμβαδόν του τραπεζίου** είναι ίσο με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

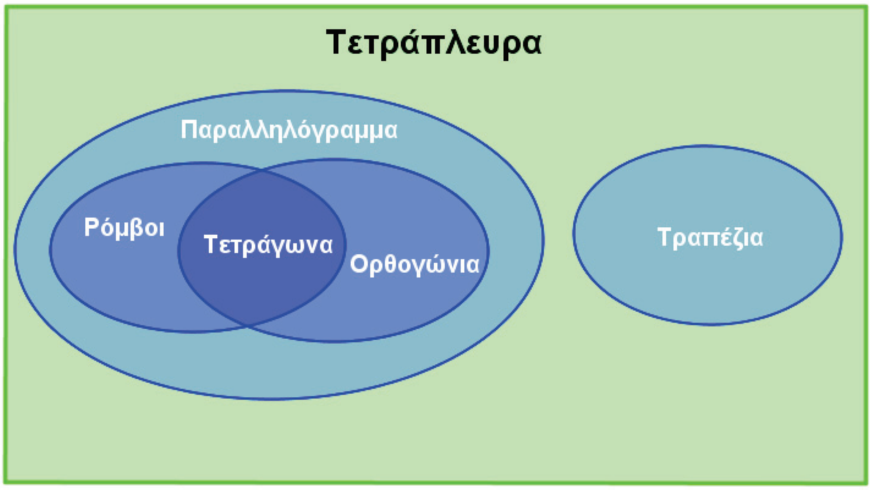


$$\boldsymbol{E_{τραπεζίου} = \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{2} \cdot \upsilon = \frac{(\beta_1 + \beta_2) \cdot \upsilon}{2}}$$

- Η **περίμετρος του τραπεζίου** είναι ίση με το άθροισμα των τεσσάρων πλευρών του.

$$\boldsymbol{\Pi_{τραπεζίου} = \beta_1 + \beta_2 + (A\Delta) + (B\Gamma)}$$

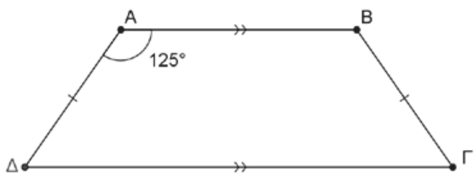
- Μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τα τετράπλευρα σύμφωνα με τις ιδιότητες που έχουν, ως εξής:



Ο Ευκλείδης, στα Στοιχεία (350 $\pi.X.$), για να ορίσει τα διάφορα είδη των τετραπλεύρων ξεκίνησε από το τετράπλευρο που συγκεντρώνει όλες τις ιδιότητες, το τετράγωνο. Δηλαδή:
Τετράγωνο είναι το τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες ορθές. Αν έχει όλες του τις γωνίες ορθές, αλλά οι πλευρές δεν είναι ίσες, είναι δηλαδή «ετερομήκεις», το τετράπλευρο ονομάζεται ορθογώνιο.
Ο ρόμβος είναι το τετράπλευρο εκείνο που έχει τις πλευρές του ίσες αλλά τις γωνίες του όχι ορθές. Ρομβοειδές είναι τέλος το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι (όχι όλες) πλευρές του ίσες και τις απέναντι γωνίες ίσες. Ρομβοειδή, δηλαδή, είναι τα τετράπλευρα που ονομάζουμε παραλληλόγραμμα. Τραπέζια, τέλος, ονομάζονται όσα τετράπλευρα δεν βρίσκονται στις πιο πάνω κατηγορίες.

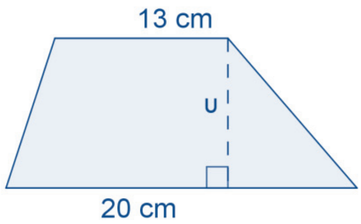
Παραδείγματα

1. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $A\Delta = B\Gamma$ και $\widehat{A} = 125°$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ του τραπεζίου.



Λύση:
Το $ΑΒΓΔ$ *είναι τραπέζιο. Άρα,* $ΑΒ \parallel ΔΓ$*:*
$\hat{A} + \hat{Δ} = 180°$ *(οι εντός επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές)*
$\Rightarrow \hat{Δ} = 180° - \hat{A} = 180° - 125° \Rightarrow \hat{Δ} = 55°$
$\hat{Γ} = \hat{Δ} = 55°$ *και* $\hat{A} = \hat{B} = 125°$ *(το* $ΑΒΓΔ$ *είναι ισοσκελές τραπέζιο).*

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τραπέζιο με βάσεις $13\ cm$, $20\ cm$ και εμβαδόν $99\ cm^2$. Να βρείτε το ύψος του.



Λύση:
$E_{τραπεζίου} = \frac{(β_1+β_2)\cdot υ}{2}$

$99 = \frac{(20+13)\cdot υ}{2}$

$\Rightarrow 99 = \frac{33\cdot υ}{2}$

$\Rightarrow 99 \cdot 2 = 33 \cdot υ$

$\Rightarrow υ = \frac{99 \cdot 2}{33}$

$\Rightarrow υ = 3 \cdot 2$

$\Rightarrow υ = 6\ cm$

3. Ένα τραπέζιο έχει βάσεις $4\ cm$ και $6\ cm$. Να υπολογίσετε το ύψος του τραπεζίου, αν το τραπέζιο είναι ισοδύναμο με τετράγωνο που έχει περίμετρο $20\ m$.

Λύση:
$Π_{τετράγωνου} = 4α = 20\ m$

$\Rightarrow\ \ α = 20 : 4$

$\Rightarrow\ \ α = 5\ cm$

$E_{τετραγώνου} = α^2$

$E_{τετραγώνου} = 5^2$

$E_{τετραγώνου} = 25\ cm^2$

Το τραπέζιο και ο ρόμβος είναι ισοδύναμα:

$\Leftrightarrow E_{τραπεζίου} = E_{τετραγώνου}$

$\Rightarrow \frac{(\boldsymbol{β_1}+\boldsymbol{β_2})\cdot υ}{2} = 25$

$\Rightarrow \frac{(6+4)\cdot υ}{2} = 25$

$\Rightarrow \frac{10\cdot υ}{2} = 25$

$\Rightarrow 5 \cdot υ = 25$

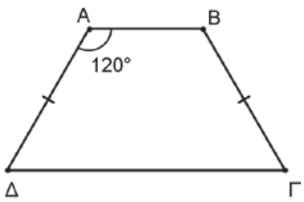
$\Rightarrow υ = 25 : 5$

$\Rightarrow υ = 5\ cm$

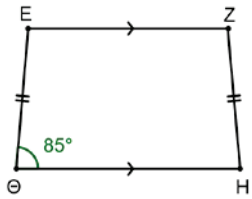
Δραστηριότητες

1. Για καθένα από τα ακόλουθα ισοσκελή τραπέζια, να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών τους.

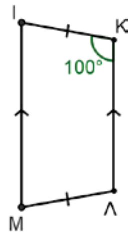
(α)



(β)



(γ)

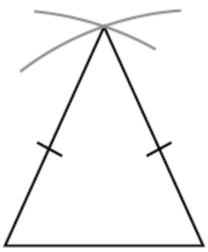
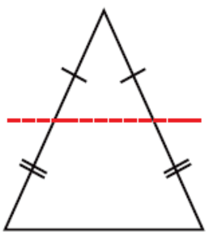
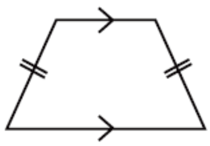


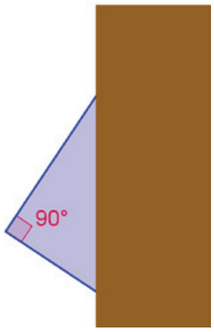
2. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω ιδιότητες είναι δυνατόν να ισχύουν για ένα τραπέζιο.
   (α) Τρεις πλευρές ίσες.
   (β) Μια πλευρά, εκτός από τις βάσεις, να είναι μεγαλύτερη από τις βάσεις.
   (γ) Τρεις ορθές γωνίες.
   (δ) Ίσες βάσεις.
   (ε) Δύο πλευρές ίσες χωρίς να είναι το τραπέζιο ισοσκελές.

3. Να εξετάσετε τι συμμετρία παρουσιάζουν τα πιο κάτω τετράπλευρα σημειώνοντας ✓ στις κατάλληλες θέσεις, σύμφωνα με το παράδειγμα:

	Άξονες συμμετρίας						Έχει κέντρο συμμετρίας
	Κανένα	1	2	3	4	Περισσότερους	
Παραλληλόγραμμο	✓						✓
Ορθογώνιο							
Ρόμβος							
Τετράγωνο							
Ισοσκελές Τραπέζιο							

4. Ο Παναγιώτης ακολουθεί τα πιο κάτω βήματα για να κατασκευάσει ένα ισοσκελές τραπέζιο. Να εξηγήσετε τον συλλογισμό του.

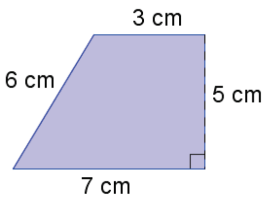
1ο ΒΗΜΑ	2ο ΒΗΜΑ	3ο ΒΗΜΑ
		



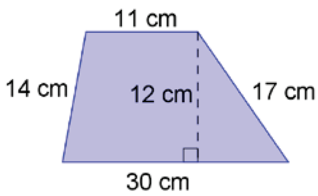
5. Ένα μέρος του μπλε τετραπλεύρου είναι κρυμμένο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να εξετάσετε τι είδους τετράπλευρο θα μπορούσε να είναι.

6. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των πιο κάτω τραπεζίων:

(α)

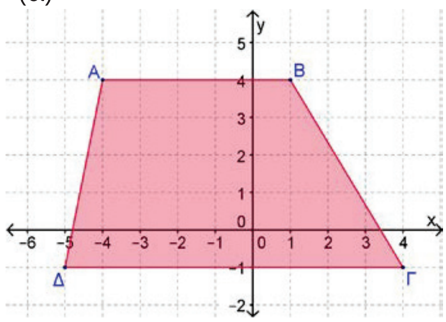


(β)

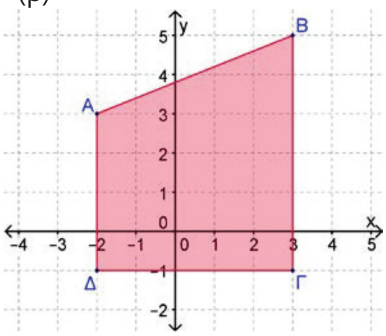


7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των πιο κάτω τραπεζίων:

(α)



(β)

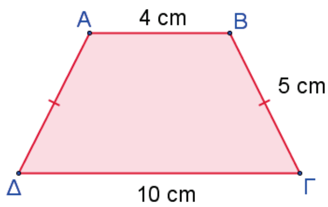


8. Πόσο είναι το ύψος τραπεζίου που έχει εμβαδόν $36\,cm^2$ και βάσεις $8\,cm$ και $4\,cm$.

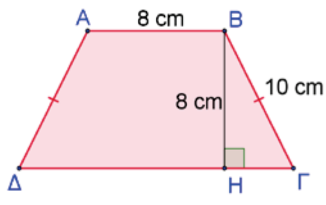
9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ\,//\,ΔΓ)$ με $ΑΒ = 12\,cm$, $ΒΓ = 10\,cm$, $ΓΔ = 20\,cm$ και $\hat{Α} = 90°$.

10. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο των πιο κάτω τραπεζίων.

(α)



(β)

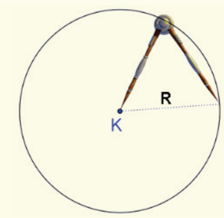


11. Ένα ορθογώνιο τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(\hat{Α} = \hat{Δ} = 90°)$ έχει $\hat{Γ} = 45°$, $ΑΔ = 4\,cm$ και $Ε_{ΑΒΓΔ} = 28\,cm^2$. Να υπολογίσετε τις βάσεις του τραπεζίου.

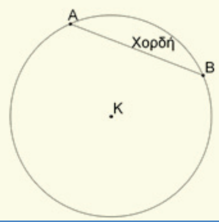
ΚΥΚΛΟΣ

Έχουμε μάθει…

- **Κύκλος** ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση R (ακτίνα) από ένα σταθερό σημείο K (κέντρο) του επιπέδου.
  Γράφουμε για συντομία κύκλος (K, R) και εννοούμε τον κύκλο με κέντρο το K και ακτίνα R.
  - *Δύο κύκλοι με την ίδια ακτίνα είναι ίσοι.*

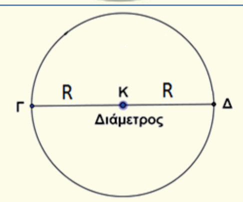


- **Χορδή κύκλου** ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του πάνω στον κύκλο.
  Παράδειγμα:
  η AB είναι χορδή του κύκλου.

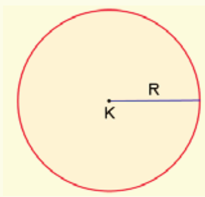


- **Διάμετρος κύκλου** είναι η χορδή που περνά από το κέντρο του κύκλου.

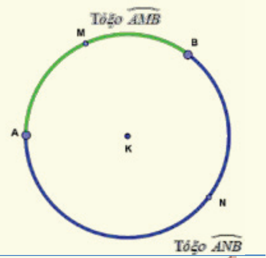
  Το κέντρο K του κύκλου είναι το μέσο κάθε διαμέτρου.
  Παράδειγμα:
  η ΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου.



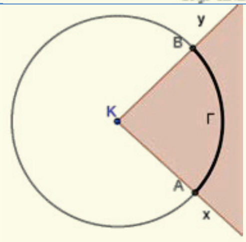
- **Κυκλικός δίσκος** (K,R) είναι ο κύκλος μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει.
  Κάθε σημείο του κυκλικού δίσκου απέχει από το κέντρο K απόσταση μικρότερη ή ίση με την ακτίνα R.



- Δύο σημεία A και B του κύκλου χωρίζουν τον κύκλο σε δύο μέρη, που το καθένα ονομάζεται **τόξο** $\widehat{AB}$ **του κύκλου** με άκρα A και B.



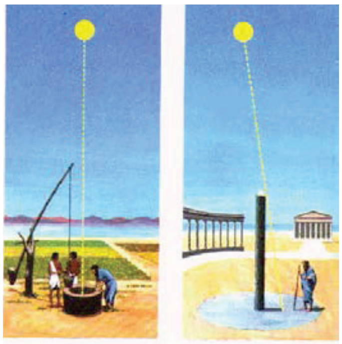
- **Επίκεντρη γωνία** είναι η γωνία της οποίας η κορυφή είναι το κέντρο του κύκλου. Το τόξο, που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας ονομάζεται **αντίστοιχο τόξο** της επίκεντρης.
  Παράδειγμα:
  Το $\widehat{AB}$ είναι το αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης $\angle yKx$
  και η $\angle AKB$ βαίνει στο τόξο $\widehat{AB}$.



Μήκος Κύκλου

Εξερεύνηση

Να συζητήσετε το πιο κάτω κείμενο:

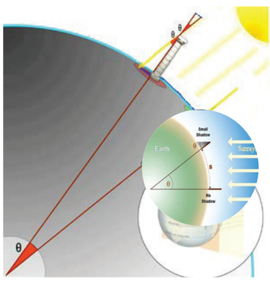


Οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν από την εποχή του Αριστοτέλη ότι η Γη είναι σφαιρική. Ο Ερατοσθένης με ένα πείραμα που έχει μείνει στην Ιστορία, μπόρεσε να μετρήσει την περιφέρεια και την ακτίνα της Γης με ακρίβεια απρόσμενη για τα μέσα της εποχής εκείνης.

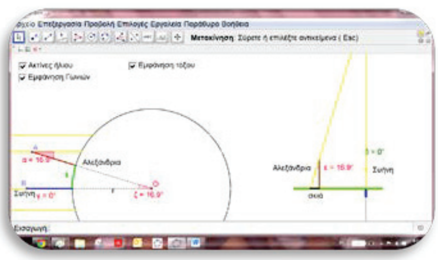
Ο Ερατοσθένης διάβασε σε έναν αρχαίο πάπυρο, στη βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας, για ένα πηγάδι στη Συήνη, στο οποίο το μεσημέρι της 21ης Ιουνίου, οι ακτίνες του Ήλιου έπεφταν κάθετα στη γη και φώτιζαν τον πάτο του, χωρίς να αφήνουν καμία σκιά. Την ίδια ημερομηνία, μέτρησε τη γωνία της σκιάς ενός οβελίσκου, που σχηματιζόταν στις 12 το μεσημέρι στην Αλεξάνδρεια. Αυτή ήταν 7,20°.

Χρειαζόταν να μετρήσει την απόσταση της Αλεξάνδρειας και της Συήνης (που βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό). Την εποχή του Ερατοσθένη, δεν υπήρχε ακριβής μέθοδος μέτρησης τόσο μεγάλων αποστάσεων. Σύμφωνα με την παράδοση, ο Ερατοσθένης ανέθεσε σε επαγγελματίες βαδιστές να την υπολογίσουν και το αποτέλεσμά τους το συνέκρινε με τις εκτιμήσεις αρχηγών καραβανιών.

Το τελικό του αποτέλεσμα ήταν ότι η απόσταση Αλεξάνδρειας – Συήνης ισούται με 5000 στάδια, οπότε η περιφέρεια της Γης προκύπτει ίση με 252000 στάδια, δηλαδή με 39690 km. Με σημερινές δορυφορικές μετρήσεις προκύπτει πως η περιφέρεια της Γης είναι 40048 km.



✓ Να χρησιμοποιήσετε το αρχείο «B_En3_Eratoshenes.ggb» για να περιγράψετε σε έναν συμμαθητή σας πώς εργάστηκε ο Ερατοσθένης για να υπολογίσει την περίμετρο της Γης.



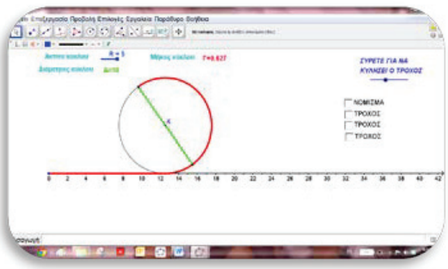
Να εργαστείτε με παρόμοιο τρόπο για να μετρήσετε την ακτίνα της γης. Μπορείτε να βρείτε υλικό στη διεύθυνση:
www.ea.gr/ep/mobile/era/index.html

Διερεύνηση (1)

Ένα εργοστάσιο έχει πάρει παραγγελία για 50 σκεπάσματα διαστάσεων $160\,cm \times 220\,cm$. Ο αποθηκάριος πήρε εντολή να μετρήσει πόσο ύφασμα υπάρχει στην αποθήκη, για να ελέγξει αν αρκεί για την παραγγελία. Το ύφασμα, που έχει πλάτος $180\,cm$, είναι τυλιγμένο σε κυλινδρικούς σωλήνες ακτίνας $50\,cm$. Ο κύριος Αντώνης διαπίστωσε ότι στην αποθήκη υπάρχουν 3 τέτοιοι κύλινδροι και ότι το ύφασμα είναι τυλιγμένο 20 φορές γύρω από τον κάθε κύλινδρο.

✓ Να εξετάσετε πώς μπορεί να αξιοποιήσει τα στοιχεία του πιο πάνω προβλήματος για να εξετάσει κατά πόσο το ύφασμα που υπάρχει στην αποθήκη αρκεί, λαμβάνοντας υπόψη ότι το σκέπασμα δεν πρέπει να έχει ενώσεις.

Μπορείτε να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο με το εφαρμογίδιο «B_En3_Mikoskyklou.ggb».



- Να διερευνήσετε τη σχέση του μήκους της ακτίνας με το μήκος του κύκλου.

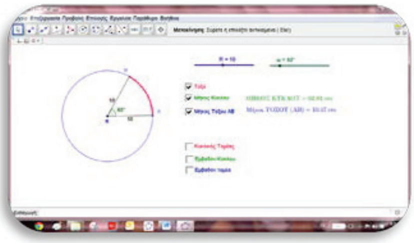
- Να μετακινήσετε τον δρομέα «R» για να μεταβάλλετε την ακτίνα του κύκλου και να καταγράψετε τις μετρήσεις σας. Να εξετάσετε τις τιμές που παίρνει ο λόγος: $\frac{\text{Μήκος Κύκλου}}{\text{Μήκος Διάμετρου Κύκλου}}$. Τι παρατηρείτε;

- Να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας, για να βρείτε έναν τύπο για τον υπολογισμό του μήκους του κύκλου.

- Να εξετάσετε αν ο πιο πάνω κανόνας ισχύει για πραγματικά αντικείμενα.

Διερεύνηση (2)

Να ανοίξετε το αρχείο «B_En3_EmvKT_MT.ggb».



- ✓ Να μετακινήσετε τον δρομέα της ακτίνας του κύκλου στην τιμή $R = 10\,cm$ και να βρείτε το μήκος του κύκλου.

- ✓ Να μετακινήσετε τον δρομέα και να εκτιμήσετε το μήκος του τόξου AB. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

Μήκος ακτίνας R	Μέτρο γωνίας ω	Μήκος κύκλου	Μήκος τόξου AB
$10\ cm$	$180°$		
$10\ cm$	$90°$		
$10\ cm$	$60°$		
$10\ cm$	$30°$		
$10\ cm$	$36°$		

- ✓ Να εμφανίσετε, το μήκος τόξου AB και να συγκρίνετε με τη δική σας εκτίμηση. Ποια είναι η σχέση του μήκους του τόξου με το μήκος του κύκλου;

- ✓ Να βρείτε έναν τύπο, για να υπολογίζετε το μήκος τόξου κύκλου συναρτήσει του μήκους της ακτίνας R και του μέτρου της γωνίας μ.

- ✓ Να μεταβάλλετε το μήκος της ακτίνας R και να εξετάσετε κατά πόσο η σχέση που βρήκατε ισχύει για κάθε μήκος ακτίνας.

Το 1706, ο Γουίλιαμ Τζόουνς στο βιβλίο του «Μία Νέα Εισαγωγή στα Μαθηματικά» συμβόλισε πρώτος τον λόγο αυτό με το ελληνικό γράμμα π, αρχικό γράμμα της ελληνικής λέξης «περιφέρεια». Το σύμβολο π καθιερώθηκε και χρησιμοποιείται σήμερα διεθνώς.

Μαθαίνω

- Ο λόγος του **μήκους του κύκλου** προς το **μήκος της διαμέτρου** του είναι πάντα σταθερός και συμβολίζεται με το γράμμα «**π**». Δηλαδή:

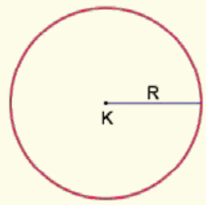
$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\text{Μήκος Κύκλου}}{\text{Μήκος Διαμέτρου Κύκλου}} = \mathbf{3{,}14}159265358979323846264 33\ldots$$

- Ο αριθμός π είναι **άρρητος**.

- Το $\boldsymbol{\pi}$ στις πράξεις το χρησιμοποιούμε συνήθως με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων δηλαδή, $\boldsymbol{\pi \cong 3,14}$ ή $\boldsymbol{\pi \cong \frac{22}{7}}$, $\boldsymbol{\pi \cong \frac{355}{113}}$.

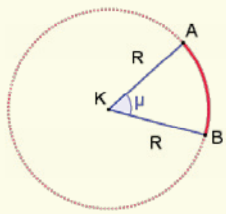
- Το **μήκος ενός κύκλου** με ακτίνα R είναι:

$\boldsymbol{\Gamma} = \pi \cdot \text{Διάμετρος} = \boldsymbol{2\pi R}$



- Το **μήκος τόξου** ($\boldsymbol{\gamma}$) σε κύκλο με ακτίνα R και με αντίστοιχη επίκεντρη γωνία μ είναι:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mu}{360} \cdot 2\pi R = \frac{2\pi R\mu}{360} = \boldsymbol{\frac{\pi R\mu}{180}}$$



Δύο ερευνητές, οι Σιγκέρου Κόντο και Αλεξάντερ Γι, κατάφεραν να σπάσουν το φράγμα των δέκα τρισεκατομμυρίων ψηφίων στον υπολογισμό του διάσημου αριθμού «π», ξεπερνώντας κατά πολύ το προηγούμενο ρεκόρ με πέντε τρισεκατομμύρια, το οποίο κατείχαν οι ίδιοι. Ο υπολογισμός των ψηφίων άρχισε στις 16 Οκτωβρίου του 2010 με τον υπολογιστή να δουλεύει συνεχώς όλο το 24ωρο για αρκετούς μήνες.

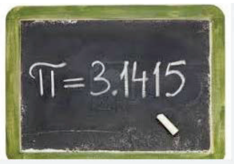
Οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι (1900 π.Χ.) απέδιδαν τον λόγο $\frac{\text{Μήκος Κύκλου}}{\text{Μήκος Διαμέτρου}}$ με το κλάσμα $\frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$, οι δε Αιγύπτιοι (1700 π.Χ.), με το κλάσμα $\frac{256}{81} = 3\frac{13}{81}$. Επίσης και άλλοι λαοί, όπως οι Πέρσες, οι Ινδοί, οι Κινέζοι προσπάθησαν να υπολογίσουν τον αριθμό αυτό.
Εκείνος, όμως, που προσπάθησε πρώτος να προσεγγίσει τον παραπάνω λόγο με θεωρητικό τρόπο και όχι εμπειρικά ήταν ο Αρχιμήδης (287 – 212 π.Χ.), άνθρωπος με πολύ υψηλή μαθηματική ευφυΐα. Ο Αρχιμήδης προσέγγισε τον κύκλο με εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα. Φθάνοντας στα πολύγωνα με 96 πλευρές κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ο παραπάνω λόγος είναι μεταξύ των ρητών αριθμών $3\frac{10}{71}$ και $3\frac{1}{7}$. Γι' αυτό λοιπόν δίκαια ο λόγος αυτός είναι γνωστός διεθνώς ως σταθερά του Αρχιμήδη.

Για την απομνημόνευση των πρώτων δεκαδικών ψηφίων του αριθμού π έχουν επινοηθεί διάφοροι μνημονικοί κανόνες, ανάμεσά τους και η παρακάτω φράση, την οποία επινόησε ο Ν. Χατζηδάκης (1872-1942), καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Αθηνών. Με αυτήν μπορεί κανείς να θυμάται τα πρώτα 22 δεκαδικά ψηφία του π:

«Αεί ο Θεός ο μέγας γεωμετρεί, το κύκλου μήκος ίνα ορίση διαμέτρω παρήγαγεν αριθμόν απέραντον και ον φευ! ουδέποτε όλον θνητοί θα εύρωσι»

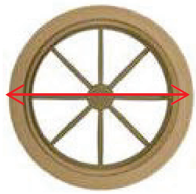
το οποίο αντιστοιχεί στην παρακάτω δεκαδική προσέγγιση του π.
Το ρεκόρ απομνημόνευσης ψηφίων το κατέχει ο Lu Chao, 24χρονος κινέζος φοιτητής. Του πήρε 24 ώρες για να θυμηθεί και τα 67 890 δεκαδικά ψηφία του π χωρίς λάθος.

Παραδείγματα

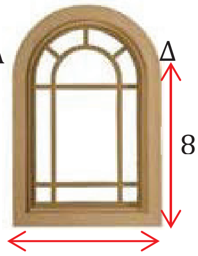


1. Για την καλύτερη μόνωση των παραθύρων εφαρμόζεται περιμετρικά μια ειδική πλαστική μονωτική ταινία. Να υπολογίσετε πόση ταινία χρειάζεται για τα πιο κάτω παράθυρα:

(α)



(β) $\overset{\frown}{ΑΔ}$ ημικύκλιο



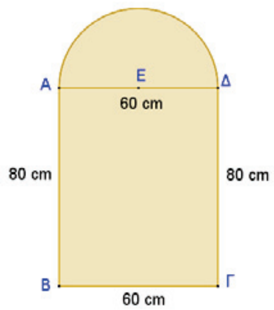
Λύση:

Για να υπολογίσουμε το μήκος της ταινίας πρέπει να υπολογίσουμε την περίμετρο κάθε παραθύρου.

(α) *Το παράθυρο έχει σχήμα κύκλου με διάμετρο $2{,}40\ m$. Άρα, υπολογίζουμε το μήκος του κύκλου:*

Μήκος Διαμέτρου $\delta = 2{,}40\ m \Rightarrow$ *Μήκος Ακτίνας* $R = 1{,}20\ m$

$$\Gamma = 2\pi R = 2\pi \cdot 1{,}2 = 2{,}4\pi \cong 7{,}536\ m$$



(β) *Για να υπολογίσουμε την περίμετρο του παραθύρου πρέπει να υπολογίσουμε το άθροισμα των ευθύγραμμων τμημάτων* $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ$ *και του τόξου* $\overset{\frown}{ΑΔ}$. *Άρα,*

$ΑΒ = ΔΓ = 0{,}8\ m$ *και* $ΒΓ = 0{,}6\ m$, $R = \frac{ΑΔ}{2} = 0{,}3\ m$

$$\gamma_{ΑΔ} = \frac{2\pi R}{2} = \pi \cdot 0{,}3 = 0{,}3\pi \cong 0{,}942\ m$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ΠΑΡΑΘΥΡΟΥ} &= ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + \gamma_{ΑΔ} \\ &= 0{,}8 + 0{,}6 + 0{,}8 + 0{,}942 \\ &\cong 3{,}142\ m \end{aligned}$$

2. Το μήκος τόξου που βαίνει σε γωνία $45°$ είναι ίσο με $2\pi\ cm$. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου (*η απάντησή σας μπορεί να δοθεί συναρτήσει του π*).

Λύση:

Για να υπολογίσουμε το μήκος του κύκλου πρέπει να υπολογίσουμε το μήκος της ακτίνας από τα δεδομένα που έχουμε. Δηλαδή,

$$\gamma = \frac{2\pi R\mu}{360}$$

$$\Rightarrow 2\pi = \frac{2\pi R \cdot 45}{360}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{R}{4}$$

$$\Rightarrow R = 8\ cm$$

$$\Gamma = 2\pi R$$

$$\Rightarrow \Gamma = 2\pi \cdot 8$$

$$\Rightarrow \Gamma = 16\pi\ cm$$

Άρα, το μήκος του κύκλου είναι $16\pi\ cm$.

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε το μήκος κύκλου που έχει ακτίνα $10\ cm$.

2. Η 14η Μαρτίου καθιερώθηκε ως παγκόσμια ημέρα του π. Γιατί νομίζετε ότι επιλέχθηκε αυτή η μέρα;

3. Να βρείτε την περίμετρο ενός κυκλικού χαλιού που έχει διάμετρο $10\ m$.

4. Να βρείτε την ακτίνα κύκλου που έχει μήκος:
   (α) $25{,}12\ cm$
   (β) $16\pi\ cm$.

5. Γύρω από τον κορμό ενός αιωνόβιου δέντρου τυλίγουμε ένα σκοινί. Μετράμε το σκοινί και βρίσκουμε ότι έχει μήκος $3{,}45\ m$. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κορμού *(η απάντηση να δοθεί με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων)*.

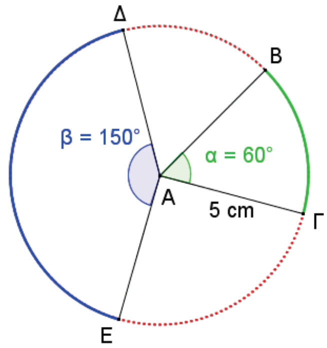
6. Οι τροχοί ενός ποδηλάτου έχουν διάμετρο $40\ cm$. Να βρείτε πόσες στροφές πρέπει να κάνουν οι τροχοί, για να διανύσει ο ποδηλάτης απόσταση $1{,}256\ km$.

7. Η ακτίνα της Γης είναι περίπου $6400\ Km$. Να υπολογίσετε το μήκος του Ισημερινού.

8. Το δέντρο baobab ή αλλιώς το ανάποδο δέντρο φυτρώνει κυρίως, σε περιοχές της Νότιας Αφρικής, καθώς και στην Αυστραλία και στην Ινδία. Το δέντρο baobab ζει τουλάχιστον 3000 χρόνια. Το ύψος του μπορεί να ξεπεράσει τα $25\ m$ και η διάμετρος του κορμού του μπορεί να φτάσει τα $12\ m$. Να εκτιμήσετε πόσα άτομα (με άνοιγμα χεριών περίπου $1{,}60\ m$) θα χρειάζονταν, για να αγκαλιάσουν ένα τέτοιο δέντρο με διάμετρο $12\ m$.

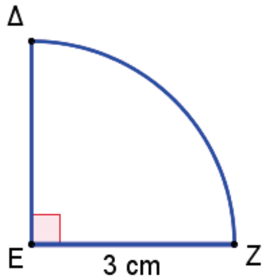
9. Το μήκος τόξου που βαίνει σε γωνία $120°$ είναι ίσο με $2\pi\ cm$. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου (*Η απάντησή σας μπορεί να δοθεί συναρτήσει του π*).

10. Να υπολογίσετε το μήκος των τόξων $ΒΓ$ και $ΔΕ$ του κύκλου στο διπλανό σχήμα.

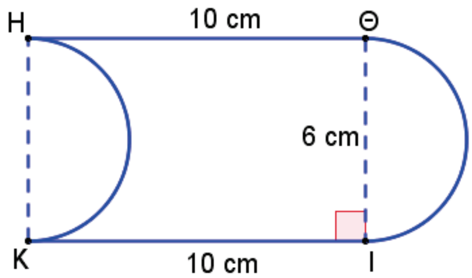


11. Να υπολογίσετε την περίμετρο των πιο κάτω σχημάτων:

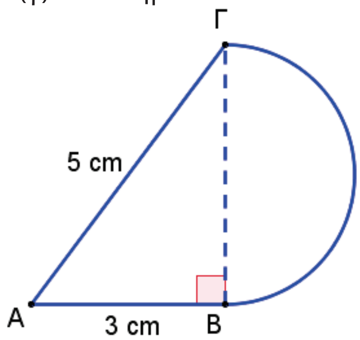
(α) $\overparen{\Delta Z}$ τεταρτοκύκλιο



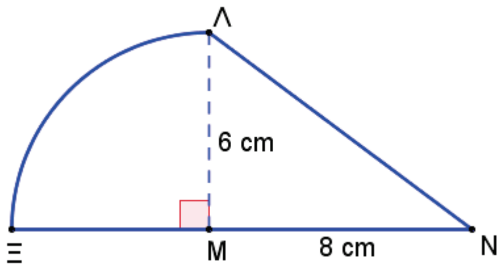
(β) $\overparen{\Theta I}$ και $\overparen{HK}$ ημικύκλια

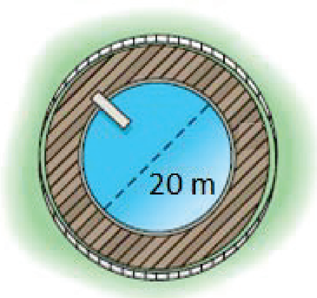


(γ) $\overparen{B\Gamma}$ ημικύκλιο



(δ) $\overparen{\Lambda\Xi}$ τεταρτοκύκλιο





12. Η πισίνα του διπλανού σχήματος με διάμετρο $20\,m$, περιβάλλεται από ένα ξύλινο δάπεδο, πλάτους $1{,}50\,m$. Να βρείτε το μήκος της περίφραξης που θα χρειαστεί ο ιδιοκτήτης, για να περιφράξει τον χώρο της πισίνας και του δαπέδου. Αν η κατασκευή στοιχίζει €12,75 το μέτρο, να υπολογίσετε το κόστος της κατασκευής.

13. Ένας ποδηλάτης, που προετοιμάζεται για τους αγώνες, προπονείται σε στίβο σχήματος κύκλου με ακτίνα $R = 50\,m$. Πόσες φορές θα περάσει από το σημείο εκκίνησης σε 30 λεπτά προπόνησης, αν κινείται με ταχύτητα $20\,km/h$;

Εμβαδόν Κυκλικού Δίσκου

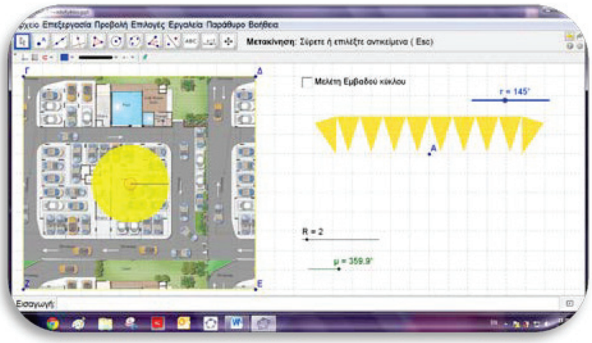
Διερεύνηση (1)

Ο κύριος Μιχάλης έχει αναλάβει τον σχεδιασμό και την τοποθέτηση φωτισμού σε έναν χώρο στάθμευσης, σχήματος τετραγώνου με πλευρά $50\,m$. Έχει στη διάθεσή του έναν προβολέα, ο οποίος προβάλλει το φως του σε ακτίνα $R = 25\,m$.

✓ Να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής που μπορεί να φωτίσει ο προβολέας.

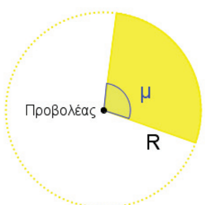
Με τη βοήθεια του εφαρμογιδίου «B_En3_kyklos.ggb», να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο.

- Να επιλέξετε τη βοήθεια, για να βρείτε έναν τύπο για τον υπολογισμό της επιφάνειας κάθε κυκλικού δίσκου συναρτήσει της ακτίνας R.



✓ Να εξετάσετε κατά πόσο είναι δυνατόν με έναν προβολέα να φωτίσει κάποιος ΟΛΟ τον χώρο. Αν όχι, να μελετήσετε τις προδιαγραφές του μηχανικού και να προτείνετε δύο διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους θα μπορούσαν να τοποθετηθούν οι προβολείς για να φωτίζεται ο χώρος. Πόσοι προβολείς θα χρειαστούν;

Ο κύριος Μιχάλης έχει στη διάθεση του προβολείς στους οποίους μπορεί να ρυθμίσει τόσο την ακτίνα $(0 - 25\,m)$ όσο και τη γωνιά $(0 - 360°)$ στην οποία μπορούν να προβάλλουν το φως τους.

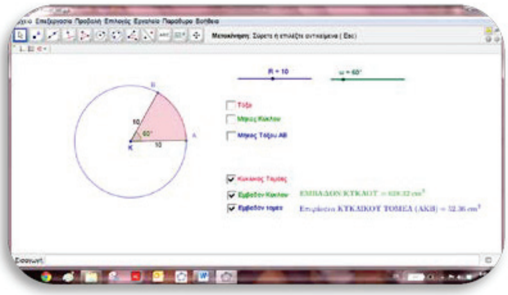


Προδιαγραφές φωτισμού:

- ΟΛΟΣ ο χώρος πρέπει να φωτίζεται.
- Το φως του προβολέα να περιορίζεται ΜΟΝΟ στον χώρο στάθμευσης, για να μην ενοχλούνται όσοι βρίσκονται στους διπλανούς χώρους.

Διερεύνηση (2)

Να ανοίξετε το αρχείο «B_En3_EmvKT_MT.ggb».



- ✓ Να μετακινήσετε τον δρομέα της ακτίνας του κύκλου στην τιμή $R = 10\ cm$ και να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

- ✓ Να μετακινήσετε τον δρομέα και να εκτιμήσετε το εμβαδόν του τομέα KAB. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

Μήκος ακτίνας R	Μέτρο γωνίας ω	Εμβαδόν κύκλου	Εμβαδόν τομέα KAB
$10\ cm$	$180°$		
$10\ cm$	$90°$		
$10\ cm$	$60°$		
$10\ cm$	$30°$		
$10\ cm$	$36°$		

- ✓ Να εμφανίσετε το εμβαδόν του τομέα KAB και να συγκρίνετε την απάντησή σας με τη δική σας εκτίμηση. Ποια η σχέση του εμβαδού του τομέα με το εμβαδόν όλου του κυκλικού δίσκου;

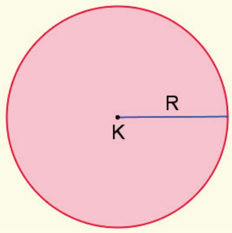
- ✓ Να βρείτε έναν τύπο, για να υπολογίζετε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα συναρτήσει του μήκους της ακτίνας R και του μέτρου της επίκεντρης γωνίας μ.

- ✓ Να μεταβάλλετε το μήκος της ακτίνας R και να εξετάσετε αν η σχέση που βρήκατε ισχύει για κάθε μήκος ακτίνας.

Μαθαίνω

- Το **εμβαδόν κυκλικού δίσκου** με ακτίνα R είναι:

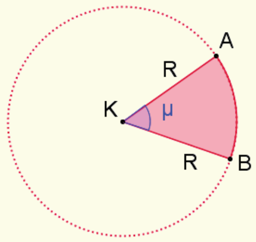
$$\boldsymbol{E = \pi R^2}$$



Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου αναφέρεται και ως εμβαδόν κύκλου.

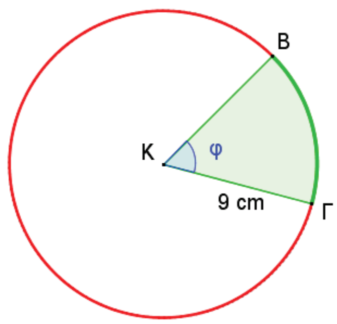
- Το εμβαδόν **κυκλικού τομέα** ($\mathbf{E_{\kappa.\tau.}}$) σε κύκλο με ακτίνα R και με αντίστοιχη επίκεντρη γωνία μ είναι:

$$\boldsymbol{E_{\kappa.\tau.}} = \frac{\mu}{360} \cdot \pi R^2 = \boldsymbol{\frac{\pi R^2 \mu}{360}}$$



Παραδείγματα

1. Το μήκος τόξου $B\Gamma$ κύκλου με ακτίνα $R = 9\ cm$ είναι $\gamma_{B\Gamma} = 3\pi\ cm$. Να υπολογίσετε συναρτήσει του π:
   (α) Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.
   (β) Το μήκος του κύκλου.
   (γ) Το εμβαδόν του τομέα $KB\Gamma$.



Λύση:

(α) $E = \pi R^2 = \pi \cdot 9^2 = 81\pi\ cm^2$

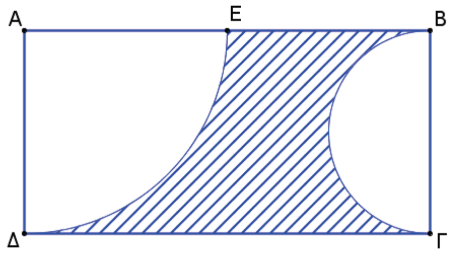
(β) $\Gamma = 2\pi R = 2\pi \cdot 9 = 18\pi\ cm$

(γ) *Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $KB\Gamma$, πρέπει να υπολογίσουμε το μέτρο της επίκεντρης γωνίας.*

$$\gamma_{B\Gamma} = \frac{2\pi R\mu}{360}$$
$$\Rightarrow 3\pi = \frac{2\pi \cdot 9 \cdot \mu}{360}$$
$$\Rightarrow 3\pi = \frac{\pi \cdot \mu}{20}$$
$$\Rightarrow 3 = \frac{\mu}{20}$$
$$\Rightarrow \mu = 60°$$

$$E_{\kappa.\tau.} = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$$
$$= \frac{\pi \cdot 9^2 \cdot 60}{360}$$
$$= \frac{81\pi}{6}$$
$$= \frac{27\pi}{2}\ cm^2$$

2. Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο, το $Ε$ είναι το μέσο της $ΑΒ$, $ΓΔ = 16\, cm$, το $\overset{\frown}{ΒΓ}$ είναι ημικύκλιο και το $\overset{\frown}{ΕΔ}$ τεταρτοκύκλιο. Να βρείτε:



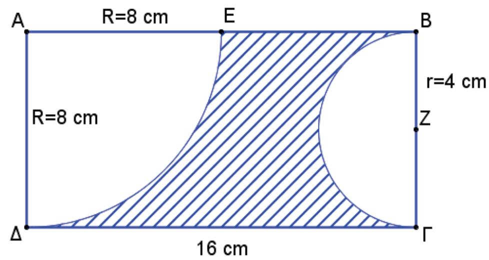
(α) το εμβαδόν και

(β) την περίμετρο της σκιασμένης επιφάνειας.

(οι απαντήσεις να δοθούν κατά προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων)

Λύση:

Αρχικά θα πρέπει να υπολογίσουμε τις διαστάσεις του ορθογωνίου:



$ΑΒ = ΓΔ = 16\, cm$

$Ε$ *μέσο* $ΑΒ \Rightarrow ΑΕ = ΕΒ = \frac{ΑΒ}{2}$

$ΑΕ = \frac{16}{2} = 8\, cm$

$ΑΔ = ΑΕ = 8\, cm$ *(ακτίνα τεταρτοκυκλίου)*

Ακτίνα τεταρτοκυκλίου $R = 8$ *και* *Ακτίνα ημικυκλίου* $r = 4$

(α) $Ε_{σκιασμένης} = Ε_{ορθ.} - \left(Ε_{τεταρτ.} + Ε_{ημικ.}\right)$

$Ε_{ορθ.} = (ΑΒ) \cdot (ΑΔ) = 8 \cdot 16 = 128\, cm^2$

$Ε_{τεταρτ.} = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = \frac{64\pi}{4} = 16\pi\, cm^2$

$Ε_{ημικ} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 4^2}{2} = \frac{16\pi}{2} = 8\pi\, cm^2$

Χρησιμοποιούμε στις πράξεις: $\pi \cong 3{,}14$

$$\begin{aligned} Ε_{σκιασμένης} &= Ε_{ορθ.} - \left(Ε_{τεταρτ.} + Ε_{ημικ.}\right) \\ &= 128 - (16\pi + 8\pi) = (128 - 24\pi) cm^2 \\ &\cong (128 - 24 \cdot 3{,}14)\, cm^2 \\ &= 52{,}64 cm^2 \end{aligned}$$

(β) Για να υπολογίσουμε την περίμετρο του σκιασμένου σχήματος, προσθέτουμε τα μήκη:

$Π_{σκιασμένης} = ΕΒ + ΔΓ + \overset{\frown}{ΕΔ} + \overset{\frown}{ΒΓ} = ΕΒ + ΔΓ + γ_{τεταρτ.} + γ_{ημικ.}$

$γ_{τεταρτ.} = \frac{2\pi R}{4} = \frac{2\pi \cdot 8}{4} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi\, cm$

$γ_{ημικ.} = \frac{2\pi r}{2} = \frac{2\pi \cdot 4}{2} = 4\pi\, cm$

$$\begin{aligned} Π_{σκιασμένης} &= ΕΒ + ΔΓ + γ_{τεταρτ.} + γ_{ημικ.} \\ &= 16 + 8 + (4\pi + 4\pi) \\ &= (24 + 8\pi)\, cm \\ &\cong (24 + 8 \cdot 3{,}14) \\ &= 49{,}12\, cm \end{aligned}$$

Δραστηριότητες

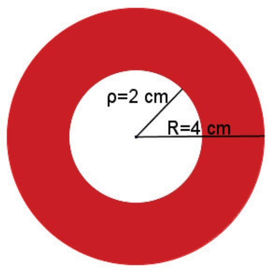
1. Να βρείτε το εμβαδόν κύκλου:
   (α) με ακτίνα $10\ cm$,
   (β) με διάμετρο $10\ mm$,
   (γ) με μήκος περιφέρειας $12{,}56\ cm$,
   (δ) με μήκος περιφέρειας $12\pi\ cm$.

2. Να βρείτε την ακτίνα κύκλου, αν το εμβαδόν του είναι $36\pi\ m^2$.

3. Το εμβαδόν ενός κύκλου είναι ίσο με $9\pi\ cm^2$. Να βρείτε το μήκος της περιφέρειάς του.

4. Ένας κυκλικός τομέας γωνίας $30°$ έχει εμβαδόν $3\pi\ m^2$. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου.

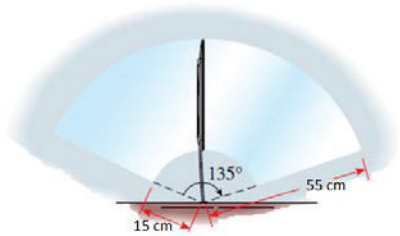
5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους (κυκλικού δακτυλίου) του διπλανού σχήματος, αν $\rho = 2\ cm$ και $R = 4\ cm$.



6. Ένας κύκλος έχει εμβαδόν $144\pi\ cm^2$. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου του κύκλου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $60°$.

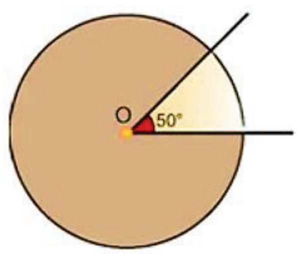
7. Ο Νικόλας ισχυρίζεται ότι αν τριπλασιαστεί η ακτίνα ενός κύκλου θα τριπλασιαστεί και το εμβαδόν και το μήκος του. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό του.

8. Ο υαλοκαθαριστήρας ενός αυτοκινήτου έχει μήκος $55\ cm$. Το σημείο περιστροφής απέχει από το λάστιχο καθαρισμού $15\ cm$. Αν ο υαλοκαθαριστήρας διαγράφει γωνία $135°$, να υπολογίσετε την επιφάνεια που καθαρίζει.



9. Ο κύριος Παύλος διαθέτει $10\ m$ σύρμα για να περιφράξει έναν χώρο για τον σκύλο του. Θέλει να επιλέξει το σχήμα με τη μεγαλύτερη επιφάνεια που μπορεί να περιφράξει. Τι σχήμα πρέπει να επιλέξει κύκλο ή τετράγωνο;

10. Μια κυκλική πλατεία έχει ακτίνα $R = 36\ m$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ένας προβολέας είναι τοποθετημένος στο κέντρο της πλατείας και εκπέμπει δέσμη φωτός που φωτίζει έναν κυκλικό τομέα γωνίας $50°$.
    (α) Να βρείτε το εμβαδόν της πλατείας.
    (β) Να βρείτε το εμβαδόν της πλατείας που δεν φωτίζεται.
    (Η απάντησή σας μπορεί να δοθεί συναρτήσει του π)

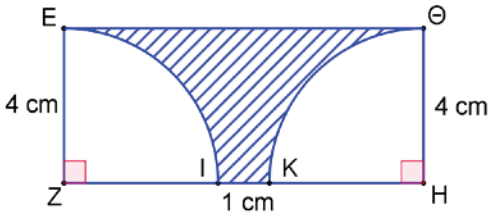


11. Ο Νικόλας και οι φίλοι του θέλουν να παραγγείλουν πίτσα. Ο Νικόλας λέει ότι πρέπει να προτιμήσουν την πίτσα που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν ενώ ο Μιχάλης υποστηρίζει ότι πρέπει να επιλέξουν αυτή με τη μεγαλύτερη περίμετρο. Εσείς ποια από τις δύο πιο κάτω προσφορές πιστεύετε ότι πρέπει να προτιμήσουν και γιατί;

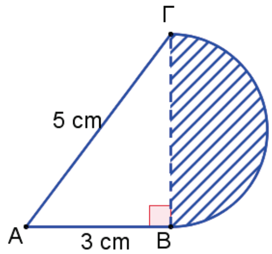
Προσφορά Α	Προσφορά Β
Πίτσα τετράγωνη με πλευρά 36 cm €20.50	Πίτσα κυκλική με διάμετρο 40 cm

12. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα:

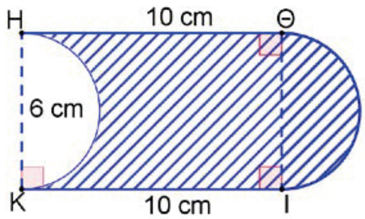
(α) $\overset{\frown}{EI}$ και $\overset{\frown}{\Theta K}$ τεταρτοκύκλια



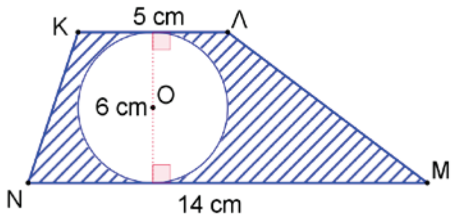
(β) $\overset{\frown}{B\Gamma}$ ημικύκλιο



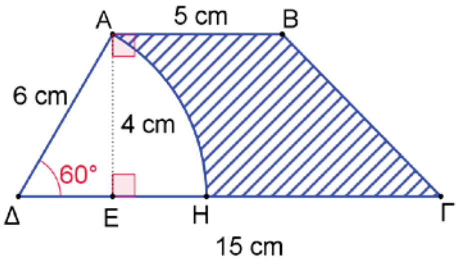
(γ) $\overset{\frown}{\Theta I}$ και $\overset{\frown}{HK}$ ημικύκλια



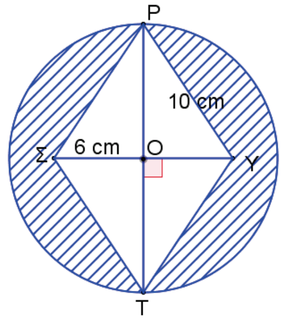
(δ)



(ε) $\overset{\frown}{AH}$ με κέντρο Δ

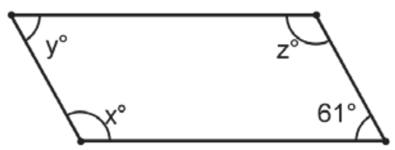


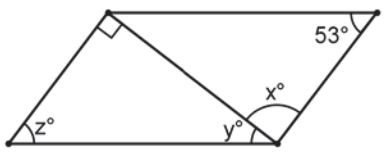
(στ) Κύκλος $K(O, OP)$
$P\Sigma TY$ ρόμβος



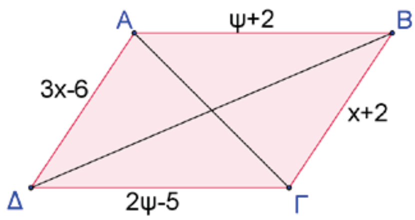
Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y, z στα πιο κάτω παραλληλόγραμμα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α) 

(β) 

2. Να υπολογίσετε την περίμετρο του παραλληλόγραμμου $ΑΒΓΔ$.

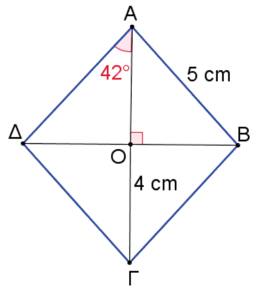


3. Αν $ΑΒΓΔ$ είναι ρόμβος, να συμπληρώσετε:

(α) $ΒΓ =$ (β) $ΑΓ =$

(γ) $ΒΟ =$ (δ) $Β\hat{Α}Γ =$

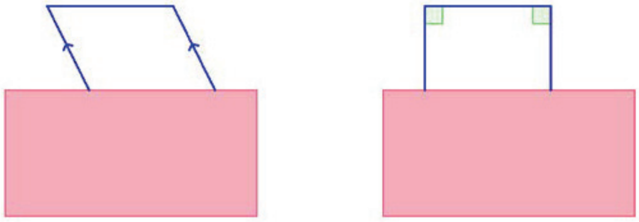
(ε) $Β\hat{Α}Δ =$ (στ) $Α\hat{Β}Γ =$



4. Να σημειώσετε "✓", στα σχήματα που έχουν τις πιο κάτω ιδιότητες:

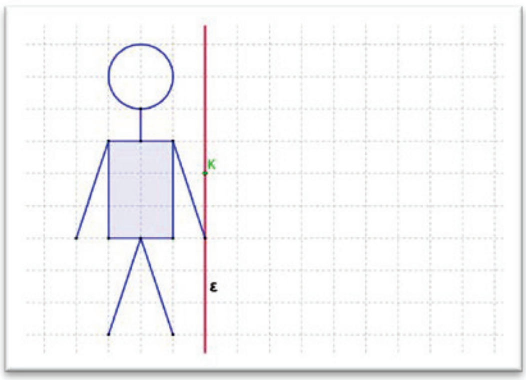
ΙΔΙΟΤΗΤΑ	Παραλληλόγραμμο	Ορθογώνιο	Τετράγωνο	Ρόμβος
Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.				
Οι διαγώνιοι είναι ίσες.				
Οι πλευρές είναι ίσες.				
Οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα.				
Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.				
Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.				
Οι γωνίες του είναι 90°.				
Δυο διαδοχικές γωνίες είναι Παραπληρωματικές.				
Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.				
Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του.				

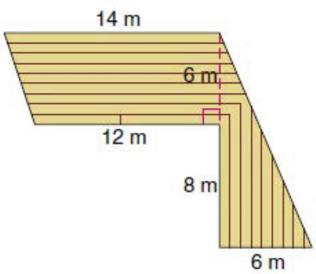
5. Ένα μέρος των μπλε τετραπλεύρων είναι κρυμμένο όπως φαίνεται στα πιο κάτω σχήματα. Να εξετάσετε τι είδους τετράπλευρο θα μπορούσε να είναι το καθένα.



6. Να εξετάσετε κατά πόσο οι ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς:
   (α) *Κάθε παραλληλόγραμμο είναι και τετράγωνο.*
   (β) *Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος.*
   (γ) *Κάθε ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμο.*
   (δ) *Κάθε ρόμβος είναι τετράγωνο.*
   (ε) *Κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο.*
   (στ) *Κάθε ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμο.*

7. Να βρείτε το συμμετρικό του διπλανού σχήματος:
   (α) ως προς την ευθεία ε
   (β) ως προς το σημείο K.





8. Ο ιδιοκτήτης ενός καταστήματος παράγγειλε τον διπλανό πάγκο εργασίας. Να υπολογίσετε το συνολικό εμβαδόν της επιφάνειας του πάγκου.

9. Να υπολογίσετε το πλάτος και την περίμετρο ορθογωνίου που έχει μήκος $16\ cm$ και είναι ισεμβαδικό με τετράγωνο πλευράς $8\ cm$.

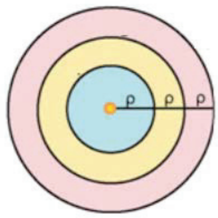
10. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο ρόμβου με διαγωνίους $24\ m$ και $10\ m$.

11. Δίνεται τραπέζιο με εμβαδόν $150\ cm^2$ και ύψος ίσο με $10\ cm$. Αν η μια βάση του είναι διπλάσια από την άλλη, να υπολογίσετε τις δυο βάσεις.

12. Ένας κυκλικός δίσκος έχει εμβαδόν $100\,\pi\, mm^2$. Να βρείτε:
   (α) Την ακτίνα και την περίμετρο του κυκλικού δίσκου.
   (β) Το μήκος του τόξου και το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 60^0.
   (Η απάντησή σας μπορεί να δοθεί συναρτήσει του π)

13. Το εμβαδόν κυκλικού τομέα γωνίας $45°$ είναι $20{,}25\pi\, cm^2$. Να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου στον οποίο ανήκει ο τομέας.

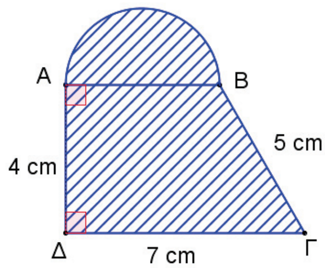
14. Τρεις ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες $\rho, 2\rho, 3\rho$ αντίστοιχα. Αν Γ_1, Γ_2, Γ_3 είναι τα μήκη της περιφέρειας των τριών κύκλων και E_1, E_2, E_3 το εμβαδόν τους αντίστοιχα, να συμπληρώσετε τον πίνακα:



$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$	$\frac{\Gamma_3}{\Gamma_1}$	$\frac{E_1}{E_2}$	$\frac{E_3}{E_1}$

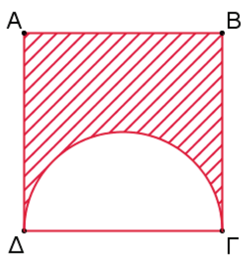
15. Ένας κύκλος έχει εμβαδόν ίσο αριθμητικά με το μήκος του. Να βρείτε το μήκος της ακτίνας του.

16. Στο διπλανό σχήμα $AB\Gamma\Delta$ τραπέζιο και $\overset{\frown}{AB}$ ημικύκλιο. Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του σκιασμένου σχήματος.

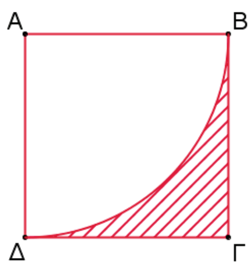


17. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο των σκιασμένων επιφανειών στα παρακάτω τετράγωνα πλευράς $10\, cm$. Τα τόξα στα πιο κάτω σχήματα είναι ημικύκλια ή τεταρτοκύκλια. Το K είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

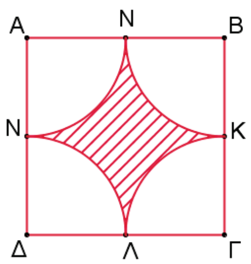
(α)



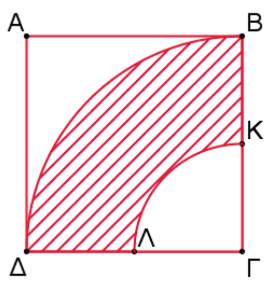
(β)



(γ)

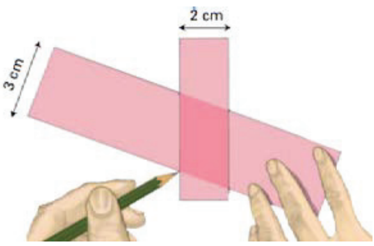


(δ)



Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Ο Πέτρος χρησιμοποίησε δύο ταινίες για να κατασκευάσει ένα τετράπλευρο, όπως φαίνεται στο σχήμα.

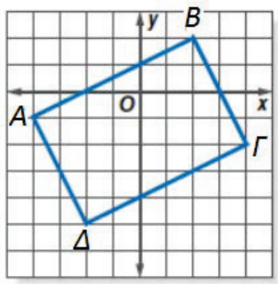


   (α) Να εξετάσετε το είδος του τετραπλεύρου.

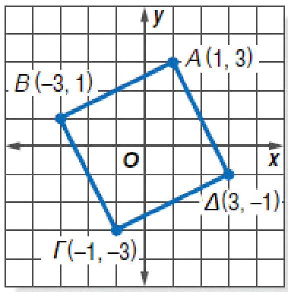
   (β) Να εξηγήσετε πώς θα μπορούσε να κατασκευάσει ένα ορθογώνιο, έναν ρόμβο και ένα τετράγωνο με αυτή την τεχνική (χρησιμοποιώντας ταινίες οποιουδήποτε πλάτους).

2. Να υπολογίσετε το μήκος των πλευρών και των διαγωνίων των πιο κάτω τετραπλεύρων και να τα χαρακτηρίσετε ως προς το είδος τους.

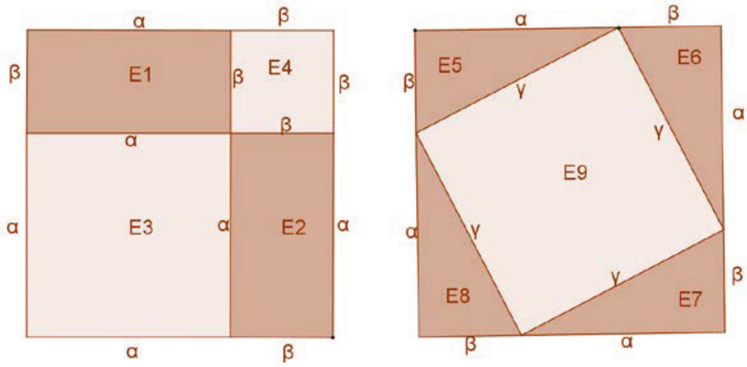
(α)



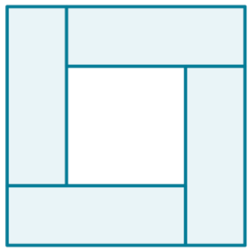
(β)



3. Πιο κάτω δίνονται δύο ίσα τετράγωνα με πλευρές μήκους $\alpha + \beta$. Το πρώτο χωρίζεται σε δύο μικρότερα τετράγωνα και δύο ορθογώνια και το δεύτερο σε ένα τετράγωνο και τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα. Χρησιμοποιώντας τα πιο κάτω σχήματα να αποδείξετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

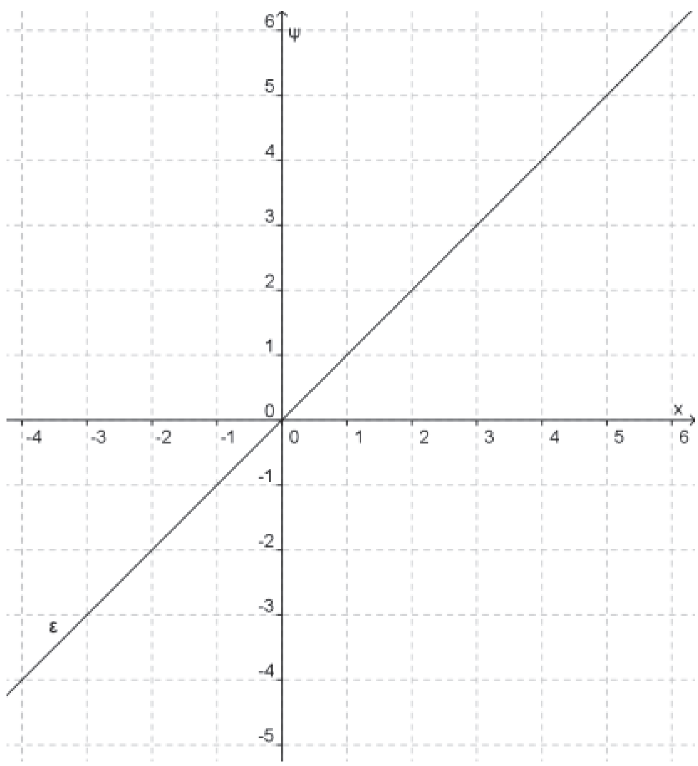


4. Τέσσερα ίσα ορθογώνια και ένα τετράγωνο τοποθετούνται (χωρίς να επικαλύπτονται) για να δημιουργήσουν ένα άλλο τετράγωνο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν το κάθε ορθογώνιο έχει περίμετρο $40\ cm$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου.

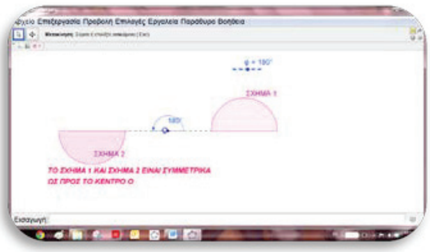


5. Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«B_En3_Symetria3.ggb»*. Να μελετήσετε το σχήμα κατά την περιστροφή του.
   (α) Ποια είναι η σχέση της θέσης του αρχικού σχήματος με την τελική του θέση;
   (β) Να εξετάσετε αν το σχήμα παρουσιάζει συμμετρία ως προς το O.

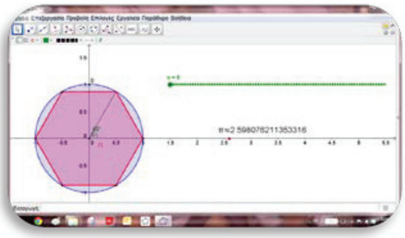
6. Στο πιο κάτω σύστημα αξόνων να τοποθετήσετε τα σημεία $A(-1,3)$, $B(1,4)$ και $\Gamma(1,2)$.
   (α) Να κατασκευάσετε το συμμετρικό σχήμα $A'B'\Gamma'$ του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς την ευθεία ε.
   (β) Να κατασκευάσετε το συμμετρικό σχήμα ΔEZ του τριγώνου $A'B'\Gamma'$ ως προς το σημείο $(0,0)$.
   (γ) Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι συμμετρικά.



7. *Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «B_En3_Symetria4. ggb»*
   (α) Να μετακινήσετε τον δρομέα φ.
   (β) Να παρατηρήσετε τις διάφορες θέσεις του $\sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma\ 1$ σε σχέση με το $\sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha\ 2$.



8. Με τη βοήθεια του εφαρμογιδίου «B_En3_pi.ggb», να εξηγήσετε τη διαδικασία προσέγγισης του αριθμού π.

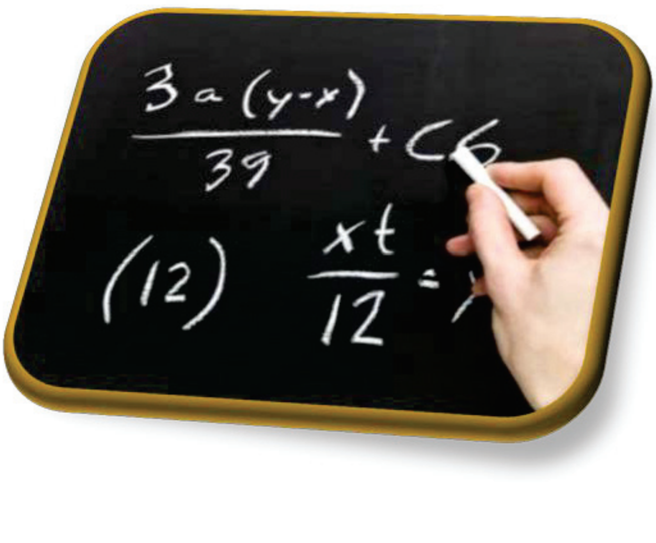


9. Να σχεδιάσετε τρίγωνο $AB\Gamma$ και να κατασκευάσετε το συμμετρικό σημείο Δ του A ως προς B, καθώς και το συμμετρικό σημείο E του Δ ως προς την ευθεία $B\Gamma$. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $B\Delta E$ και BEA είναι ισοσκελή.

10. Ένα τετράγωνο με εμβαδόν $16\,cm^2$ έχει τις κορυφές του σε κύκλο. Να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου.

Απαντήσεις Δραστηριοτήτων

Α΄ τεύχους



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΑΠΟ ΤΗΝ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ *Σελίδα 9*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις						
1.	(α)	ΣΩΣΤΟ	(β)	ΛΑΘΟΣ	(γ)	ΣΩΣΤΟ		
	(δ)	ΛΑΘΟΣ	(ε)	ΣΩΣΤΟ				
2.	(α)	$>$	(β)	$<$				
	(γ)	$>$	(δ)	$>$				
	(ε)	$>$	(στ)	$>$				
	(ζ)	$=$	(η)	$<$				
3.	(α)	5	(β)	-47	(γ)	21	(δ)	-7
	(ε)	-23	(στ)	0	(ζ)	-13	(η)	72
	(θ)	-24	(ι)	0	(ια)	$-7\frac{7}{12}$	(ιβ)	$-1\frac{2}{15}$
	(ιγ)	$-5\frac{5}{18}$	(ιδ)	$1\frac{5}{21}$				
4.	(α)	-2	(β)	2	(γ)	8	(δ)	2
	(ε)	-1	(στ)	2				
5.	(α)	0	(β)	5	(γ)	0	(δ)	-20
	(ε)	-14	(στ)	-2	(ζ)	-6	(η)	-7
	(θ)	-4	(ι)	24				
6.	$ΜΚΔ(32,48,80) = 16$		$ΕΚΠ(32,48,80) = 480$					
7.	(α)	4	(β)	4	(γ)	-27		
	(δ)	1	(ε)	1	(στ)	$\frac{1}{36}$		
8.	(α)	$x = 1$	(β)	$a = 4$	(γ)	$x = 2$	(δ)	$x = 5$
	(ε)	$x = 6$	(στ)	$y = -4$	(ζ)	$\kappa = 0$	(η)	$x = 7$
9.	(α)	Αμβλεία	(β)	Μηδενική				
	(γ)	Μη κυρτή	(δ)	Ορθή				
	(ε)	Ευθεία	(στ)	Μη κυρτή				
	(ζ)	Οξεία	(η)	Πλήρης				
10.	(α)	$\alpha = 55°$	(β)	$x = 35°, y = 145°$			(γ)	$\delta = 22°$
	(δ)	$x = 20°$	(ε)	$x = 65°, y = 115°$				
11.	(α)	$x = 60°, y = 60°$						
	(β)	i. ακτίνα		ii. χορδή		iii διάμετρος		

12.	(α)	$x = 4, y = 3$	(β)	$ΑΓ = 8,\ ΒΓ = 2$	(γ)	$\hat{B} = 72°,\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 18°$	
13.	(α)	$x = 72°, \rho = 108°$ σκαληνό, οξυγώνιο	(β)	$\alpha = 45°, \beta = 45°, \gamma = 135°$ ισοσκελές, ορθογώνιο			
14.	(α)	$x = 40°$	(β)	$\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = 30°, \hat{\Gamma} = 30°, \hat{\Delta} = 30°$			
	(γ)	ορθογώνιο	(δ)	ισοσκελές			
15.	(α)	$A(0,3), B(-3,0), \Gamma(0,0)$					
	(β)	$E_{A\Gamma B} = 4{,}5\ \tau.\mu.$	(γ)	$y = x + 3$			
16.	(β)	Το (0,0) δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης					
18.	(α)	$y = \frac{7}{10}x$	(β)	$x = €400$	(γ)	$y = €56$	
19.		€32000					
20.		12%					
21.		$P(A) = 1,$	$P(B) = \frac{1}{2},$	$P(\Gamma) = \frac{1}{2},$	$P(\Delta) = \frac{5}{6},$	$P(E) = 0$	
22.	(α)	40 μαθητές	(β)	30	(δ)	i. $\frac{1}{4}$	ii. $\frac{7}{10}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Πραγματικοί Αριθμοί

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ					*Σελίδα 23*	
Δραστηριότητα		Απαντήσεις				
1.	(α)	ΛΑΘΟΣ	(β)	ΣΩΣΤΟ	(γ)	ΛΑΘΟΣ
	(δ)	ΛΑΘΟΣ	(ε)	ΣΩΣΤΟ		
2.	(α)	5^9	(β)	y^3	(γ)	$(-7)^2$
	(δ)	$\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$	(ε)	$(0{,}1)^{13}$	(στ)	$(-2)^3$
	(ζ)	11^6	(η)	5^5	(θ)	α^1
	(ι)	β^{13}				
3.		10^4				
4.	(α)	14	(β)	8	(γ)	10
	(δ)	6	(ε)	6, 4	(στ)	3
	(ζ)	5	(η)	5	(θ)	1
	(ι)	5				
5.		27				
6.	(α)	3^6	(β)	α^2	(γ)	x^{20}
	(δ)	$\left(-\frac{3}{4}\right)^8$	(ε)	$2^3 \cdot \alpha^6$	(στ)	α^{17}
	(ζ)	$x^7 \cdot y^{28}$	(η)	$\alpha^9 \cdot \beta^{15}$		
7.	(α)	7^3	(β)	$\alpha^{15} \cdot \beta^6$	(γ)	i. Οκταπλασιάζεται ii. 27-πλασιάζεται

8.	(α)	64	(β)	100000	(γ)	$-\frac{1}{32}$
	(δ)	100000	(ε)	1	(στ)	64
9.	(α)	5^5	(β)	$(+2)^{13}$	(γ)	3^{10}
	(δ)	$(-3)^{11}$	(ε)	$(-2)^7$	(στ)	$(-7)^{11}$
	(ζ)	$(-2)^9$	(η)	$(-3)^6$		
10.	(α)	2^5	(β)	2^8		
	(γ)	7^4	(δ)	3^9		
11.	(α)	$2^3 \cdot 3^3 \cdot (-7)^8$	(β)	$2^3 \cdot 3^3 \cdot (-7)^7$	(γ)	$3^6 \cdot (-7)^{13}$
12.	(α)	$x = 9$	(β)	$x = 2$		

Δυναμεις Ρητων Με Εκθετη Ακεραιο *Σελίδα 30*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις				
1.	(α)	$\frac{1}{27}$	(β)	1	(γ)	$\frac{1}{25}$
	(δ)	$\frac{25}{9}$	(ε)	$\frac{1}{8\alpha^3}$	(στ)	$\frac{1}{16}$
2.	(α)	ΣΩΣΤΟ	(β)	ΛΑΘΟΣ	(γ)	ΛΑΘΟΣ
	(δ)	ΛΑΘΟΣ	(ε)	ΛΑΘΟΣ		
4.	(α)	$<$	(β)	$=$		
	(γ)	$<$	(δ)	$>$		
5.	(α)	$-\frac{1}{3}$	(β)	$+7$	(γ)	$+34$
	(δ)	$\frac{71}{72}$	(ε)	-11		
6.		0				
7.		$+\frac{3}{4}$				
8.	(α)	$=$	(β)	$\neq$		
	(γ)	$\neq$	(δ)	$=$		
9.	(α)	3^2	(β)	3^0	(γ)	3^6
	(δ)	3^{-4}	(ε)	3^4	(στ)	3^{-6}
10.	(α)	B	(β)	B		
11.	(α)	$\left(\frac{1}{5}\right)^4$	(β)	5^3	(γ)	6^9
	(δ)	$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^5$	(ε)	5^7	(στ)	$\left(\frac{1}{7}\right)^8$
	(ζ)	$(-5)^8$	(η)	3^7	(θ)	3^1
	(ι)	$\left(+\frac{1}{2}\right)^1$	(ια)	2^5	(ιβ)	$(-3)^1$
12.	(α)	$x = 13$	(β)	$x = -12$		
	(γ)	$x = -7$	(δ)	$x = -1$		

Τετραγωνική και Κυβική Ρίζα Αριθμού *Σελίδα 35*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις							
1.	(α)	8	(β)	5	(γ)	2	(δ)	0,6
	(ε)	7	(στ)	1,5	(ζ)	$-0{,}3$	(η)	0,01
	(θ)	0,4	(ι)	$-\frac{1}{8}$	(ια)	$\frac{2}{3}$	(ιβ)	$-\frac{1}{3}$
2.	30							
3.	$\alpha = 6\,mm$							
4.	(α)	ΛΑΘΟΣ	(β)	ΣΩΣΤΟ	(γ)	ΛΑΘΟΣ		
	(δ)	ΛΑΘΟΣ	(ε)	ΣΩΣΤΟ	(στ)	ΛΑΘΟΣ		
5.	(α)	13	(β)	11	(γ)	26		
	(δ)	8	(ε)	27	(στ)	12		
	(ζ)	$\frac{5}{3}$	(η)	9				
6.	(α)	ΛΑΘΟΣ	(β)	ΣΩΣΤΟ	(γ)	ΣΩΣΤΟ		
	(δ)	ΣΩΣΤΟ	(ε)	ΣΩΣΤΟ				
7.	(α)	$\Pi = 28\,cm$	(β)	$\Pi = 36\,cm$	(γ)	$\Pi = 44\,cm$		
8.	(α)	10	(β)	6	(γ)	3		
	(δ)	2	(ε)	2	(στ)	3		
10.	$230\,m$							
11.	5,8,13,20 Στο 13^{o} τετράγωνο $(13^2 + 4 = 173)$							

Ιδιότητες Ριζών *Σελίδα 41*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις							
1.	(α)	ΣΩΣΤΟ			(β)	ΛΑΘΟΣ		
	(γ)	ΛΑΘΟΣ			(δ)	ΛΑΘΟΣ		
2.	(α)	$7\sqrt{2}$			(β)	$12\sqrt{5} + \sqrt{2}$		
	(γ)	$3 + 2\sqrt[3]{3}$			(δ)	$2\sqrt{10} + \sqrt[3]{10}$		
3.	(α)	8	(β)	10	(γ)	35	(δ)	150
	(ε)	9	(στ)	6	(ζ)	9	(η)	$\frac{1}{2}$
4.	i.	Δ	ii.	Γ	iii.	A	iv.	B
5.	(α)	$A = 19$			(β)	$B = -3\frac{2}{3}$	(γ)	$\Gamma = 1$

6.	(α)	$E = 45\ cm^2$ $\Pi = 12\sqrt{5}\ cm$	(β)	$E = 10\sqrt{6}\ cm^2$ $\Pi = \left(4\sqrt{3} + 10\sqrt{2}\right)\ cm$
7.	$E_{τετράγωνου} = 4 \cdot E_{ορθογωνίου}$			
8.	(α) 12	(β) -1	(γ) $4 - \sqrt{2}$	(δ) -1
9.	(α)	i. $u = 64\ km/h$	ii. $u = 96\ km/h$	iii. $u = 160\ km/h$
	(β)	Ορθός ο συλλογισμός		

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Σελίδα 50

Δραστηριότητα	Απαντήσεις			
1.	(α)	$25 τ.μ.$	(β)	$100 τ.μ.$
2.	(α)	$x = 15\ cm$	(β)	$x = 20\ cm$
	(γ)	$x = 8\ cm$	(δ)	$x = 24\ cm$
3.	$x = 50\ m$			
4.	(α)	$E = 48\ cm^2$ $\Pi = 36\ cm$	(β)	$E = 432\ cm^2$ $\Pi = 84\ cm$
5.	(α)	Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο	(β)	Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο
6.	Ισχύει το ΠΘ, δηλαδή $5^2 = 3^2 + 4^2$			
7.	(α)	Ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{B} = 90°$		
	(β)	Δεν είναι ορθογώνιο τρίγωνο		
8.		Δεν είναι ορθογώνιο τρίγωνο		
9.	$x = 5\ m$ $y = 4\ m$			
10.	$x = 136{,}5\ cm$			

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Σελίδα 58

Δραστηριότητα	Απαντήσεις			
1.	(α)	2,65	(β)	1,87
	(γ)	11,18	(δ)	1,44

2.

Αριθμός	Φυσικός $\mathbb{N}$	Ακέραιος $\mathbb{Z}$	Ρητός $\mathbb{Q}$	Άρρητος $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$	Πραγματικός $\mathbb{R}$
13	✓	✓	✓		✓
8,4			✓		✓
$\frac{3}{5}$			✓		✓
$-\sqrt{25}$		✓	✓		✓
$\frac{24}{5}$			✓		✓
$8,\overline{17}$			✓		✓
$\sqrt{6}$				✓	✓
$\sqrt[3]{5}$				✓	✓
$-\sqrt[3]{7}$				✓	✓
$\sqrt{36}$	✓	✓	✓		✓
$\sqrt[3]{27}$	✓	✓	✓		✓
$-\sqrt{20}$				✓	✓
0,44444			✓		✓
π				✓	✓

3. (α) 5 (β) 5 (γ) 7

(δ) 12 (ε) 6 (στ) 9

4. Π.χ. $a = 51,\ \beta = 59$

5. (α) $<$ (β) $>$

(γ) $>$ (δ) $=$

6. Λάθος, διότι για παράδειγμα $\sqrt{25} = 5$ που είναι φυσικός αριθμός

7. (α) $7, \sqrt{50}, 9, \sqrt{85}$

(β) $5, \sqrt{38}, 7, \sqrt{91}$

(γ) $0,\overline{474}$, $0,\overline{47}$, $0,4\overline{7}$, $\sqrt{0,23}$

8. (α) ΛΑΘΟΣ (β) ΛΑΘΟΣ (γ) ΣΩΣΤΟ

(δ) ΣΩΣΤΟ (ε) ΣΩΣΤΟ

9. (α) $x \cong 5{,}8\ m$ (β) $x \cong 2{,}5\ km$ (γ) $x \cong 2{,}8\ m$

11. (α) $B\Gamma = \sqrt{50}$ (β) $B\Gamma = \sqrt{41}$

12. 23 ίντζες

13. $A\Gamma \cong 297{,}32\ m$

14. $B\Gamma = 13\ cm$, $AB = 15\ cm$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ *Σελίδα 61*

Δραστηριότητα			Απαντήσεις				
1.	(α)		$+\frac{1}{9}$	(β)	$+1$	(γ)	$-\frac{1}{8}$
	(δ)		-64	(ε)	$+25$	(στ)	$+\frac{1}{8}$
	(ζ)		$+\frac{1}{49}$	(η)	0	(θ)	$+16$
	(ι)		32				
2.	(α)		$=$	(β)	$>$		
	(γ)		$<$	(δ)	$=$		
3.	(α)		19683	(β)	177147	(γ)	81
	(δ)		9	(ε)	19683	(στ)	1
5.	(α)		2	(β)	-6	(γ)	-6
	(δ)		3	(ε)	-12	(στ)	2
	(ζ)		-6	(η)	2		
6.	(α)		11^3	(β)	5^{11}	(γ)	-5^5
	(δ)		3^1	(ε)	2^2	(στ)	$\left(-\frac{1}{2}\right)^4$
	(ζ)		6^4	(η)	2^{19}	(θ)	3^{11}
	(ι)		3^8				
7.	(α)		$9\frac{1}{3}$	(β)	-32		
	(γ)		10000	(δ)	0		
8.	(α)	$+10$	$+10$	(β)	$-2\frac{7}{8}$		
9.	(α)		ΛΑΘΟΣ	(β)	ΟΡΘΟ	(γ)	ΟΡΘΟ
	(δ)		ΛΑΘΟΣ	(ε)	ΛΑΘΟΣ	(στ)	ΟΡΘΟ
	(ζ)		*ΟΡΘΟ*				
10.	(α)		8	(β)	$\frac{1}{3}$	(γ)	$1{,}1$
	(δ)		5	(ε)	5	(στ)	10
	(ζ)		2	(η)	$0{,}3$		
11.	(α)		7	(β)	5	(γ)	10
12.	(α)	$\sqrt{\ }$	$\sqrt{2}$, άρρητος	(β)	$\sqrt[3]{9}$, άρρητος	(γ)	$\sqrt{13}$, άρρητος
	(δ)		1, ρητός	(ε)	5, ρητός	(στ)	$\sqrt[3]{25}$, άρρητος
13.	(α)		$<$	(β)	$<$	(γ)	$=$
	(δ)		$<$	(ε)	$>$	(στ)	$>$
15.	$\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{29}$, $\sqrt{29}$						
16.	Π.χ.	$x = \sqrt{70}$ άρρητος και $y = 8{,}3$ ρητός					

17.	(α)	$x = \sqrt{48}$	(β)	$x = \sqrt{1184}$	(γ)	$x = \sqrt{464}$
18.	$EA \cong 25\ m$					
19.	$y = \sqrt{13}$					
20.	$AB = 17\ cm$					

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ						*Σελίδα 66*
Δραστηριότητα	Απαντήσεις					
1.		$(0{,}3)^{12}$				
2.		1				
4.	(α)	$A = 12^8$	(β)	$B = 2^8$	(γ)	$\Gamma = 6$
5.		4				
11.	(α)	$AB = \sqrt{13}\ \mu.$	(β)	$\Gamma\Delta = \sqrt{17}\ \mu.$	(γ)	$H\Theta = 3\ \mu.$
	(δ)	$KI = \sqrt{18}\ \mu.$	(ε)	$EZ = \sqrt{20}\ \mu.$		
12.	$x = 8\ cm$					
13.	$\alpha = 8\ cm$					
14.	(α)	$\sqrt{\alpha}, \alpha,\ \alpha^2$	(β)	$\sqrt{\alpha} = \alpha = \alpha^2$		
	(γ)	$\alpha^2, \alpha, \sqrt{\alpha}$	(δ)	$\sqrt{\alpha} = \alpha = \alpha^2$		
15.		$E = 34\ cm^2$				
16.	(α)	ΚΑΠΟΤΕ	(β)	ΚΑΠΟΤΕ		
	(γ)	ΠΟΤΕ	(δ)	ΚΑΠΟΤΕ		
17.	(β)	$\sqrt{21}, \sqrt{20}, 1$				

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Αλγεβρικές Παραστάσεις

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ -ΜΟΝΩΝΥΜΑ	*Σελίδα 73*
Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	Μονώνυμα: $+2x,\ 3xy^7,\ \frac{xy\omega}{6},\ \frac{2xy^2}{3},\ 1234$

3.		Δεν είναι μονώνυμο	Είναι μονώνυμο	Συντελεστής	Κύριο μέρος	Βαθμός
	$\frac{+3x^2}{8}$		✓	$\frac{3}{8}$	x^2	2
	x^2y^2		✓	1	x^2y^2	4
	$-3x^3y^5$		✓	-3	x^3y^5	8
	$\frac{2}{7}x^3y+4$	✓				
	$3a^2\beta^{-3}$	✓				
	$-\frac{1}{4}\alpha$		✓	$-\frac{1}{4}$	α	1

4.	(α)	3	(β)	Π.χ.$2x^2y, -\frac{1}{4}xy^3$	(γ)	$3x^2y$	(δ)	Π.χ. $4y^3$
5.	(α)	$\nu = 2$		(β)	$\mu = 4, \nu = 6$			
6.		$-2\alpha^2\beta^3$						
7.	(α)	ΛΑΘΟΣ	(β)	ΛΑΘΟΣ	(γ)	ΣΩΣΤΟ		
	(δ)	ΛΑΘΟΣ	(ε)	ΛΑΘΟΣ	(στ)	ΣΩΣΤΟ		

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ *Σελίδα 78*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις							
1.	(α)	v	(β)	vi	(γ)	ii	(δ)	i

2.

$\cdot$	$2x$	-5
$3x$	$6x^2$	$-15x$
$8x^2$	$16x^3$	$-40x^2$

$:$	$2x$	$4x^3$
$16x^2$	$8x$	$4x^{-1}$
$-32x^5$	$-16x^4$	$-8x^2$

3.	(α)	$6y$	(β)	$-2\alpha\beta$	(γ)	x^2		
	(δ)	$-5xy^2$	(ε)	$7\omega^3-6$	(στ)	$-\frac{5}{3}\beta^2$		
4.	(α)	$2x^5$	(β)	$12x^5$	(γ)	$3\alpha^{13}$	(δ)	$6x^5y^3$
	(ε)	$6y^3\,x$	(στ)	$-10\alpha^5\beta^5$	(ζ)	$-12x^5y$	(η)	$4x^6$
	(θ)	$4\alpha^2\beta^4$	(ι)	$-\frac{\omega^3}{8}$				
5.	(α)	6α	(β)	2	(γ)	$-2xy$	(δ)	$-7\alpha^4\beta$

	(ε)	$6x^3y$	(στ)	$\frac{1}{2\omega x^3}$			

6.

$-x^2$	$-6x^2$	x^2
0	$-2x^2$	$-4x^2$
$-5x^2$	$2x^2$	$-3x^2$

7.	(α)	$4x^2$	(β)	$19x^2$	(γ)	$3x^2$	(δ)	$7xy$
8.	(α)	$10x^2$	(β)	$9x^2y^3$	(γ)	$-8\beta^5$	(δ)	$-9\alpha^3$
	(ε)	$-5\beta^2$	(στ)	$-6xy^3$	(ζ)	$\alpha\gamma$	(η)	$6xy^7$
9.	$\Pi = 9x$							
10.	(α)	$3x^2y$			(β)	20β		

Πολυωνυμα – Προσθεση πολυωνυμων *Σελίδα 84*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις					
1.	(α)	$-x^3+3x^2+x-2$	(β)	$-x^4+4x^3-2x^2-x+1$		
2.	(α)	$-n^2+7$	(β)	$3x^2+x+6$	(γ)	$3\omega^2-3\omega+2$
	(δ)	$5n^2-2n+1$	(ε)	$-y^2+6y$	(στ)	$2x^2-xy+3$
3.	(α)	$10x^3-2x^2-11x+11$	(β)	$-5x^3+2x-7$		
	(γ)	$2x^2+7x+3$				
4.	(α)	4	(β)	-1		
	(γ)	x^3+x^2-x+5	(δ)	x^2-5x+9		

5.

(α) $\left(\boxed{3x^2}-8x-\boxed{4}\right)+(9x^2-\boxed{x}+8)=12x^2-9x+4$

(β) $(n^2+3)+\left(\boxed{-2n^2}+3\right)=-n^2+\boxed{6}$

(γ) $(x^2+\boxed{3x}+3)-(x^2-2x+\boxed{3})=x$

(δ) $\left(-2x^3+\boxed{21x^2}-7\right)-\left(\boxed{2x^3}+7x^2+\boxed{-5x}+\boxed{3}\right)$
$=-4x^3+14x^2+5x-10$

6. $6\alpha^2-\alpha-12$

7.

$8x^2-1$	$3x^2-x$	$4x^2+4x-5$
x^2+5x-6	$5x^2+x-2$	$9x^2-3x+2$
$6x^2-2x+1$	$7x^2+3x-4$	$2x^2+2x-3$

8. (α) $A=(-7x+181)°$ (β) $A=76°,\ B=31°,\ \Gamma=73°$

Διαιρεση Πολυωνυμων *Σελίδα 94*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις					
1.	(α) $-2x^2+6$		(β) $-2y^2+4x^2$		(γ) $-2\omega^5+1$	
	(δ) $-\frac{4}{\lambda}+\frac{5\lambda}{\kappa^2}$		(ε) $-\beta+\gamma-\delta$		(στ) $2x-\frac{5x^2}{2}-3x^3$	
	(ζ) $x+3-\frac{4}{x}$		(η) $2\beta+1-3\alpha$			
2.	$-6x^2+3$ $3a^2-1$ $8a-4$					
3.	(α) 2	(β) x	(γ) a^2	(δ) 3κ		
4.	(α) $x-4$	(β) $a+2$	(γ) $\omega+2$	(δ) $\beta+2,\quad \upsilon=-1$		
	(ε) $\kappa-2,\quad \upsilon=5$		(στ) $3\beta+1$			

5.

(α) $\frac{6\alpha^3-\boxed{3}-2\alpha}{\boxed{3\alpha}}=2\alpha^2-\frac{1}{\alpha}-\boxed{\frac{2}{3}}$

(β) $\frac{6\alpha^3\beta^2-\boxed{10\alpha}-2\alpha\beta}{\boxed{-2\alpha\beta}}=-3\alpha^2\beta+\frac{5}{\beta}+\boxed{1}$

(γ)

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x-\boxed{8} & x-2 \\ \cline{2-2} -x^2+\boxed{2x} & x+4 \\ +4x-\boxed{8} & \\ \boxed{-4x}+8 & \\ 0 & \end{array}$$

(δ)

$$\begin{array}{r|l} \boxed{3x^2}+2x-\boxed{4} & x-1 \\ \cline{2-2} \boxed{-3x^2}+3x & 3x+\boxed{5} \\ +5x-\boxed{4} & \\ \boxed{-5x}+5 & \\ +1 & \end{array}$$

6.	$3x^2+14x-2$
7.	$3x^3+5x^2+3x+4$
8.	Είναι παράγοντας του πολυωνύμου αυτού.
9.	$\alpha=-12$

Δραστηριοτητες Ενοτητας *Σελίδα 96*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) $-5x^2+9y$	(β) a^8	(γ) $3\beta^6$
	(δ) $8\omega^8$	(ε) $-15\alpha^5\beta^5$	(στ) $24\alpha^2\gamma^3$
	(ζ) $3\alpha^2$	(η) $-7xy$	
2.	(α) $4t^2-7t-6$	(β) $-6n^2$	(γ) $3x^3-6x^2\psi$
	(δ) $2x^3-4x^2+6x$	(ε) $-5+6x$	(στ) $-\frac{\alpha^2}{2\beta}+\beta$
	(ζ) α^2-4	(η) $x^2+2xy+y^2$	(θ) 7ω

	(ι)	$x^2 - 6x + 9$				
3.	(α)	$-2x^2 + 4$	(β)	$2x^2 + 3x - 7$	(γ)	$2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$
	(δ)	$2x + 11, \upsilon = 52$	(ε)	-2	(στ)	-2
4.	(α)	$2 - \frac{3x}{y}$	(β)	$2y - 3$	(γ)	$y - 5, \quad \upsilon = -5$
	(δ)	$4x - 2,$	(ε)	$2x - 1, \upsilon = 4$		
6.	(α)	$14\beta^2$	(β)	$8y^2$	(γ)	$a^3\beta$
	(δ)	$y\omega^2$	(ε)	$-\frac{2}{3}x\lambda^4\omega$	(στ)	$-8\beta^2\gamma^3$
	(ζ)	$-12\kappa^7\mu^7$	(η)	$\kappa^2, \quad -7$	(θ)	$9\alpha, \quad 3\alpha\beta^4$
	(ι)	$2\omega, \quad 2\omega$				
7.	(α)	A	(β)	Γ		
	(γ)	B	(δ)	B		
8.	$3\alpha^2 - 5\alpha - 7$					
9.	$\alpha - 2, \quad \upsilon = -6$					
11.	$3x^3 - 5x^2 - 2x$					
14.	(α)	$\alpha\beta - 4x^2$	(β)	$2800\ cm^2$		
15.		Π.χ. $1, \quad 2a^2 + 4a$ $2, \quad a^2 + 2a$ $a, \ 2a + 4$				
16.		$5x^2 - 2x$				

Δραστηριοτητες Εμπλουτισμου — *Σελίδα 99*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
2.	$a = -3$
3.	(β) $\quad K\Lambda = 5\ \mu., \quad AB = 4\ \mu.$
4.	$1200000 + 1000x - 5x^2$
6.	$\alpha = 5\ cm, \quad \beta = 8\ cm$
8.	4
9.	Δέκατου έκτου βαθμού
10.	$\kappa\acute{\varepsilon}\rho\delta o\varsigma = 300x - 5000$
11.	$a = -3, \ \beta = 7, \ \gamma = -4$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Γεωμετρία

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ — *Σελίδα 88*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις						
1.	Υπάρχουν άξονες συμμετρίας στις σημαίες των Μπαχάμων, της Ελβετίας, του Παλαού, και της Δανίας						
4.	(α)	*Π.χ.* $\alpha=-6, \beta=0$	(β)	$\gamma=+6$	(γ)	$+3$	
5.	(α)	3	(β)	$1,8,0$	(γ)	$2,4,5,6,7,9$	
9.	(α)	A	(β)	Δ	(γ)	B	(δ) Γ
11.	(α)	κανένα	(β)	1	(γ)	3	

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ — *Σελίδα 97*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις						
1.	(α)	$8\ cm$	(β)	$9\ cm$	(γ)	$101°$	(δ) $100°$
2.	(α)	$B\Gamma=A\Delta=63\ cm$	(β)	$\hat{A}=\hat{\Gamma}=109°$ $\hat{B}=\hat{\Delta}=71°$			
3.	(α)	$AO=9\ cm$	(β)	$B\Delta=24\ cm$			
6.	(α)	$E=24\ cm^2$ $\Pi=22\ cm$	(β)	$E=84\ m^2$ $\Pi=42\ m$	(γ)	$E=90\ dm^2$ $\Pi=48\ dm$	
7.	$\beta=8\ cm$						
8.	$\upsilon_1=4\ cm$ $\upsilon_2=2{,}5\ cm$						
9.	$(3,-4)$ ή $(-3,-4)$ ή $(1,6)$						

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ — *Σελίδα 101*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις			
1.	$x=18\ cm$			
2.	$\hat{\beta}=\hat{\gamma}=\hat{\lambda}=\hat{\zeta}=30°$ $\hat{\alpha}=\hat{\mu}=\hat{\delta}=\hat{\varepsilon}=60°$ $\hat{\nu}=\hat{o}=60°$ $\hat{\xi}=\hat{\rho}=120°$			
3.	(α)	$E=8\ \tau.\mu.$	(β)	$(3,2)$
4.	(α)	$AB=6\ \mu.$ $B\Delta=\sqrt{52}\ \mu.$	(β)	$\Pi=20\ \mu.$
5.		Δεν ισχύει πάντα		
6.	(α)	$\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma=6\ m$	(β)	$\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma=12\ m$

7.	$\upsilon_1 = 4{,}8\ dm$ $\upsilon_2 = 4{,}8\ dm$
8.	$\beta = 16\ cm$ $\upsilon = 4\ cm$
9.	$E = \left(10\sqrt{50} - 25\right) m^2$ ή $E = \left(50\sqrt{2} - 25\right) m^2$

Ρομβος

Σελίδα 106

Δραστηριότητα	Απαντήσεις					
1.	(α)	$90°$	(β)	$x = 4{,}5\ m$	(γ)	$AB = 10\ m,\quad \Delta E = 8\ m,$ $A\Gamma = 12\ m$
2.	(α)	$60°, 120°, 30°, 60°, 90°$			(β)	$\Pi = 40\ cm$
3.	(α)	$E = 120\ m^2$			(β)	$\Pi = 52\ m$
4.		$\delta = 6\ cm$				
5.	(α)	$\Pi = 40\ dm$			(β)	$E = 96\ dm^2$
6.	(α)	$\delta_1 = 8\ cm$			(β)	$\delta_2 = 32\ cm$
7.	(α)	$\delta_1 = 12\ cm$			(β)	$\Pi = 40\ cm$
8.	(γ)	$E = 192\ cm^2$			(δ)	$E = 216\ cm^2$

Τετραγωνο

Σελίδα 111

Δραστηριότητα	Απαντήσεις					
1.	$x = 7\ cm$ $\psi = 45°$					
2.	(α)	$\hat{A} = \hat{B} = \Gamma = \hat{\Delta} = A\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}B = B\hat{O}A = 90°$				
	(β)	$B\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}B = B\hat{\Delta}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}A = A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Delta = 45°$				
	(γ)	$A\Delta = \Delta\Gamma = B\Gamma = AB = 2\ cm$				
	(δ)	$A\Gamma = B\Delta = \sqrt{8}\ cm$				
	(ε)	$AO = O\Delta = O\Gamma = OB = \sqrt{2}\ cm$				
4.	$AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A = 3\ cm$					
6.	(α)	ΠΑΝΤΟΤΕ	(β)	ΚΑΠΟΤΕ	(γ)	ΚΑΠΟΤΕ
	(δ)	ΠΑΝΤΟΤΕ	(ε)	ΠΑΝΤΟΤΕ		
8.	(α)	Ισόπλευρο τρίγωνο	(β)	Τετράγωνο	(γ)	Δεν υπάρχει τέτοιο σχήμα
9.	$E = 5\ m^2$					
10.	Η περίμετρος θα δεκαπλασιαστεί, ενώ το εμβαδόν θα εκατονταπλασιαστεί					
11.	$\Pi_{AB\Gamma} = \Pi_{\Gamma B\Delta} = \left(4\sqrt{2} + 4\right) cm,\quad E = 4\ cm^2$ $\Pi_{AH\Theta} = \Pi_{BEZ} = \left(2\sqrt{2} + 2\right) cm,\quad E = 1\ cm^2$ $\Pi_{\Theta HEB} = 4\sqrt{2}\ cm,\quad E = 2\ cm^2$					

$\Pi_{HKI} = (4 + 2\sqrt{2})\ cm, \qquad E = 2\ cm^2$

$\Pi_{EI\Delta Z} = (4 + 2\sqrt{2})\ cm,\ \ E = 2\ cm^2$

Τραπεζιο *Σελίδα 117*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις					
1.	(α)	$\hat{A} = \hat{B} = 120°$ $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60°$	(β)	$\hat{\Theta} = \hat{H} = 85°$ $\hat{E} = \hat{Z} = 95°$	(γ)	$\hat{K} = \hat{\Lambda} = 100°$ $\hat{I} = \hat{M} = 80°$
2.	(α)	ΝΑΙ	(β)	ΝΑΙ	(γ)	ΟΧΙ
	(δ)	ΟΧΙ	(ε)	ΝΑΙ		

3.

	Άξονες συμμετρίας						Έχει κέντρο συμμετρίας
	Κανένα	1	2	3	4	Περισσότερους	
Παραλληλό-γραμμο	✓						✓
Ορθογώνιο			✓				✓
Ρόμβος			✓				✓
Τετράγωνο					✓		✓
Ισοσκελές Τραπέζιο		✓					

5. Τυχαίο τετράπλευρο, ορθογώνιο, τετράγωνο, τραπέζιο

6.	(α)	$E = 25\ cm^2$	(β)	$E = 246\ cm^2$
7.	(α)	$E = 35\ \tau.\mu.$	(β)	$E = 25\ \tau.\mu.$
8.	$\upsilon = 6\ cm$			
9.	$E = 96\ cm^2$			
10.	(α)	$E = 28\ cm^2$ $\Pi = 24\ cm$	(β)	$E = 112\ cm^2$ $\Pi = 56\ cm$
11.	$\beta_1 = 5\ cm$ $\beta_2 = 9\ cm$			

Μηκος Κυκλου *Σελίδα 125*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις			
1.	$\Gamma = 20\pi\ cm\ \cong 62{,}8\ cm$			
3.	$20\pi\ m\ \cong 31{,}4\ m$			
4.	(α)	$R = 4\ cm$	(β)	$R = 8\ cm$
5.	$R = 0{,}55\ m$			
6.	1000 στροφές			
7.	$\Gamma = 40192\ km$			
8.	24 άτομα			

9.	$\Gamma = 6\pi\ cm$			
10.	(α)	$\gamma_{B\Gamma} = \frac{5\pi}{3}\ cm$	(β)	$\gamma_{\Delta E} = \frac{25\pi}{6}\ cm$
11.	(α)	$\Pi = \left(6 + \frac{3\pi}{2}\right) cm$	(β)	$\Pi = (20 + 6\pi)\ cm$
	(γ)	$\Pi = (8 + 2\pi)\ cm$	(δ)	$\Pi = (24 + 3\pi)\ cm$
12.	Συνολικό μήκος περίφραξης: 72,22 m.		Κόστος: €920,81	
13.	31 φορές			

Εμβαδον Κυκλικου Δισκου *Σελίδα 131*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις			
1.	(α)	$E = 100\pi \cong 314\ cm^2$	(β)	$E = 25\pi \cong 78{,}5\ mm^2$
	(γ)	$E = 4\pi \cong 12{,}56\ cm^2$	(δ)	$E = 36\pi \cong 113{,}04\ cm^2$
2.	$R = 6\ m$			
3.	$\Gamma = 6\pi\ cm$			
4.	$R = 6\ m$			
5.	$E = 12\pi\ cm^2$			
6.	$\gamma = 4\pi\ cm$			
7.	Αν τριπλασιαστεί η ακτίνα θα εννιαπλασιαστεί το εμβαδόν του. Αν τριπλασιαστεί η ακτίνα θα τριπλασιαστεί το μήκος του.			
8.	$E = 1050\pi\ cm^2 = 3297\ cm^2$			
9.	Πρέπει να επιλέξει κύκλο.			
10.	(α)	$E_{\pi\lambda\alpha\tau\varepsilon\acute{\iota}\alpha\varsigma} = 1296\pi\ m^2$	(β)	$E_{\delta\varepsilon\nu\ \varphi\omega\tau\iota\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota} = 1116\pi\ m^2$
11.	$E_A = 1296\ cm^2$, $E_B = 1256\ cm^2$. Άρα πρέπει να προτιμήσουν την Α΄ προσφορά.			
12.	(α)	$E = (36 - 8\pi)\ cm^2$	(β)	$E = 2\pi\ cm^2$
	(γ)	$E = 60\ cm^2$	(δ)	$E = (57 - 9\pi) cm^2$
	(ε)	$E = (40 - 6\pi)\ cm^2$	(στ)	$E = (64\pi - 96)\ cm^2$

Δραστηριοτητες Ενοτητας *Σελίδα 133*

Δραστηριότητα	Απαντήσεις					
1.	(α)	$z = x = 119$ $y = 61$	(β)	$z = 53$ $y = 37$ $x = 90$		
2.	$\Pi = 30\ \mu.$					
3.	(α)	$5\ cm$	(β)	$8\ cm$	(γ)	$3\ cm$

	(δ) 42°	(ε) 84°	(στ) 96°		

4.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	Παραλληλό-γραμμο	Ορθογώ-νιο	Τετρά-γωνο	Ρόμβος
Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.	✓	✓	✓	✓
Οι διαγώνιοι είναι ίσες.		✓	✓	
Οι πλευρές είναι ίσες.			✓	✓
Οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα.			✓	✓
Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.	✓	✓	✓	✓
Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.	✓	✓	✓	✓
Οι γωνίες του είναι 90°.		✓	✓	
Δυο διαδοχικές γωνίες είναι Παραπληρωματικές.	✓	✓	✓	✓
Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.	✓	✓	✓	✓
Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του.			✓	✓

5. (α) Παραλληλόγραμμο, Ρόμβος, Τραπέζιο (β) Ορθογώνιο, Τετράγωνο, Τραπέζιο

6. (α) ΨΕΥΔΗΣ (β) ΑΛΗΘΗΣ (γ) ΑΛΗΘΗΣ

(δ) ΨΕΥΔΗΣ (ε) ΑΛΗΘΗΣ (στ) ΑΛΗΘΗΣ

8. $E = 120\ m^2$

9. $πλάτος = 4\ cm$
$Π = 40\ cm$

10. $E = 120\ m^2$
$Π = 52\ m$

11. $β_1 = 10\ cm$
$β_2 = 20\ cm$

12. (α) $R = 10\ mm$
$Γ = 20π\ mm$
(β) $γ = \frac{10π}{3}\ mm$
$E = \frac{50π}{3}\ mm^2$

13. $E = 162π\ cm^2$

14.

$\frac{Γ_1}{Γ_2}$	$\frac{Γ_3}{Γ_1}$	$\frac{E_1}{E_2}$	$\frac{E_3}{E_1}$
$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{4}$	9

15. $R = 2$

16. $E = (22 + 2π)\ m^2$
$Π = (16 + 2π)\ m$

17. (α) $E = \left(100 - \frac{25π}{2}\right) cm^2$
$Π = (30 + 5π)\ cm$
(β) $E = (100 - 25π)\ cm^2$
$Π = (20 + 5π)\ cm$

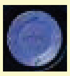
(γ) $E = (100 - 25π)\ cm^2$
$Π = 10π\ cm$
(δ) $E = \frac{75π}{4}\ cm^2$
$Π = \left(10 + \frac{15π}{2}\right)\ cm$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ		*Σελίδα* *136*
Δραστηριότητα		Απαντήσεις
1.	(α)	$AB = \varDelta\varGamma = \sqrt{45}$ $A\varDelta = B\varGamma = \sqrt{20}$ $A\varGamma = B\varDelta = \sqrt{65}$ $AB\varGamma\varDelta$ ορθογώνιο
	(β)	$AB = \varDelta\varGamma = A\varDelta = B\varGamma = \sqrt{20}$ $AO = 5$ $A\varGamma = B\varDelta = 2\sqrt{10}$ $AB\varGamma\varDelta$ τετραγωνο
	(γ)	$KI = \sqrt{18}\ \mu.$ (δ) $EZ = \sqrt{20}\ \mu.$
4.		$E = 400\ cm^2$
10.		$E = 8\pi\ cm^2$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

$\in$	ανήκει
$\notin$	δεν ανήκει
$\forall$	για κάθε
$\exists$	υπάρχει
$\cup$	ένωση συνόλων
$\cap$	τομή συνόλων
$\subset$	γνήσιο υποσύνολο
$\subseteq$	υποσύνολο
$\emptyset$ ή $\{\ \ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
$\neq$	άνισο
$\equiv$	ταυτοτικά ίσο
$\cong$	κατά προσέγγιση ίσο
$\mathbb{N}$	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}$	ακέραιοι αριθμοί $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}^+$	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}^-$	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1,-2,-3,-4,\ldots\}$
$\mathbb{Q}$	ρητοί αριθμοί $\{α/β:\ α,β\in Z$ και $β\neq 0\}$
$\mathbb{Q}^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{Q}_0^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
$\mathbb{Q}^-$	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{R}$	πραγματικοί αριθμοί
$\Rightarrow$	απλή συνεπαγωγή
$\Leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
$\perp$	κάθετες
$\parallel$	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή

=		Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)
.		Υποδιαστολή
EXP		Εκθέτης δύναμης με βάση το 10
Ans		Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος
$x^{\square}$	ή x^y ή ^	Δύναμη
		Ποντίκι (Mouse)
SHIFT	ή 2nd F	Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί
AC		Επανεκκίνηση υπολογιστικής
DEL		Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή
Abs		Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)
(-)		Εισαγωγή Προσήμου –
a b/c	ή $\frac{\square}{\square}$	Κλάσμα
S⇔D	ή a b/c	Μετατροπή Κλάσμα⇔ Δεκαδικός
CLR		Σβήσιμο μνήμης
M+		Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη
M-		Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη
M		Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3+4$	3 + 4 =	3+4 7
2,34 – 1,1	2 · 3 4 – 1 · 1 =	2.34 – 1.1 1.24
$3 \cdot 2$	3 x 2 =	$3X2$ 6
2^5	2 x^y 5 =	2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$	5 EXP 3 =	$5E3$ ή $5X103$ 5000
$\frac{3}{4}$	a b/c 3 4 = ή 3 a b/c 4 =	$\frac{3}{4}$ 3⌟4
$2\frac{3}{4}$	SHIFT 2 3 4 = ή 2 a b/c 3 a b/c 4 =	$2\frac{3}{4}$ 2 ⌟3 ⌟4
$\sqrt{4}$	√ 4 =	$\sqrt{4}$ 2
5^2	5 X² =	5^2 25
$2 \cdot (7-3)$	2 x (7 – 3) =	$2X(7-3)$ 8
$2 \cdot (7-3)$	7 – 3 = 2 x Ans =	$2XAns$ 8
$2-(-3)$	2 – ((-) 3) =	$2-(-3)$ 5
$\lvert -3 \rvert$	Abs (-) 3 =	$\lvert -3 \rvert$ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης	S⇔D ή SHIFT a b/c	$\frac{1}{4}$
$9-6:2$	Υπολογισμός και αποθηκευση 9 – 6 ÷ 2 = M+	$9-6:\ 2M+$ 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9-6:2)-6:(9-6:2)$	3 X M – 6 ÷ M =	$3XM-6:\ M$ 17