ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ Γυμνασίου

Α΄ Τεύχος

Αναθεωρημένη Έκδοση

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ Γυμνασίου

Α΄ τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Α΄ Γυμνασίου, Α΄ Τεύχος

Συγγραφή: Αθανασίου Ανδρέας
Αντωνιάδης Μάριος
Γιασουμής Νικόλας
Έλληνα Αγγέλα
Ιωάννου Ιωάννης
Ματθαίου Κυριάκος
Μουσουλίδου – Νικολαΐδου Μαριλένα
Παπαγιάννης Κωνσταντίνος
Τιμοθέου Σάββας
Φιλίππου Ανδρέας

Συντονιστής: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*

Εποπτεία: Θεοφίλου Στέλιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Κωστή Αντώνιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παντελή Παντελής, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*

Γλωσσική επιμέλεια: Κατσουρά Ευφροσύνη, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*
Παλάτου – Χριστόφια Μαριάννα, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Σχεδιασμός εξωφύλλου: Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης: Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Α΄ έκδοση 2012
Β΄ έκδοση 2014

Εκτύπωση: Ariagraf & ΣΙΑ ΕΕ

ISBN: 978-9963-0-4726-0

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε δύο τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Στην αρχή κάθε ενότητας γίνεται παράθεση των στόχων και οι μαθητές/τριες προϊδεάζονται ως προς το τι «… θα μάθουμε». Ακολουθεί, στο «Έχουμε μάθει …», η παρουσίαση της αναγκαίας προϋπάρχουσας γνώσης που οι μαθητές/τριες πρέπει να διαθέτουν, κάτι που βοηθά τους/τις εκπαιδευτικούς στον καταρτισμό καλύτερης διαγνωστικής και διαμορφωτικής αξιολόγησης. Στη συνέχεια, οι νέες μαθηματικές έννοιες διερευνώνται με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών/τριών, όπως ορίζουν οι αρχές των Εκσυγχρονισμένων Αναλυτικών Προγραμμάτων των Μαθηματικών. Η προσπάθεια κλιμακώνεται με παραδείγματα και διαβαθμισμένες δραστηριότητες, με έμφαση στη λύση προβλήματος και στην ανάδειξη της τεχνολογίας ως αναπόσπαστου μέρους της Μαθηματικής εκπαίδευσης.

Όλες οι εκδόσεις για τα Μαθηματικά των τελευταίων χρόνων βρίσκονται υπό συνεχή αξιολόγηση, διαμόρφωση και βελτίωση στη βάση της ανατροφοδότησης και των παρατηρήσεων που προέρχονται και από τους/τις μάχιμους/ες καθηγητές/τριες των Μαθηματικών. Αναμένω από τους διδάσκοντες/ουσες να εκφράσουν τις απόψεις τους και να υποβάλουν τις εισηγήσεις τους, τόσο σε σχέση με το περιεχόμενο του βιβλίου και το επίπεδο των ασκήσεων και δραστηριοτήτων όσο και σε σχέση με τον τρόπο προσέγγισης της ύλης.

Όλο το υλικό που παράγεται για το μάθημα των Μαθηματικών αποσκοπεί στη βοήθεια τόσο των μαθητών/τριών, όσο και των καθηγητών/τριών, στην πορεία τους μέσα από τα Εκσυγχρονισμένα Αναλυτικά Προγράμματα, με στόχο το καλύτερο αποτέλεσμα. Είναι εμποτισμένο με τον σύγχρονο τρόπο σκέψης και προσηλωμένο στην προαγωγή και στην ανάδειξη των βασικών δεξιοτήτων των μαθητών/τριών μας, που αποτελεί πρώτιστο μέλημά μας. Η προσπάθεια συνεχίζεται και οι προοπτικές είναι λαμπρές.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τον κύριο Κωνσταντίνο Χρίστου, Καθηγητή στο Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Σάββας Αντωνίου

Αναπληρωτής Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Από το Δημοτικό...

... στο Γυμνάσιο

ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΜΑΘΑΜΕ ...

Αριθμοί – Πράξεις Αριθμών

Παραδείγματα

1. Το βιβλίο *Guinness World Records* του 2009 έκανε πωλήσεις 747705 αντίτυπα.
   (α) Τι δηλώνει το ψηφίο 7 στις διαφορετικές θέσεις που βρίσκεται στον αριθμό;
   (β) Να γράψετε τον πιο πάνω αριθμό στην ανηγμένη του μορφή.

Λύση:

(α) *Η αξία κάθε ψηφίου καθορίζεται από τη θέση στην οποία βρίσκεται. Άρα:*

	Δισεκατομμύρια			Χιλιάδες Εκατομμύρια			Εκατομμύρια			Χιλιάδες									
...	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά	...
										7	4	7	7	0	5				

(β) *Ο αριθμός* 747705 *γράφεται στην ανηγμένη μορφή ως εξής:*

$(7 \cdot 100000) + (4 \cdot 10000) + (7 \cdot 1000\,) + (7 \cdot 100) + (0 \cdot 10) + (5 \cdot 1)$

2. Σχηματίζουμε με τα ψηφία $1, 6, 7, 8$ (μόνο μια φορά το καθένα) έναν αριθμό.
   (α) Ποιος αριθμός είναι ο μεγαλύτερος τριψήφιος, που μπορεί να σχηματιστεί;
   (β) Ποιος αριθμός είναι ο μεγαλύτερος περιττός τριψήφιος, που μπορεί να σχηματιστεί;
   (γ) Ποιος αριθμός είναι ο μεγαλύτερος άρτιος τετραψήφιος, που μπορεί να σχηματιστεί;

Άρτιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί, των οποίων το τελευταίο ψηφίο είναι $0, 2, 4, 6, 8$.
Αν δεν ισχύει το πιο πάνω, δηλαδή αν το τελευταίο ψηφίο είναι $1, 3, 5, 7, 9$, τότε οι αριθμοί είναι περιττοί.

Λύση:

(α) *Ο μεγαλύτερος τριψήφιος που μπορεί να σχηματιστεί είναι ο αριθμός* 876.

(β) *Ο μεγαλύτερος περιττός τριψήφιος που μπορεί να σχηματιστεί είναι ο αριθμός* 871.

(γ) *Ο μεγαλύτερος άρτιος τετραψήφιος αριθμός που μπορεί να σχηματιστεί είναι το* 8716.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ:

Αντιμεταθετική:
$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$
$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

Προσεταιριστική:
$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$
$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

Επιμεριστική:
$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$
$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$
$$(\beta + \gamma) : \alpha = \beta : \alpha + \gamma : \alpha$$
$$(\beta - \gamma) : \alpha = \beta : \alpha - \gamma : \alpha$$

3. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
(α) $4 \cdot 11 \cdot 25$
(β) $85 \cdot 99$

Λύση:

(α) $4 \cdot 11 \cdot 25 = (4 \cdot 25) \cdot 11 = 100 \cdot 11 = 1100$

Εφαρμόζουμε την αντιμεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα, για να είναι πιο εύκολες οι πράξεις.

(β) $85 \cdot 99 = 85 \cdot (100 - 1) = 85 \cdot 100 - 85 \cdot 1 = 8500 - 85 = 8415$

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα στην αφαίρεση, για να είναι πιο εύκολες οι πράξεις.

4. Ένα μηνιαίο περιοδικό πωλείται στα περίπτερα προς €2,05, ενώ η ετήσια συνδρομή για 12 τεύχη κοστίζει €21. Να υπολογίσετε πόσο φθηνότερο είναι το κάθε τεύχος του περιοδικού, όταν αγοράζεται με ετήσια συνδρομή.

Λύση:

Η ετήσια συνδρομή είναι για 12 τεύχη. Άρα, για να υπολογίσουμε την τιμή του ενός τεύχους, πρέπει να διαιρέσουμε την ετήσια συνδρομή με τον αριθμό των τευχών $21{,}00 : 12$.

$$\begin{array}{r|l} 21{,}00 & 12 \\ \hline -12 & 1{,}75 \\ 90 & \\ -84 & \\ 60 & \\ -60 & \\ 0 & \end{array}$$

Άρα, το κάθε τεύχος στοιχίζει €1,75.
Αφαιρούμε τις δύο τιμές για να βρούμε τη διαφορά.

$$\begin{array}{r} 2{,}05 \\ -1{,}75 \\ \hline 0{,}30 \end{array}$$

Άρα, το κάθε τεύχος στοιχίζει 30 *σεντ λιγότερα, αν αγοραστεί με ετήσια συνδρομή*

Δραστηριότητες

1. Δίνεται ο τριψήφιος αριθμός 258.
   (α) Να βρείτε τους τριψήφιους αριθμούς που προκύπτουν, όταν εναλλάξετε τα ψηφία του.
   (β) Να γράψετε τους πιο πάνω αριθμούς με αύξουσα σειρά.
   (γ) Ποιος από τους πιο πάνω αριθμούς είναι ο μικρότερος περιττός αριθμός και ποιος είναι ο μεγαλύτερος άρτιος αριθμός;

Όταν γράφουμε αριθμούς σε **αύξουσα** σειρά, σημαίνει ότι τους γράφουμε με τη σειρά από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, ενώ σε **φθίνουσα** σειρά τους γράφουμε από τον μεγαλύτερο στον μικρότερο.

2. Χρησιμοποιώντας τα ψηφία $0, 2, 3, 8, 9$, το πολύ μια μόνο φορά το καθένα, να βρείτε τον μεγαλύτερο άρτιο αριθμό και τον μικρότερο περιττό αριθμό που μπορεί να σχηματιστεί, όταν χρησιμοποιήσετε:
   (α) τρία από τα ψηφία,
   (β) τέσσερα από τα ψηφία,
   (γ) όλα τα ψηφία.

3. Να βρείτε την αξία θέσης του ψηφίου 5 στους επόμενους αριθμούς:
   (α) 570 (β) 193,5
   (γ) 4001,625 (δ) 50200300200

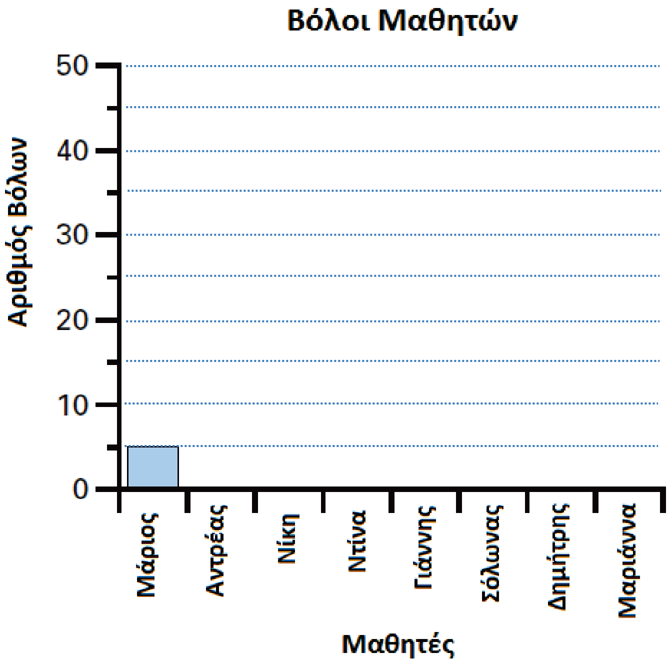
4. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

(α) *Ο προηγούμενος φυσικός αριθμός ενός περιττού αριθμού είναι περιττός.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β) *Ο επόμενος φυσικός αριθμός ενός άρτιου αριθμού είναι περιττός.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ) *Το άθροισμα δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι πάντα περιττός αριθμός.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ) *Το γινόμενο δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι πάντα περιττός αριθμός.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε) *Η διαφορά δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι πάντα 1.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Οι αριθμοί 1,2,3,... ονομάζονται **φυσικοί** αριθμοί.
Οι φυσικοί αριθμοί προέκυψαν από την ανάγκη του ανθρώπου να απαριθμήσει αντικείμενα στη φύση.

5. Τα απογεύματα τα παιδιά της γειτονιάς μαζεύονται, για να παίξουν το αγαπημένο τους παιχνίδι με τους βόλους.

(α) Να συμπληρώσετε το πιο κάτω ραβδόγραμμα που παριστάνει τον αριθμό των βόλων του κάθε παιδιού, σύμφωνα με τις πιο κάτω πληροφορίες:



- *Ο Ανδρέας έχει διπλάσιους βόλους από τον Μάριο.*
- *Η Νίκη έχει τετραπλάσιους βόλους από τον Ανδρέα.*
- *Η Ντίνα έχει 4 περισσότερους βόλους από τον Μάριο.*
- *Ο Γιάννης έχει τόσους βόλους όσους ο Μάριος.*
- *Ο Σόλωνας έχει 5 λιγότερους βόλους από τον Ανδρέα.*
- *Ο Δημήτρης δεν έχει βόλους.*
- *Η Μαριάννα έχει 2 περισσότερους από τους διπλάσιους βόλους του Σόλωνα.*

(β) Ποιο παιδί έχει τους περισσότερους βόλους;

(γ) Να γράψετε μία ερώτηση που να μπορεί να απαντηθεί με βάση το πιο πάνω ραβδόγραμμα.

6. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων A, B, Γ, Δ και E και να τις κατατάξετε κατά αύξουσα σειρά:

$A = 2 + 0 + 0 + 8$ $\qquad$ $B = \frac{200}{8}$

$\Gamma = 2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 8$ $\qquad$ $\Delta = 200 - 8$

$E = (2 - 0) \cdot (0 + 8)$

7. Ο Νικόλας έγραψε έναν διψήφιο αριθμό. Στη συνέχεια, αντέστρεψε τα ψηφία του αριθμού και πρόσθεσε τον νέο διψήφιο που προέκυψε με τον αρχικό αριθμό. Αν το άθροισμα είναι 132, να βρείτε όλους τους πιθανούς αριθμούς που μπορεί να έγραψε.

8. Ο Χριστόφορος παρατήρησε ότι η υπολογιστική του δεν εμφανίζει το ψηφίο της υποδιαστολής στο αποτέλεσμα. Ο Χριστόφορος πληκτρολόγησε τις παραστάσεις που φαίνονται δίπλα. Να σημειώσετε στην κατάλληλη θέση το ψηφίο της υποδιαστολής στις απαντήσεις που εμφανίστηκαν στην οθόνη.

(α) $5{,}33 \cdot 5 = 2665$
(β) $4 \cdot 2{,}5 = 10$
(γ) $2{,}3 \cdot 3{,}4 = 782$
(δ) $3{,}14 \cdot 5{,}2 = 16328$

9. Να κάνετε τις πράξεις:

(α)	$125 + 15$	(β)	$32{,}3 + 2{,}98$
(γ)	$1234 - 456$	(δ)	$23 \cdot 8$
(ε)	$12 \cdot 429$	(στ)	$6{,}2 \cdot 3$
(ζ)	$2{,}25 \cdot 3{,}5$	(η)	$36 : 2$

10. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις χωρίς τη χρήση υπολογιστικής αριθμομηχανής:

(α)	$57 \cdot 100$	(β)	$8{,}2 \cdot 1000$
(γ)	$230 \cdot 200$	(δ)	$0{,}3 \cdot 0{,}3$
(ε)	$2200 : 20$	(στ)	$400 : 0{,}2$

11. Να περιγράψετε τα μοτίβα και να βρείτε τους τρεις επόμενους όρους:

(α) $\boxed{1}, \boxed{3}, \boxed{9}, \boxed{27}, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}$

(β) $\boxed{155}, \boxed{137}, \boxed{119}, \boxed{101}, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}$

(γ) $\boxed{4{,}1}, \boxed{4{,}7}, \boxed{5{,}3}, \boxed{5{,}9}, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}$

(δ) $\boxed{12800}, \boxed{6400}, \boxed{3200}, \boxed{1600}, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}$

12. Να συμπληρώσετε τα τετραγωνάκια με τον κατάλληλο αριθμό, ώστε να προκύπτουν αληθείς ισότητες:

(α) $123 : \square = 1{,}23$ (β) $\square \cdot 1000 = 57{,}4$

(γ) $7{,}5 \cdot \square = 0{,}075$ (δ) $2{,}32 : \square = 232000$

(ε) $\square : 1000 = 57{,}4$ (στ) $\square : 0{,}1 = 5{,}3$

13. Ο Αλέξανδρος και η Κατερίνα είχαν να διαιρέσουν έναν αριθμό με το 100. Η Κατερίνα κατά λάθος τον πολλαπλασίασε, με το 100 και βρήκε γινόμενο 450. Ποιον αριθμό βρήκε ο Αλέξανδρος που έκανε σωστά την πράξη;

14. Να εξετάσετε κατά πόσο ισχύουν οι πιο κάτω ισότητες, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

(α)

i. $323 + 0 = 323$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

ii. $323 - 0 = 0$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

iii. $323 \cdot 0 = 323$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

iv. $0 : 323 = 0$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(β)

i. $12 + 4 = 4 + 12$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

ii. $12 - 4 = 4 - 12$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

iii. $12 \cdot 4 = 4 \cdot 12$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

iv. $12 : 4 = 4 : 12$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(γ)

i. $8 + (4 + 2) = (8 + 4) + 2 = (8 + 2) + 4$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

ii. $8 \cdot (4 \cdot 2) = (8 \cdot 4) \cdot 2 = (8 \cdot 2) \cdot 4$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

iii. $(4 + 2) \cdot 8 = 4 \cdot 8 + 2 \cdot 8$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

iv. $8 : (4 + 2) = 8 : 4 + 8 : 2$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

15. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω γινόμενα, γνωρίζοντας ότι $218 \cdot 37 = 8066$

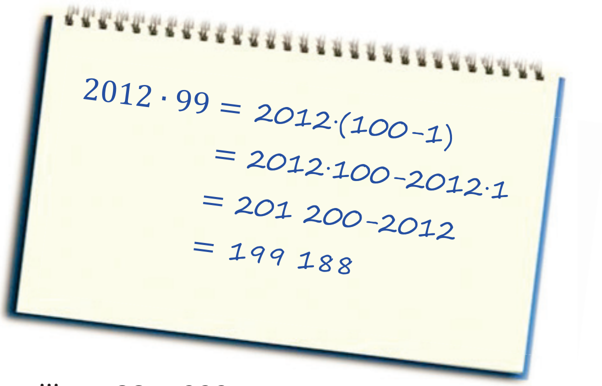
$A = 2180 \cdot 370$ $B = 2{,}18 \cdot 37$

$\Gamma = 21800 \cdot 0{,}37$ $\Delta = 2180 \cdot 3{,}7$

16. Να περιγράψετε τι θα συμβεί:
    (α) Στη διαφορά δύο αριθμών αν:
        i. *Αυξήσουμε τον μειωτέο κατά* 8.
        ii. *Αυξήσουμε τον αφαιρετέο κατά* 8.
        iii. *Αυξήσουμε τον μειωτέο κατά* 8 *και τον αφαιρετέο κατά* 5.
        iv. *Αυξήσουμε τον μειωτέο κατά* 8 *και τον αφαιρετέο κατά* 8.

    (β) Στο πηλίκο δύο αριθμών αν:
        i. *Διπλασιάσουμε τον διαιρέτη.*
        ii. *Διπλασιάσουμε τον διαιρετέο.*
        iii. *Τετραπλασιάσουμε τον διαιρετέο και διπλασιάσουμε τον διαιρέτη.*
        iv. *Διπλασιάσουμε τον διαιρετέο και διπλασιάσουμε τον διαιρέτη.*

17. Δίπλα παρουσιάζεται ο τρόπος που ακολούθησε ο Αλέξης, για να υπολογίσει γρήγορα το γινόμενο $2012 \cdot 99$.
    (α) Να εξηγήσετε τον τρόπο που εργάστηκε και να αναφέρετε τις ιδιότητες που εφάρμοσε.
    (β) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω γινόμενα, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία:



    i. $514 \cdot 11$ ii. $68 \cdot 90$ iii. $38 \cdot 999$

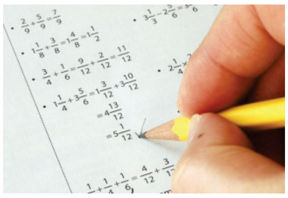
18. Γνωρίζουμε ότι $Α = 25 \cdot 44 = 1100$. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω παραστάσεις είναι ίσες με την $Α$. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

    (α) $Β = (20 + 5) \cdot 44$ (β) $Γ = 40 \cdot 25 + 4 \cdot 25$

    (γ) $Δ = 25 \cdot (58 - 13)$ (δ) $Ε = 25 \cdot 100 - 25 \cdot 60$

Κλασματικοί Αριθμοί

Παραδείγματα



1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\frac{3}{7}+\frac{2}{3}$ (β) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}$ (γ) $4\frac{1}{2}:\frac{3}{4}$

Λύση:

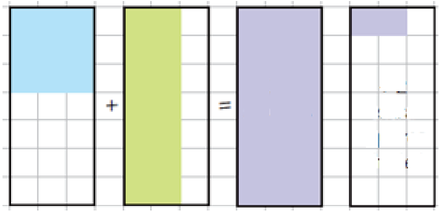
(α) $\frac{3}{7}+\frac{2}{3}=\frac{^{3)}3}{7}+\frac{^{7)}2}{3}$

$=\frac{9}{21}+\frac{14}{21}$

$=\frac{23}{21}$

$=1\frac{2}{21}$

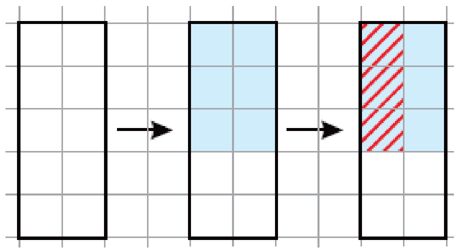
Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα



$\frac{9}{21}+\frac{14}{21}=1\frac{2}{21}$

(β) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 5}$

$=\frac{3}{10}$

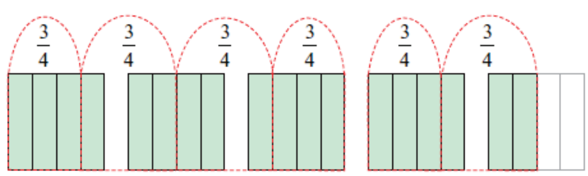


$1 \rightarrow \frac{3}{5} \rightarrow \frac{1}{2}$ του $\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

(γ) $4\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=\frac{9}{2}:\frac{3}{4}$

$=\frac{18}{4}:\frac{3}{4}$

$=6$



ή

$4\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=\frac{9}{2}:\frac{3}{4}$

$=\frac{9}{2}\cdot\frac{4}{3}$

$=\frac{36}{6}$

$=6$

ή

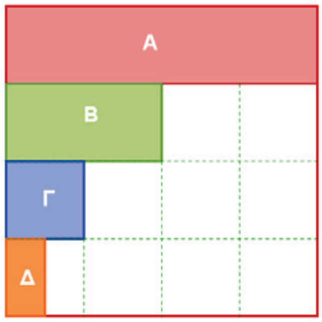
Μετατρέπουμε τον μικτό κλασματικό αριθμό σε καταχρηστικό κλάσμα. Αντιστρέφω τον διαιρέτη και κάνω πολλαπλασιασμό.

2. Από μια τάξη με 24 μαθητές απουσιάζουν σήμερα 6 μαθητές. Να βρείτε το μέρος των μαθητών της τάξης που απουσιάζει.

Λύση:

Απουσιάζουν 6 από τους 24 μαθητές. Άρα $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ *των μαθητών απουσιάζουν.*

3. Να παρατηρήσετε το διπλανό σχήμα και να βρείτε το μέρος που αντιπροσωπεύει το καθένα από τα μέρη A, B, Γ και Δ.



Λύση:

- *Το ορθογώνιο σχήμα A είναι το* $\frac{1}{4}$ *του αρχικού τετραγώνου.*
- *Το ορθογώνιο σχήμα B είναι το μισό του ορθογωνίου A, άρα είναι το* $\frac{1}{8}$ *του αρχικού τετραγώνου.*
- *Το τετράγωνο σχήμα Γ είναι το μισό του ορθογωνίου B, άρα είναι το* $\frac{1}{16}$ *του αρχικού τετραγώνου.*
- *Το ορθογώνιο σχήμα Δ είναι το μισό του τετραγώνου Γ, άρα είναι το* $\frac{1}{32}$ *του αρχικού τετραγώνου.*

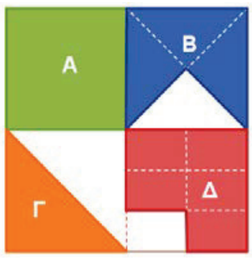
Δραστηριότητες

1. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο σύμβολο <, >, =, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

(α) $\frac{5}{2012}$ … $\frac{5}{2013}$ (β) $\frac{1}{2}$ … $\frac{3}{5}$

(γ) $5\frac{2}{5}$ … $5{,}4$ (δ) $3\frac{1}{2}$ … $3\frac{2}{3}$

2. Να βρείτε τι μέρος του μεγάλου τετραγώνου είναι το καθένα από τα 4 σκιασμένα σχήματα Α, Β, Γ και Δ.



3. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\frac{3}{8}-\frac{1}{8}+2\frac{1}{8}$ (β) $2\frac{1}{3}-1\frac{2}{3}$ (γ) $2\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

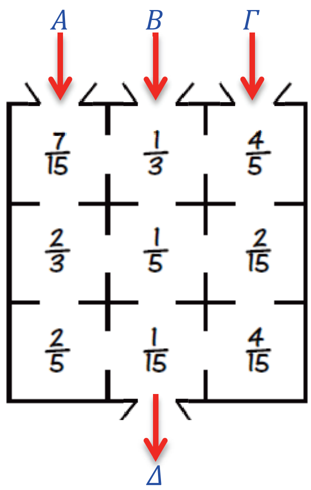
(δ) $3\,\frac{5}{8}-1\frac{3}{4}$ (ε) $1\frac{1}{3}\cdot 6$ (στ) $\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10}$

(ζ) $\frac{5}{8}:\frac{5}{2}$ (η) $\frac{3}{8}:6$ (θ) $5:\frac{1}{2}$

(ι) $\frac{2}{5}:\frac{4}{9}$ (ια) $\frac{1}{9}\cdot\left(2\frac{1}{3}+3\frac{2}{3}\right)$ (ιβ) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot 6\frac{1}{5}$

4. Η συνολική επιφάνεια της Γης είναι περίπου 513000000 τετραγωνικά χιλιόμετρα. Αν η θάλασσα καλύπτει περίπου τα $\frac{2}{3}$ της επιφάνειάς της, να βρείτε πόσα τετραγωνικά χιλιόμετρα είναι η ξηρά.

5. Στον διπλανό λαβύρινθο μπορείτε να ξεκινήσετε από οποιαδήποτε από τις τρεις εισόδους A, B ή Γ και να βγείτε από τη Δ έξοδο του τετραγώνου. Να σημειώσετε τη διαδρομή που έχει άθροισμα 1.



6. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων Α, Β, Γ και Δ:

$\mathrm{A}=\left(12\frac{2}{5}+1{,}5\right)-\left(0{,}2+11\frac{1}{2}+1{,}3\right)$

$\mathrm{B}=3+1\frac{1}{2}-(2{,}3+\frac{3}{5})$

$\Gamma=\mathrm{A}+\mathrm{B}$

$\Delta=\mathrm{A}:\mathrm{B}$

7. Ένα ενυδρείο έχει χωρητικότητα 15 λίτρα. Μία κανάτα έχει χωρητικότητα $\frac{3}{4}$ του λίτρου. Πόσες κανάτες νερό χρειάζονται για να γεμίσει το ενυδρείο;

8. Ένα ποτήρι που έχει χωρητικότητα $\frac{1}{3}$ του λίτρου είναι γεμάτο νερό κατά τα $\frac{3}{4}$. Αν ο Γιάννης πιει $\frac{1}{5}$ του λίτρου νερό από το ποτήρι, πόσο νερό θα μείνει στο ποτήρι;

9. Τοποθετούμε τα σημεία A, B και Γ στην αριθμητική γραμμή. Να εξετάσετε κατά πόσο το σημείο B είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$.

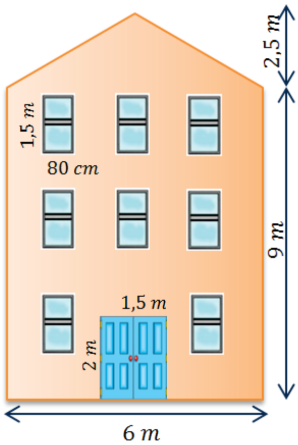
	ΣΗΜΕΙΟ Α	ΣΗΜΕΙΟ Β	ΣΗΜΕΙΟ Γ
(α)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
(β)	0,35	$\frac{65}{100}$	1,35
(γ)	$11\frac{1}{2}$	11,75	12

10. Να εξετάσετε αν έγινε δίκαια ο διαμοιρασμός.

Τρεις φίλοι ανακάλυψαν σε ένα νησί ένα μπαούλο με χρυσά νομίσματα. Επειδή ήταν αργά, αποφάσισαν να κατασκηνώσουν εκεί και να κάνουν τον διαμοιρασμό το πρωί.
Ένας από αυτούς, φοβούμενος ότι οι άλλοι δύο δεν θα μπορούσαν να μοιράσουν δίκαια τα νομίσματά, αφού δεν ήξεραν μαθηματικά, μέτρησε και πήρε το $\frac{1}{3}$ των νομισμάτων και έφυγε κρυφά. Αργότερα εκείνο το βράδυ, ξύπνησε και ο δεύτερος φίλος μέτρησε και αυτός. το $\frac{1}{3}$ των νομισμάτων που υπήρχαν στο κουτί και έφυγε.
Το πρωί, ο τρίτος φίλος, ανακάλυψε ότι οι άλλοι δυο σύντροφοί του έφυγαν, παίρνοντας μαζί τους ένα μέρος των νομισμάτων. Σίγουρος ότι οι σύντροφοί του μοίρασαν και πήραν δίκαια το μερίδιό τους, πήρε τα χρήματα και έφυγε ευτυχισμένος.

Μέτρηση Τριγώνων και Τετραπλεύρων

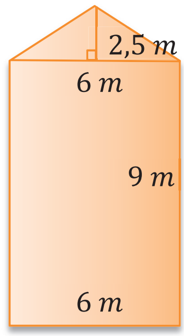
Παραδείγματα



1. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η πρόσοψη μιας πολυκατοικίας. Οι ένοικοι ζήτησαν από έναν ελαιοχρωματιστή να βάψει τον τοίχο της πρόσοψης της πολυκατοικίας. Πόσο θα κοστίσει, αν ο ελαιοχρωματιστής χρεώνει €12 το τετραγωνικό μέτρο συμπεριλαμβανομένου και του κόστους της μπογιάς;

Λύση:

Για να υπολογίσουμε το κόστος πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε την επιφάνεια του κτηρίου.



Η πρόσοψη αποτελείται από:

- *ένα ορθογώνιο με διαστάσεις 6 m x 9 m*
- *ένα τρίγωνο με βάση 6 m και ύψος 2,5 m.*

$$\begin{aligned}\mathbf{E_{ορθογωνίου}} &= \mathbf{ΜΗΚΟΣ \cdot ΠΛΑΤΟΣ}\\ &= 6 \cdot 9\\ &= 54\ m^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E_{τριγώνου}} &= \frac{\mathbf{ΒΑΣΗ \cdot ΥΨΟΣ}}{\mathbf{2}}\\ &= \frac{6 \cdot 2{,}5}{2}\\ &= \frac{15}{2}\\ &= 7{,}5\ m^2\end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν των παραθύρων και το εμβαδόν της πόρτας, για να τα αφαιρέσουμε:

$$\begin{aligned}E_{παραθύρου} &= ΜΗΚΟΣ \cdot ΠΛΑΤΟΣ\\ &= 1{,}5 \cdot 0{,}8\\ &= 1{,}2\ m^2\end{aligned}$$

Αφού, υπάρχουν 8 παράθυρα τότε:

$$\begin{aligned}E_{παραθύρων} &= 8 \cdot E_{παραθύρου}\\ &= 8 \cdot 1{,}2\\ &= 9{,}6\ m^2\end{aligned}$$

Ισχύει:
$1\ m = 100\ cm$

$$\begin{aligned}E_{πόρτας} &= ΜΗΚΟΣ \cdot ΠΛΑΤΟΣ\\ &= 2 \cdot 1{,}5\\ &= 3\ m^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_{ολικό} &= E_{ορθ} + E_{τρι} - (E_{πορτ} + E_{παρ})\\ &= 54 + 7{,}5 - (3 + 9{,}6)\\ &= 54 + 7{,}5 - 12{,}6\\ &= 61{,}5 - 12{,}6\\ &= 48{,}9\ \ m^2\end{aligned}$$

$Κόστος = 48{,}9 \cdot 12 = 586{,}8$ *Άρα, θα κοστίσει €586,80.*

2. Η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι $32\ cm$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

Λύση:
Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τετραγώνου, πρέπει να γνωρίζουμε την πλευρά του.

Υπολογίζουμε την πλευρά του τετραγώνου:

$$\mathbf{Περίμετρος = 4 \cdot ΠΛΕΥΡΑ}$$

Άρα,

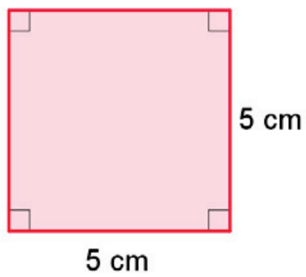
$$\begin{aligned} Πλευρά &= Περίμετρος : 4 \\ Πλευρά &= 32 : 4 \\ Πλευρά &= 8\ cm \end{aligned}$$

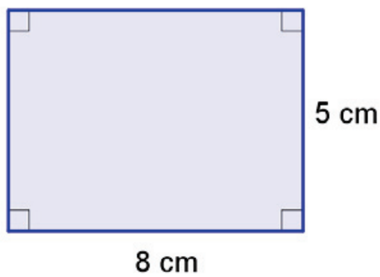
Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι:

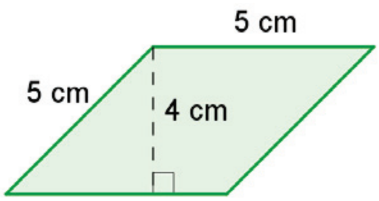
$$\begin{aligned} \mathbf{Ε_{τετραγώνου}} &= \mathbf{ΠΛΕΥΡΑ \cdot ΠΛΕΥΡΑ} \\ &= 8 \cdot 8 \\ &= 64\ cm^2 \end{aligned}$$

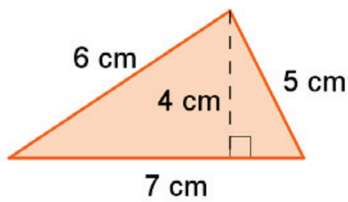
Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν των πιο κάτω σχημάτων:

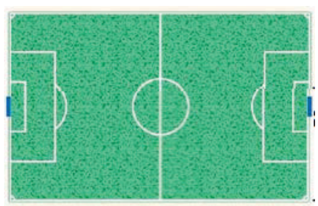








2. Ένα γήπεδο ποδοσφαίρου έχει μήκος $110\ m$ και πλάτος $70\ m$. Ένας ποδοσφαιριστής έτρεξε 5 φορές γύρω από το γήπεδο για προθέρμανση. Να βρείτε τη συνολική απόσταση που διένυσε.



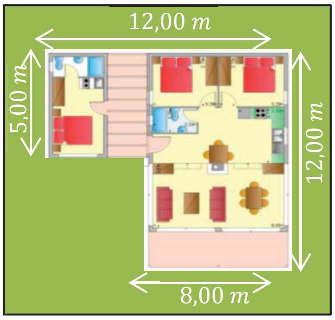
3. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

(α) Το εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά $5\,cm$ είναι:
Α. $10\ cm^2$ Β. $20\ cm^2$ Γ. $25\ cm^2$ Δ. $40\ cm^2$

(β) Το εμβαδόν παραλληλογράμμου με βάση $9\,m$ και αντίστοιχο ύψος $6\,m$ είναι:
Α. $30\ m^2$ Β. $54\ m^2$ Γ. $60\ m^2$ Δ. $32m^2$

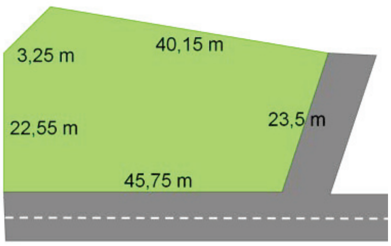
(γ) Το εμβαδόν τριγώνου με βάση $8\,cm$ και αντίστοιχο ύψος $6\,cm$ είναι:
Α. $12\ cm^2$ Β. $32\ cm^2$ Γ. $48\ cm^2$ Δ. $24\ cm^2$

4. Παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν $120\,cm^2$ και ύψος $15\,cm$. Να υπολογίσετε τη βάση που αντιστοιχεί στο ύψος αυτό.



5. Το οικόπεδο, στο οποίο είναι κτισμένο το διπλανό σπίτι, έχει διαστάσεις $16\,m$ και $16\,m$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της αυλής.

6. Από ένα σύρμα μήκους $10\,m$ κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Αν το τρίγωνο έχει πλευρά $2\,m$, να βρείτε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου.



7. Ο κύριος Γιάννης είναι ιδιοκτήτης του διπλανού οικοπέδου. Θέλει να περιφράξει το οικόπεδό του με συρματόπλεγμα, το οποίο στοιχίζει €1,20 το μέτρο. Ένας εργάτης χρεώνει για την τοποθέτηση €2,50 το μέτρο. Πόσα μέτρα σύρμα θα χρειαστεί και πόσο θα κοστίσει συνολικά η περίφραξη;

ΕΝΟΤΗΤΑ

1

Σύνολα

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να μεταφράζουμε, να ορίζουμε και να εφαρμόζουμε τις βασικές έννοιες των συνόλων, όπως το υποσύνολο και η ισότητα των συνόλων.
- Να ορίζουμε και να εφαρμόζουμε τις βασικές πράξεις των συνόλων, όπως της τομής και της ένωσης.
- Να εφαρμόζουμε την έννοια του συνόλου και τις πράξεις των συνόλων στην επίλυση προβλημάτων.

Η Έννοια του Συνόλου

Διερεύνηση

Όπως κάθε σχολική χρονιά, έτσι και φέτος διενεργήθηκαν Μαθητικές εκλογές για ανάδειξη των συμβουλίων των τμημάτων. Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των εκλογών:

Τμήμα	Πρόεδρος	Αντιπρόεδρος	Γραμματέας	Ταμίας	Σύμβουλος
A_1	Γεωργίου	Μιχαήλ	Βασιλείου	Παντελή	Αδάμ Κ.
A_2	Ανδρέου	Αβραάμ	Παύλου	Μυλωνά	Ισαάκ
B_1	Δανιήλ	Κυπριανού	Ιωάννου	Πέτρου	Ζαντή
B_2	Χρίστου	Νικολάου	Μενελάου	Παναγή	Χριστοφή
Γ_1	Αθανασίου	Φωτίου	Στυλιανού	Βάη	Ιωακείμ
Γ_2	Παπά Ε.	Κυριάκου	Παπά Μ.	Αδάμ Μ.	Φαίδωνα

Η διεύθυνση του σχολείου θέλει να συναντήσει τα νεοεκλεγέντα μέλη των συμβουλίων για αλληλογνωριμία και συζήτηση των δράσεων που θα αναπτύξουν κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς.

✓ Αρχικά θέλει να καλέσει τους προέδρους των τμημάτων. Ποιους μαθητές πρέπει να καλέσει στη συνάντηση;

✓ Σε δεύτερη συνάντηση θέλει να καλέσει τους ταμίες των τμημάτων. Η γραμματέας κάλεσε τους μαθητές με το επίθετό τους.
Στη συνάντηση παρευρέθηκαν οι:
Αδάμ Κ., Παντελή, Μυλωνά, Πέτρου, Παναγή, Βάη, Αδάμ Μ.
Η διεύθυνση παραξενεύτηκε με τον αριθμό των ατόμων που προσήλθαν στην συνάντηση. Τι ήταν αυτό που την προβλημάτισε;

✓ Να περιγράψετε τι οδηγίες έδωσε για να καλέσει τους ακόλουθους μαθητές στο γραφείο:

- *Φωτίου, Στυλιανού, Βάη, Ιωακείμ, Κυριάκου, Παπά Μ. Αδάμ Μ., Φαίδωνα, Αθανασίου και Παπά Ε.*
- *Δανιήλ, Κυπριανού, Ιωάννου, Πέτρου και Ζαντή*

Μαθαίνω

> Όταν λέμε ότι είναι **καλώς ορισμένη συλλογή**, εννοούμε ότι θα πρέπει να μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα κατά πόσο ένα αντικείμενο ανήκει στο σύνολο ή όχι.

- **Σύνολο** είναι **μια καλώς ορισμένη** συλλογή διαφορετικών μεταξύ τους αντικειμένων.

- Τα αντικείμενα που αποτελούν ένα σύνολο λέγονται **στοιχεία** ή **μέλη** του συνόλου.

- Ένα σύνολο συμβολίζεται συνήθως με ένα κεφαλαίο γράμμα.

  Παραδείγματα:
  A: τα φωνήεντα του ελληνικού αλφαβήτου
  B: οι μονοψήφιοι περιττοί αριθμοί
  Γ: οι μήνες του χρόνου

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο, χρησιμοποιούμε έναν από τους πιο κάτω τρόπους:

- **Περιγραφή** των στοιχείων του.
  Γράφουμε την ιδιότητα ή τη συνθήκη που χαρακτηρίζει τα στοιχεία του συνόλου και ικανοποιείται από τα στοιχεία του συνόλου και μόνο αυτά.

  Παραδείγματα:
  A: τα φωνήεντα του ελληνικού αλφαβήτου
  B: οι μονοψήφιοι περιττοί αριθμοί

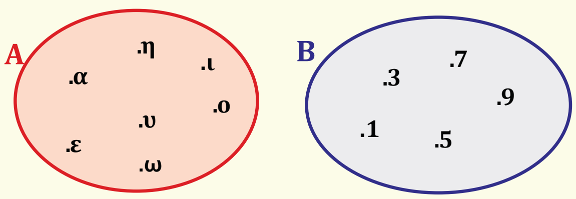
> Όταν γράφουμε τα στοιχεία ενός συνόλου, δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία γράφουμε τα στοιχεία.

- **Αναγραφή** των στοιχείων του.
  Χρησιμοποιούμε δύο άγκιστρα ανάμεσα στα οποία γράφουμε τα στοιχεία του συνόλου.

  Παραδείγματα:
  $A = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$
  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

- **Βέννειο** διάγραμμα

  Παραδείγματα:



- Αν το στοιχείο $\boldsymbol{\alpha}$ **ανήκει** στο σύνολο A γράφουμε $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{A}$. Αν ένα στοιχείο $\boldsymbol{\alpha}$ **δεν ανήκει** στο σύνολο Α, τότε γράφουμε $\boldsymbol{\alpha} \notin \boldsymbol{A}$.

  Παράδειγμα:
  A: τα φωνήεντα του ελληνικού αλφαβήτου,
  Το ω είναι φωνήεν και επομένως ανήκει στο A ($\omega \in A$).
  Το ψ είναι σύμφωνο και επομένως δεν ανήκει στο σύνολο A ($\psi \notin A$).

- Το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου A λέγεται **πληθικός αριθμός** του συνόλου και συμβολίζεται ως $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{A})$.

  Παραδείγματα:
  A: τα φωνήεντα του ελληνικού αλφαβήτου, $\nu(A) = 7$
  B: οι μονοψήφιοι περιττοί αριθμοί, $\nu(B) = 5$

  - Ένα σύνολο το οποίο δεν έχει κανένα στοιχείο, δηλαδή ο πληθικός αριθμός του είναι μηδέν, λέγεται **κενό** σύνολο. Το κενό σύνολο συμβολίζεται με $\{\ \}$ ή $\emptyset$.

  - Αν ένα σύνολο περιέχει άπειρα στοιχεία λέγεται **απειροσύνολο.**

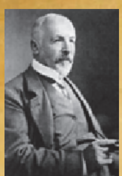
Σημείωση:

Με το $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των **φυσικών** αριθμών.

Δηλαδή $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Με το $\mathbb{N}_0$ συμβολίζουμε το σύνολο των **φυσικών** αριθμών συμπεριλαμβανομένου και του **μηδενός.**

Δηλαδή $\mathbb{N}_0 = \{0,1, 2, 3, 4, \dots\}$.



Η δουλειά του γερμανού μαθηματικού Georg Cantor $(1845 - 1918)$ σημαδεύει τη δημιουργία της θεωρίας συνόλων. Πριν από την έρευνα του Cantor η έννοιά τους γινόταν δεκτή σιωπηρά βασισμένη σε ιδέες από την εποχή του Αριστοτέλη. Το μαθηματικό του έργο είναι πολύ σπουδαίο. Θεωρείται δημιουργός της θεωρίας συνόλων και των απειροσυνόλων. Οι ιδέες του Cantor, που ήταν πολύ πρωτοποριακές για την εποχή του, όχι μόνο δεν έγιναν άμεσα αποδεκτές, αλλά βρήκαν και μεγάλη αντίδραση.

Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται σύνολο στις πιο κάτω περιπτώσεις:

   A: οι ψηλοί μαθητές του τμήματός σας
   B: οι μαθητές του τμήματός σας, που έχουν ύψος μεγαλύτερο από $1{,}60\ m$.
   Γ: οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου του σχολείου σας.

   Λύση:

A: οι ψηλοί μαθητές του τμήματός σας	*Δεν ορίζεται σύνολο αφού, δεν είναι καλώς ορισμένη συλλογή. Ο όρος «ψηλός μαθητής» είναι υποκειμενικός, δηλαδή μπορεί να τον αντιλαμβάνεται διαφορετικά ο καθένας.*
B: οι μαθητές του τμήματός σας, που έχουν ύψος μεγαλύτερο από $1{,}60\ m$.	*Καθορίζοντας το ύψος, το σύνολο πλέον είναι καλώς ορισμένο, αφού είναι σαφές αν ένας μαθητής ανήκει ή όχι στο σύνολο.*
Γ: οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου του σχολείου σας.	*Ορίζεται σύνολο, αφού οι μαθητές που φοιτούν στην Γ΄ τάξη του Γυμνασίου είναι συγκεκριμένοι.*

2. Δίνεται το σύνολο $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
   (α) Να γράψετε το σύνολο A με περιγραφή.
   (β) Να εξετάσετε κατά πόσο τα στοιχεία 7 και 2 ανήκουν στο σύνολο A.

   Λύση:

   (α) Για να περιγράψουμε το σύνολο, πρέπει να βρούμε μια ιδιότητα που να συνδέει όλα τα στοιχεία του.

   Οι αριθμοί $1, 3, 5, 7, 9$, έχουν χαρακτηριστικό ότι είναι όλοι περιττοί αριθμοί μικρότεροι του 10 ή ότι είναι οι μονοψήφιοι περιττοί. Άρα,

   A: Οι περιττοί αριθμοί που είναι μικρότεροι του 10 ή

   A: οι μονοψήφιοι περιττοί αριθμοί

   (β) Ο αριθμός 7 ανήκει στο σύνολο A, δηλαδή $7 \in A$, ενώ ο αριθμός 2 δεν ανήκει στο σύνολο A, δηλαδή $2 \notin A$.

3. Ρίχνουμε ένα ζάρι. Να βρείτε το σύνολο με όλα τα δυνατά αποτελέσματα από τη ρίψη ενός ζαριού και να βρείτε τον πληθικό αριθμό του συνόλου.

Λύση:

Όταν ρίξουμε ένα ζάρι, το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων είναι:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Το πλήθος των στοιχείων του συνόλου είναι 6. Άρα, $\nu(A) = 6$.

Δραστηριότητες

1. Να γράψετε τα πιο κάτω σύνολα με αναγραφή των στοιχείων τους και να βρείτε τον πληθικό αριθμό τους:
   A: τα πέντε πρώτα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου
   B: οι διψήφιοι άρτιοι αριθμοί μεγαλύτεροι του 85
   Γ: οι ημέρες της εβδομάδας που αρχίζουν από Θ
   Δ: τα διψήφια πολλαπλάσια του 9
   E: τα γράμματα της λέξης «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

2. Να γράψετε με περιγραφή τα πιο κάτω σύνολα:
   $A =$ {Χειμώνας, Καλοκαίρι, Άνοιξη, Φθινόπωρο}
   $B = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$
   $\Gamma = \{\,11, 22, 33, \dots, 99\}$

3. Δίνονται τα σύνολα:
   A: οι διψήφιοι περιττοί αριθμοί που είναι μικρότεροι του 20
   B: τα ψηφία του αριθμού 2013
   Γ: οι περιττοί τετραψήφιοι αριθμοί με άθροισμα ψηφίων 6

   Να συμπληρώσετε με τα σύμβολα $\in$ ή $\notin$ τις σχέσεις:

(α)	$19 \dots A$	(β)	$2 \dots B$
(γ)	$7 \dots A$	(δ)	$7 \dots B$
(ε)	$21 \dots A$	(στ)	$2013 \dots B$
(ζ)	$2013 \dots \Gamma$	(η)	$123 \dots \Gamma$

4. Να δώσετε δύο παραδείγματα συνόλων που:
   (α) είναι κενά
   (β) περιέχουν ένα μόνο στοιχείο
   (γ) είναι απειροσύνολα

5. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	*Αν το σύνολο A είναι το σύνολο των άρτιων αριθμών, τότε το $18 \in A$*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	*Αν το σύνολο E είναι το σύνολο των χωρών μελών της Ευρωπαϊκής Ένωσης, τότε ο Καναδάς $\notin E$*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	*Αν $B = \{15, 25, 35, 45\}$, τότε το $55 \in B$*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	*Αν $\Gamma = \emptyset$, τότε το $0 \in \Gamma$*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	*Αν A: οι άρτιοι διψήφιοι αριθμοί και B: οι περιττοί διψήφιοι αριθμοί, τότε $\nu(A) = \nu(B)$*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Σχέσεις Συνόλων

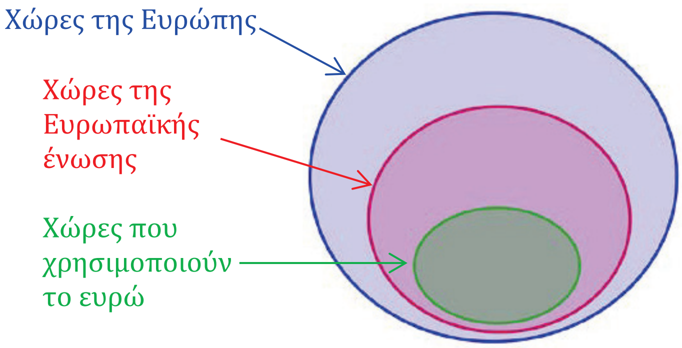
Διερεύνηση

Η Ευρώπη είναι μία από τις επτά ηπείρους του κόσμου, η τέταρτη σε έκταση ήπειρος του πλανήτη μας. Πενήντα χώρες ανήκουν σήμερα στην Ευρώπη.
Στις 23 Ιουλίου 1952 έξι ευρωπαϊκά κράτη ίδρυσαν την Ευρωπαϊκή Κοινότητα Άνθρακα και Χάλυβα, η οποία αποτέλεσε τα πρώτα στάδια εξέλιξης της σημερινής Ευρωπαϊκής Ένωσης. Από τότε προσχώρησαν ακόμα 21 χώρες.

Το ευρώ είναι σήμερα το ενιαίο νόμισμα 17 κρατών μελών της Ευρωπαϊκής Ένωσης, τα οποία αποτελούν την ευρωζώνη. Η εισαγωγή του ευρώ το 1999 υπήρξε, επίσης, ένα από τα σημαντικότερα επιτεύγματα της Ένωσης, καθώς είναι το νόμισμα περίπου 330 εκατομμυρίων Ευρωπαίων πολιτών.

Ποιες χώρες προσχώρησαν στην Ευρωπαϊκή Ένωση και πότε;
<u>1952-1958:</u> Βέλγιο, Γερμανία, Γαλλία, Ιταλία, Λουξεμβούργο, Ολλανδία
<u>1973:</u> Δανία, Ιρλανδία, Ηνωμένο Βασίλειο
<u>1981</u>: Ελλάδα
<u>1986:</u> Ισπανία, Πορτογαλία
<u>1995:</u> Αυστρία, Φινλανδία, Σουηδία
<u>2004:</u> Τσεχία, Εσθονία, Κύπρος, Λεττονία, Λιθουανία, Ουγγαρία, Μάλτα, Πολωνία, Σλοβενία, Σλοβακία
<u>2007:</u> Βουλγαρία, Ρουμανία

- ✓ Να μελετήσετε τον τρόπο με τον οποίο οργανώνονται οι πιο πάνω πληροφορίες στο πιο κάτω διάγραμμα:



Ποιες χώρες υιοθέτησαν το ευρώ και πότε;
<u>1999:</u> Βέλγιο, Γερμανία, Γαλλία, Ιταλία, Λουξεμβούργο, Ολλανδία, Αυστρία, Ιρλανδία, Ισπανία, Πορτογαλία, Φινλανδία
<u>2001:</u>Ελλάδα
<u>2007:</u>Σλοβενία
<u>2008</u>: Κύπρος, Μάλτα
<u>2009</u>: Σλοβακία
<u>2011:</u> Εσθονία

- ✓ Να βρείτε πόσες χώρες ανήκουν σε καθεμιά από τις τρεις περιοχές του διαγράμματος που σκιάζονται με διαφορετικά χρώματα.

- ✓ Να δώσετε ένα παράδειγμα μιας χώρας που να ανήκει στην κάθε περιοχή του διαγράμματος.

Μαθαίνω

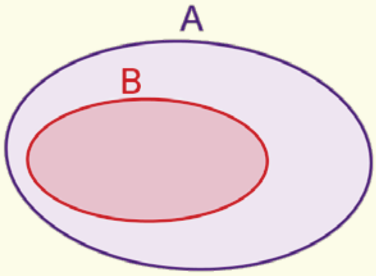
Σχέσεις συνόλων:

- Δύο σύνολα A και B είναι **ίσα,** αν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, και γράφουμε $A = B$.

  Παράδειγμα:
  A: τα γράμματα της λέξης «άλλο», $A = \{\alpha, \lambda, o\}$
  B: τα γράμματα της λέξης «όλα», $B = \{o, \lambda, \alpha\}$
  Τα δύο σύνολα έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Άρα, $A = B$

- Ένα σύνολο B ονομάζεται **υποσύνολο** ενός συνόλου A, όταν κάθε στοιχείο του συνόλου B είναι και στοιχείο του συνόλου A. Γράφουμε $B \subseteq A$.

Όταν το σύνολο B δεν είναι υποσύνολο του A γράφουμε $B \nsubseteq A$



Παράδειγμα:
$A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$
$B = \{5, 10, 15, 20\}$
Κάθε στοιχείο του συνόλου B είναι και στοιχείο του συνόλου A.
Άρα, το σύνολο B είναι υποσύνολο του συνόλου A, δηλαδή
$B \subseteq A$

Παραδείγματα

1. Δίνονται τα σύνολα:
   M: τα γράμματα της λέξης «ΑΓΓΛΙΑ» και
   N: τα γράμματα της λέξης «ΓΑΛΛΙΑ»
   Ξ: τα γράμματα της λέξης «ΠΟΡΤΟΓΑΛΙΑ»

   Να εξετάσετε με ποιες σχέσεις συνδέονται τα σύνολα.

Λύση:

Γράφω τα τρία σύνολα με αναγραφή και εξετάζω τα στοιχεία τους:

$M = \{A, \Gamma, \Lambda, I\}$

$N = \{\Gamma, A, \Lambda, I\}$

$\Xi = \{\Pi, O, P, T, \Gamma, A, \Lambda, I\}$

Τα σύνολα M *και* N *περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, άρα* $M = N$.

Το σύνολο Ξ *περιέχει όλα τα στοιχεία (τα γράμματα* Γ, Λ, I, A*) των συνόλων* M *και* N *και επιπλέον περιέχει και τα γράμματα* Π, P, T, O. *Άρα, συμπεραίνουμε ότι τα σύνολα* M *και* N *είναι υποσύνολα του συνόλου* Ξ, *δηλαδή* $M \subseteq \Xi$ *και* $N \subseteq \Xi$.

2. Δίνονται τα σύνολα:
   Α: οι φυσικοί αριθμοί που είναι άρτιοι μικρότεροι του 17
   Β: οι φυσικοί αριθμοί που είναι πολλαπλάσια του 4 και είναι μικρότεροι του 17

   (α) Να αναπαραστήσετε με βέννειο διάγραμμα τα σύνολα.
   (β) Να γράψετε ένα υποσύνολο του Α.
   (γ) Να γράψετε ένα υποσύνολο του Β.

Λύση:

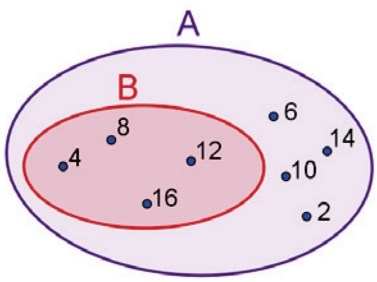
Γράφουμε τα σύνολα με αναγραφή των στοιχείων τους:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

$B = \{4, 8, 12, 16\}$

Παρατηρούμε ότι όλα τα στοιχεία του συνόλου B *είναι και στοιχεία του συνόλου* A. *Άρα, το σύνολο* B *είναι υποσύνολο του συνόλου* A.

(α) *Τα σύνολα μπορούν να αναπαρασταθούν με βέννειο διάγραμμα ως εξής:*



(β) *Για να βρούμε ένα υποσύνολο* Γ *του συνόλου* A, *πρέπει να ορίσουμε ένα σύνολο που να έχει στοιχεία κάποια από τα στοιχεία του* A.
Για παράδειγμα, $\Gamma = \{6, 12, 2\}$

(γ) *Για παράδειγμα,* $\Delta = \{4, 12\}$

Δραστηριότητες

1. Δίνονται τα σύνολα:
   $A = \{α, ι, ε, ο\}$
   B: τα φωνήεντα της λέξης «άπειρον»
   $Γ$: τα φωνήεντα της λέξης «απειροσύνολο»
   Να εξετάσετε τη σχέση μεταξύ των συνόλων:
   (α) A και B
   (β) A και $Γ$

2. Δίνεται το σύνολο:
   $Ω$: οι μαθητές και οι καθηγητές του Γυμνασίου Κ.
   Να εξετάσετε ποια από τα πιο κάτω σύνολα είναι υποσύνολα του συνόλου $Ω$:
   A: οι καθηγητές χημείας του Γυμνασίου Κ
   B: οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου του Γυμνασίου Κ
   $Γ$: η γραμματέας του Γυμνασίου Κ

3. Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να ισχύουν οι ισότητες:
   (α) $\{1, 2, \_\_, \_\_\} = \{3, \_\_, 5, \_\_\}$
   (β) $\{μ, ν, \_\_, \_\_, λ\} = \{λ, \_\_, π, \_\_, \_\_\}$

Αντιπαράδειγμα είναι ένα «παράδειγμα» στο οποίο **δεν ισχύει** ο ισχυρισμός.

4. Για τα σύνολα A και B ισχύει $ν(A) = ν(B)$. Η Ναταλία ισχυρίζεται ότι μπορεί να συμπεράνει ότι τα σύνολα A και B είναι ίσα. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό της.

5. Δίνεται το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Να βρείτε:
   (α) ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}$,
   (β) ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}$, το οποίο να έχει πληθικό αριθμό 5.

Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού είναι οι φυσικοί αριθμοί που τον διαιρούν.
Παράδειγμα:
Οι διαιρέτες του αριθμού 16 είναι: $\{1, 2, 4, 8, 16\}$

6. Να εξετάσετε για καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις αν κάποιο από τα δύο σύνολα είναι υποσύνολο του άλλου:
   (α) A: οι διαιρέτες του 3
   B: οι διαιρέτες του 6
   (β) A: τα ψηφία του αριθμού 2567442
   B: τα ψηφία του αριθμού 98763 που είναι μικρότερα του 8

Πράξεις Συνόλων

Διερεύνηση

Η 26η Σεπτεμβρίου καθιερώθηκε το 2011 ως Ευρωπαϊκή Ημέρα Γλωσσών. Στην Ευρώπη, σήμερα, ομιλούνται 200 γλώσσες και διάλεκτοι.

Σύμφωνα με έρευνα της Ευρωπαϊκής Ένωσης, το 56% των πολιτών της ΕΕ μιλά μια γλώσσα πέρα από τη μητρική του. Η πιο διαδεδομένη γλώσσα μεταξύ των Ευρωπαίων είναι τα Αγγλικά, καθώς το 34% των ευρωπαίων πολιτών τα χρησιμοποιεί ως δεύτερη γλώσσα. Ακολουθούν τα Γερμανικά (12%) και τα Γαλλικά (11%).

Οι πιο γλωσσομαθείς στην Ευρώπη είναι οι Λουξεμβούργιοι, καθώς το 99% μπορεί να συνεννοηθεί σε τουλάχιστον μία ξένη γλώσσα.

Ρωτήθηκαν οι 100 φοιτητές του τμήματος Γλωσσών του Πανεπιστημίου Κύπρου για τις ξένες γλώσσες που γνωρίζουν. Από τις απαντήσεις τους διαπιστώνεται ότι 90 φοιτητές γνωρίζουν Αγγλικά και 82 φοιτητές Γαλλικά και όλοι γνωρίζουν τουλάχιστον μια από τις δύο γλώσσες.

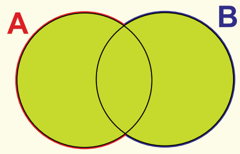
✓ Να κατασκευάσετε ένα βέννειο διάγραμμα, στο οποίο να σκιάσετε (με διαφορετικό χρώμα) την περιοχή του διαγράμματος που θα τοποθετούσατε τους φοιτητές που:
- δεν γνωρίζουν Γαλλικά
- γνωρίζουν μόνο Γαλλικά
- γνωρίζουν και Γαλλικά και Αγγλικά

✓ Να βρείτε πόσοι φοιτητές γνωρίζουν μόνο μια από τις δύο γλώσσες.

Ένα στοιχείο ανήκει στην ένωση δύο συνόλων, αν και μόνο αν ανήκει σε ένα **τουλάχιστον** από αυτά τα σύνολα.

Μαθαίνω

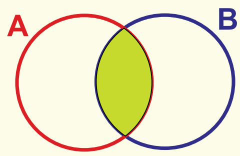
- **Ένωση** δύο συνόλων A και B λέγεται το σύνολο που αποτελείται από **όλα** τα στοιχεία, τα οποία ανήκουν είτε στο σύνολο A είτε στο σύνολο B.
  Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε $\boldsymbol{A \cup B}$.



Παράδειγμα:
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$B = \{2, 4, 8\}$
Το σύνολο $A \cup B$ περιέχει όλα τα στοιχεία, κοινά και μη κοινά, των συνόλων A και B. Δηλαδή, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

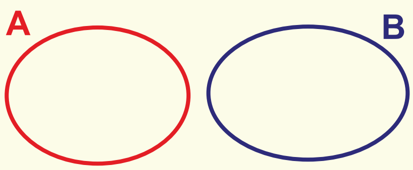
Ένα στοιχείο ανήκει στην τομή δύο συνόλων, αν και μόνο αν ανήκει συγχρόνως και στα δύο σύνολα.

- **Τομή** δύο συνόλων A και B λέγεται το σύνολο που αποτελείται από τα **κοινά** στοιχεία των δύο αυτών συνόλων.
  Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε $\boldsymbol{A \cap B}$.



Παράδειγμα:
$A = \{1, 2, 3, \mathbf{4}, 5, \mathbf{6}\}$
$B = \{\mathbf{4}, \mathbf{6}, 7\}$ $\qquad A \cap B = \{4, 6\}$
Το σύνολο $A \cap B$ περιέχει τα κοινά μόνο στοιχεία των συνόλων A και B. Δηλαδή, $A \cap B = \{4, 6\}$

- Δύο σύνολα A και B, όταν δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή $A \cap B = \emptyset$, ονομάζονται **ξένα** μεταξύ τους.



Παράδειγμα:
A: οι άρτιοι αριθμοί, $\qquad A = \{2,4,6, \dots\}$
B: οι περιττοί αριθμοί, $\qquad B = \{1,3,5, \dots\}$

Τα σύνολα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή $A \cap B = \emptyset$. Άρα, τα σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους.

Παραδείγματα

1. Δίνονται τα σύνολα:

   A: οι φυσικοί αριθμοί που είναι μικρότεροι του 6

   B: τα άρτια ψηφία του αριθμού 234688.

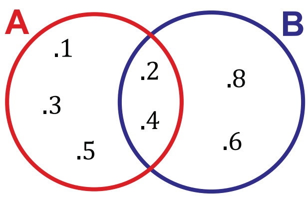
   (α) Να παραστήσετε τα δύο σύνολα με ένα βέννειο διάγραμμα.

   (β) Να βρείτε την τομή και την ένωση των δύο συνόλων.

   (γ) Να υπολογίσετε τον πληθικό αριθμό των συνόλων $A \cup B$ και $A \cap B$.

Λύση:

(α) *Γράφουμε με αναγραφή τα σύνολα* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *και* $B = \{2, 4, 6, 8\}$. *Εντοπίζουμε τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων και τα τοποθετούμε στο κοινό μέρος όπως φαίνεται στο πιο κάτω διάγραμμα. Ακολούθως, τοποθετούμε και τα υπόλοιπα στοιχεία του κάθε συνόλου.*



(β) *Η τομή αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων. Άρα,* $A \cap B = \{2, 4\}$.
Η ένωση αποτελείται από τα κοινά και μη κοινά στοιχεία των δύο συνόλων. Άρα, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

(γ) *Η τομή περιέχει δύο στοιχεία. Άρα,* $\nu(A \cap B) = 2$. *Η ένωση περιέχει επτά στοιχεία. Άρα,* $\nu(A \cup B) = 7$.

Δραστηριότητες

1. Δίνονται τα σύνολα:

   $A = \{4, 6, 8\}$ και

   B: ψηφία του αριθμού 457436

   (α) Να παραστήσετε τα δύο σύνολα με βέννειο διάγραμμα.

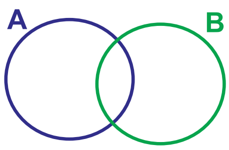
   (β) Να βρείτε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$.

2. Ο Αλέξης και ο Χρίστος εργάζονται μερικά από τα απογεύματα στην παγωταρία της γειτονιάς τους. Ο Αλέξης εργάζεται κάθε 4 μέρες ενώ ο Χρίστος κάθε 3 μέρες. Αν και τα δύο παιδιά ξεκίνησαν να εργάζονται στις 5 Ιουνίου, να βρείτε σε ποιο σύνολο ανήκουν οι ημερομηνίες $5, 17$ και 29.

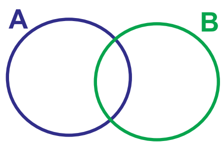
3. Δίνονται τα σύνολα:
   $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$,
   B: τα γράμματα της λέξης «γεωμετρία»
   $\Gamma = \{\delta, \varepsilon, \zeta\}$
   Να γράψετε με αναγραφή τα σύνολα:
   (α) $A \cup B$ (β) $A \cap B$
   (γ) $A \cap \Gamma$ (δ) $B \cup \Gamma$

4. Στο πλαίσιο του μαθήματος των Μαθηματικών έγινε μια έρευνα για τους μαθητές που εκπροσωπούν το σχολείο στις διάφορες εκδηλώσεις του σχολείου. Το σύνολο A περιλαμβάνει τους μαθητές που λαμβάνουν μέρος στη χορωδία και το σύνολο B τους μαθητές που λαμβάνουν μέρος στους χορούς. Να σκιάσετε το μέρος του διαγράμματος, στο οποίο ανήκει ένας μαθητής που λαμβάνει μέρος:

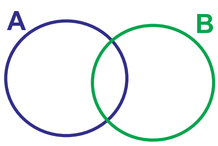
   (α) Στον χορό και στη χορωδία



   (β) Μόνο στον χορό



   (γ) Είτε στον χορό είτε στη χορωδία



5. Να βρείτε το σύνολο K, αν $\Lambda = \{\alpha, \beta, \varepsilon, \zeta\}$, $K \cap \Lambda = \{\varepsilon, \zeta\}$ και $K \cup \Lambda = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta\}$.

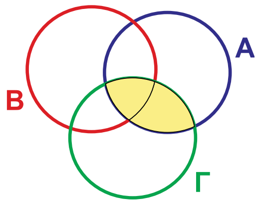
6. Δίνεται το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Να βρείτε:
   (α) δύο υποσύνολα B και Γ του $\mathbb{N}$, για τα οποία $\nu(B \cap \Gamma) = 2$,
   (β) δυο υποσύνολα E και Z του $\mathbb{N}$, που να είναι ξένα σύνολα μεταξύ τους.

7. Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να ισχύουν οι ισότητες:
   (α) $\{\varphi, \_\_, \_\_, \chi\} \cap \{\_\_, \_\_, \upsilon, \psi, \omega\} = \{\_\_, \chi, \omega\}$
   (β) $\{22, \_\_, 11\} \cup \{11, \_\_, \_\_, 33, 66\} = \{\_\_, \_\_, \_\_, 55, 66\}$

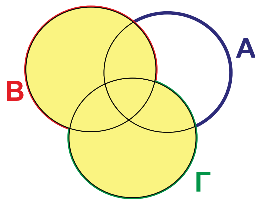
8. Για τα σύνολα A και B ισχύει ότι $\nu(A) = 5$, $\nu(B) = 6$ και $\nu(A \cap B) = 3$. Να βρείτε το $\nu(A \cup B)$.

9. Να χρησιμοποιήσετε τον συμβολισμό των πράξεων των συνόλων, για να περιγράψετε το σκιασμένο μέρος κάθε διαγράμματος.

(α)



(β)



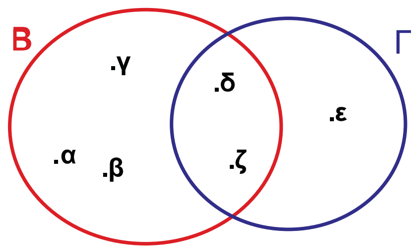
Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να γράψετε τα σύνολα με αναγραφή των στοιχείων τους και να βρείτε τον πληθικό αριθμό του κάθε συνόλου:
   A: τα ψηφία του αριθμού 770107,
   B: οι μέρες της εβδομάδας που αρχίζουν από Π,
   Γ: το σύνολο των κλασμάτων με αριθμητή 1 και παρονομαστή έναν φυσικό αριθμό μεγαλύτερο του 1 και μικρότερο του 9,
   Δ: τα σύμφωνα της λέξης «ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ»,
   E: οι μήνες του έτους που έχουν 32 ημέρες.

2. Να γράψετε τα σύνολα με περιγραφή των στοιχείων τους και να βρείτε τον πληθικό αριθμό τους:
   A = {Ιούνιος, Ιούλιος, Αύγουστος}
   B = {υ, η, ι }
   $\Gamma = \{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
   Δ = {ΑΡΕΝ, ΘΗΛΥ}
   $E = \{2, 4, 6\}$
   Z = {Τρίτη, Τετάρτη}

3. Δίνονται τα σύνολα A και B:
   A: διαιρέτες του 8
   B: τα ψηφία του αριθμού 28041
   Να εξετάσετε αν τα σύνολα A και B είναι ίσα.

4. Να ονομάσετε τα πιο κάτω σύνολα με βάση το διπλανό βέννειο διάγραμμα:
   (α) $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta\}$
   (β) $\{\delta, \zeta\}$
   (γ) $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$



5. Δίνονται τα σύνολα:
   A: τα γράμματα της λέξης «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ»
   B: τα γράμματα της λέξης «ΜΑΘΗΜΑΤΑ»
   Γ: τα γράμματα της λέξης «ΤΑΜΑ»
   (α) Να παραστήσετε με βέννειο διάγραμμα τα σύνολα A, B, Γ
   (β) Να βρείτε τα στοιχεία των συνόλων:
      i. $A \cup B$ ii. $A \cap B$
      iii. $A \cup B \cup \Gamma$ iv. $A \cap B \cap \Gamma$

6. Αν $A = \{\omega, \varphi, x, \psi\}$, να γράψετε δύο υποσύνολα του A που να έχουν πληθικό αριθμό 2.

7. Δίνονται τα σύνολα:
A: τα ψηφία του αριθμού 22345354,
B: οι περιττοί αριθμοί,
$\Gamma = \{0\}$
Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	$25 \in B$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$\nu(A) = 8$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$\nu(\Gamma) = 0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$22 \in A$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	$2015 \in B$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	$A \cap \Gamma = \emptyset$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	$A \cup B = B$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

8. Να αντιστοιχίσετε κάθε ζεύγος συνόλων A και B με το αντίστοιχο βέννειο διάγραμμά τους:

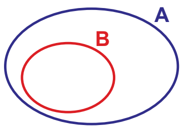
(α) $A = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$
$B = \{1, 3, 5, \dots, 99\}$

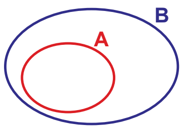
(β) $A = \{1, 2, 3, \dots, 60\}$
$B = \{1, 3, 5, \dots, 99\}$

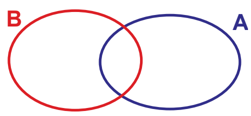
(γ) $A = \{1, 2, 3, \dots, 40\}$
$B = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$

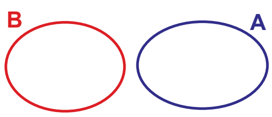
(δ) $A = \{6, 12, 18 \dots, 96\}$
$B = \{3, 6, 9, \dots, 96\}$

(ε) $A = \{1, 2, 3, \dots, 19\}$
$B = \{56, 57, 58 \dots, 88\}$

i.


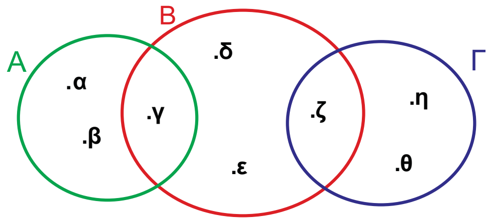
ii.


iii.


iv.


(α)→...... (β)→...... (γ)→...... (δ)→...... (ε)→......

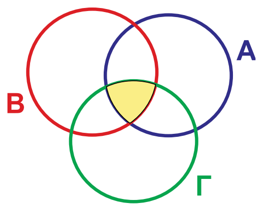
9. Με βάση το διάγραμμα να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω σχέσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.



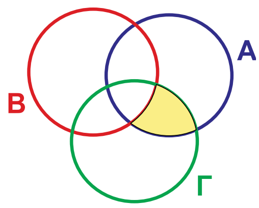
(α)	$A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$A \cap \Gamma = \emptyset$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$A \cap B \cap \Gamma = \{\gamma, \zeta\}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$B \cup \Gamma = \{\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta\}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	$\nu(B) = 2$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

10. Η Μαθηματική Ένωση θέλει να βραβεύσει τον μαθητή που έγραψε άριστα (20/20) στις εξετάσεις των μαθηματικών και στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου. Αν A, B και Γ το σύνολο των μαθητών που έγραψαν άριστα στην A', B' και Γ' Γυμνασίου αντίστοιχα, να ερμηνεύσετε σε ποιες τάξεις έχει γράψει 20/20 ένας μαθητής που το όνομά του βρίσκεται στη σκιασμένη περιοχή των συνόλων σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

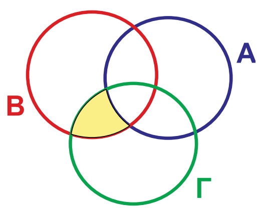
(α)



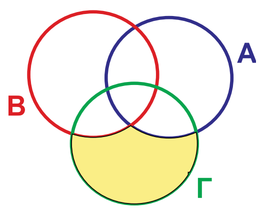
(β)



(γ)



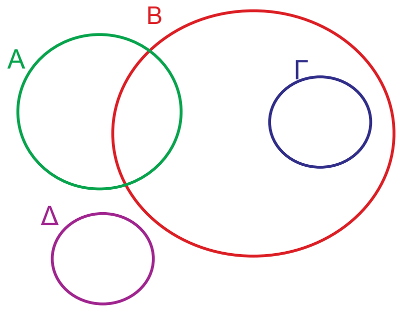
(δ)



Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Για τα σύνολα Γ και Δ ισχύει $\nu(\Gamma) = 7$, $\nu(\Delta) = 12$ και $\nu(\Gamma \cup \Delta) = 16$. Να βρείτε το $\nu(\Gamma \cap \Delta)$.

2. Να γράψετε σχέσεις των συνόλων που παρουσιάζονται στο πιο κάτω διάγραμμα.



3. Για τα σύνολα K και Λ, ισχύει $K \subseteq \Lambda$. Να βρείτε τα σύνολα:
   (α) $K \cap \Lambda$
   (β) $K \cup \Lambda$

4. Δίνονται τα σύνολα A και B. Να βρείτε τον πληθικό αριθμό του συνόλου $A \cup B$, όταν τα σύνολα:
   (α) A και B είναι ξένα
   (β) A και B είναι τυχαία σύνολα

5. Μια αγροτική κοινότητα έχει 300 κατοίκους. Το 50% των κατοίκων ασχολείται με την κτηνοτροφία, το 60% ασχολείται με τη γεωργία και το 25% ασχολείται και με την κτηνοτροφία και με τη γεωργία. Να υπολογίσετε πόσοι από τους κατοίκους δεν ασχολούνται ούτε με την κτηνοτροφία ούτε με τη γεωργία.

6. Τι συμπεραίνετε για τα σύνολα Π και Σ σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις, αν ισχύει ότι:
   (α) $\Pi \cap \Sigma = \Pi$
   (β) $\Pi \cup \Sigma = \Sigma$
   (γ) $\Pi \cup \Sigma = \emptyset$

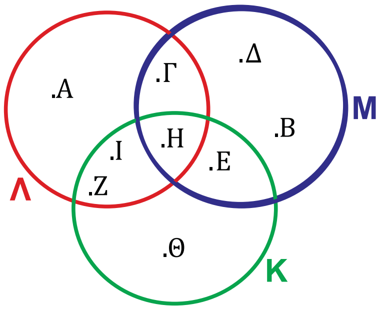
7. Σε ένα διεθνές συνέδριο Μαθηματικών γνωρίζουμε ότι 150 σύνεδροι μιλούν αγγλικά, 48 γαλλικά και 82 ρώσικα. Είκοσι τρεις σύνεδροι μιλούν αγγλικά και γαλλικά, 22 αγγλικά και ρώσικα, 25 γαλλικά και ρώσικα, και 225 σύνεδροι μιλούν τουλάχιστον μια από αυτές τις γλώσσες. Να βρείτε πόσοι από τους συνέδρους μιλούν και τις 3 γλώσσες.

8. Στο πιο κάτω διάγραμμα φαίνονται τα αποτελέσματα μιας έρευνας που έκαναν οι μαθητές στο πλαίσιο της οδικής ασφάλειας. Ρωτήθηκαν 9 μαθητές (οι οποίοι δεν μεταβαίνουν πεζοί στο σχολείο) για το ποιο μεταφορικό μέσο χρησιμοποιούν. Τα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν με τη βοήθεια του πιο κάτω βέννειου διαγράμματος. Κάθε παιδί παρουσιάζεται με το αρχικό του όνομα.

M: οι μαθητές που μεταβαίνουν με ποδήλατο

K: οι μαθητές που μεταβαίνουν με ιδιωτικό αυτοκίνητο

Λ: οι μαθητές που μεταβαίνουν με λεωφορείο



(α) Να μελετήσετε το διάγραμμα και να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, όπως το παράδειγμα:

	Ποδήλατο	Ιδιωτικό αυτοκίνητο	Με το λεωφορείο
Α			✓
Β			
Γ			
Δ			
Ε			
Ζ			
Η			
Θ			
Ι			

(β) Αν χρησιμοποιείτε τουλάχιστον ένα από τα πιο πάνω μεταφορικά μέσα για τη μετάβασή σας στο σχολείο, να συμπληρώσετε στην τελευταία γραμμή του πίνακα το όνομά σας και να το τοποθετήσετε στην κατάλληλη περιοχή του βέννειου διαγράμματος.

(γ) Να κάνετε την ίδια έρευνα για το δικό σας τμήμα και να παρουσιάσετε τα αποτελέσματά σας.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Αριθμοί

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε τι είναι δύναμη ενός αριθμού και να υπολογίζουμε παραστάσεις με δυνάμεις, εφαρμόζοντας την προτεραιότητα των πράξεων.
- Να ορίζουμε τι είναι σύστημα αρίθμησης φυσικών αριθμών με οποιαδήποτε βάση και να μετατρέπουμε αριθμούς από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα και αντίστροφα.
- Να επιλύουμε προβλήματα που αναφέρονται στο δυαδικό και στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.
- Να μεταφράζουμε αλγεβρικά σύμβολα σε λεκτική μορφή και αντίστροφα.
- Να επιλύουμε εξισώσεις πρώτου βαθμού αλγεβρικά, χρησιμοποιώντας ποικιλία μεθόδων.
- Να συνδυάζουμε αλγεβρικές εκφράσεις με δύο ή περισσότερες μεταβλητές για την εξαγωγή συμπερασμάτων.
- Να επιλύουμε και να κατασκευάζουμε αριθμητικά και αλγεβρικά προβλήματα.
- Να βρίσκουμε τον επόμενο όρο ή τον όρο που λείπει σε μοτίβα, να περιγράφουμε λεκτικά τον κανόνα του μοτίβου και να εκφράζουμε τον νιοστό όρο σε λεκτική ή συμβολική μορφή.
- Να επεξηγούμε την προτεραιότητα και τις ιδιότητες των πράξεων αλγεβρικά και γεωμετρικά και να τις χρησιμοποιούμε, για να απλοποιούμε παραστάσεις με ακέραιους, δεκαδικούς και κλάσματα.
- Να κάνουμε εκτιμήσεις του αποτελέσματος μιας πράξης και να ελέγχουμε τη λογικότητα των απαντήσεών τους.

Έχουμε μάθει ...

- Στην πρόσθεση αριθμών ισχύουν οι ιδιότητες:
  - **Αντιμεταθετική:** $\boldsymbol{\alpha+\beta=\beta+\alpha}$
  - **Προσεταιριστική:** $\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)}$

- Το μηδέν είναι το **ουδέτερο στοιχείο** της πρόσθεσης. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{\alpha+0=\alpha=0+\alpha}$$

- Στον πολλαπλασιασμό αριθμών ισχύουν οι ιδιότητες:
  - **Αντιμεταθετική:** $\boldsymbol{\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha}$
  - **Προσεταιριστική:** $\boldsymbol{(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)}$
  - **Επιμεριστική** ως προς την **πρόσθεση:**
    $\boldsymbol{\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma}$
    Επιμεριστική ως προς την **αφαίρεση:**
    $\boldsymbol{\alpha\cdot(\beta-\gamma)=\alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma}$

- Το **1** είναι το **ουδέτερο** στοιχείο του πολλαπλασιασμού. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{1\cdot\alpha=\alpha=\alpha\cdot 1}$$

- Όταν ένας αριθμός πολλαπλασιάζεται με το **0,** το γινόμενο ισούται με **0**:

$$\boldsymbol{0\cdot\alpha=0=\alpha\cdot 0}$$

Δυνάμεις

Εξερεύνηση

Λέγεται ότι πριν από πολλά χρόνια στις Ινδίες ζούσε ένας αυτοκράτορας, ο Βέλχιμπ, του οποίου το βασίλειο ήταν τεράστιο. Ένας Βραχμάνος ιερέας, ο Σίσσα, επινόησε και πρόσφερε το σκάκι στον αυτοκράτορα, ο οποίος γοητεύθηκε τόσο πολύ που θέλησε να τον ευχαριστήσει με ένα δώρο.
Ο Σίσσα σκέφτηκε για λίγο και του απάντησε: «*Θέλω να μου δώσεις δύο σπυριά σιτάρι για το πρώτο τετράγωνο του σκακιού, τα διπλάσια για το δεύτερο και τα διπλάσια του προηγούμενου για κάθε επόμενο τετράγωνο*». Ο αυτοκράτορας παραξενεύτηκε και θύμωσε για το φτηνό δώρο που ζήτησε ο Σίσσα και ζήτησε από τους αποθηκάριούς του να τού χαρίσουν το σιτάρι που ήθελε. Δεν μπόρεσε όμως να ξεπληρώσει την υπόσχεσή του.

✓ Γιατί δεν μπόρεσε να ξεπληρώσει την υπόσχεσή του ο αυτοκράτορας;

Διερεύνηση

Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Τετράγωνο	Αριθμός σπυριών σιταριού	Δύναμη	Αποτέλεσμα
1	2		2
2	2·2		4
3	2·2·2		
4			
⋮			
8			
10			
⋮			
20			
⋮			
32			
⋮			
64			

Για να παραχθεί αυτή η ποσότητα του σιταριού, η οποία είναι ένας τεράστιος αριθμός με 20 ψηφία, έπρεπε να σπείρουν 76 φορές όλη τη Γη!

Λέγεται ότι ο αυτοκράτορας, για να αποφύγει τη συμφωνία που έκανε, συμβουλεύτηκε τον σύμβουλό του, ο οποίος του είπε να καλέσει τον Σίσσα να μετρήσει ο ίδιος το σιτάρι που ζήτησε, καθώς δεν θα του έφταναν ούτε δύο ζωές, για να το μετρήσει.

Μαθαίνω

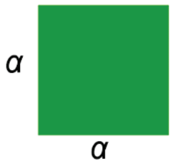
- Το γινόμενο, $\underbrace{\boldsymbol{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \cdots \cdot \alpha}}_{\nu\ \text{παράγοντες}}$ που αποτελείται από $\boldsymbol{\nu}$ παράγοντες ίσους με $\boldsymbol{\alpha}$, όπου $\nu > 1$, συμβολίζεται ως $\boldsymbol{\alpha^{\nu}}$ και ονομάζεται **δύναμη του $\boldsymbol{\alpha}$ στη $\boldsymbol{\nu}$** ή **νιοστή δύναμη του $\boldsymbol{\alpha}$.**
  Το $\boldsymbol{\alpha}$ ονομάζεται **βάση** της δύναμης και το $\boldsymbol{\nu}$ ονομάζεται **εκθέτης** της.

  Παράδειγμα:
  Το γινόμενο $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ γράφεται ως 3^4 και είναι ίσο με 81. Ο αριθμός 3 ονομάζεται βάση και ο αριθμός 4 εκθέτης της δύναμης.

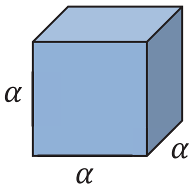
- Ορίζεται ότι:
  - $\boldsymbol{\alpha^1 = \alpha}$
  - $\boldsymbol{\alpha^0 = 1\ ,\ \alpha \neq 0}$

  Παραδείγματα:
  $2^0 = 1$, $136^0 = 1$
  $5^1 = 5$, $11^1 = 11$

Ειδικά:



- Το γινόμενο $\boldsymbol{\alpha \cdot \alpha} = \boldsymbol{\alpha^2}$ διαβάζεται και **α στο τετράγωνο,** καθώς μπορεί να αναπαραστήσει το εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρά α.

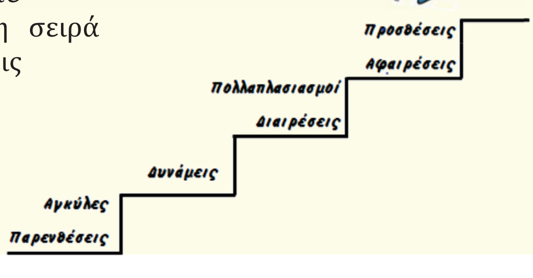


- Το γινόμενο $\boldsymbol{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha} = \boldsymbol{\alpha^3}$ διαβάζεται και **α στον κύβο,** καθώς μπορεί να αναπαραστήσει τον όγκο ενός κύβου με πλευρά α.

  Παραδείγματα:
  Το τετράγωνο του αριθμού 7 είναι $7^2 = 49$
  Ο κύβος του αριθμού 3 είναι $3^3 = 27$

- Η σειρά, με την οποία πρέπει να κάνουμε τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση (**προτεραιότητα πράξεων**), είναι η ακόλουθη:
  - Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
  - Στη συνέχεια, εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
  - Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

  Αν υπάρχουν στην παράσταση παρενθέσεις, τότε με βάση την προηγούμενη σειρά εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.



Όταν σε μια αριθμητική παράσταση υπάρχουν μόνο προσθέσεις και αφαιρέσεις, τότε εκτελούμε τις πράξεις με τη σειρά που εμφανίζονται από αριστερά προς τα δεξιά.

Το ίδιο και όταν υπάρχουν μόνο πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις.

Παραδείγματα

1. Να γράψετε τις πιο κάτω δυνάμεις ως γινόμενο του ίδιου αριθμού και στη συνέχεια να τις υπολογίσετε:

   (α) 7^2 (β) 5^4

   (γ) 3^6 (δ) Έξι στον κύβο

   Λύση:

   (α) $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$

   (β) $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

   (γ) $3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$

   (δ) Έξι στον κύβο είναι: $6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

2. Το byte είναι ένας όρος που χρησιμοποιείται στην τεχνολογία των ηλεκτρονικών υπολογιστών, για να περιγράψει μια μικρή ποσότητα πληροφορίας που αποθηκεύεται στη μνήμη του υπολογιστή. Για παράδειγμα, για να αποθηκευτεί στη μνήμη του υπολογιστή ένας χαρακτήρας (γράμμα ή ψηφίο) χρειάζεται χωρητικότητα μνήμης 1 byte. Αν ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής αποθηκεύει πληροφορία που αντιστοιχεί σε 1 Kilobyte, να βρείτε πόσοι χαρακτήρες περιέχονται στην πληροφορία, αν ένα *Kilobyte ορίζεται ως* 2^{10} *bytes.*

   Στην υπολογιστική υπάρχει το πλήκτρο

   $\boxed{x^y}$

   για τον υπολογισμό της δύναμης.

   Λύση:

   Ένα Kilobyte ορίζεται ως 2^{10} *bytes.*

   Για τον υπολογισμό της δύναμης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αριθμομηχανή.

   Πληκτρολογούμε:

   $\boxed{2}\ \boxed{x^y}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{=}$

   Η απάντηση είναι $2^{10} = 1024$.
   Άρα, το kilobyte περιέχει 1024 χαρακτήρες.

3. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $4^1 + 2^2 \cdot (6-1)^0$

(β) $3^3 + 4^2 : (2^1 - 6^0)$

Λύση:

(α) $4^1 + 2^2 \cdot (6-1)^0 = 4^1 + 2^2 \cdot 5^0$

$= 4 + 4 \cdot 1$

$= 4 + 4$

$= 8$

Υπολογίζουμε πρώτα την πράξη στην παρένθεση και ακολούθως υπολογίζουμε τις δυνάμεις. Στη συνέχεια, κάνουμε τον πολλαπλασιασμό και τέλος την πρόσθεση.

(β) $3^3 + 4^2 : (2^1 - 6^0) = 3^3 + 4^2 : (2 - 1)$

$= 3^3 + 4^2 : 1$

$= 27 + 16 : 1$

$= 27 + 16$

$= 43$

Υπολογίζουμε πρώτα τις δυνάμεις στην παρένθεση και ακολούθως την αφαίρεση. Στη συνέχεια, κάνουμε τη διαίρεση και τέλος την πρόσθεση.

Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω παραστάσεις μπορούν να γραφούν υπό μορφή δύναμης με εκθέτη μεγαλύτερο του 1:

(α) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ (β) $4 \cdot 3 \cdot 5$

(γ) $2013 \cdot 2013 \cdot 2013$ (δ) $4 + 4 + 4$

(ε) $\beta \cdot \beta$ (στ) $\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{101 \text{ προσθετέους}}$

2. Να αναγνωρίσετε τη βάση και τον εκθέτη των πιο κάτω δυνάμεων και ακολούθως να υπολογίσετε τις δυνάμεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής:

(α) 7^2 (β) 12^2 (γ) 2^3

(δ) 10^4 (ε) 3^5 (στ) 1^3

(ζ) 1234^1 (η) 5^0 (θ) 2012^0

3. Να εξετάσετε ποιοι από τους πιο κάτω αριθμούς μπορούν να γραφούν ως δύναμη, με εκθέτη μεγαλύτερο του 1:

   (α) 32 (β) 49 (γ) 111 (δ) 1000

4. Να γράψετε καθένα από τους πιο κάτω αριθμούς ως δυνάμεις ενός φυσικού αριθμού, με τρεις διαφορετικούς τρόπους:

   (α) 1 (β) 64 (γ) 81 (δ) 256

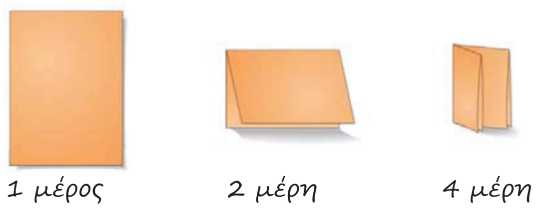
5. Να χρησιμοποιήσετε την υπολογιστική σας, για να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

   (α) 5^8 (β) 12^4 (γ) 7^6 (δ) 16^3

6. Να κατατάξετε τις πιο κάτω δυνάμεις σε φθίνουσα σειρά (δηλαδή από τον μεγαλύτερο στον μικρότερο) :

   5^2, 5^3, 1^5, 2^5

7. Να βρείτε πόσες φορές θα πρέπει να διπλώσουμε το χαρτί στη μέση, έτσι ώστε να δημιουργηθούν 32 ίσα μέρη και να εκφράσετε τον αριθμό των κομματιών που προκύπτουν σε κάθε φάση σε μορφή δύναμης.



8. Ο κύριος Ανδρέας πρόκειται να αναλάβει μια εργασία σε μια εταιρεία και ο διευθυντής τού έκανε την εξής προσφορά:

   «Μπορώ να σε πληρώσω προκαταβολικά €15000 ή αν θέλεις σου προσφέρω 1 σεντ για την πρώτη μέρα, τα διπλάσια για την επόμενη, τα διπλάσια της προηγούμενης για κάθε επόμενη μέρα. Μπορείς να επιλέξεις όποια προσφορά θέλεις».

   Να εξετάσετε ποιος τρόπος πληρωμής τον συμφέρει, αν ο κύριος Ανδρέας έχει υπολογίσει ότι θα χρειαστεί 21 μέρες, για να τελειώσει την εργασία.

9. Να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $2^2 - 1^3 + 5^1$ (β) $2 + 1 \cdot 3^3$

(γ) $2^5 \cdot 4 + 3^0$ (δ) $5^2 - 12 : 3$

(ε) $2^0 + 6^2 : 2^2$ (στ) $(3-2)^{12} \cdot 3^4$

10. Να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $(2+1)^2 + 23^0 \cdot 5$ (β) $3^0 \cdot 5 - 0^3 : 5$

(γ) $(2^0 + 6^2) \cdot 2^2$ (δ) $3^0 + (4-2)^2 \cdot 5^0$

(ε) $8 \cdot (2^4 - 3) + 2^3$ (στ) $16 : 4^2 + 5^2 \cdot 1^2 - 0^3$

11. Να τοποθετήσετε παρενθέσεις, ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

(α) $2 \cdot 5 + 2^2 = 11^2 - 23$

(β) $22 - 7 - 5^2 \cdot 2 = 2 \cdot 3^2 - 4$

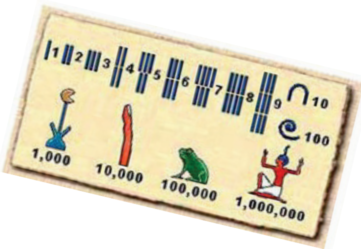
12. Να συμπληρώσετε με τους κατάλληλους αριθμούς τον πιο κάτω πίνακα, ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες:

3^2	$-$	1^3	$-$		$= 2$
$+$		$\cdot$		$+$	
	$\cdot$	7^1	$\cdot$	2^2	$= 56$
$\cdot$		$\cdot$		$\cdot$	
	$\cdot$	2^3	$+$		$= 43$
$= 19$		$= 56$		$= 18$	

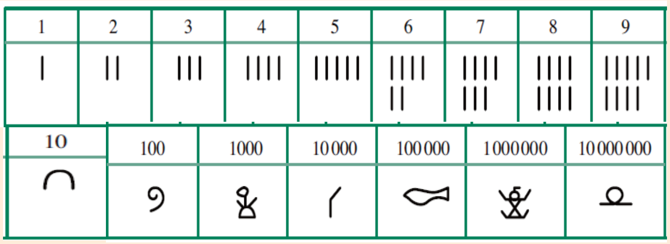
Συστήματα Αρίθμησης

Εξερεύνηση

Κάθε πολιτισμός στην αρχαιότητα καθόριζε τη βάση του αριθμητικού του συστήματος και χρησιμοποιούσε δικά του σύμβολα, για να αναπαριστάνει ποσότητες.



Στο αιγυπτιακό σύστημα αρίθμησης της τρίτης χιλιετίας π.Χ. χρησιμοποιούνταν τα ακόλουθα σύμβολα.



Παράδειγμα:
3245
𓆼𓆼𓆼𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆|||||

Στο κινέζικο σύστημα αρίθμησης της τρίτης χιλιετίας π.Χ. χρησιμοποιούνταν σύμβολα για τους πρώτους εννέα αριθμούς και σύμβολα για τη δεκάδα, εκατοντάδα και χιλιάδα.

1	2	3	4	5	6
一	二	三	四	五	六
7	**8**	**9**	**10**	**100**	**1000**
七	八	九	十	百	千

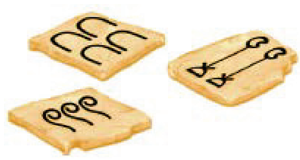
Παράδειγμα:
3245

(διαβάζεται από πάνω προς τα κάτω)

三
千
二
百
四
十
五

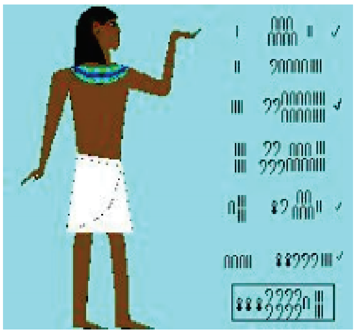
- ✓ Να μελετήσετε τα πιο πάνω αριθμητικά συστήματα και να τα συγκρίνετε με το αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιούμε.

- ✓ Σε μια ανασκαφή, στην Αίγυπτο, ανακαλύφθηκε μια σπασμένη πλάκα στην οποία ήταν γραμμένος ένας αριθμός. Ποιος ήταν ο αριθμός που ήταν γραμμένος στην πλάκα; Μπορείτε να απαντήσετε με βεβαιότητα;



Διερεύνηση

Όπως κάθε λαός είχε τα δικά του σύμβολα για τους αριθμούς, με τον ίδιο τρόπο ανέπτυξε και δικούς του τρόπους για να εκτελεί τις τέσσερις πράξεις των αριθμών. Στην πιο κάτω εικόνα, ένας Αιγύπτιος παρουσιάζει στην ιερογλυφική γραφή τον τρόπο υπολογισμού του γινομένου $53 \cdot 72$.



$1 \cdot 72 = 72$
$2 \cdot 72 = 144$
$4 \cdot 72 = 288$
$8 \cdot 72 = 576$
$16 \cdot 72 = 1152$
$32 \cdot 72 = 2304$

$\mathbf{53} \quad \mathbf{3816}$

$\mathbf{53 = 1 + 4 + 16 + 32}$

✓ Να μελετήσετε και να εξηγήσετε τον τρόπο πολλαπλασιασμού των αρχαίων Αιγυπτίων.

Μαθαίνω

- Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης χρησιμοποιεί μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, …, δηλαδή δυνάμεις με βάση το 10 και ψηφία 0,1,2,3,4,5,6,7,8, 9 (10 ψηφία).

…		Χιλιάδες	Εκατοντάδα	Δεκάδες	Μονάδες
…	$10^4 = 10000$	$10^3 = 1000$	$10^2 = 100$	$10^1 = 10$	$10^0 = 1$

Παράδειγμα:
$2304 = \mathbf{2} \cdot 10^3 + \mathbf{3} \cdot 10^2 + \mathbf{0} \cdot 10^1 + \mathbf{4} \cdot 10^0$

- Το δυαδικό σύστημα χρησιμοποιεί μόνο 2 ψηφία το 0 και το 1. Κάθε ψηφίο ενός αριθμού του δυαδικού συστήματος έχει αξία θέσης δυνάμεις του 2. Δηλώνουμε ότι ένας αριθμός είναι γραμμένος στο δυαδικό σύστημα, γράφοντας στη θέση δείκτη, τον αριθμό 2.

Παράδειγμα:
$1011_{(2)}$

…	…	…	Δεκαεξάδα	Οκτάδα	Τετράδα	Δυάδα	Μονάδα
				1	0	1	1

Στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης ο δείκτης συνήθως παραλείπεται.

Γράφουμε δηλαδή,
1011 αντί $1011_{(10)}$

- Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως **άθροισμα δυνάμεων του 2**. Στο ανάπτυγμα αυτό κάθε δύναμη του 2 χρησιμοποιείται το πολύ μια φορά.

  Παράδειγμα:
  $11 = 8 + 2 + 1$
  Αφού κάθε αριθμός του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυνάμεων του 2, μπορεί να μετατραπεί σε αριθμό του δυαδικού συστήματος αρίθμησης.
  Άρα,
  $$\begin{aligned} 11 &= 8 + 0 + 2 + 1 \\ &= \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 \\ &= 1011_{(2)} \end{aligned}$$
  Αντίστροφα,

…	…	…	Δεκαεξάδα	Οκτάδα	Τετράδα	Δυάδα	Μονάδα
…	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
				1	0	1	1

$$\begin{aligned} 1011_{(2)} &= \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 8 + 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Άρα $1011_{(2)} = 11_{(10)} = 11$

Παραδείγματα

1. Δίνεται ο αριθμός 1001 του δυαδικού συστήματος.
   (α) Να βρείτε την αξία θέσης του ψηφίου 1 στον αριθμό $1001_{(2)}$.
   (β) Να τον μετατρέψετε στο δεκαδικό σύστημα.

Λύση:

(α) *Η μονάδα που βρίσκεται στην πρώτη θέση από τα δεξιά αντιστοιχεί στο 2^0 δηλαδή στο 1 του δεκαδικού συστήματος, ενώ η μονάδα που βρίσκεται στην τέταρτη θέση αντιστοιχεί στο 2^3 δηλαδή στο 8 του δεκαδικού συστήματος.*

…	$2^6 = 64$	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
				1	0	0	1

(β) *Ο αριθμός 1001, αναλύεται ως εξής:*
$1001_{(2)} = 2^0 + 0 + 0 + 2^3 = 1 + 8$ *Άρα* $1001_{(2)} = 9$.

2. Να γράψετε τους αριθμούς του δεκαδικού συστήματος 15 και 333 στο δυαδικό σύστημα:

Λύση:

(α) *Ο αριθμός 15 μπορεί να γραφεί:*

$$15 = 8 + 4 + 2 + 1$$
$$= 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

…	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
…	64	32	16	8	4	2	1
				✓	✓	✓	✓

Άρα $15 = 1111_{(2)}$

(β) *Για να μετατρέψουμε το 333 στο δυαδικό σύστημα, αρχικά εξετάζουμε ποια είναι η μεγαλύτερη δύναμη του 2 που δεν υπερβαίνει το 333.*

$333 = \mathbf{256} + 77$

Παρατηρούμε ότι το $2^8 = 256$ *δεν υπερβαίνει το 333.*

$333 = \mathbf{256} + \mathbf{64} + 13$

Εξετάζουμε τώρα ποια είναι η μεγαλύτερη δύναμη του 2 που δεν υπερβαίνει το 77.

$333 = \mathbf{256} + \mathbf{64} + \mathbf{8} + 5$

Ακολουθούμε την πιο πάνω διαδικασία για το 13.

$333 = \mathbf{256} + \mathbf{64} + \mathbf{8} + \mathbf{4} + 1$

Ακολουθούμε την πιο πάνω διαδικασία για το 5.

$333 = \mathbf{256} + \mathbf{64} + \mathbf{8} + \mathbf{4} + \mathbf{1}$

…	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
…	256	128	64	32	16	8	4	2	1
	✓		✓			✓	✓		✓

Ο αριθμός 333 αναλύεται: $333 = 256 + 64 + 8 + 4 + 1$
$$= 2^8 + 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0$$

Άρα $333 = 101001101_{(2)}$

Δραστηριότητες

1. Ο Αιγύπτιος στη διπλανή εικόνα γράφει αριθμούς στο αιγυπτιακό σύστημα:
   (α) Να βρείτε ποιον αριθμό έχει γράψει ο Αιγύπτιος.
   (β) Να υπολογίσετε πόσα σύμβολα χρειάζονται για να γραφεί η χρονολογία γεννήσεώς σας.

2. Να γράψετε τους δέκα πρώτους αριθμούς του δυαδικού συστήματος.

3. Να μετατρέψετε τους πιο κάτω αριθμούς του δυαδικού συστήματος στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης:

(α) 110	(β) 1111	(γ) 1001
(δ) 1111111	(ε) 1110001	(στ) 10101010

4. Να μετατρέψετε τους πιο κάτω αριθμούς του δεκαδικού συστήματος στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης:

(α) 10	(β) 8	(γ) 14
(δ) 47	(ε) 52	(στ) 67

5. Να βρείτε τον επόμενο και τον προηγούμενο αριθμό των πιο κάτω αριθμών του δυαδικού συστήματος:
   (α) 101 (β) 1111 (γ) 1101

6. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος και ο ποιος ο μικρότερος τριψήφιος αριθμός του δυαδικού; Να μετατρέψετε τους αριθμούς αυτούς στο δεκαδικό σύστημα.

7. Ένας αριθμός του δεκαδικού συστήματος μετατρέπεται στο δυαδικό σύστημα και δίνει έναν τετραψήφιο αριθμό. Ποιος θα μπορούσε να είναι ο αριθμός αυτός του δεκαδικού συστήματος;

Αλγεβρικές Παραστάσεις

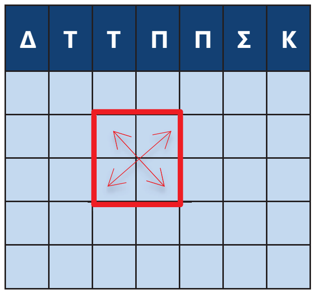
Διερεύνηση (1)

Στο ημερολόγιο ενός μήνα σχεδιάζουμε ένα τετράγωνο με κόκκινο χρώμα, το οποίο περικλείει 4 ημερομηνίες, όπως φαίνεται στο σχήμα.

- ✓ Να βρείτε το άθροισμα για κάθε ζεύγος αριθμών που βρίσκονται στις απέναντι κορυφές του τετραγώνου. Ποια η σχέση των δύο αθροισμάτων;

- ✓ Να δείξετε ότι η σχέση που βρήκατε ισχύει και για άλλα τετράγωνα.

- ✓ Να δείξετε ότι η σχέση που βρήκατε ισχύει για κάθε τετράγωνο.

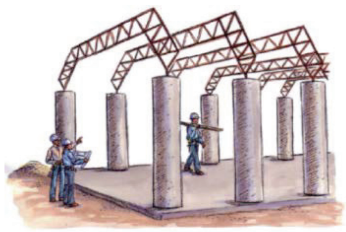


- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο η σχέση αυτή ισχύει και για κάθε ορθογώνιο.

- ✓ Να βρείτε και άλλα πιθανά μοτίβα, τα οποία εμφανίζονται σε ένα ημερολόγιο.

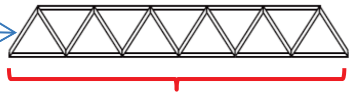
Διερεύνηση (2)

Η νέα τάση της αρχιτεκτονικής απαιτεί μεγάλες και πολύπλοκες κατασκευές που κατασκευάζονται γρήγορα και είναι ασφαλείς. Οι κατασκευές από χάλυβα είναι το αποτέλεσμα της ανάπτυξης της τεχνολογίας στην κατασκευή κτηρίων. Ανταποκρίνονται άριστα στον σεισμό, στον άνεμο, στο χιόνι και σε όλα τα καιρικά φαινόμενα.



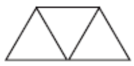
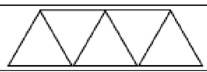
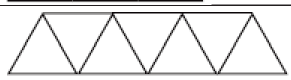
Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει μεταλλικές δοκούς. Κάθε δοκός φτιάχνεται από μεταλλικές ράβδους μήκους $1\,m$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Μήκος ράβδου $1\,m$



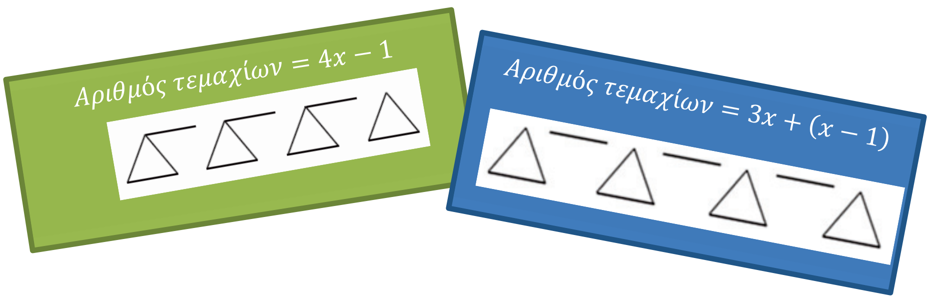
Μήκος δοκού $= 6\,m$

✓ Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

	Μήκος δοκού σε m	Πλήθος μεταλλικών ράβδων $1\,m$
	1	3
	2	7
	3	
	4	
⋮	⋮	
⋮	x	

Για τον υπολογισμό του πλήθους των μεταλλικών ράβδων που χρειάζεται μια δοκός οποιουδήποτε μήκους $(x)\,m$, οι μηχανικοί της εταιρείας χρησιμοποιούν διαφορετικούς τύπους/κανόνες σύμφωνα με τις πιο κάτω παραστάσεις.

✓ Να μελετήσετε τις παραστάσεις, να εξηγήσετε πώς προκύπτουν οι πιο κάτω τύποι και να εξετάσετε κατά πόσο είναι ισοδύναμοι.



Στις αλγεβρικές παραστάσεις, συνήθως δεν βάζουμε το σύμβολο του πολλαπλασιασμού $(\cdot)$ μεταξύ των αριθμών και των μεταβλητών ή μεταξύ των μεταβλητών.

Δηλαδή:
$3 \cdot x = 3x$
$7 \cdot x \cdot y = 7xy$

Μαθαίνω

Για να αναπαραστήσουμε ποσότητες που μεταβάλλονται, χρησιμοποιούμε γράμματα ή σύμβολα, τα οποία ονομάζονται **μεταβλητές**.

Παραδείγματα:
Η απόσταση (S) που καλύπτει ένα αυτοκίνητο που κινείται με σταθερή ταχύτητα $100\frac{km}{h}$ εξαρτάται από τον χρόνο σε ώρες (t) που κινείται το αυτοκίνητο και δίνεται από τη σχέση: $S = 100t$

Χρήση μεταβλητής στην περιγραφή συνόλων:
Α: άρτιοι φυσικοί αριθμοί
Δηλαδή, $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ *μπορεί να γραφεί:* $A = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$

- Μια μαθηματική έκφραση που περιλαμβάνει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές ονομάζεται **αλγεβρική παράσταση**.

- **Αριθμητική παράσταση** ονομάζεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.

Παραδείγματα:
$2 + 8 : 4$ *Αριθμητική παράσταση*
$3x - 1$ *Αλγεβρική παράσταση, με μεταβλητή το x*
$2\alpha + 5\beta$ *Αλγεβρική παράσταση με δύο μεταβλητές, τις α και β*

- Για να γράψουμε μια αλγεβρική παράσταση σε πιο απλή μορφή χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των πράξεων (επιμεριστική, προσεταιριστική, αντιμεταθετική).

- Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τους όμοιους όρους με το άθροισμά τους, τη γράφουμε σε πιο απλή μορφή, και λέμε ότι κάνουμε «**αναγωγή ομοίων όρων**».

Παραδείγματα

1. Να γράψετε τις πιο κάτω αλγεβρικές παραστάσεις στην πιο απλή μορφή τους:
   (α) $(\alpha + 2) + 7$ (β) $5x + 3x + 2x$ (γ) $4(y + 2) - 3y$

   Λύση:
   (α) $(\alpha + 2) + 7 = \alpha + (2 + 7) = \alpha + 9$ — *Εφαρμόζουμε την προσεταιριστική ιδιότητα.*

   (β) $5x + 3x + 2x = (5 + 3 + 2) \cdot x = 10x$ — *Προσθέτουμε τους «όμοιους» όρους $5x$, $3x$ και $2x$, εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα.*

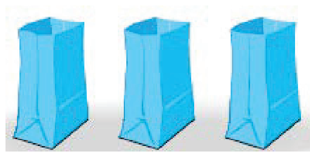
(γ) $4(y+2)-3y = 4y + 4 \cdot 2 - 3y$ *Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.*

$= 4y + 8 - 3y$

$= (4y - 3y) + 8$ *Αφαιρούμε τους «όμοιους» όρους $4y$ και $3y$.*

$= 1y + 8$

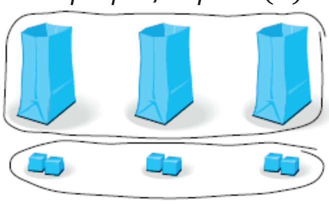
2. Ο Παναγιώτης έχει τοποθετήσει σε κάθε σακούλα τον ίδιο αριθμό κύβων. Επειδή ήταν αρκετά βαριές, αφαίρεσε από καθεμιά σακούλα 2 κύβους, για να μπορεί να τις μεταφέρει. Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει:
   (α) το σύνολο των κύβων που υπήρχε αρχικά στις σακούλες
   (β) το σύνολο των κύβων που περιέχονται τώρα στις σακούλες.

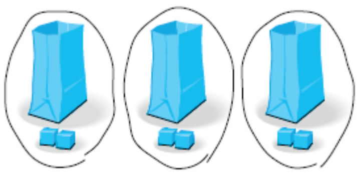


Λύση:

(α) *Έστω ότι κάθε σακούλα περιέχει α κύβους. Άρα, ο αρχικός συνολικός αριθμός κύβων (A) θα είναι:* $\mathrm{A} = 3 \cdot \alpha = 3\alpha$

(β) *Ο Παναγιώτης αφαιρεί 2 κύβους από την κάθε σακούλα. Άρα, σε καθεμιά σακούλα παραμένουν $\alpha - 2$ κύβοι. Ο τελικός αριθμός κύβων (T) θα είναι:*





Α΄ τρόπος:

$\mathrm{T} = (3 \cdot \alpha) - (3 \cdot 2)$
$= 3\alpha - 6$

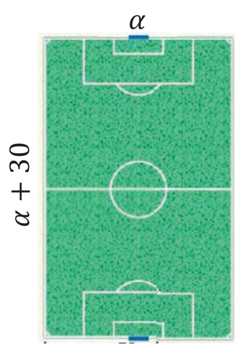
Άρα, το σύνολο των κύβων είναι $3\alpha - 6$.

Β΄ τρόπος:

$\mathrm{T} = 3 \cdot (\alpha - 2)$

Άρα, το σύνολο των κύβων είναι $3 \cdot (\alpha - 2) = 3\alpha - 6$.

3. Το μήκος ενός ποδοσφαιρικού γηπέδου είναι $30\,m$ μεγαλύτερο από το πλάτος του. Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει την περίμετρο του γηπέδου.



Λύση:

Έστω α το πλάτος του γηπέδου, τότε το μήκος του είναι $\alpha + 30$.

Άρα, Περίμετρος:

$\Pi = 2 \cdot (\text{πλάτος} + \text{μήκος})$
$= 2(\alpha + \alpha + 30)$
$= 2\alpha + 2\alpha + 60$
$= 4\alpha + 60$

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα, για να απλοποιήσουμε την παράσταση. Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων.

Δραστηριότητες

1. Να γράψετε τις πιο κάτω αλγεβρικές παραστάσεις στην πιο απλή μορφή τους:

   (α) $x + x$ (β) $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha$

   (γ) $3\alpha + 2\alpha$ (δ) $3\beta + \beta + 3\beta + \beta$

   (ε) $3\alpha + 2 + 5\alpha - 1$ (στ) $5x + 8x - 5$

2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω ισοδυναμίες, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α) $3(\beta + 4) = 3\beta + 4$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β) $4(\omega - 2) = 4\omega - 8$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ) $7(\omega + 1) - \omega = 6\omega + 7$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ) $3(\beta + 1) + 3\beta = 6\beta + 1$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

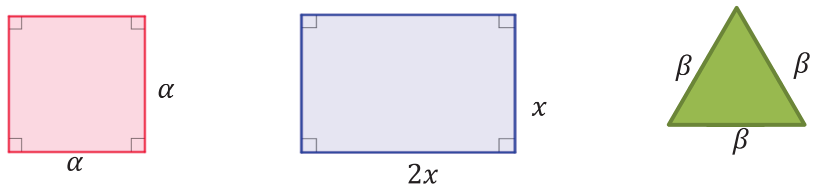
3. Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω ισότητες:

   (α) $3\beta + \square + \beta = 12\beta$ (β) $3(\omega + \square) = 3\omega + 6$

   (γ) $13\beta - \beta + 5 - \square = 12\beta$ (δ) $5(\square + 2) = 5\kappa + \square$

   (ε) $3(\lambda + 2) + \square = 5\lambda + 6$ (στ) $3(\lambda + 2) - \square = 3\lambda + 3$

4. Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει την περίμετρο των πιο κάτω σχημάτων:



5. Ο Γιαννάκης έχει πάει για ψώνια σε ένα εμπορικό κέντρο. Να εξετάσετε την ορθότητα του συλλογισμού του Γιαννάκη στις πιο κάτω περιπτώσεις:

6. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

Λεκτικές προτάσεις	Αλγεβρική παράσταση
Έστω ότι τα χρήματα του Ανδρέα είναι:	x
(α) Η Μαρίνα έχει €2 περισσότερα από τον Ανδρέα.	....
(β) Ο Αλέξης έχει	$x-14$
(γ) Η Ναταλία έχει διπλάσια χρήματα από τον Ανδρέα.	....
(δ) Η Κατερίνα έχει τα μισά χρήματα του Ανδρέα.	....
(ε) Ο Άρης έχει €4 λιγότερα από τα τριπλάσια χρήματα του Ανδρέα.	....
(στ) Ο Κώστας έχει πενταπλάσια χρήματα από τη Μαρίνα.	....
(ζ) Η Έλενα έχει	$7x-20$

7. Σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ η πλευρά $ΑΓ$ είναι διπλάσια της $ΑΒ$ και η $ΒΓ$ είναι κατά 3 μονάδες μεγαλύτερη από την πλευρά $ΑΒ$. Να βρείτε την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει την περίμετρο του τριγώνου σε σχέση με το μήκος της πλευράς $ΑΒ$.

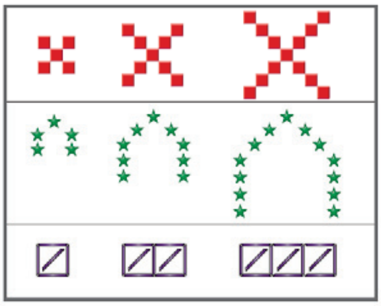
8. Η Μαίρη έχει τριπλάσια ηλικία από τον αδελφό της. Να γράψετε τις αλγεβρικές παραστάσεις που εκφράζουν τις ηλικίες τους:
(α) σήμερα (β) ύστερα από 7 χρόνια (γ) πριν από 6 χρόνια

9. Μια εταιρεία μεταφορών χρεώνει για έξοδα αποστολής ως εξής: €5 σταθερή χρέωση για οποιαδήποτε παραγγελία και επιπλέον €3 χρέωση για κάθε αντικείμενο. Να βρείτε ποια από τις πιο κάτω αλγεβρικές παραστάσεις εκφράζει το συνολικό κόστος αποστολής N αντικειμένων:
(α) $3N-5$ (β) $3\cdot(5+N)$ (γ) $5+3N$

10. Ο Αλέξανδρος, η Βάσια, ο Γιώργος, η Δανάη και η Έλενα έχουν εκλεγεί στο συμβούλιο της τάξης τους. Ο Αλέξανδρος πήρε 2 ψήφους περισσότερες από τη Βάσια και 4 λιγότερες από τον Γιώργο. Η Έλενα πήρε 2 ψήφους λιγότερες από τη Δανάη και 5 περισσότερες από τη Βάσια. Να κατατάξετε τα παιδιά με βάση τις ψήφους που έχουν πάρει.

Αριθμητική Τιμή Αλγεβρικής Παράστασης

Διερεύνηση (1)



Να μελετήσετε τα τρία μοτίβα του διπλανού σχήματος.

- ✓ Τι κοινό έχουν τα μοτίβα αυτά;
- ✓ Πόσα αντικείμενα θα έχει το τέταρτο και πόσα το πέμπτο σχήμα στη σειρά κάθε μοτίβου.
- ✓ Να βρείτε έναν γενικό κανόνα που να περιγράφει τον αριθμό των αντικειμένων που σχηματίζουν το ν-οστό σχήμα στο κάθε μοτίβο (το σχήμα δηλαδή που θα βρίσκεται στη ν θέση).
- ✓ Να βρείτε πόσα αντικείμενα θα έχει το εκατοστό σχήμα στο κάθε μοτίβο.

Διερεύνηση (2)

Κάθε χρόνο το δημοτικό συμβούλιο οργανώνει έναν αγώνα ποδηλασίας, στον όποιο οι συμμετέχοντες πληρώνουν ένα ποσό για δικαίωμα συμμετοχής. Τα καθαρά έσοδα δίνονται για ενίσχυση του Κέντρου Ευημερίας του Δήμου. Ο δήμος προσφέρει στον καθένα μια φανέλα με τις υπογραφές γνωστών και αγαπημένων αθλητών της Κυπριακής Ολυμπιακής ομάδας.

- ✓ Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει τα καθαρά έσοδα από την εκδήλωση.
- ✓ Αν έχουν ήδη δηλώσει συμμετοχή ως τώρα 45 παιδιά και 50 ενήλικες, να υπολογίσετε πόσο θα είναι το κέρδος του δημοτικού συμβουλίου.
- ✓ Να υπολογίσετε τον ελάχιστο αριθμό ατόμων που πρέπει να συμμετάσχουν, ώστε το δημοτικό συμβούλιο να έχει κέρδος €2000.

Μαθαίνω

- Αν αντικαταστήσουμε σε μια αλγεβρική παράσταση τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, τότε το αποτέλεσμα που θα προκύψει, λέγεται **αριθμητική τιμή** της αλγεβρικής παράστασης.

  Παράδειγμα:
  Αν έχουμε την αλγεβρική παράσταση $5+3\alpha$ και δώσουμε στη μεταβλητή την τιμή $\alpha = 3$, τότε
  $$\begin{aligned} 5+3\alpha &= 5+3\cdot 3 \\ &= 5+9 \\ &= 14 \end{aligned}$$
  Ο αριθμός 14 ονομάζεται αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης.

Παραδείγματα

1. Για την αναδάσωση μιας περιοχής θα χρησιμοποιηθούν πεύκα και κυπαρίσσια. Κάποια δεκάρια θα καλυφθούν μόνο με πεύκα και κάποια μόνο με κυπαρίσσια. Σύμφωνα με τις οδηγίες του Τμήματος Δασών τα πεύκα πρέπει να φυτεύονται 120 σε κάθε δεκάριο, ενώ τα κυπαρίσσια να φυτεύονται 240 σε κάθε δεκάριο.
   (α) Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να δίνει τον συνολικό αριθμό των δενδρυλλίων που θα φυτευτούν, σε σχέση με τον αριθμό των δεκαρίων στα οποία θα γίνει η αναδάσωση.
   (β) Αν θα φυτευτούν 10 δεκάρια με πεύκα και 25 με κυπαρίσσια, να βρείτε πόσα συνολικά δενδρύλλια θα χρειαστούν.

Το δεκάριο είναι μονάδα μέτρησης επιφάνειας και ισούται με 1000 m^2.

Λύση:

(α) *Έστω ότι θα φυτευτούν:*
x δεκάρια με πεύκα
ψ δεκάρια με κυπαρίσσια

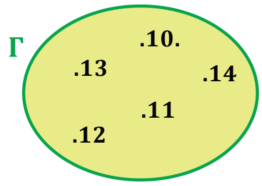
Άρα,
Ο αριθμός των πεύκων που θα χρειαστούν είναι: $120x$
Ο αριθμός των κυπαρισσιών που θα χρειαστούν είναι: 240ψ
Ο συνολικός αριθμός των δενδρυλλίων Σ είναι:

$$\Sigma = 120x + 240\psi$$

(β) *Αν θα φυτευτούν 10 δεκάρια με πεύκα και 25 με κυπαρίσσια, δηλαδή $x = 10$ και $\psi = 25$, τότε:*

$$\begin{aligned} \Sigma &= 120x + 240\psi \\ &= 120\cdot 10 + 240\cdot 25 \\ &= 1200 + 6000 \\ &= 7200 \end{aligned}$$

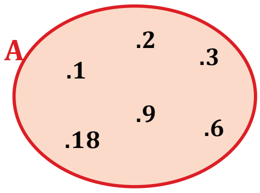
2. Δίνονται τα σύνολα:
$A = \{x \mid x \text{ διαιρέτης του } 18\}$
$B = \{6x \mid x \text{ μονοψήφιος φυσικός αριθμός}\}$



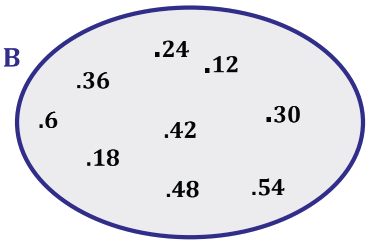
(α) Να αναπαραστήσετε με βέννειο διάγραμμα τα σύνολα A και B.
(β) Να γράψετε το σύνολο $Γ$ με τη χρήση μεταβλητής.

Λύση:

(α) *Για να αναπαραστήσουμε τα σύνολα με βέννειο διάγραμμα, πρέπει να γνωρίζουμε τα στοιχεία τους.*

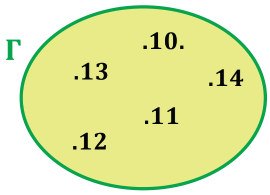


Στο σύνολο $A = \{x \mid x \text{ διαιρέτης του } 18\}$, *ανήκει κάθε φυσικός αριθμός* x *ο οποίος είναι διαιρέτης του 18.*
Άρα
$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$



Στο σύνολο B *ανήκουν οι φυσικοί αριθμοί που προκύπτουν, αν αντικαταστήσουμε στην παράσταση* $6x$, *τις τιμές* $1, 2, 3, \dots, 9$. *Άρα,*

$B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54\}$



(β) *Για να περιγράψουμε το σύνολο, πρέπει να βρούμε μια κοινή ιδιότητα που συνδέει τα στοιχεία του συνόλου* $Γ$.

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του συνόλου είναι οι διψήφιοι αριθμοί που είναι μικρότεροι του 15. Άρα, μπορούμε, για παράδειγμα, να ορίσουμε το σύνολο:
$Γ = \{ x \mid x \text{ διψήφιος μικρότερος του } 15\}$ *ή*
$Γ = \{ ν + 9 \mid ν \in \mathbb{N} \text{ με } ν < 6\}$

3. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των πιο κάτω αλγεβρικών παραστάσεων, αν $α = 1$, $β = 2$ και $γ = 3$:

$A = β + γ^2 \cdot α^5$ $\qquad$ $B = (β + γ)^2 \cdot α^5$

Λύση:

Αρχικά αντικαθιστούμε τις μεταβλητές με τις αντίστοιχες τιμές και ακολούθως εφαρμόζουμε τους κανόνες προτεραιότητας.

$$\begin{aligned} A = \beta + \gamma^2 \cdot \alpha^5 &= 2 + 3^2 \cdot 1^5 \\ &= 2 + 9 \cdot 1 \\ &= 2 + 9 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε αρχικά τις δυνάμεις, ακολούθως τον πολλαπλασιασμό και τέλος υπολογίζουμε την πρόσθεση.

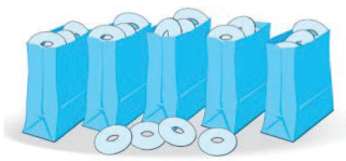
$$\begin{aligned} B = (\beta + \gamma)^2 \cdot \alpha^5 &= (2 + 3)^2 \cdot 1^5 \\ &= 5^2 \cdot 1^5 \\ &= 25 \cdot 1 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε αρχικά την πράξη στην παρένθεση, ακολούθως τις δυνάμεις και τέλος τον πολλαπλασιασμό.

Δραστηριότητες

1. Το ύψος ενός τριγώνου είναι κατά $3\,cm$ μεγαλύτερο από το μήκος της βάσης του.
   (α) Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου.
   (β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου, όταν:
      i. η βάση του είναι ίση με $8\,cm$,
      ii. το ύψος του είναι ίσο με $14\,cm$.

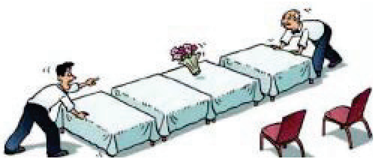
2. Αν $\alpha = 5$ και $\beta = 1$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
   (α) $(\alpha + \beta)^2$ (β) $2\alpha - \beta$
   (γ) $3(\alpha - \beta)$ (δ) $(3 + \alpha) \cdot (\beta - 1)$
   (ε) $\alpha^2 + \beta^2$ (στ) $2^\alpha - 3^\beta$



3. Η Νεφέλη τοποθέτησε σε καθεμιά από τις 5 σακούλες του σχήματος τον ίδιο αριθμό κουλουριών. Στο τέλος της περίσσεψαν 4 κουλούρια.
   (α) Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

Αριθμός κουλουριών σε κάθε σακούλα	8	10	13		
Συνολικός αριθμός κουλουριών				79	104

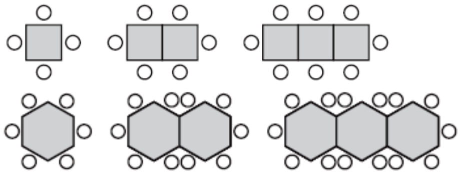
   (β) Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει τον συνολικό αριθμό των κουλουριών στις 5 σακούλες.

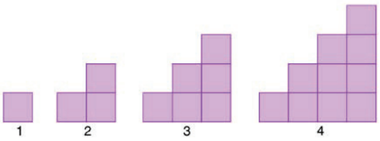


4. Να βρείτε πόσα άτομα θα καθίσουν, αν ενωθούν 10 τραπέζια όπως πιο κάτω:

(α)

(β)





5. Τα τετράγωνα με τα οποία κατασκευάζουμε τα σχήματα έχουν πλευρά ίση με $1\ cm$.
   (α) Να βρείτε την περίμετρο του $5^{ου}$ σχήματος και να εξηγήσετε τον τρόπο σκέψης σας.
   (β) Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει την περίμετρο οποιουδήποτε σχήματος.
   (γ) Ποιου σχήματος η περίμετρος θα είναι $128\ cm$;

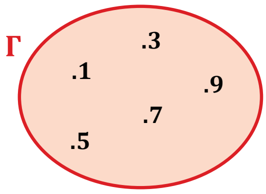
6. Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα πιο κάτω σύνολα:

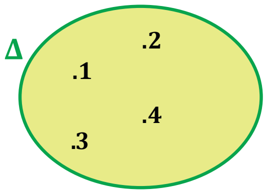
$A = \{5x \mid x \epsilon \mathbb{N}\}$ $\qquad$ $B = \left\{ \frac{\alpha}{2} \middle| \, \alpha \text{ είναι άρτιος φυσικός αριθμός} \right\}$

$\Gamma = \{\, 2\kappa + 3 \mid \kappa \text{ είναι μονοψήφιος περιττός αριθμός} \}$

7. Να γράψετε με περιγραφή (με τη χρήση μεταβλητής) τα σύνολα A, B, Γ και Δ.

$A = \{2, 4, 6, \dots\}$ $\qquad$ $B = \{2, 3, 4, \dots\}$





8. Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας χρεώνει €1 για πάγια χρέωση κάθε μήνα και επιπλέον $1\ \sigma\varepsilon\nu\tau$ για κάθε λεπτό ομιλίας και $2\ \sigma\varepsilon\nu\tau$ για κάθε μήνυμα που αποστέλλεται.
   (α) Να βρείτε την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει τη συνολική μηνιαία χρέωση.
   (β) Πόσα πρέπει να πληρώσει η Μαρίτα, αν μίλησε 77 λεπτά και έστειλε 90 μηνύματα αυτό τον μήνα;

Ισότητα – Ιδιότητες Ισοτήτων

Εξερεύνηση

Τα πρώτα νομίσματα κατασκευάστηκαν αρχικά από χαλκό και από σίδηρο. Επειδή τα δύο αυτά ορυκτά ήταν πρώτη ύλη για την κατασκευή όπλων, πολύ σύντομα τα νομίσματα άρχισαν να γίνονται από ασήμι και χρυσό, δύο άχρηστα για την κατασκευή των όπλων και διακοσμητικά μέταλλα.
Η αξία των δύο μετάλλων, όμως, με τα χρόνια έγινε τόσο μεγάλη, που οδήγησε πολλούς τυχοδιώκτες και παραχαράκτες να δημιουργήσουν εργαστήρια παραγωγής πλαστών χρυσών λιρών.

Τα πρώτα νομίσματα κόπηκαν στο βασίλειο της Λυδίας και στις ελληνικές πόλεις της Μικράς Ασίας, στην Ιωνία, στα τέλη του 7ου π.Χ. αιώνα.

Ένας χρυσοχόος έχει 9 νομίσματα, από τα οποία ένα είναι κάλπικο, με λιγότερο βάρος από τα άλλα. Έχει στη διάθεσή του μια ζυγαριά με δύο δίσκους.

- ✓ Να περιγράψετε διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να χρησιμοποιήσει τη ζυγαριά, για να εντοπίσει το κάλπικο νόμισμα.

Διερεύνηση

Να τοποθετήσετε βαρίδια στα δύο μέλη της ζυγαριάς, ώστε κάθε φορά να ισορροπεί.

- ✓ Μπορείτε να τοποθετήσετε:
    - οποιονδήποτε αριθμό βαριδίων
    - 4 βαρίδια
    - 7 βαρίδια
    - όλα τα βαρίδια

Η παράσταση Α ονομάζεται *Α΄ μέλος* ,ενώ η παράσταση Β ονομάζεται *Β΄ μέλος*.

Μαθαίνω

- Η έκφραση $A = B$ είναι μια **ισότητα**. Το A και το B είναι μαθηματικές παραστάσεις.

  Παραδείγματα:
  $4 \cdot 2 = 3 + 5$
  $2(x - 1) = 2x - 2$

- Μια ισότητα χαρακτηρίζεται ως:
  - **ΑΛΗΘΗΣ,** αν το πρώτο μέλος της ισότητας είναι ίσο με το δεύτερο μέλος της.
  - **ΨΕΥΔΗΣ,** αν το πρώτο μέλος της ισότητας δεν είναι ίσο με το δεύτερο μέλος της.

  Παραδείγματα:
  $4 \cdot 2 = 3 + 5$ *αληθής ισότητα*
  $4 \cdot 2 = 3 + 6$ *ψευδής ισότητα, δηλαδή* $4 \cdot 2 \neq 3 + 6$

Το σύμβολο $\Rightarrow$ το διαβάζουμε **«συμπεραίνουμε»** ή **«συνεπάγεται»** και σημαίνει ότι: Όταν είναι αληθής η πρώτη σχέση, τότε είναι αληθής και η δεύτερη σχέση. Το γράφουμε, για να δηλώσουμε ότι από την πρώτη σχέση προκύπτει η δεύτερη σχέση.

Ιδιότητες Ισοτήτων:

- Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ισότητας την ίδια παράσταση, προκύπτει μια νέα ισότητα.

  Δηλαδή: $\boldsymbol{\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma}$

  Παράδειγμα:
  Αν $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + 3 = \beta + 3$

- Αν αφαιρέσουμε και από τα δύο μέλη μιας ισότητας την ίδια παράσταση, προκύπτει μια νέα ισότητα.
  Δηλαδή: $\boldsymbol{\alpha = \beta \Rightarrow \alpha - \gamma = \beta - \gamma}$

  Παράδειγμα:
  Αν $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha - 5 = \beta - 5$

- Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη μιας ισότητας με την ίδια παράσταση, προκύπτει μια νέα ισότητα.

  Δηλαδή: $\boldsymbol{\alpha = \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma}$

  Παράδειγμα:
  Αν $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha \cdot 7 = \beta \cdot 7$

- Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ισότητας με την ίδια παράσταση (διάφορη του μηδενός), προκύπτει μια νέα ισότητα.

  Δηλαδή: $\boldsymbol{\alpha = \beta \Rightarrow \alpha : \gamma = \beta : \gamma,\ \gamma \neq 0}$

  Παράδειγμα:
  Αν $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha : 6 = \beta : 6$

Ισχύει και το αντίστροφο των τεσσάρων πιο πάνω ιδιοτήτων, το οποίο ονομάζεται σε κάθε περίπτωση και **Ιδιότητα της διαγραφής**.

Παράδειγμα:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν } \alpha=\beta \Rightarrow \alpha+3=\beta+3 \\ \text{Αντίστροφα,} \\ \text{Αν } \alpha+\cancel{3}=\beta+\cancel{3} \Rightarrow \alpha=\beta\end{array}\right\} \text{Άρα, } \alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+3=\beta+3$$

Άρα ισχύει:

$$\boldsymbol{\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma}$$

$$\boldsymbol{\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha-\gamma=\beta-\gamma}$$

$$\boldsymbol{\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma} \text{ με } \boldsymbol{\gamma\neq 0}$$

$$\boldsymbol{\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha:\gamma=\beta:\gamma} \text{ με } \boldsymbol{\gamma\neq 0}$$

Το σύμβολο $\Leftrightarrow$ το διαβάζουμε **«ισοδυναμεί με»** και σημαίνει ότι: Όταν η πρώτη σχέση είναι αληθής, τότε και η δεύτερη σχέση είναι αληθής, και αντίστροφα, δηλαδή, όταν είναι αληθής η δεύτερη σχέση, είναι αληθής και η πρώτη σχέση.

Παραδείγματα

1. Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των ισοτήτων, για να συμπληρώσετε τα κενά στις πιο κάτω ισοδυναμίες, όπου:

   (α) $\alpha:9=\beta:9 \quad \Leftrightarrow \beta=\cdots$

   (β) $25+\alpha=37+\beta \quad \Leftrightarrow \alpha=\cdots$

   (γ) $5\alpha=10\beta \quad \Leftrightarrow \alpha=\cdots$

Λύση:

(α) $\alpha:9=\beta:9$
$\Leftrightarrow \alpha:\cancel{9}=\beta:\cancel{9}$
$\Leftrightarrow \alpha=\beta$

Διαγράφουμε και από τα δύο μέλη τον διαιρέτη 9 (Ιδιότητα Διαγραφής στη διαίρεση).

(β) $25+\alpha=37+\beta$
$\Leftrightarrow \cancel{25}+\alpha=\cancel{25}+12+\beta$
$\Leftrightarrow \alpha=12+\beta$

Γράφουμε το 37 ως $25+12$ και διαγράφουμε τον προσθετέο 25 και από τα δύο μέλη (Ιδιότητα Διαγραφής στην πρόσθεση).

(γ) $5\alpha=10\beta$
$\Leftrightarrow 5\alpha=5\cdot 2\beta$
$\Leftrightarrow \cancel{5}\cdot\alpha=\cancel{5}\cdot 2\beta$
$\Leftrightarrow \alpha=2\beta$

Γράφουμε το 10 ως $5\cdot 2$ και διαγράφουμε τον παράγοντα 5 και από τα δύο μέλη (Ιδιότητα Διαγραφής στη διαίρεση).

2. Να δείξετε ότι $\alpha = \gamma$, αν $\alpha + \beta + 3 = \gamma + \beta + 3$.

Λύση:

$\alpha + \beta + \cancel{3} = \gamma + \beta + \cancel{3}$

$\Leftrightarrow \alpha + \cancel{\beta} = \gamma + \cancel{\beta}$

$\Leftrightarrow \alpha = \gamma$

Διαγράφουμε και από τα δύο μέλη της ισότητας τους ίδιους προσθετέους.

Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω ενέργειες διατηρούν μια ισότητα:
   (α) Πολλαπλασιάζω επί 2 τα δύο μέλη της ισότητας.
   (β) Αφαιρώ 2 από το Α΄ μέλος της ισότητας και προσθέτω 2 στο Β΄ μέλος της ισότητας.
   (γ) Αφαιρώ 1111 από το Α΄ μέλος της ισότητας και αφαιρώ 1111 από το Β΄ μέλος της ισότητας.
   (δ) Αφαιρώ 2 από το Α΄ μέλος της ισότητας και αφαιρώ 3 από το Β΄ μέλος της ισότητας.
   (ε) Διαιρώ με 2 το Α΄ μέλος και πολλαπλασιάζω με 2 το Β΄ μέλος της ισότητας.

2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω ισοδυναμίες, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	Αν	$\alpha + 8 = \beta - 8$	$\Leftrightarrow \alpha = \beta$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν	$\alpha - 3 = \beta - 3$	$\Leftrightarrow \alpha = \beta$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν	$\alpha + 4 = \beta + 7$	$\Leftrightarrow \alpha = \beta + 3$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν	$\alpha : 12 = \beta \cdot 12$	$\Leftrightarrow \alpha = \beta$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Αν	$6\alpha = 24\beta$ και $\alpha, \beta \neq 0$	$\Leftrightarrow \alpha = \beta$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

3. Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των ισοτήτων, για να συμπληρώσετε τα κενά στις πιο κάτω ισοδυναμίες, όπου:

   (α) $\alpha + 2 = 11 + \beta \quad \Leftrightarrow \alpha = \cdots$

   (β) $x - 5 = y - 5 \quad \Leftrightarrow x = \cdots$

   (γ) $7x = 28y \quad \Leftrightarrow x = \cdots$

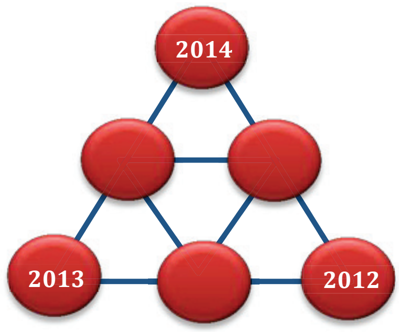
   (δ) $25 + \beta = 38 + \gamma \quad \Leftrightarrow \beta = \cdots$

   (ε) $x : 11 = \omega : 11 \quad \Leftrightarrow \cdots = \omega$

4. Ο Αντρέας και ο Βασίλης έχουν υπολογίσει το άθροισμα των βαθμών που συγκέντρωσαν στα τρία διαγωνίσματα του τετραμήνου. Ξέρουμε ότι συγκέντρωσαν την ίδια βαθμολογία.
   (α) Για τη βαθμολογία του τετραμήνου, η καθηγήτρια αποφάσισε να μη μετρήσει το διαγώνισμα με τον πιο χαμηλό βαθμό. Για τον Ανδρέα και τον Βασίλη θα αφαιρεθεί το τελευταίο διαγώνισμα, στο οποίο έχουν πάρει και οι δύο 12 από τα 20. Ποιος θα έχει τη ψηλότερη βαθμολογία, αθροίζοντας μόνο τα 2 διαγωνίσματα;
   (β) Ο Ανδρέας και ο Βασίλης θέλουν να βρουν τον μέσο όρο της βαθμολογίας τους για αυτό το τετράμηνο. Για να υπολογίσουμε τον μέσο όρο, αθροίζουμε τους βαθμούς και διαιρούμε με το πλήθος των διαγωνισμάτων. Να εξετάσετε ποιος θα έχει τον ψηλότερο μέσο όρο βαθμολογίας.

5. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι πιο κάτω προτάσεις:
   (α) Αν $\alpha + 5 + \beta = \gamma + \beta + 5$, τότε $\alpha = \gamma$
   (β) Αν $2\alpha + 3\beta + 7 = 2\alpha + 3\gamma + 7$, τότε $\beta = \gamma$
   (γ) Αν $\alpha\beta + 8 = \alpha\gamma + 8$ και $\alpha \neq 0$, τότε $\beta = \gamma$

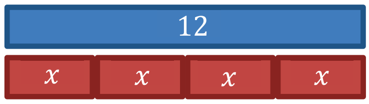
6. Να τοποθετήσετε κατάλληλους αριθμούς στους τρεις κύκλους, ώστε το άθροισμα των αριθμών στις κορυφές κάθε τριγώνου να είναι πάντοτε το ίδιο.



Η έννοια της Εξίσωσης

Διερεύνηση (1)

Τοποθετούμε 4 κόκκινα ίδια πλακίδια στη σειρά και παρατηρούμε ότι έχουν το ίδιο μήκος με ένα μπλε πλακίδιο μήκους 12 $\mu o \nu \acute{\alpha} \delta \omega \nu$ (μ), όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

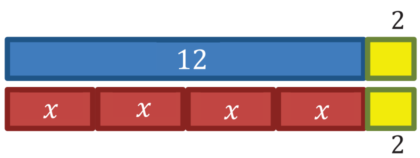


Δηλαδή, $4x = 12$

✓ Να βρείτε το μήκος του καθενός από τα κόκκινα πλακίδια.

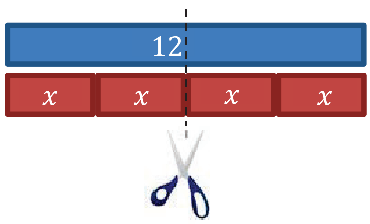
Με βάση το πιο πάνω μοντέλο, να γράψετε συμβολικά τη σχέση που εκφράζει το καθένα από τα πιο κάτω σχήματα και να βρείτε το μήκος του καθενός από τα κόκκινα πλακίδια στην κάθε περίπτωση.

(α)



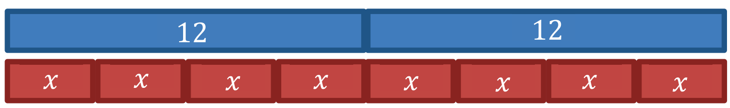
Συμβολικά: $4x + 2 = \cdots$

(β)



Συμβολικά:

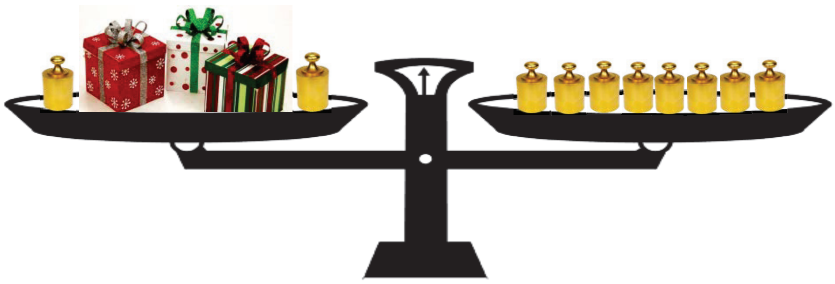
(γ)



Συμβολικά:

Διερεύνηση (2)

Αν η ζυγαριά ισορροπεί και όλα τα πακέτα έχουν την ίδια μάζα, να βρείτε πόσο ζυγίζει κάθε πακέτο. Να επεξηγήσετε τον τρόπο που εργαστήκατε και να παραστήσετε αλγεβρικά τη διαδικασία λύσης.



Μαθαίνω

- **Εξίσωση** είναι μια ισότητα που περιέχει τουλάχιστον μία **μεταβλητή**. Η μεταβλητή της εξίσωσης ονομάζεται και **άγνωστος** της εξίσωσης.

- Αν αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή μιας εξίσωσης με έναν αριθμό, και προκύπτει αληθής ισότητα, τότε λέμε ότι ο αριθμός αυτός **επαληθεύει** την εξίσωση. Ο αριθμός που επαληθεύει την εξίσωση λέγεται **λύση ή ρίζα** της εξίσωσης.

  Παράδειγμα:
  $x = 2$ *είναι λύση της εξίσωσης* $4x + 3 = 11$,
  επειδή $4 \cdot 2 + 3 = 11$
  $11 = 11$

- **Επίλυση εξίσωσης** είναι η διαδικασία που εφαρμόζουμε, για να βρούμε τη λύση της εξίσωσης.

Στην Α′ Γυμνασίου θα ασχοληθούμε με εξισώσεις που περιέχουν μόνο μία μεταβλητή. Σε επόμενες τάξεις θα ασχοληθούμε και με εξισώσεις που περιέχουν περισσότερες από μια μεταβλητές.

Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε κατά πόσο οι αριθμοί 9 και 8 είναι λύσεις της εξίσωσης $x + 12 = 20$.

Λύση:

$x + 12 = 20$

$9 + 12 = 20$

$21 = 20$

*Αντικαθιστούμε το x με τον αριθμό 9. Παρατηρούμε ότι η ισότητα είναι **ψευδής**.*
*Άρα, ο αριθμός 9 **δεν είναι λύση** της εξίσωσης $x + 12 = 20$.*

$x + 12 = 20$

$8 + 12 = 20$

$20 = 20$

*Αντικαθιστούμε το x με τον αριθμό 8. Παρατηρούμε ότι η ισότητα είναι **αληθής**. Άρα, ο αριθμός 8 **είναι λύση** της εξίσωσης $x + 12 = 20$.*

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\alpha - 25 = 30$ (β) $8x = 848$

(γ) $26 - \omega = 12$

Λύση:

Για να λύσουμε μια εξίσωση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις Ιδιότητες της διαγραφής ή τις Ιδιότητες των πράξεων.

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες των πράξεων:

$\alpha + \beta = \gamma \iff \alpha = \gamma - \beta$

$\alpha - \beta = \gamma \iff \alpha = \gamma + \beta$ ή $\beta = \alpha - \gamma$

$\alpha \cdot \beta = \gamma \iff \alpha = \gamma : \beta$

$\alpha : \beta = \gamma \iff \alpha = \gamma \cdot \beta$ ή $\beta = \alpha : \gamma$

(α) $\alpha - 25 = 30$

$\iff \alpha - \cancel{25} = 55 - \cancel{25}$

$\iff \alpha = 55$

Γράφουμε το 30 ως διαφορά $55 - 25$ και διαγράφουμε τον αφαιρετέο 25 και από τα δύο μέλη της εξίσωσης.

(β) $8x = 848$

$\iff \frac{8x}{\mathbf{8}} = \frac{848}{\mathbf{8}}$

$\iff x = 106$

Για να βρούμε την τιμή του αγνώστου, διαιρούμε και τα δύο μέλη με τον γνωστό παράγοντα.

(γ) $26 - \omega = 12$

$\iff \omega = 26 - 12$

$\iff \omega = 14$

Για να βρούμε τον άγνωστο, ο οποίος είναι ο αφαιρετέος, αφαιρούμε από τον μειωτέο τη διαφορά

$(M - A = \Delta \iff A = M - \Delta)$.

3. Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

(α) $2(x + 3) = 18$ (β) $24 : (y + 1) = 4$

(α) $2(x+3)=18$

Α΄ τρόπος:

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των ισοτήτων:

$2(x+3)=18$

$\Leftrightarrow \cancel{2}\cdot(x+3)=9\cdot\cancel{2}$

$\Leftrightarrow x+3=9$

$\Leftrightarrow x+\cancel{3}=6+\cancel{3}$

$\Leftrightarrow x=6$

Β΄ τρόπος:

Εφαρμόζουμε αρχικά την επιμεριστική ιδιότητα και ακολούθως τις ιδιότητες των ισοτήτων.

$2(x+3)=18$

$\Leftrightarrow 2x+6=18$

$\Leftrightarrow 2x+6=12+6$

$\Leftrightarrow 2x+\cancel{6}=12+\cancel{6}$

$\Leftrightarrow 2x=12$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x}{2}=\dfrac{12}{2}$

$\Leftrightarrow x=6$

Μπορούμε, επίσης, να εφαρμόσουμε και συνδυασμό των τρόπων που παρουσιάστηκαν.

(β) $24:(y+1)=4$

$\Leftrightarrow y+1=24:4$

$\Leftrightarrow y+1=6$

$\Leftrightarrow y=6-1$

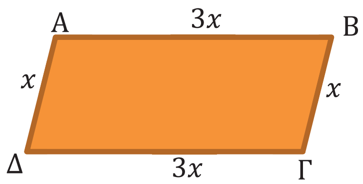
$\Leftrightarrow y=5$

Για να βρούμε τον διαιρέτη $(y+1)$ *διαιρούμε τον διαιρετέο* (24) *διά το πηλίκο, δηλαδή το* (4).
$(Δ:δ=Π \;\Leftrightarrow\; δ=Δ:π)$
Για να βρούμε τον ένα προσθετέο, αφαιρούμε από το άθροισμα (6) *τον γνωστό προσθετέο* 1.

4. Ένα παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο ίση με $32\,cm$. Να υπολογίσετε το μήκος της κάθε πλευράς του, αν η μια πλευρά είναι τριπλάσια από την άλλη.

Λύση:

Έστω x *το μήκος της μιας πλευράς του, τότε το μήκος της άλλης πλευράς του θα είναι* $3x$.



Άρα,

$ΒΓ=ΑΔ=x \quad και \quad ΑΒ=ΓΔ=3x$

$Π=ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ=32$

$3x+x+3x+x=32$

$\Leftrightarrow 8x=32$

$\Leftrightarrow x=32:8$

$\Leftrightarrow x=4$

Άρα, το μήκος των πλευρών του παραλληλογράμμου είναι: $ΒΓ=ΑΔ=4\,cm$

$ΑΒ=ΓΔ=3\cdot 4=12\,cm$

Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε κατά πόσο οι αριθμοί 10 και 11 είναι λύσεις της εξίσωσης $2x + 30 = 52$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α)	$\psi + 25 = 32$	(β)	$4\gamma = 120$
(γ)	$18 + \omega = 33$	(δ)	$80 - x = 16$
(ε)	$\mu : 25 = 125$	(στ)	$25 + \delta = 535$
(ζ)	$x - 12 = 45$	(η)	$24x = 120$
(θ)	$100 : \alpha = 20$	(ι)	$\omega : 5 = 3$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α)	$\psi + \psi + \psi = 33$	(β)	$2\alpha + 3\alpha = 35$
(γ)	$2\kappa + 6\kappa = 24$	(δ)	$2\alpha + 12 = 24$
(ε)	$3\,(\alpha + 2) = 15$	(στ)	$5(x - 10) = 75$
(ζ)	$\beta + 3 + \beta = 33$	(η)	$72 : (\alpha + 5) = 8$

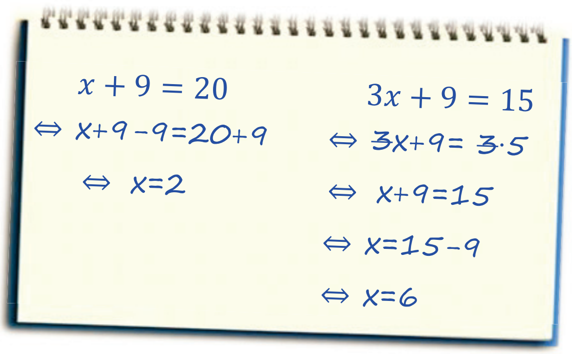
4. Να αντιστοιχίσετε την κάθε εξίσωση με την ισοδύναμή της:

Εξίσωση	Λύση
$\alpha + x = \beta$	$x = \beta \cdot \alpha$
$x - \alpha = \beta$	$x = \beta : \alpha$
$\alpha - x = \beta$	$x = \beta - \alpha$
$\alpha \cdot x = \beta$	$x = \beta + \alpha$
$x : \alpha = \beta$	$x = \alpha : \beta$
$\alpha : x = \beta$	$x = \alpha - \beta$

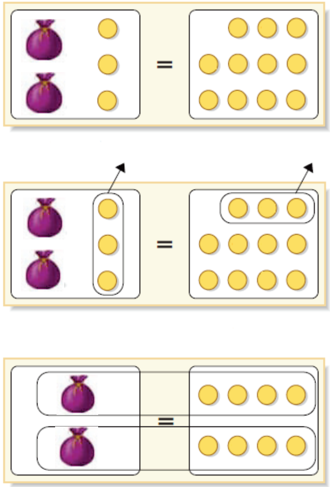
Δυο εξισώσεις, που έχουν την ίδια λύση, ονομάζονται **ισοδύναμες.**

5. Να γράψετε πέντε διαφορετικές εξισώσεις που να έχουν ως λύση τον αριθμό 10.

6. Να εξετάσετε την ορθότητα των λύσεων που έδωσε ο Παύλος στις εξισώσεις:

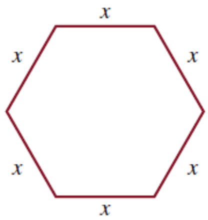


7. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η επίλυση μιας εξίσωσης.
   (α) Ποια είναι η εξίσωση;
   (β) Να περιγράψετε τη διαδικασία επίλυσης με βάση το μοντέλο.



<u>Να επιλύσετε τα πιο κάτω προβλήματα με τη χρήση ΕΞΙΣΩΣΗΣ:</u>

8. Μια πλατεία έχει σχήμα εξαγώνου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η περίμετρός της είναι ίση με $132\ m$. Να υπολογίσετε το μήκος της κάθε πλευράς της.



9. Ο Αντώνης μοίρασε τα χρήματά του εξίσου στα 4 παιδιά του. Πόσα χρήματα είχε, αν έδωσε στο κάθε παιδί €3420;

10. Το εμβαδόν ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου είναι $200\ m^2$. Να βρεθεί το πλάτος του, αν το μήκος του είναι $20\ m$.

11. Η Αλίκη κρατούσε €63 και αγόρασε 5 ίδια δώρα για τις φίλες της. Να βρείτε πόσα κόστισε το κάθε δώρο, αν της περίσσεψαν €3.

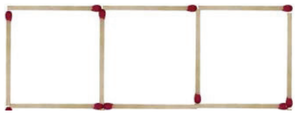
12. Να βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου που έχει περίμετρο $36\ cm$, αν γνωρίζουμε ότι η μια διάσταση είναι διπλάσια της άλλης.

13. Το άθροισμα δύο διαδοχικών άρτιων αριθμών είναι 30. Ποιοι είναι οι αριθμοί αυτοί;

14. Ένα κουτί μαζί με το περιεχόμενό του ζυγίζει $10\ kg$. Το περιεχόμενο είναι βαρύτερο κατά $6\ kg$ από το κουτί. Να βρείτε πόσο ζυγίζει το κουτί και πόσο το περιεχόμενό του.

15. Ο Γιώργος διάβασε ένα βιβλίο 120 σελίδων σε 3 μέρες. Κάθε μέρα διάβαζε 10 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Πόσες σελίδες διάβασε την πρώτη μέρα;

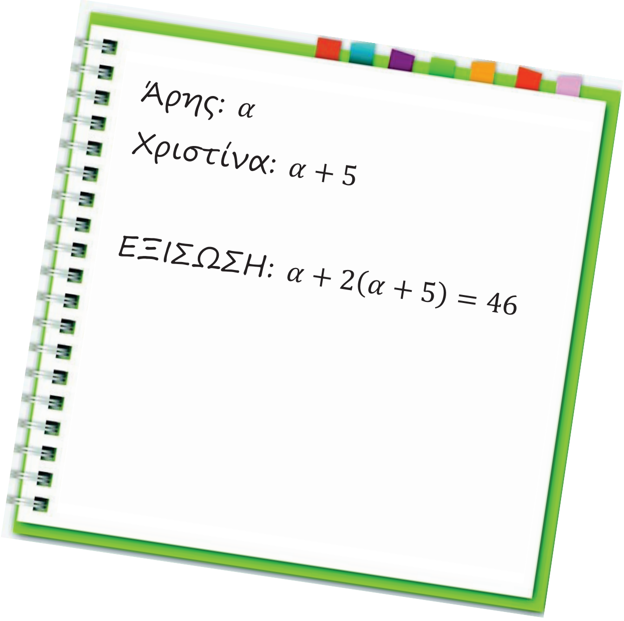
16. Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ η πλευρά $ΑΒ$ είναι $7\,cm$ μεγαλύτερη από την $ΒΓ$ και η $ΑΓ$ είναι κατά $8\,cm$ μεγαλύτερη από την $ΒΓ$. Να υπολογίσετε το μήκος της κάθε πλευράς, αν η περίμετρος του τριγώνου είναι $30\,cm$.



17. Με 10 σπίρτα μπορώ να κατασκευάσω 3 τετράγωνα στη σειρά, όπως φαίνεται δίπλα:
    (α) Πόσα τετράγωνα στη σειρά μπορώ να φτιάξω, με 73 σπίρτα;
    (β) Να εξετάσετε αν με 8354 σπίρτα μπορώ να κατασκευάσω τετράγωνα στη σειρά όπως δίπλα, χωρίς να μου περισσέψουν σπίρτα.

18. Ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ έχει πλάτος $5\,cm$ και περίμετρο $14\,cm$. Το ορθογώνιο είναι ισεμβαδικό (έχει το ίδιο εμβαδόν) με τρίγωνο $ΕΖΗ$. Να βρείτε το μήκος της βάσης του τριγώνου $ΕΖΗ$, αν το ύψος του είναι $2\,cm$.

19. Ποιο πρόβλημα μπορεί να διάβασε η Αννίτα, αν ξεκίνησε να το λύει ως εξής:



Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να εξετάσετε κατά πόσο ο αριθμός 2 είναι λύση της εξίσωσης $3x + 4 \ = \ 14$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $40 + \alpha = \ 124$	(β) $5\psi = 120$
(γ) $40 - x = 12$	(δ) $\omega : 5 = 22$
(ε) $2a - 12 = 36$	(στ) $15 + 2\omega = 37$
(ζ) $2(3 + x) = 16$	(η) $(5\beta + 3) : 12 = 4$

3. Να τοποθετήσετε τα κατάλληλα σύμβολα >, =, <, ώστε να προκύπτουν αληθείς σχέσεις:

(α) 2^2 … 4^1	(β) 12^2 … 5^3
(γ) 123^0 … 1^{12}	(δ) 4^2 … 2^4
(ε) 5^2 … 2^5	(στ) 4^2 … 1234^0

4. Να γράψετε τους πιο κάτω αριθμούς ως δύναμη με δύο διαφορετικούς τρόπους:

(α) 81	(β) 1000	(γ) 27
(δ) 36	(ε) 144	(στ) 16

5. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) 122^1	(β) $(12 - 12)^3$
(γ) $(2 + 4)^2$	(δ) $3^2 + 2^4 : 4^1$
(ε) $(4 + 2 - 1)^0$	(στ) $2^3 + 3^2 : (2 - 1)^2$
(ζ) $5^2 - (2^2 + 1) : 4^0$	(η) $5^3 - 2 \cdot 3^2 + 7^0 \cdot 3^3$

6. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων, αν $x = 2$ και $\psi = 5$:

   $A = x + 3\psi$ $\qquad$ $B = (\psi - x)^3$

   $\Gamma = 2x + 3\psi^0$

7. Να μετατρέψετε τους πιο κάτω αριθμούς του δυαδικού συστήματος στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης:

(α) 11	(β) 110
(γ) 1111	(δ) 10010

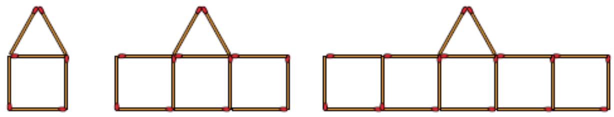
8. Να μετατρέψετε τους πιο κάτω αριθμούς του δεκαδικού συστήματος στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης:

   (α) 7 (β) 18

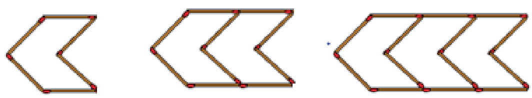
   (γ) 117 (δ) 181

9. Να βρείτε έναν τρόπο, για να περιγράψετε τον αριθμό των σπίρτων που χρειάζονται για την κατασκευή του κάθε σχήματος στα πιο κάτω μοτίβα:

   (α)



   (β)



10. Αν ο x είναι άρτιος φυσικός αριθμός, τότε:

   (α) *Ο επόμενος φυσικός αριθμός είναι:*

   Α. $x+1$ Β. $x-1$ Γ. $x+2$ Δ. $x-2$

   (β) *Ο προηγούμενος περιττός αριθμός είναι:*

   Α. $x+2$ Β. $x-2$ Γ. $x+1$ Δ. $x-1$

   (γ) *Ο επόμενος άρτιος φυσικός αριθμός είναι:*

   Α. $x-1$ Β. $x+1$ Γ. $x-2$ Δ. $x+2$

   (δ) *Ο προηγούμενος άρτιος φυσικός αριθμός είναι:*

   Α. $x-1$ Β. $x-2$ Γ. $x+1$ Δ. $x+2$

11. Ένα χωριό K έχει x κατοίκους. Να εκφράσετε συμβολικά τις πιο κάτω προτάσεις:

   (α) Το χωριό Π έχει 600 κατοίκους περισσότερους από το χωριό K.

   (β) Το χωριό Λ έχει τα $\frac{4}{5}$ των κατοίκων του χωριού Π.

   (γ) Πόσοι είναι οι κάτοικοι και των τριών χωριών K, Π και Λ; Να γράψετε την παράσταση στην πιο απλή μορφή.

12. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω προτάσεις σε μαθηματικές εκφράσεις:

   (α) *Από έναν αριθμό αφαιρούμε* 6 *και βρίσκουμε* 11.

   (β) *Το τετραπλάσιο ενός αριθμού είναι ίσο με* 20.

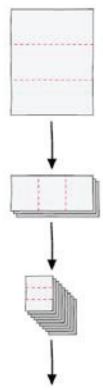
   (γ) *Αν σε έναν αριθμό προσθέσουμε* 5*, το άθροισμα γίνεται* 8.

   (δ) *Αν ελαττώσουμε έναν αριθμό κατά* 7*, βρίσκουμε* 12.

   (ε) *Το εξαπλάσιο ενός αριθμού είναι* 54.

   (στ) *Το τετραπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά* 2*, μάς δίνει* 26.

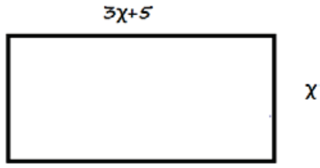
13. Κόβουμε ένα χαρτί σε τρία ίσα μέρη κατά μήκος των διακεκομμένων γραμμών. Ακολούθως, κόβουμε με τον ίδιο τρόπο καθένα από τα κομμάτια που προέκυψαν κ.ο.κ. Να περιγράψετε έναν τρόπο, για να υπολογίσετε τον αριθμό των κομματιών που προκύπτουν σε κάθε φάση αυτής της διαδικασίας.



14. Η ηλικία της Μαρίνας είναι τριπλάσια από την ηλικία της Εβελίνας. Το άθροισμα των ηλικιών τους είναι 48. Ποια είναι η ηλικία της καθεμιάς;

15. Ανοίγουμε στην τύχη ένα βιβλίο και το άθροισμα των αριθμών των δύο σελίδων που βλέπουμε είναι 389. Να βρείτε σε ποιες σελίδες ανοίξαμε το βιβλίο.

16. Να γράψετε ένα πρόβλημα που να περιγράφει την εξίσωση: ΕΞΙΣΩΣΗ: $3\chi + 5 + \chi + 3\chi + 5 + \chi = 42$



17. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς οι οποίοι έχουν άθροισμα 729.

18. Ένα τετράγωνο έχει το ίδιο εμβαδόν με ένα τρίγωνο. Αν η βάση του τριγώνου είναι $8\ cm$ και το αντίστοιχο της ύψος είναι $4\ cm$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου, την πλευρά του τετραγώνου και την περίμετρο του τετραγώνου.

19. Αν $x + \psi = 25$ και $\psi + \omega = 15$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
$A = x + 37 + \psi + 5 - (14 + \psi + 12 + \omega)$
$B = x + 2\psi + \omega$

20. Ο Απόστολος και δύο φίλοι του πήγαν στο παγοδρόμιο. Η είσοδος στο παγοδρόμιο είναι €5 το άτομο. Ο Απόστολος πήρε μαζί του τα δικά του πατίνια και οι φίλοι του ενοικίασαν πατίνια από το παγοδρόμιο. Αν πλήρωσαν συνολικά €23 για είσοδο και πατίνια, πόσο είναι το ενοίκιο για κάθε ζευγάρι πατίνια;

21. Ένας τετραψήφιος αριθμός του δυαδικού συστήματος έχει δύο μηδενικά και δύο μονάδες.
   (α) Να βρείτε όλους τους πιθανούς αριθμούς.
   (β) Να μετατρέψετε τους αριθμούς αυτούς στο δεκαδικό σύστημα.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Μια ομάδα από 8 κατασκηνωτές, ύστερα από μια νυχτερινή πορεία, φτάνουν σε μια ξύλινη γέφυρα. Για να διασχίσουν τη γέφυρα με ασφάλεια, οι κατασκηνωτές πρέπει να έχουν μαζί τους φακό.
   Η αντοχή της γέφυρας επιτρέπει στους πιο κάτω συνδυασμούς ατόμων να περάσουν:
   - ✓ ένας ενήλικας
   - ✓ ένα παιδί
   - ✓ δύο παιδιά.

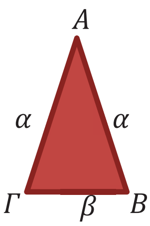
   (α) Να χρησιμοποιήσετε τις πιο πάνω πληροφορίες, για να βρείτε πόσες διαδρομές χρειάζεται να γίνουν για να περάσει μια ομάδα (6 ενήλικες – 2 παιδιά), αν γνωρίζετε ότι διαθέτουν έναν μόνο φακό.

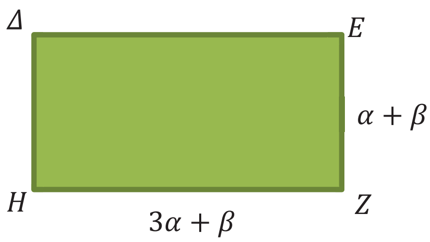
   (β) Να βρείτε τον μικρότερο αριθμό διαδρομών που χρειάζονται για μια ομάδα με δύο παιδιά και οποιονδήποτε αριθμό ενηλίκων.

2. Να ερμηνεύσετε την πιο κάτω διαδικασία.
   Σκέψου έναν αριθμό.
   - *Πολλαπλασίασε τον αριθμό που σκέφτηκες με το* 2.
   - *Πρόσθεσε* 10 *στο αποτέλεσμα που βρήκες.*
   - *Διαίρεσε τον αριθμό που βρήκες με το* 2.
   - *Αφαίρεσε τον αριθμό που σκέφτηκες στην αρχή.*
   - *Αφαίρεσε* 1 *από το αποτέλεσμα.*
   - *Αντιστοίχισε τον αριθμό που βρήκες με το αντίστοιχο γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου.*
   - *Σκέψου μια ευρωπαϊκή χώρα που να ξεκινά από αυτό το γράμμα.*

   Ποια χώρα έχεις σκεφτεί;

3. Η περίμετρος του ορθογωνίου $ΔΕΖΗ$ είναι ίση με $56\,cm$. Να υπολογίσετε την περίμετρο του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$.





4. Να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:
   (α) Ο αριθμός 192 είναι γραμμένος στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Σε ποιο σύστημα αρίθμησης γράφεται ως 3000;
   (β) Να μετατρέψετε τους αριθμούς 12, 123, 724, $5\,534$, από το δεκαδικό, στο δυαδικό και στο οκταδικό σύστημα αρίθμησης.
   (γ) Να εξετάσετε την ορθότητα των πιο κάτω προτάσεων:
      i. $7_{(8)} = 7_{(11)}$
      ii. $30_{(4)} = 30_{10}$
   (δ) Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο ψηφίο, ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες:
      i. $\dots_{(12)} = 1050_{(10)}$ ii. $9_{(\dots..)} = 9_{(\dots\dots)}$

5. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης (χωρίς μετατροπή του αριθμού στο δεκαδικό σύστημα):
   (α) $11101101_{(2)} + 1001_{(2)}$
   (β) $10110101_{(2)} - 10110_{(2)}$
   (γ) $1010_{(2)} \cdot 1010_{(2)}$

6. Να μελετήσετε, να παρουσιάσετε και να συγκρίνετε το αριθμητικό σύστημα των Μάγια με το αριθμητικό σύστημα των Βαβυλωνίων – Σουμερίων.

   (α) Να γράψετε τρεις αριθμούς με τα σύμβολα των Μάγια και των Βαβυλωνίων.
   (β) Να εξηγήσετε τις δυσκολίες που παρουσιάζονταν και οδήγησαν στην ανάγκη καθιέρωσης του δεκαδικού συστήματος.

7. Σύμφωνα με έναν Ινδικό μύθο, όταν ο Θεός έφτιαξε τον κόσμο, τοποθέτησε σε έναν Ινδουιστικό ναό στην πόλη Μπεναρές της Ινδίας, έναν πύργο από 64 χρυσούς δίσκους. Οι δίσκοι είχαν όλοι διαφορετικό μέγεθος και ήταν τοποθετημένοι σε μια στήλη, από τον μεγαλύτερο στο κάτω μέρος, στον μικρότερο στην κορυφή. Ο Θεός, σύμφωνα με τον μύθο, κάλεσε τους ιερείς να μεταφέρουν τους δίσκους από το ένα μέρος του ναού σε ένα άλλο. Λόγω της ευθραυστότητας των δίσκων δεν επιτρεπόταν να τοποθετηθεί μεγαλύτερος δίσκος πάνω σε μικρότερο και υπήρχε μόνο ένα ενδιάμεσο μέρος όπου μπορούσαν να τοποθετηθούν προσωρινά οι δίσκοι. Ο χρόνος, που θα χρειάζονταν οι ιερείς να μετακινήσουν τους δίσκους, θα ήταν όσο όρισε ο θεός να ζήσει ο κόσμος στη Γη. Τελειώνοντας οι ιερείς το έργο, ο ναός θα γίνει σκόνη και όλος ο κόσμος θα έχει εξαφανιστεί. Αν παράκουαν, ο κόσμος αμέσως θα καταστρεφόταν.

(α) Γιατί, ακόμη και σήμερα, μετά από περίπου 4,5 χιλιάδες εκατομμύρια χρόνια από τη δημιουργία της Γης, οι Ινδοί είναι σίγουροι ότι το τέλος του κόσμου είναι μακριά;

(β) Ο πύργος του Hanoi είναι ένα παιχνίδι που εφευρέθηκε το 1883 από τον Γάλλο μαθηματικό Edouard Lucas, εμπνευσμένος από τον πιο πάνω μύθο. Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «A_En2_Hanoi.ggb» για να υπολογίσετε ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός κινήσεων που χρειάζονται, για να μετακινηθούν $2, 3, 4, \ldots, x, \ldots, 64$ δίσκοι. Να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας σε έναν πίνακα.

Εάν ο μύθος ήταν αληθινός και αν οι ιερείς ήταν σε θέση να μετακινήσουν τους δίσκους με ρυθμό ένα δίσκο ανά δευτερόλεπτο, θα χρειάζονταν 18 446 744 073 709 551 615 κινήσεις ή κατά προσέγγιση 580 χιλιάδες εκατομμύρια έτη.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Διαιρετότητα

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε και να εφαρμόζουμε την Ευκλείδεια Διαίρεση.
- Να ορίζουμε την τέλεια διαίρεση στους φυσικούς αριθμούς.
- Να εφαρμόζουμε τις έννοιες και τις ιδιότητες των διαιρετών και των πολλαπλασίων ενός αριθμού στην επίλυση προβλημάτων.
- Να διατυπώνουμε, να αποδεικνύουμε και να εφαρμόζουμε τις ιδιότητες της διαιρετότητας και τα κριτήρια διαιρετότητας.
- Να ορίζουμε τους πρώτους, τους σύνθετους αριθμούς και τους σχετικά πρώτους αριθμούς.
- Να αναλύουμε έναν σύνθετο αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
- Να ορίζουμε, να αποδεικνύουμε και να εφαρμόζουμε τις ιδιότητές του $ΜΚΔ$ και του $ΕΚΠ$ των φυσικών αριθμών.
- Να διερευνούμε και να εφαρμόζουμε έννοιες από τη θεωρία αριθμών στην επίλυση προβλημάτων.

Έχουμε μάθει …

- Το σύνολο των Φυσικών Αριθμών είναι $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- Το σύνολο των Φυσικών Αριθμών συμπεριλαμβανομένου και του μηδενός είναι $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- Το σύνολο των άρτιων φυσικών αριθμών είναι: $\{2, 4, 6, \dots\}$
- Το σύνολο των περιττών αριθμών είναι: $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$
- Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού είναι όλοι οι φυσικοί αριθμοί οι οποίοι τον διαιρούν.

  Παράδειγμα:

  Οι διαιρέτες του 16 είναι: $\Delta_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$
- Πολλαπλάσια ενός αριθμού είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του με όλους τους φυσικούς αριθμούς και το μηδέν.

  Παράδειγμα:

  Τα πολλαπλάσια του 6 είναι: $\Pi_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, \dots\}$
- Το άθροισμα και το γινόμενο δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών είναι πάντα φυσικός αριθμός.
- Η διαφορά δύο φυσικών αριθμών είναι φυσικός αριθμός, όταν ο μειωτέος είναι μεγαλύτερος από τον αφαιρετέο.
- Το πηλίκο δύο φυσικών αριθμών είναι φυσικός αριθμός, όταν ο διαιρετέος είναι πολλαπλάσιο του διαιρέτη.

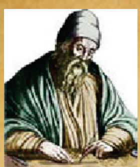
Ευκλείδεια Διαίρεση

Εξερεύνηση

Το ημερολόγιο είναι ένα σύστημα μέτρησης του χρόνου σε ημέρες, μήνες και έτη.

Το σύγχρονο ημερολόγιο στηρίζεται σε δύο βασικές μονάδες: την ημέρα, το χρονικό διάστημα δηλαδή μιας πλήρους περιστροφής της γης γύρω από τον εαυτό της, και το ηλιακό έτος, το χρονικό διάστημα μιας πλήρους περιστροφής της γης γύρω από τον ήλιο. Η ημέρα διαρκεί 24 ώρες και το έτος περίπου 365 ημέρες. Η ημέρα και το έτος είναι ιδιαίτερα σημαντικά, γιατί προσδιορίζουν αφενός το χρονικό διάστημα μιας πλήρους εναλλαγής ημέρας-νύχτας και αφετέρου το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο ολοκληρώνεται ένας κύκλος εποχών.

✓ Να μελετήσετε το ημερολόγιο και να βρείτε τι μέρα θα έχουμε ύστερα από 245 ημέρες από σήμερα και τι μέρα θα έχουμε ύστερα από 400 ημέρες από σήμερα.



Ο Ευκλείδης ($323\ \pi.X. - 283\ \pi.X.$) θεωρείται ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της αρχαιότητας. Στις μέρες μας είναι γνωστός ως ο «πατέρας» της Γεωμετρίας. Ο Ευκλείδης οργάνωσε και συστηματοποίησε όλη τη μαθηματική γνώση της εποχής του, σε 13 βιβλία με το όνομα Στοιχεία.

Κάποια από τα βιβλία του είναι αφιερωμένα στη Θεωρία Αριθμών και περιλαμβάνουν θέματα διαιρετότητας αριθμών. Τα «Στοιχεία» αποτελούν το σπουδαιότερο έργο των αρχαιοελληνικών μαθηματικών και υπήρξαν το βασικό εγχειρίδιο γεωμετρίας για πολλούς αιώνες. Ένα έργο που είναι το δεύτερο σε αριθμό εκδόσεων βιβλίο στον κόσμο μετά τη Βίβλο. Περισσότερες από χίλιες εκδόσεις των «Στοιχείων» έχουν εκδοθεί μετά την πρώτη το 1482 $\mu.X.$

Διερεύνηση

Να μελετήσετε τον πιο κάτω πίνακα και να απαντήσετε τα ακόλουθα ερωτήματα:

	$1^η$	$2^η$	$3^η$	$4^η$	$5^η$	$6^η$
$1^η$	1	2	3	4	5	6
$2^η$	7	8	9	10	11	12
$3^η$	13	14	15	16	17	18
$4^η$	19	20	21	22	23	24
$5^η$	25	26	27	28	29	30
$6^η$	31	32	33	34	35	36
$7^η$	…	…	…	…	…	…

✓ Αν συνεχίσουμε να συμπληρώνουμε τον πίνακα με τον ίδιο τρόπο, να βρείτε:
- σε ποια στήλη θα τοποθετηθεί ο αριθμός 60
- σε ποια γραμμή και σε ποια στήλη θα τοποθετηθεί ο αριθμός 665
- σε ποια γραμμή και σε ποια στήλη θα τοποθετηθεί ο αριθμός 2016
- σε ποια γραμμή και σε ποια στήλη θα τοποθετηθεί ο αριθμός 2013

✓ Να βρείτε έναν τριψήφιο και έναν τετραψήφιο αριθμό που θα είναι τοποθετημένος στην $1^η$ στήλη.

✓ Να βρείτε έναν αριθμό, από τον πιο πάνω πίνακα, ο οποίος να έχει περιττό αριθμό διαιρετών. Για ποιους φυσικούς αριθμούς ισχύει αυτό;

Να εξηγήσετε πως εργαστήκατε, για να βρείτε τις απαντήσεις σας.

Μαθαίνω

- Όταν δοθούν δύο αριθμοί $\varDelta, \delta$, τότε υπάρχουν δύο άλλοι αριθμοί π, υ ($\varDelta, \pi, \upsilon \in \mathbb{N}_0$ και $\delta \in \mathbb{N}$), έτσι ώστε να ισχύει:

  $$\boldsymbol{\varDelta = \delta \cdot \pi + \upsilon}\,,\quad \boldsymbol{0 \leq \upsilon < \delta}\,.$$

  Ο αριθμός **Δ** ονομάζεται **διαιρετέος**, ο **δ** ονομάζεται **διαιρέτης**, ο αριθμός **π** ονομάζεται **πηλίκο,** και το **υ** ονομάζεται **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\varDelta} & \boldsymbol{\delta} \\ \cline{2-2} . & \boldsymbol{\pi} \\ . & \\ . & \\ \boldsymbol{\upsilon} & \end{array}$$

  Η διαίρεση της πιο πάνω μορφής λέγεται **Ευκλείδεια Διαίρεση**.

- Όταν διαιρετέος και διαιρέτης είναι ίσοι, το πηλίκο είναι 1 ($\alpha : \alpha = 1$)
- Όταν ο διαιρέτης είναι 1, το πηλίκο είναι ίσο με τον διαιρετέο ($\alpha : 1 = \alpha$)
- Όταν ο διαιρετέος είναι 0, το πηλίκο είναι 0 ($0 : \alpha = 0$)

- Αν $\upsilon = 0$, τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια διαίρεση**.

  $$\boldsymbol{\varDelta = \delta \cdot \pi}$$

- Ο αριθμός β, $\beta \in \mathbb{N}$ ***διαιρεί*** τον αριθμό α, $\alpha \in \mathbb{N}_0$, αν υπάρχει ένας αριθμός κ, έτσι ώστε να ισχύει:

  $$\boldsymbol{\alpha = \kappa \cdot \beta}\,,\quad \text{όπου } \kappa \in \mathbb{N}_0$$

  Ο συμβολισμός $\boldsymbol{\beta \mid \alpha}$ δηλώνει **ότι** $\boldsymbol{\beta}$ **διαιρεί τον** $\boldsymbol{\alpha}$. Ο αριθμός α λέγεται **πολλαπλάσιο** του αριθμού β (πιο απλά γράφεται πολ. β).

Κάθε φυσικός αριθμός έχει διαιρέτες το 1 και τον εαυτό του.

Παράδειγμα:
$7|21 \Rightarrow 21 = 7 \cdot 3$, δηλαδή το 7 διαιρεί το 21.

Το 21 είναι πολλαπλάσιο του 7.

Παρατήρηση:

- **Άρτιος** αριθμός είναι κάθε αριθμός πολλαπλάσιο του 2. Δηλαδή,

  $$\boldsymbol{\alpha = 2 \cdot \kappa},\quad \text{όπου } \kappa \in \mathbb{N}_0$$

- **Περιττός** αριθμός είναι κάθε αριθμός που δεν είναι πολλαπλάσιο του 2, δηλαδή κάθε αριθμός που διαιρούμενος με το 2 αφήνει υπόλοιπο 1. Δηλαδή,

  $$\boldsymbol{\alpha = 2 \cdot \kappa + 1}\,,\ \text{όπου } \kappa \in \mathbb{N}_0$$

Ο αριθμός μηδέν ικανοποιεί τον ορισμό του άρτιου αριθμού, έτσι το σύνολο των άρτιων είναι:
$\{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$

Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω ισότητες εκφράζουν Ευκλείδεια διαίρεση.

   (α) $120 = 28 \cdot 4 + 8$ (β) $1345 = 59 \cdot 19 + 224$

   (γ) $374 = 8 \cdot 46 + 6$

   Λύση:

   (α) *Ο αριθμός* 8 *είναι μικρότερος από το* 28 *και μεγαλύτερος από το* 4*. Άρα, μπορεί να είναι υπόλοιπο* (υ) *της Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη* (δ) *το* 28 *και πηλίκο* (π) *το* 4 *διότι ικανοποιεί τη συνθήκη* $0 \leq \upsilon < \delta$.

   (β) *Το* 224 *είναι μεγαλύτερο από το* 59 *και από το* 19*. Άρα, δεν μπορεί να είναι υπόλοιπο Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη το* 59 *ή το* 19 *διότι δεν ικανοποιεί τη συνθήκη* $0 \leq \upsilon < \delta$.

   (γ) *Ο αριθμός* 6 *είναι μικρότερος και από το* 8 *και από το* 46*. Άρα, μπορεί να είναι υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη* (δ) 46 *και πηλίκο* (π) *το* 8.

   Επίσης, μπορεί να είναι υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη (δ) *το* 8 *και πηλίκο* (π) *το* 46.

2. Να βρείτε ποια είναι τα πιθανά υπόλοιπα της διαίρεσης ενός αριθμού με το 7.

   Λύση:

   Θα πρέπει το υπόλοιπο της διαίρεσης να είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός, αλλά μικρότερος του διαιρέτη, δηλαδή πρέπει $0 \leq \upsilon < 7$.
   Άρα, το υπόλοιπο υ *μπορεί να είναι* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

3. Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς, οι οποίοι, αν διαιρεθούν με το 4, δίνουν πηλίκο 10, με τη χρήση της ευκλείδειας διαίρεσης.

   Λύση:

   Γνωρίζουμε ότι $\Delta = \delta\pi + \upsilon$ *με* $0 \leq \upsilon < \delta$*. Αφού ο διαιρέτης είναι* $\delta = 4$*, το υπόλοιπο μπορεί να είναι ίσο με* $0, 1, 2, 3$*. Γνωρίζουμε ότι το πηλίκο είναι* $\pi = 10$*, άρα από την ισότητα της ευκλείδειας διαίρεσης θα έχουμε:*

   - *αν* $\upsilon = 0$*, τότε:* $\Delta = 4 \cdot 10 + 0 = 40$
   - *αν* $\upsilon = 1$*, τότε:* $\Delta = 4 \cdot 10 + 1 = 41$
   - *αν* $\upsilon = 2$*, τότε:* $\Delta = 4 \cdot 10 + 2 = 42$
   - *αν* $\upsilon = 3$*, τότε:* $\Delta = 4 \cdot 10 + 3 = 43$

Δραστηριότητες

1. Να λύσετε τις πιο κάτω Ευκλείδειες διαιρέσεις:
   (α) 323 : 17 (β) 452 : 15 (γ) 1554 : 37

2. Σε μια Ευκλείδεια διαίρεση ο διαιρετέος είναι ο αριθμός 53 και ο διαιρέτης είναι ο αριθμός 7. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο.

3. Να συμπληρώσετε τον πίνακα, όπου Δ είναι ο διαιρετέος, δ ο διαιρέτης, π το πηλίκο και υ το υπόλοιπο.

Δ	375		1514
δ	18	92	
π		8	15
υ		3	14

4. Να εξετάσετε ποιος από τους πιο κάτω αριθμούς έχει τους περισσότερους διαιρέτες:
   (α) 6 (β) 77 (γ) 25 (δ) 36

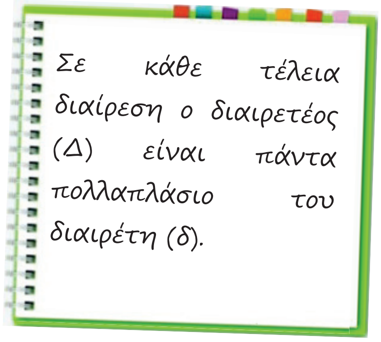
5. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	$6 \mid 30$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$20 \mid 5$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Ο αριθμός 2 διαιρεί όλους τους φυσικούς αριθμούς.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Το 60 είναι πολλαπλάσιο του 5.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Ο αριθμός 1 είναι πολλαπλάσιο κάθε φυσικού αριθμού.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Το 8 είναι πολλαπλάσιο του 40.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	Το 3 είναι και πολλαπλάσιο και διαιρέτης του 3.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

6. Ένα σχολείο επέλεξε 76 μαθητές της Α′ τάξης, για να παρακολουθήσουν μια θεατρική παράσταση. Ένας καθηγητής μπορεί να συνοδεύει μέχρι και 20 μαθητές. Να βρείτε τον μικρότερο αριθμό καθηγητών που χρειάζονται, για να συνοδεύσουν τα παιδιά.

7. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς που, όταν διαιρεθούν με το 3, δίνουν υπόλοιπο διάφορο του μηδενός και πηλίκο εξαπλάσιο από το υπόλοιπο.

8. Ο Φαίδωνας μελετώντας την Ευκλείδεια διαίρεση έχει γράψει στο τετράδιό του το πιο κάτω συμπέρασμα. Να εξετάσετε την ορθότητα του συλλογισμού του.



9. Σήμερα είναι η τελευταία Παρασκευή του μήνα Νοεμβρίου. Να βρείτε:
   (α) τι ημέρα θα έχουμε ύστερα από 30 ημέρες,
   (β) τι μήνα θα έχουμε ύστερα από 30 μήνες.

10. Να βρείτε τον διψήφιο αριθμό που:
    (α) έχει άθροισμα ψηφίων 12 και ένας από τους τέσσερις διαιρέτες του είναι ο αριθμός 19.
    (β) είναι μικρότερος από το 50 και οι δύο από τους εννέα διαιρέτες του είναι οι αριθμοί 2 και 4.

11. Ένα από τα προβλήματα της θεωρίας αριθμών λέει:
    Μετά από πολλά χρόνια συναντούνται δύο συμμαθητές, ο Πυθαγόρας και η Υπατία, που είχαν ιδιαίτερη αγάπη στα μαθηματικά και διεξάγεται ο πιο κάτω διάλογος:

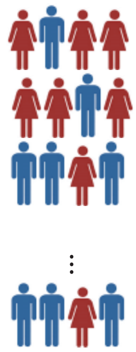
Π: Παντρεύτηκες; Έχεις παιδιά; Πόσα; Ποιας ηλικίας;
Υ: Ναι, τρία και το γινόμενο των ηλικιών τους είναι 36.
Π: (ύστερα από σκέψη). Δεν μπορώ να βρω τις ηλικίες τους, τα στοιχεία που μου έδωσες δεν είναι αρκετά.
Υ: Σωστά, και αν σου πω ότι το άθροισμα των ηλικιών των παιδιών μου είναι το ίδιο με τον αριθμό του σπιτιού σου;
Π: Ούτε και τώρα μπορώ να βρω τις τρεις ηλικίες. Θέλω και άλλη βοήθεια...
Υ: Σωστά! Και αν σου πω πως το μεγαλύτερο παιδί έχει ξανθά μαλλιά...
Π: Τώρα ναι! Μπορώ να σου πω τις ηλικίες των παιδιών σου, χωρίς καμιά αμφιβολία!

Ποιες είναι οι ηλικίες των παιδιών και τι σκέψεις έκανε ο Πυθαγόρας, για να φτάσει στην απάντηση;

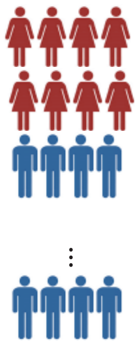
Ιδιότητες των Διαιρετών

Διερεύνηση

Ένα αθλητικό σωματείο θα λάβει μέρος στην παρέλαση για τους εορτασμούς της εθνικής επετείου της 28ης Οκτωβρίου. Ο γυμναστής του σωματείου έχει επιλέξει τα παιδιά (κορίτσια και αγόρια) που θα παρελάσουν, τα έχει χωρίσει σε τετράδες (ανεξάρτητα από το φύλο) και τα έχει παρατάξει κατά ύψος.
Τελικά οι διοργανωτές της παρέλασης έδωσαν οδηγίες να παρελάσουν ξεχωριστά τα αγόρια και τα κορίτσια.



✓ Να εξετάσετε κάτω από ποιες προϋποθέσεις μπορεί να γίνει αναδιάταξη των παιδιών με βάση το φύλο και να είναι συμπληρωμένες οι τετράδες.



Μαθαίνω

Ιδιότητα 1:

- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί έναν άλλο φυσικό αριθμό, θα **διαιρεί** και τα **πολλαπλάσιά** του.
  Δηλαδή, αν $\alpha \mid \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, τότε $\alpha \mid \kappa \cdot \beta$ για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού $\kappa \in \mathbb{N}_0$.

  Παράδειγμα:
  $3|12$ τότε $3|(4 \cdot 12)$, δηλαδή το 3 διαιρεί το 48 που είναι πολλαπλάσιο του 12.

Ιδιότητα 2:

- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί δύο άλλους φυσικούς αριθμούς, θα **διαιρεί** το **άθροισμα** και τη **διαφορά** τους.
  Δηλαδή, αν α, β, $\gamma \in \mathbb{N}$, $\beta > \gamma$, τέτοιοι ώστε $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, τότε $\alpha|(\beta+\gamma)$ και $\alpha|(\beta-\gamma)$

  Παράδειγμα:
  $2|14$ και $2|8$ τότε $2|(14+8)$ και $2|(14-8)$ δηλαδή το 2 διαιρεί το 22 και το 6, αντίστοιχα.

Ιδιότητα 3:

- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί έναν δεύτερο φυσικό αριθμό και ο δεύτερος αριθμός διαιρεί έναν τρίτο, τότε ο πρώτος αριθμός θα **διαιρεί** και τον **τρίτο** (Μεταβατική ιδιότητα).
  Δηλαδή, αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $\alpha|\beta$ και $\beta|\gamma$, τότε $\alpha|\gamma$.

  Παράδειγμα:
  $5|15$ και $15|60$, τότε $5|60$

Παραδείγματα

Για να αποδείξουμε ότι ένας αριθμός διαιρείται με έναν άλλο αριθμό, μπορούμε να δείξουμε ότι είναι πολλαπλάσιο ενός μικρότερου αριθμού που διαιρείται με τον αριθμό αυτό.

1. Να εξετάσετε κατά πόσο ο αριθμός 8 διαιρεί τον αριθμό 400000.

Λύση:

Ο αριθμός 400000 είναι πολλαπλάσιο του 40 αφού

$$400000 = 10000 \cdot 40$$
$$40 = 5 \cdot 8$$

Α΄ τρόπος:

Αφού ο αριθμός 8 διαιρεί το 40, τότε διαιρεί και κάθε πολλαπλάσιό του. Άρα, ο αριθμός 400000 διαιρείται με τον αριθμό 8.

Β΄ τρόπος:

Ο αριθμός 8 διαιρεί το 40.
Ο αριθμός 40 διαιρεί το 400000
Άρα, και ο αριθμός 8 θα διαιρεί και το 400000 (Μεταβατική Ιδιότητα).

2. Να εξετάσετε κατά πόσο ο αριθμός 24 διαιρεί τον αριθμό 2472.

Λύση:
Μπορούμε να γράψουμε το 2472 ως εξής:
$2472 = 2400 + 72$
$2472 = 24 \cdot 100 + 24 \cdot 3$
Αφού το 24 διαιρεί τους αριθμούς 2400 και 72, διαιρεί και το άθροισμά τους 2472:

$$\left.\begin{array}{l} 24|2400 \\ 24|72 \end{array}\right\} \Rightarrow 24|(2400+72), \quad \textit{δηλαδή } 24|2472$$

Άρα, $24|2472$.

3. Να δείξετε ότι ο αριθμός $22\alpha + 11^5$, όπου $\alpha \in \mathbb{N}$, διαιρείται με τον αριθμό 11.

Λύση:
Για να εξετάσω κατά πόσο ο αριθμός $22\alpha + 11^5$ διαιρείται με τον αριθμό 11, θα εξετάσω αν οι αριθμοί 22α και 11^5 διαιρούνται με το 11.

- *Ο αριθμός 22α είναι πολλαπλάσιο του αριθμού 22. Ο αριθμός 11 διαιρεί τον αριθμό 22. Άρα, διαιρεί και κάθε πολλαπλάσιό του.* *Άρα, $11|22\alpha$.*

- *Ο αριθμός $11^5 = 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$ είναι πολλαπλάσιο του αριθμού 11.* *Άρα, $11|11^5$.*

- *Ο αριθμός 11 διαιρεί τους αριθμούς 22α και 11^5. Άρα, θα διαιρεί και το άθροισμά τους.*
  Άρα, $11|(22\alpha + 11^5)$.

Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε ποια από τα πιο κάτω αθροίσματα και διαφορές διαιρούνται με το 23.

   (α) $4600 + 69$ (β) $230000 + 26$

   (γ) $2300 - 69$ (δ) $6900 - 46$

2. Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των διαιρετών, για να δείξετε ότι ο αριθμός 3745 διαιρείται με το 5.

3. Δίνονται οι αριθμοί 2814 , 2818 και 28028.
   (α) Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο πάνω αριθμοί διαιρούνται με το 14.
   (β) Να βρείτε δύο τετραψήφιους αριθμούς οι οποίοι διαιρούνται με το 14.

4. Χωρίς να κάνετε τη διαίρεση, να εξετάσετε κατά πόσο η διαίρεση του 36090 με το 45 είναι τέλεια διαίρεση.

5. Να δείξετε ότι οι αριθμοί 7α, $21\alpha - 14\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\alpha > \beta$ διαιρούνται με το 7.

6. Δύο φυσικοί αριθμοί α και β, $\alpha > \beta$, όταν διαιρούνται με το 2 αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο υ. Έστω μ και ν τα αντίστοιχα πηλίκα των διαιρέσεων των α και β με το 2.
   (α) Να γράψετε τις ισότητες της ευκλείδειας διαίρεσης των αριθμών α και β.
   (β) Να δείξετε ότι το άθροισμα και η διαφορά των αριθμών α και β είναι πάντα άρτιος αριθμός.

7. Ένας ζαχαροπλάστης θέλει να πακετάρει τα γλυκά που έχει ετοιμάσει για μια μεγάλη παραγγελία, με τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε κουτί να περιέχει τον ίδιο αριθμό γλυκών. Σε 22 κουτιά έβαλε από 15 γλυκά, αλλά του περίσσεψαν 20. Πώς προτείνετε να τοποθετήσει τα γλυκά, αν γνωρίζετε ότι κάθε κουτί μπορεί να χωρέσει μέχρι και 20 γλυκά;

8. Δίνονται τα σύνολα:
   Α: οι διαιρέτες του αριθμού 12
   Β: οι διαιρέτες του αριθμού 36.
   (α) Να παραστήσετε με Βέννειο διάγραμμα τα σύνολα A και B και να βρείτε τη σχέση των δύο συνόλων.
   (β) Δίνεται το σύνολο Γ: οι διαιρέτες του αριθμού x, για το οποίο ισχύει $A \subseteq \Gamma$. Να βρείτε πιθανές τιμές του αριθμού x.
   (γ) Πόσα τέτοια σύνολα Γ μπορείτε να βρείτε;

9. Να αποδείξετε, με αριθμητικό παράδειγμα, ότι οι πιο κάτω προτάσεις δεν ισχύουν για όλους τους φυσικούς αριθμούς.
   (α) Αν $\alpha \mid \gamma$ και $\beta \mid \gamma$, τότε $(\alpha + \beta) \mid \gamma$
   (β) Αν $\alpha \mid \gamma$ και $\beta \mid \gamma$, τότε $\alpha \cdot \beta \mid \gamma$

Κριτήρια Διαιρετότητας

Διερεύνηση

Οι Ολυμπιακοί Αγώνες είναι ένα από τα κύρια αθλητικά γεγονότα στον πλανήτη. Ο τόπος καταγωγής των αγώνων είναι η Αρχαία Ελλάδα. Οι Ολυμπιακοί Αγώνες αποτελούσαν μέρος των εορτασμών προς τιμή του Δία. Η πρώτη γραπτή μαρτυρία για τους Αγώνες προέρχεται από το 900 $\pi.X.$, αλλά πιστεύεται πως υπήρχαν οι Αγώνες και πιο παλιά, αφού η μαρτυρία λέει πως οι αγώνες διοργανώνονταν κάθε 4 χρόνια.
Το 393 $\mu.X.$ ο Ρωμαίος Αυτοκράτορας Θεοδόσιος Α' απαγόρευσε τη συνέχιση των Ολυμπιακών Αγώνων, αφού ήταν ειδωλολατρικοί. Οι Ολυμπιακοί Αγώνες διακόπηκαν για αρκετό καιρό. Η αναβίωσή τους έγινε με ιδιαίτερη λαμπρότητα, στο Παναθηναϊκό στάδιο από τον Γάλλο Βαρόνο Πιέρ ντε Κουμπερτέν.
Οι Αγώνες της Ολυμπιάδας, γνωστοί και ως Θερινοί Ολυμπιακοί, τελούνται κάθε τέσσερα χρόνια από το 1896 και μετά, με εξαίρεση τις χρονιές κατά τη διάρκεια των Παγκόσμιων πολέμων. Το 1924 άρχισαν οι ειδικοί Ολυμπιακοί Αγώνες και οι Χειμερινοί Ολυμπιακοί για χειμερινά αθλήματα. Από το 1994 οι χειμερινοί αγώνες δεν γίνονται πια την ίδια χρονιά με τους Θερινούς Ολυμπιακούς.

Τα επόμενα έτη κατά τα οποία θα διεξαχθούν Ολυμπιακοί Αγώνες:

$$2016, 2020, 2024, 2028, 2032, 2036, 2040, 2044, 2048, \ldots$$

Δικαίωμα συμμετοχής είχαν μόνο οι άντρες και απαγορευόταν αυστηρά, με κίνδυνο την ποινή θανάτου, η είσοδος στις γυναίκες και στους δούλους. Οι αθλητές αγωνίζονταν γυμνοί και βραβεύονταν με ένα στεφάνι από κλαδιά ελιάς.

Μέχρι το 650 π.Χ. τους Αγώνες αποτελούσε μόνο ένα άθλημα, το τρέξιμο στα 192 μέτρα, ενώ μετά προστέθηκαν και η πάλη, το πένταθλο, η ιππασία και ο αγώνας δρόμου με άρματα.

Κατά τη διάρκεια των αγώνων, 7 μέρες πριν και 7 μέρες μετά, γινόταν ανακωχή σε όλους τους πολέμους που γίνονταν στην Ελλάδα, πράγμα που δείχνει πως βάση διεξαγωγής των αγώνων ήταν η ειρήνη.

- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο στα έτη 2050, 2088, 3000 θα διεξαχθούν Ολυμπιακοί αγώνες.
- ✓ Να εξετάσετε ποια κοινή ιδιότητα παρουσιάζουν όλες οι πιο πάνω χρονολογίες και να διατυπώσετε ένα κριτήριο, με το οποίο μπορείτε να ελέγχετε κατά πόσο σε μια συγκεκριμένη χρονολογία έγιναν ή θα γίνουν Ολυμπιακοί αγώνες.

Μαθαίνω

Ονομάζουμε **κριτήρια διαιρετότητας** τους κανόνες, με τους οποίους μπορούμε να διακρίνουμε κατά πόσο ένας αριθμός α διαιρεί τον αριθμό β, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, χωρίς να εκτελέσουμε τη διαίρεση του β με το α.

Για να αποδείξουμε ότι ένας αριθμός α διαιρεί τον αριθμό β, μπορούμε να γράψουμε τον β ως άθροισμα δύο ή περισσότερων προσθετέων και να εξετάσουμε αν είναι πολλαπλάσια του α (πολ. α).

Ο αριθμός β γράφεται ως: $\beta = \pi o\lambda.\,\alpha + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{N}$, τότε:

- αν ***κ* είναι πολλαπλάσιο** του α, τότε ο α **διαιρεί** τον β
- αν ***κ* δεν είναι πολλαπλάσιο** του α, τότε ο α **δεν διαιρεί** τον β

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένας αριθμός διαιρείται με το 100, αν και μόνο αν τα τελευταία δύο ψηφία του είναι μηδενικά (00), με το 1000, αν και μόνο αν τα τελευταία τρία ψηφία του είναι μηδενικά (000) κ.λπ.

Κριτήρια διαιρετότητας:

- **Κριτήριο διαιρετότητας με το 10**

  Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **10,** αν και μόνο αν το τελευταίο ψηφίο του είναι **μηδέν** (**0**).

  Παράδειγμα:

  Ο αριθμός 23 450 *διαιρείται με το* 10, *γιατί το τελευταίο ψηφίο του είναι* 0.

  Αποδεικνύεται ως εξής:
  $$\begin{aligned} 23\,450 &= 2345 \cdot 10 \\ &= \pi o\lambda.\,10 \end{aligned}$$

  Άρα, το 23450 *διαιρείται με το* 10.

- **Κριτήριο διαιρετότητας με το 2**

  Ένας αριθμός διαιρείται με το 2, αν και μόνο αν το τελευταίο ψηφίο του διαιρείται με το 2 (δηλαδή 0, 2, 4, 6 ή 8).

  Παράδειγμα:

  Ο αριθμός 58468 *διαιρείται με το* 2, *γιατί το τελευταίο ψηφίο του είναι* 8.

  Αποδεικνύεται ως εξής:
  $$\begin{aligned} 58468 &= 5846 \cdot 10 + 8 \\ &= 5846 \cdot 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \\ &= \pi o\lambda.\,2 \end{aligned}$$

  Ο αριθμός 8 *διαιρείται με το* 2. *Άρα, ο αριθμός* 58 468 *διαιρείται με το* 2.

- **Κριτήριο διαιρετότητας με το 5**

  Ένας αριθμός διαιρείται με το 5, αν και μόνο αν το τελευταίο ψηφίο του διαιρείται με το 5 (δηλαδή 0 ή 5).

  Παράδειγμα:

  Ο αριθμός 68465 *διαιρείται με το* 5, *γιατί το τελευταίο ψηφίο είναι* 5.

  Αποδεικνύεται ως εξής:
  $$\begin{aligned} 68465 &= 6846 \cdot 10 + 5 \\ &= 6846 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 5 \\ &= \pi o\lambda.\,5 \end{aligned}$$

  Ο αριθμός 5 *διαιρείται με το* 5, *άρα ο αριθμός* 68 465 *διαιρείται με το* 5.

- **Κριτήριο διαιρετότητας με το 4**
  Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 4, αν ο αριθμός που σχηματίζεται από τα δύο τελευταία ψηφία του διαιρείται με το 4.

  Παράδειγμα:
  Ο αριθμός 5416 *διαιρείται με το 4, γιατί ο αριθμός* 16 *που σχηματίζεται από τα τελευταία δύο ψηφία του διαιρείται με το 4.*
  Αποδεικνύεται ως εξής:
  $$\begin{aligned} 5416 &= 54 \cdot 100 + 16 \\ &= 54 \cdot 25 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \\ &= \pi o\lambda.4 \end{aligned}$$
  Ο αριθμός 16 *διαιρείται με το 4, άρα ο αριθμός* 5416 *διαιρείται με το 4.*

- **Κριτήριο διαιρετότητας με το 25**
  Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 25, αν ο αριθμός που σχηματίζεται από τα δύο τελευταία ψηφία του διαιρείται με το 25.

  Παράδειγμα:
  Ο αριθμός 98475 *διαιρείται με το 25, γιατί ο αριθμός* 75 *που σχηματίζεται από τα τελευταία δύο ψηφία του διαιρείται με το 25.*
  Αποδεικνύεται ως εξής:
  $$\begin{aligned} 98475 &= 984 \cdot 100 + 75 \\ &= 984 \cdot 4 \cdot 25 + 3 \cdot 25 \\ &= \pi o\lambda.25 \end{aligned}$$
  Ο αριθμός 75 *διαιρείται με το 25, άρα ο αριθμός* 98475 *διαιρείται με το 25.*

- **Κριτήριο διαιρετότητας με το 3**
  Ένας φυσικός αριθμός θα διαιρείται με το 3, αν και μόνο αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3.

- **Κριτήριο διαιρετότητας με το 9**
  Ένας φυσικός αριθμός θα διαιρείται με το 9, αν και μόνο αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9.

  Παράδειγμα:
  Ο αριθμός 8478 *διαιρείται με το 3 και το 9, γιατί το άθροισμα των ψηφίων του* $8+4+7+8=27$ *διαιρείται με το 3 και το 9.*
  Αποδεικνύεται ως εξής:
  $$\begin{aligned} 8478 &= 8 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \\ &= 8 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 8 \\ &= 8 \cdot (999+1) + 4 \cdot (99+1) + 7 \cdot (9+1) + 8 \\ &= 8 \cdot 999 + 8 + 4 \cdot 99 + 4 + 7 \cdot 9 + 7 + 8 \\ &= 8 \cdot 999 + 4 \cdot 99 + 7 \cdot 9 + (8+4+7+8) \\ &= \pi o\lambda.9 + (8+4+7+8) \end{aligned}$$

  Ο αριθμός $8+4+7+8=27$ *διαιρείται με το 3 και το 9, άρα ο αριθμός* 8478 *διαιρείται με το 3 και το 9.*

Παραδείγματα

1. Δίνονται οι αριθμοί $325, 2310, 6302$ και 1548, να βρείτε αυτούς που διαιρούνται με:

(α) το 5 (β) το 3

(δ) το 25 (ε) το 2 και το 9

Λύση:

(α) *Για να εξετάσουμε κατά πόσο ένας αριθμός διαιρείται με το 5, εξετάζουμε αν το τελευταίο του ψηφίο διαιρείται με το 5 (0 ή 5). Άρα, οι αριθμοί που διαιρούνται με το 5 είναι οι αριθμοί 325 και 2310.*

(β) *Για να εξετάσουμε κατά πόσο ένας αριθμός διαιρείται με το 3, εξετάζουμε αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3:*
Προσθέτουμε τα ψηφία των αριθμών:

- *Ο αριθμός 325 έχει άθροισμα ψηφίων* $3+2+5=10$
- *Ο αριθμός 2310 έχει άθροισμα ψηφίων* $2+3+1+0=6$
- *Ο αριθμός 6302 έχει άθροισμα ψηφίων* $6+3+0+2=11$
- *Ο αριθμός 1548 έχει άθροισμα ψηφίων* $1+5+4+8=18$

Παρατηρούμε ότι μόνο οι αριθμοί 2310 και 1548 έχουν άθροισμα ψηφίων που διαιρείται με το 3, άρα διαιρούνται με το 3.

(γ) *Για να διαιρείται ένας αριθμός με το 25, πρέπει ο αριθμός που σχηματίζεται από τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού να διαιρείται με το 25. Άρα, μόνο το 325 διαιρείται με το 25.*

(δ) *Για να εξετάσουμε αν ένας αριθμός διαιρείται με το 2, ελέγχουμε αν το τελευταίο ψηφίο του διαιρείται με το 2 (0, 2, 4,6 ή 8) και το άθροισμα των ψηφίων του να διαιρείται με το 9. Ο αριθμός 1548 έχει ως τελευταίο ψηφίο το 8, άρα διαιρείται με το 2.*
Το άθροισμα των ψηφίων του είναι 18, άρα διαιρείται με το 9. Επομένως, ο αριθμός διαιρείται και με το 2 και με το 9.

2. Να συμπληρώσετε τα τετραγωνάκια $\square 75 \square$, ώστε να προκύψει τετραψήφιος αριθμός που να διαιρείται με το 9 και με το 4.

Λύση:

Για να διαιρείται ο αριθμός $\boxed{}75\boxed{}$ *με το 4, θα πρέπει ο αριθμός που σχηματίζεται από τα δύο τελευταία ψηφία του να διαιρείται με το 4. Έτσι στο τελευταίο τετραγωνάκι (μονάδες) μπορούμε να έχουμε τα ψηφία 2 ή 6.*

Για να διαιρείται ο αριθμός με το 9, πρέπει να έχει άθροισμα ψηφίων πολλαπλάσιο του 9.

- *Αν τοποθετήσουμε το* **2** *ως τελευταίο ψηφίο, τότε πρέπει:*

$$\boxed{} + 7 + 5 + 2 = πολ.9$$
$$\boxed{} + 14 = πολ.9$$

Άρα, στη θέση του ψηφίου των χιλιάδων, το ψηφίο που μπορεί να τοποθετηθεί είναι το 4, για να μάς δώσει άθροισμα ψηφίων 18. Άρα, ο αριθμός που θα σχηματιστεί θα είναι ο $\boxed{4}75\boxed{2}$.

- *Αν τοποθετήσουμε το 6 ως τελευταίο ψηφίο, τότε πρέπει:*

$$\boxed{} + 7 + 5 + 6 = πολ.9$$
$$\boxed{} + 18 = πολ.9$$

Άρα, στη θέση του ψηφίου των χιλιάδων, το ψηφίο που μπορεί να τοποθετηθεί είναι το 9, για να μάς δώσει άθροισμα ψηφίων 27. Άρα, ο αριθμός που θα σχηματιστεί θα είναι ο $\boxed{9}75\boxed{6}$.

3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\overline{αβγδ}$, όπου $α + β + γ + δ = 15$, διαιρείται με το 3.

Ο συμβολισμός $\overline{αβγδ}$ δηλώνει την αξία θέσης των ψηφίων του αριθμού στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

Λύση:

Ο αριθμός $\overline{αβγδ}$ *μπορεί να γράφει ως εξής:*

$$\begin{aligned} \overline{αβγδ} &= α \cdot 1000 + β \cdot 100 + γ \cdot 10 + δ \cdot 1 \\ &= α \cdot (999 + 1) + β \cdot (99 + 1) + γ \cdot (9 + 1) + δ \cdot 1 \\ &= α \cdot 999 + α + β \cdot 99 + β + γ \cdot 9 + γ + δ \\ &= α \cdot 9 \cdot 111 + β \cdot 9 \cdot 11 + γ \cdot 9 + (α + β + γ + δ) \\ &= πολ.9 + (15) \end{aligned}$$

Οι αριθμοί $α \cdot 9 \cdot 111$, $β \cdot 9 \cdot 11$ *και* $γ \cdot 9$ *διαιρούνται με το 9, αφού ο καθένας τους είναι πολλαπλάσιο του 9 (Ιδιότητα 1). Άρα, και το άθροισμά τους* $α \cdot 9 \cdot 111 + β \cdot 9 \cdot 11 + γ \cdot 9$ *διαιρείται με το 9, δηλαδή είναι πολλαπλάσιο του 9.*

Κάθε πολλαπλάσιο του 9 είναι και πολλαπλάσιο του αριθμού 3, γιατί ισχύει $πολ.9 = 9 \cdot κ = 3 \cdot 3 \cdot κ = πολ.3$ *όπου* $κ \in \mathbb{N}$.

Άρα,

$$\begin{aligned} \overline{αβγδ} &= πολ.9 + (3 \cdot 5) \\ &= πολ.3 + πολ.3 \\ &= πολ.3 \end{aligned}$$

Άρα, ο αριθμός διαιρείται με το 3.

Δραστηριότητες

1. Δίνονται οι αριθμοί 765, 1520, 4404 και 3850. Να βρείτε ποιοι από αυτούς διαιρούνται με:

(α) το 2 (β) το 3 (γ) το 4

(δ) το 5 (ε) το 25 (στ) το 9

2. Να συμπληρώσετε τα κενά τετράγωνα με τα κατάλληλα ψηφία, ώστε ο αριθμός:

(α) 43□ να διαιρείται με το 2
(β) 93□ να διαιρείται με το 4
(γ) 83□ να διαιρείται με το 3
(δ) 9□3 να διαιρείται με το 9
(ε) 7633□ να διαιρείται με το 2 και το 3

3. Να συμπληρώσετε τα κενά τετράγωνα με τα κατάλληλα ψηφία, ώστε ο αριθμός:

(α) 43□ να μη διαιρείται με το 5
(β) 83□ να μη διαιρείται με το 3
(γ) 9□3 να μη διαιρείται με το 9
(δ) 837□ να διαιρείται με το 5 και το 9
(ε) 38□7□ να διαιρείται με το 9 και το 25

4. Να βρείτε τον μικρότερο τριψήφιο αριθμό που διαιρείται:

(α) με το 2 (β) με το 5

(γ) με το 3 (δ) με το 9

(ε) με το 2 και το 5 (στ) με το 3 και το 5

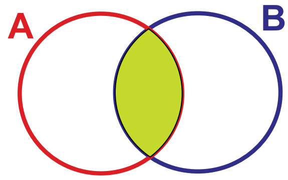
5. Η χρονολογία γέννησης της Ιωάννας διαιρείται με το 9. Ισχυρίζεται ότι, αν αλλάξει τη θέση των ψηφίων της χρονολογίας, τότε ο αριθμός που προκύπτει θα διαιρείται με το 9. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό της Ιωάννας.

6. Ποιο ψηφίο μπορεί να τοποθετηθεί στη θέση του κ, ώστε ο αριθμός $\overline{1κ2κ3}$ που θα προκύψει να διαιρείται με το 3, αλλά όχι με το 9;

7. Να βρείτε πόσοι διψήφιοι αριθμοί διαιρούνται με τους αριθμούς $2, 3, 5, 9$.

8. Να βρείτε και να αποδείξετε ποιος είναι ο μικρότερος τριψήφιος αριθμός που διαιρείται με το 3, αλλά όχι με το 9.

9. Να βρείτε τρεις αριθμούς, οι οποίοι να ανήκουν σε καθεμιά από τις τρεις περιοχές του Βέννειου διαγράμματος.
A: οι αριθμοί που διαιρούνται με το 2
B: οι αριθμοί που διαιρούνται με το 3
Ποια κοινή ιδιότητα έχουν όλοι οι αριθμοί που ανήκουν στην τομή των δύο συνόλων;



10. Η Αριάνα και ο Νικόλας παίζουν το παιχνίδι «Μάντεψε τον αριθμό που σκέφτομαι».

Ο διψήφιος αριθμός που σκέφτομαι, όταν διαιρείται με το 5, αφήνει υπόλοιπο 4. Τα ψηφία του είναι και τα δύο άρτιοι αριθμοί που έχουν άθροισμα 10.

Ο διψήφιος αριθμός που σκέφτομαι, διαιρείται και με το 2, και με το 3 και με το 10 και με το 9.

(α) Να βρείτε ποιον αριθμό σκέφτηκε το κάθε παιδί.
(β) Ο Νικόλας ισχυρίζεται πως η Αριάνα του έδωσε δύο στοιχεία επιπλέον που δεν τα αξιοποίησε, για να βρει τον αριθμό που σκέφτηκε. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό του.

11. Να αποδείξετε με τη χρήση των ιδιοτήτων ότι:
(α) ο αριθμός 125 διαιρείται με το 5
(β) ο αριθμός 123 διαιρείται με το 3
(γ) ο αριθμός 256 διαιρείται με το 4

12. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 360 διαιρείται με το $2, 3, 4, 5$ και 9.

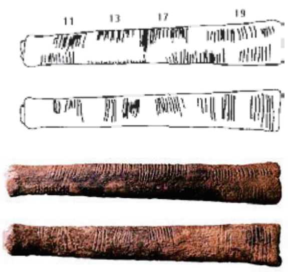
13. Να εξηγήσετε γιατί ένας διψήφιος αριθμός που το ψηφίο των δεκάδων του να είναι διπλάσιο από το ψηφίο των μονάδων του διαιρείται με το 3.

14. Δίνεται ο αριθμός $\overline{\alpha\alpha\alpha}$.
(α) Να αποδείξετε με τη χρήση των ιδιοτήτων ότι ο αριθμός διαιρείται με το 3.
(β) Με ποιους άλλους αριθμούς διαιρείται ο πιο πάνω αριθμός;

Πρώτοι και Σύνθετοι Αριθμοί

Διερεύνηση (1)

Το *οστό Ishango*, το οποίο βρέθηκε στο ομώνυμο χωριό στα σύνορα Ουγκάντας και Ζαΐρ το 1960 και χρονολογείται στην Παλαιολιθική Εποχή, πριν από το 10000 π.Χ., δείχνει ότι οι άνθρωποι ίσως γνώριζαν τους πρώτους αριθμούς χιλιάδες χρόνια πριν. Είναι ένα οστό που φέρει χαραγμένους στην μία του πλευρά μόνο πρώτους αριθμούς (11, 13, 17, 19).



Να βρείτε ποιος αριθμός (διαφορετικός από το ένα), έχει τους λιγότερους διαιρέτες.

✓ Τι παρατηρείτε για τους διαιρέτες του;

✓ Πόσοι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν;

Η εύρεση των πρώτων αριθμών απασχόλησε από την αρχαιότητα τους μαθηματικούς. Το 200 π.Χ. περίπου ο Έλληνας Ερατοσθένης, γεννημένος στη Λιβύη, επινόησε έναν αλγόριθμο για την εύρεση των πρώτων αριθμών που ονομάζεται «κόσκινο του Ερατοσθένη». Το κόσκινο εμφανίζεται στο βιβλίο του Νικομήδη (280 – 210 π.Χ.) «Εισαγωγή στην Αριθμητική».

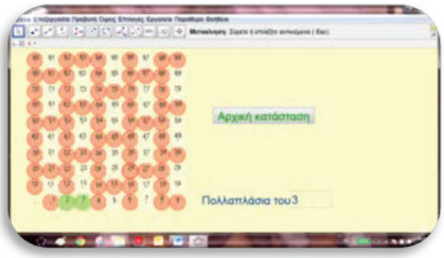
Ο Ερατοσθένης, σκέφτηκε:

«Ο αριθμός 2 έχει μόνο δύο διαιρέτες, άρα είναι πρώτος. Διαγράφουμε όλους τους αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του 2, εκτός του 2, αφού αυτοί οι αριθμοί δεν είναι πρώτοι. Συνεχίζουμε λοιπόν με τον επόμενο αριθμό…»

✓ Να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο του Ερατοσθένη στον πιο κάτω πίνακα.

~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

✓ Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο *«A_En3_Koskino.ggb»*, για να βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς μέχρι το 100.



Ο μαθητής του Ερατοσθένη είχε προσέξει ότι δεν είναι ανάγκη να εξετάσει και να διαγράψει τα πολλαπλάσια όλων των αριθμών.

✓ Να εξετάσετε τον ισχυρισμό του, να βρείτε για ποιους αριθμούς ισχύει η παρατήρηση αυτή και να εξηγήσετε γιατί.

Διερεύνηση(2)

Σε ένα δοχείο τοποθετούνται πέντε κόκκινες, πέντε κίτρινες, πέντε μπλε και πέντε πράσινες μπάλες. Σε όλες τις μπάλες με το ίδιο χρώμα αντιστοιχεί ένας συγκεκριμένος αριθμός, όπως φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα:

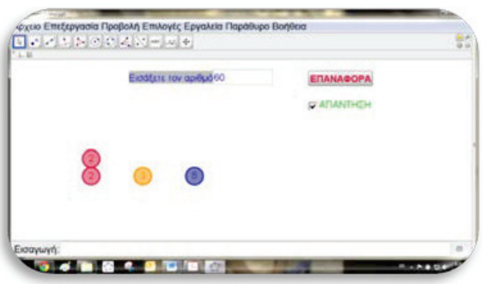
Κόκκινη:	2
Κίτρινη:	3
Μπλε:	5
Πράσινη:	7

Ένας μαθητής παίρνει στην τύχη μια μπάλα από το δοχείο και καταγράφει τον αριθμό στο τετράδιό του. Επαναλαμβάνει την πιο πάνω διαδικασία το πολύ τέσσερις φορές. Στη συνέχεια υπολογίζει το γινόμενο των αριθμών που έγραψε στο τετράδιό του. Ανακοινώνει στον καθηγητή του μόνο το γινόμενο που βρήκε και ο καθηγητής ως «διά μαγείας» βρίσκει πόσες και ποιες μπάλες πήρε ο μαθητής.

✓ Να βρείτε ποιες μπάλες πήρε από το κουτί ο μαθητής και να αναφέρετε τον αριθμό που έγραφε στην κάθε μπάλα, αν το γινόμενό τους είναι ίσο με:

(α) 28 (β) 210 (γ) 90

✓ Για την πιο πάνω διαδικασία μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «*A_En3_ProtoiAritmoi.ggb*»



Μαθαίνω

- Ένας φυσικός αριθμός, διάφορος από το 1, που έχει διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και το 1, λέγεται **πρώτος** αριθμός, διαφορετικά λέγεται **σύνθετος**.

Ο αριθμός 1 δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος.

Παραδείγματα:
Οι αριθμοί $2, 7, 11, 79$ *διαιρούνται μόνο με το 1 και με τον εαυτό τους, άρα είναι πρώτοι.*
Οι αριθμοί $4, 9, 32, 45$ *έχουν και άλλους διαιρέτες εκτός από το 1 και τον εαυτό τους, άρα είναι σύνθετοι.*

- Κάθε φυσικός αριθμός, διάφορος από το 1, είναι δυνατό να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων αριθμών (Θεμελιώδες Θεώρημα Αριθμητικής).

Παράδειγμα:
Ο αριθμός 12 αναλύεται ως γινόμενο:
$$12 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot (2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι οι Αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί και φιλόσοφοι όχι μόνο κατείχαν την έννοια του πρώτου αριθμού, πράγμα από μόνο του θαυμαστό και ενδεικτικό του βάθους της αρχαιοελληνικής διανόησης, αλλά και απέδειξαν ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι! Στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη (350 $\pi.X.$) υπάρχει η απόδειξη αυτού του θεωρήματος.

Μέχρι τον Νοέμβριο του 2012, ο μεγαλύτερος γνωστός πρώτος αριθμός ήταν ο αριθμός:
$$2^{43112609} - 1.$$
Η ανακάλυψή του έγινε στις 23 Αυγούστου 2008 μέσω του διαδικτυακού προγράμματος κατανεμημένης επεξεργασίας GIMPS. Ο αριθμός αυτός έχει 12 978 189 ψηφία. Οι πρώτοι αριθμοί έχουν αποδειχθεί αναγκαίο εργαλείο στη σύγχρονη κρυπτογραφία. Για τον πιο πάνω αριθμό που ανακαλύφθηκε και είχε πάνω από 10 000 000 ψηφία, δόθηκαν 100 000 δολάρια. Οι σύγχρονοι ερευνητές συνεχίζουν να αναζητούν πρώτους αριθμούς με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς 18, 45 και 79 είναι πρώτοι.

Λύση:
Το 18 έχει διαιρέτες τους αριθμούς $1, 2, 3, 6, 9$ και 18. Επομένως, είναι σύνθετος.
Το 45 έχει διαιρέτες τους αριθμούς $1, 3, 5, 9, 15$ και 45. Επομένως, είναι σύνθετος.
Το 79 έχει διαιρέτες μόνο τους αριθμούς 1 και 79, δηλαδή είναι πρώτος.

2. Να αναλύσετε τον αριθμό 90 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Λύση:
Για να αναλύσουμε έναν αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, βρίσκουμε διαδοχικά τους πρώτους αριθμούς που είναι διαιρέτες του και εκτελούμε διαδοχικά διαιρέσεις, όπως στα παραδείγματα πιο κάτω:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ \hline \end{array}\ \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ \hline \end{array}\ \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \hline \end{array}\ \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ \hline \end{array}\ \begin{array}{r|} 1 \end{array}$$

ή

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Άρα, ο αριθμός αναλύεται $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

3. Η ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχει τη μορφή $2^3 \cdot 3 \cdot \alpha$, όπου το α είναι πρώτος αριθμός. Να βρείτε ποιος είναι ο αριθμός α, αν ο αριθμός $2^3 \cdot 3 \cdot \alpha$ διαιρείται:
(α) με το 10 (β) με το 7
(γ) με το 2

Λύση:
(α) *Για να διαιρείται με το 10, πρέπει ο αριθμός να είναι πολλαπλάσιο του 10, άρα το α πρέπει να είναι το 5. Δηλαδή, $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.*
(β) *Για να διαιρείται με το 7, πρέπει ο αριθμός να είναι πολλαπλάσιο του 7, άρα το α πρέπει να είναι το 7. Δηλαδή, $2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$.*
(γ) *Για να διαιρείται με το 2, πρέπει ο αριθμός να είναι πολλαπλάσιο του 2. Ο αριθμός $2^3 \cdot 3 \cdot \alpha$ είναι ήδη πολλαπλάσιο του 2, άρα το α θα μπορούσε να είναι οποιοσδήποτε πρώτος αριθμός.*

Δραστηριότητες

1. Να αναλύσετε τους αριθμούς $56, 108, 73, 84$ και 65 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Ποιοι από αυτούς είναι πρώτοι;

2. Να βρείτε τον μικρότερο αριθμό που έχει πρώτους παράγοντες τους αριθμούς 2, 3 και 7.

3. Να βάλετε σε κύκλο τον αριθμό ο οποίος έχει ακριβώς τρεις διαφορετικούς πρώτους παράγοντες.
   (α) 15 (β) 20 (γ) 30 (δ) 57

4. Να βρείτε δυο πρώτους αριθμούς που το άθροισμά τους να είναι άρτιος αριθμός. Να εξετάσετε κατά πόσο αυτό ισχύει για κάθε άθροισμα πρώτων αριθμών.

5. Η Θεωρία αριθμών απασχόλησε πολλούς Μαθηματικούς.
   (α) Ο Goldbach $(1690 - 1724)$ διατύπωσε την εικασία ότι κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών. Να εφαρμόσετε τον ισχυρισμό αυτό για τους άρτιους αριθμούς 32 και 42.
   (β) Το 1845 ο μαθηματικός Bertrand διατύπωσε την εικασία ότι μεταξύ οποιουδήποτε αριθμού (μεγαλύτερου του 3) και του διπλάσιου του αριθμού αυτού υπάρχει τουλάχιστον ένας πρώτος αριθμός. Να εφαρμόσετε τον ισχυρισμό αυτό για τον αριθμό 20.

6. Να βρείτε τον πρώτο κατά σειρά πρώτο αριθμό που είναι μεγαλύτερος του 200.

7. Η Μαρίνα ισχυρίζεται ότι το τριπλάσιο ενός πρώτου αριθμού είναι επίσης πρώτος αριθμός, ενώ ο Μάνος διαφωνεί. Να εξετάσετε την ορθότητα του συλλογισμού των δύο παιδιών και να αποδείξετε με τη βοήθεια των ιδιοτήτων ποιος από τους δύο έχει δίκαιο.

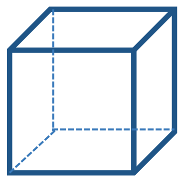
8. Να εξετάσετε κατά πόσο το γινόμενο ή το άθροισμα δύο πρώτων αριθμών είναι πρώτος ή σύνθετος αριθμός. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με κατάλληλο παράδειγμα.

9. Κάθε φυσικός αριθμός που είναι ίσος με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του (γνήσιοι είναι όλοι οι διαιρέτες ενός αριθμού εκτός από τον εαυτό του) λέγεται **τέλειος** αριθμός.
(α) Να βρείτε τον επόμενο τέλειο αριθμό μετά το 6.
(β) Μπορεί ένας τέλειος αριθμός να είναι πρώτος;

Από την εποχή του Πυθαγόρα (~500 π.Χ.), που πρώτος διατύπωσε τους τέλειους αριθμούς, μόνο 38 τέλειοι αριθμοί έχουν βρεθεί.

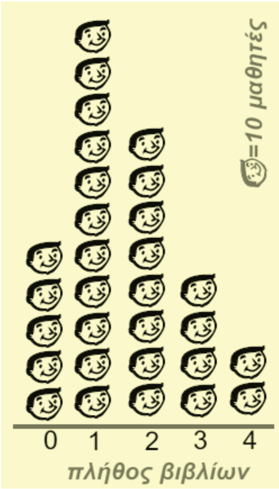
10. Η ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχει τη μορφή $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \alpha$, όπου το α είναι πρώτος αριθμός. Να εξηγήσετε γιατί ο αριθμός αυτός διαιρείται με το:
(α) 12 (β) 15 (γ) 21

11. Να τοποθετήσετε τους αριθμούς $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ και 7 στις οκτώ κορυφές ενός κύβου έτσι ώστε το άθροισμα δύο διαδοχικών κορυφών να είναι πρώτος αριθμός. (Διαδοχικές κορυφές είναι οι κορυφές που ενώνονται με μια ακμή του κύβου).



Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης και Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο Αριθμών

Διερεύνηση (1)



Για την παρουσίαση δεδομένων στη στατιστική χρησιμοποιείται το εικονόγραμμα. Σε αυτό το είδος διαγράμματος χρησιμοποιείται ένα σύμβολο, το οποίο αντιπροσωπεύει έναν αριθμό ατόμων (ή αντικειμένων).

Για παράδειγμα το διπλανό εικονόγραμμα παρουσιάζει τον αριθμό των ατόμων σε σχέση με τον αριθμό των βιβλίων που έχουν διαβάσει.
Άρα, 50 μαθητές δεν έχουν διαβάσει κανένα βιβλίο.

Η Αννίτα και ο Αλέξανδρος έχουν κάνει μια έρευνα στο σχολείο για τον αριθμό των ατόμων που χρησιμοποιούν καθημερινά το διαδίκτυο. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

	Αριθμός ατόμων
Μαθήτριες	72
Μαθητές	90

Για την παρουσίαση των δεδομένων, τα παιδιά αποφάσισαν να χρησιμοποιήσουν μια φιγούρα  , η οποία θα αντιπροσωπεύει έναν συγκεκριμένο αριθμό ατόμων.

- ✓ Να βρείτε πόσα άτομα μπορεί να αντιπροσωπεύει μια φιγούρα.
- ✓ Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός φιγούρων που μπορεί να χρησιμοποιηθεί;

Στην έρευνα έλαβαν μέρος και οι καθηγητές, από τους οποίους 48 απάντησαν ότι χρησιμοποιούν καθημερινά το διαδίκτυο.

- ✓ Να κατασκευάσετε ένα εικονόγραμμα που να παρουσιάζει τους μαθητές, τις μαθήτριες και τους καθηγητές, με τον ελάχιστο αριθμό φιγούρων.

Διερεύνηση (2)

Δύο εργάτες ενός συνεργείου τοποθέτησης πλαστικού πατώματος εργάζονται, για να καλύψουν έναν ορθογώνιο διάδρομο, του οποίου το μήκος δεν υπερβαίνει τα πέντε μέτρα, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Ο ένας ξεκινά από τη μια άκρη του διαδρόμου και ο άλλος από την άλλη με στόχο να συναντηθούν. Τα πλακάκια είναι σχήματος τετραγώνου με μήκος πλευράς $40\,\mathrm{cm}$ και $48\,\mathrm{cm}$ αντίστοιχα. Να βρείτε το μήκος του διαδρόμου και τον αριθμό από πλακάκια κάθε είδους που θα τοποθετηθούν και από τους δύο εργάτες όταν θα συναντηθούν, αν γνωρίζουμε ότι τα πλακάκια που έχουν στη διάθεσή τους εφαρμόζουν ακριβώς.

Μαθαίνω

- **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)** δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών ονομάζεται ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης των αριθμών αυτών.

  Παράδειγμα:
  Οι διαιρέτες των αριθμών 12 *και* 16 *είναι:*
  $\Delta_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
  $\Delta_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$

  Ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες τους είναι $ΜΚΔ(12,16) = 4$

- **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών ονομάζεται το μικρότερο, μη μηδενικό, κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών αυτών.

  Παράδειγμα:
  Τα πολλαπλάσια των αριθμών 6 και 8 είναι:
  $\Pi_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, \dots\}$
  $\Pi_8 = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, \dots\}$
  Το μικρότερο από τα κοινά τους πολλαπλάσια είναι
  $ΕΚΠ[6,8] = 24$

- Για να βρούμε το ΕΚΠ ή τον ΜΚΔ δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών, μπορούμε να αναλύσουμε τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και ακολούθως:

  - Για τον **ΜΚΔ** σχηματίζουμε το γινόμενο των **κοινών** πρώτων παραγόντων τους με εκθέτη καθενός τον **μικρότερο** από τους εκθέτες του.

    Παράδειγμα:
    Αναλύουμε τους αριθμούς 84 και 120 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής:
    $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$
    $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ $\qquad ΜΚΔ(84,120) = 2^2 \cdot 3 = 12$

  - Για το **ΕΚΠ** σχηματίζουμε το γινόμενο όλων των πρώτων παραγόντων τους με εκθέτη καθενός τον **μεγαλύτερο** από τους εκθέτες του.

    Παράδειγμα:
    Αναλύουμε τους αριθμούς 6 και 8 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής:
    $6 = 2 \cdot 3$
    $8 = 2^3$ $\qquad ΕΚΠ[6,8] = 2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$

- Δύο φυσικοί αριθμοί α και β λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** (ή σχετικά πρώτοι), αν ο ΜΚΔ τους είναι το 1.

    Παράδειγμα:
    Οι αριθμοί 8 και 9 είναι πρώτοι μεταξύ τους, αφού
    $8 = 2^3$
    $9 = 3^2$ $\qquad ΜΚΔ(8,9) = 1$

Παραδείγματα

1. Δίνονται οι αριθμοί $36, 48$ και 60. Να βρείτε:
   (α) τον $ΜΚΔ(36,\ 48, 60)$
   (β) το $ΕΚΠ[36, 48, 60]$

Λύση:

Αναλύουμε τους αριθμούς $36, 48$ και 60 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 36 = 2^2 \cdot 3^2 \\ 48 = 2^4 \cdot 3 \\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}$$

(α) *Για να υπολογίσουμε τον $ΜΚΔ$ των πιο κάτω αριθμών, εντοπίζουμε τους κοινούς παράγοντες στον μικρότερο εκθέτη:*

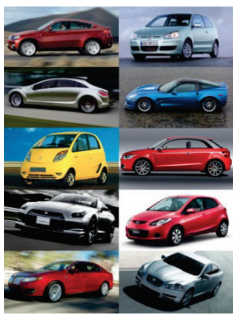
$$\begin{array}{l} 36 = \mathbf{2^2} \cdot 3^2 \\ 48 = 2^4 \cdot \mathbf{3} \\ 60 = \mathbf{2^2} \cdot \mathbf{3} \cdot 5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} ΜΚΔ\,(36, 48, 60) &= 2^2 \cdot 3 \\ &= 4 \cdot 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

(β) *Για να υπολογίσουμε το $ΕΚΠ$ των πιο πάνω αριθμών, βρίσκουμε το γινόμενο όλων των παραγόντων στον μεγαλύτερο εκθέτη:*

$$\begin{aligned} ΕΚΠ[36, 48, 60] &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ &= 16 \cdot 9 \cdot 5 \\ &= 720 \end{aligned}$$

2. Η εταιρεία $Α$ βγάζει νέο μοντέλο αυτοκινήτου κάθε 4 χρόνια, ενώ οι εταιρείες $Β$ και $Γ$ κάθε 6 και 8 χρόνια αντίστοιχα. Το 2011 έβγαλαν και οι τρεις εταιρείες νέα μοντέλα. Ποια είναι η επόμενη χρονιά που οι καταναλωτές θα έχουν επιλογή σε νέα μοντέλα και από τις τρεις εταιρείες;



Λύση:

Αρχικά πρέπει να βρούμε κάθε πόσο οι τρεις εταιρείες βγάζουν ταυτόχρονα νέο μοντέλο, το μικρότερο δηλαδή από τα κοινά πολλαπλάσια του 4, του 6 και του 8.

Αναλύουμε το 4, το 6 και το 8 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και βρίσκουμε το $ΕΚΠ$ τους:

$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$
$6 = 2 \cdot 3$
$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ $\qquad\qquad ΕΚΠ(4, 6, 8) = 2^3 \cdot 3 = 24$

Δηλαδή, κάθε 24 χρόνια βγάζουν και οι τρεις εταιρείες, την ίδια χρονιά νέο μοντέλο.

Το 2011, έχουν βγάλει και οι τρεις εταιρείες νέο μοντέλο, άρα αυτό θα ξανασυμβεί το έτος: $2011 + 24 = 2035$.

3. *Να βρείτε τους διψήφιους αριθμούς $α$ και $β$ για τους οποίους ισχύει ότι $ΕΚΠ[α, β\,] = 77$ και $ΜΚΔ(α, β) = 11$.*

Λύση:
Ο $ΜΚΔ = 11$, άρα οι δύο αριθμοί έχουν ως μεγαλύτερο κοινό διαιρέτη τον αριθμό 11, είναι δηλαδή πολλαπλάσια του 11.

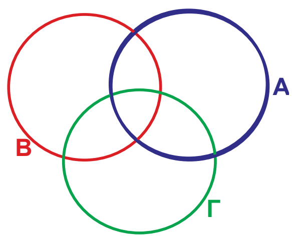
Άρα, οι αριθμοί $α$ και $β$ είναι δύο από τους αριθμούς: $\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$.

Για να είναι το $ΕΚΠ = 77$, τότε οι μόνοι αριθμοί για τους οποίους ισχύει είναι 11 και 77.

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τον $ΜΚΔ$ και το $ΕΚΠ$ των αριθμών:
   (α) 32 και 36 $\qquad$ (β) 24 και 45
   (γ) 32, 48 και 80 $\qquad$ (δ) 252, 294 και 378

2. Δίνονται τα σύνολα:
   $Α$: οι διαιρέτες του 24
   $Β$: οι διαιρέτες του 36
   $Γ$: οι διαιρέτες του 54



   (α) Να τοποθετήσετε στο διπλανό βέννειο διάγραμμα μόνο τους αριθμούς: 12, 9, 8, 27, 2
   (β) Πού θα τοποθετηθεί ο $ΜΚΔ$ των τριών αριθμών;
   (γ) Πόσα στοιχεία θα έχει το σύνολο $Α \cap Β \cap Γ$;

3. Ποια από τα πιο κάτω ζεύγη φυσικών αριθμών είναι πρώτοι μεταξύ τους;
   (α) 16 και 25 (β) 26 και 35
   (γ) 36 και 45 (δ) 46 και 55

4. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα με τον μικρότερο αριθμό απλοποιήσεων ώστε να γίνουν ανάγωγα.
   (α) $\frac{98}{76}$ (β) $\frac{123}{321}$ (γ) $\frac{240}{720}$

Ανάγωγο κλάσμα ονομάζεται το κλάσμα, του οποίου ο αριθμητής και ο παρονομαστής δεν έχουν κοινό διαιρέτη. Δηλαδή αριθμητής και παρονομαστής είναι πρώτοι μεταξύ τους.

5. Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:
   (α) $\frac{1}{24}+\frac{1}{16}$ (β) $\frac{1}{64}+\frac{1}{36}$ (γ) $\frac{1}{9}-\frac{1}{333}$

6. Να βρείτε πόσα το πολύ όμοια δέματα μπορούμε να κάνουμε με 108 τετράδια, 18 βιβλία και 54 μολύβια. Πόσα τετράδια, βιβλία και μολύβια θα περιέχει το κάθε δέμα;

7. Σε ένα Λούνα Παρκ είναι εγκατεστημένοι δύο περιστρεφόμενοι τροχοί, ένας μεγάλος και ένας μικρός. Ο μεγαλύτερος τροχός κάνει μια πλήρη στροφή κάθε 50 δευτερόλεπτα και ο μικρότερος τροχός κάθε 30 δευτερόλεπτα. Οι δύο τροχοί ξεκινούν ταυτόχρονα και στην αφετηρία βρίσκεται το βαγόνι A_1 του μεγάλου τροχού και το βαγόνι B_1 του μικρού τροχού. Να βρείτε ύστερα από πόση ώρα και τα δύο βαγόνια θα είναι ταυτόχρονα στην αφετηρία. Πόσες περιστροφές θα κάνει το κάθε βαγόνι;

8. Ο κύριος Θανάσης αρρώστησε με ίωση και ο γιατρός τού συνέστησε να παίρνει 3 φάρμακα για μία εβδομάδα. Το πρώτο φάρμακο το παίρνει κάθε 6 ώρες, το δεύτερο κάθε 8 ώρες και το τρίτο κάθε 12 ώρες.
   (α) Να υπολογίσετε κάθε πόσες ώρες θα παίρνει και τα τρία φάρμακα μαζί.
   (β) Πόσες φορές σε ένα εικοσιτετράωρο θα πάρει δύο φάρμακα μαζί;

9. Μια καφετέρια έχει δύο φωτεινές πινακίδες. Η μια αναβοσβήνει κάθε 9 δευτερόλεπτα και η άλλη κάθε 15 δευτερόλεπτα. Αν οι δύο πινακίδες ανάψουν ταυτόχρονα, ύστερα από πόση ώρα θα ανάψουν ξανά ταυτόχρονα;

10. Να βρείτε τρία ζεύγη αριθμών που το $ΕΚΠ$ τους να είναι το γινόμενό τους. Τι παρατηρείτε; Να διατυπώσετε ένα γενικό κανόνα.

11. Δίνονται οι αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύει ότι το $ΕΚΠ[x, y] = 24$ και ο $ΜΚΔ(x, y) = 6$. Αν $y = 6$, να βρείτε το x.

12. Να βρείτε το φυσικό αριθμό α, για τον οποίο ισχύει ότι το $ΕΚΠ[4, \alpha] = 52$.

13. Να βρείτε δύο διψήφιους αριθμούς που έχουν $ΜΚΔ$ το 7 και $ΕΚΠ$ το 70, αν γνωρίζετε ότι ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός αριθμός.

14. Δύο αριθμοί έχουν ΜΚΔ το 18. Να δικαιολογήσετε γιατί έχουν σίγουρα και άλλους κοινούς διαιρέτες, διαφορετικούς από τη μονάδα.

15. Σε μια σοκολατοβιομηχανία η ημερήσια παραγωγή βγαίνει από δύο μηχανές οι οποίες ανεφοδιάζονται στην αρχή της ημέρας. Οι μηχανές αυτές χρειάζονται ανεφοδιασμό με υλικά κάθε 36 λεπτά η μία και κάθε 60 λεπτά η άλλη για την επόμενη παραγωγή. Να βρείτε κάθε πόσο και πόσες φορές την ημέρα θα χρειαστούν και οι δύο μηχανές ανεφοδιασμό ταυτόχρονα, αν το εργοστάσιο εργάζεται για 8 ώρες την ημέρα;

16. Να παρουσιάσετε τα πιο κάτω δεδομένα με τη βοήθεια εικονογράμματος (να χρησιμοποιήσετε τον ελάχιστο αριθμό συμβόλων):

Άθλημα	Αριθμός μαθητών
Ποδόσφαιρο	96
Καλαθόσφαιρα	108
Κολύμπι	72
Άλλο	112

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να βρείτε τον αριθμό, ο οποίος:
   (α) όταν διαιρεθεί με το 13, δίνει πηλίκο 15 και υπόλοιπο 0,
   (β) όταν διαιρεθεί με το 7, δίνει πηλίκο 6 και υπόλοιπο 0,
   (γ) όταν διαιρεθεί με το 9, δίνει πηλίκο 7 και υπόλοιπο 3

2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	Αν ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος από έναν άλλο, τότε ο μεγαλύτερος αριθμός έχει πάντα περισσότερους πρώτους παράγοντες από τον μικρότερο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Το άθροισμα δύο πρώτων αριθμών είναι πάντα πρώτος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Το άθροισμα δύο σύνθετων αριθμών είναι πάντα σύνθετος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Το γινόμενο δύο πρώτων αριθμών είναι πάντα πρώτος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε σύνθετων αριθμών είναι σύνθετος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Το ΕΚΠ δύο πρώτων αριθμών είναι ίσο με το γινόμενο των αριθμών αυτών.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	Ο ΜΚΔ δύο αριθμών είναι πάντοτε μικρότερος και από τους δύο αριθμούς.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

3. Να βρείτε όλους τους τριψήφιους αριθμούς που διαιρούνται με τους αριθμούς $5, 3, 10, 9$.

4. Αφού γράψετε τους πιο κάτω αριθμούς ως αθροίσματα, να εξετάσετε κατά πόσο διαιρούνται με το 21.
   (α) 2184 (β) 420040

5. Να εξετάσετε κατά πόσο οι αριθμοί 1000 και 1323 είναι πρώτοι και ακολούθως να εξετάσετε κατά πόσο είναι πρώτοι μεταξύ τους.

6. Η ηλικία της Μαρίνας είναι φέτος πολλαπλάσιο του 9, ενώ πέρσι ήταν πολλαπλάσιο του 7. Να βρείτε την ηλικία της.

7. Να βρείτε τους διψήφιους αριθμούς των οποίων το γινόμενο των ψηφίων τους δεν είναι σύνθετος αριθμός.

8. Δίνονται δύο φυσικοί αριθμοί α και β.
   (α) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $3\alpha + 18\beta$ διαιρείται με το 3.
   (β) Αν ο αριθμός α είναι πολλαπλάσιο του 11, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\alpha + 22\beta$ είναι πολλαπλάσιο του 11.

9. Να βρείτε τον μεγαλύτερο διψήφιο αριθμό που έχει τους πιο πολλούς πρώτους παράγοντες.

10. Οι μαθητές ενός σχολείου μπορούν να χωριστούν σε ομάδες ανά 24, ανά 36 ή ανά 40. Πόσους μαθητές έχει το σχολείο, αν υπερβαίνουν τους 1000, αλλά όχι τους 1400 μαθητές;

11. Για τις ανάγκες μιας δεξίωσης ο μάγειρας θέλει να μοιράσει 32 παστάκια φράουλας, 48 παστάκια σοκολάτας και 72 παστάκια βανίλιας σε πιατέλες, έτσι ώστε να μην περισσέψει κανένα γλυκό και οι πιατέλες να έχουν ίδιο αριθμό γλυκών από κάθε είδος. Πόσες πιατέλες θα χρησιμοποιήσει και πόσα συνολικά γλυκά θα έχει η καθεμιά;

12. Ένας ανθοπώλης έχει λιγότερα από 450 τριαντάφυλλα. Έχει υπολογίσει ότι αν θα φτιάξει όλες τις ανθοδέσμες με 7 τριαντάφυλλα δεν περισσεύει κανένα. Το ίδιο συμβαίνει, αν φτιάξει ανθοδέσμες των 9 ή των 12 τριαντάφυλλων. Πόσα τριαντάφυλλα έχει ο ανθοπώλης;

13. Ο κομήτης A εμφανίζεται και είναι ορατός από τη Γη κάθε 35 χρόνια. Ο κομήτης B κάθε 42 χρόνια και ο κομήτης Γ κάθε 105 χρόνια. Αν οι 3 κομήτες εμφανιστήκαν μαζί το 1800, ποια είναι η επόμενη χρονολογία που εμφανίζονται συγχρόνως και οι τρεις κομήτες;

14. Ο Νικόλας είναι χρυσοχόος και έχει παραγγελία να ετοιμάσει ένα βραχιόλι με ημιπολύτιμους λίθους. Οι λίθοι πωλούνται σε πακέτα ως εξής:
    Α΄ είδος €10, η συσκευασία των 12,
    Β΄ είδος €25, η συσκευασία των 20,
    Γ΄ είδος €35, η συσκευασία των 30.
    Ποιο είναι το μικρότερο ποσό χρημάτων που μπορεί να ξοδέψει ο Νικόλας, αν κάθε βραχιόλι πρέπει να έχει τον ίδιο αριθμό από το κάθε είδος λίθων; (*Θέλει να χρησιμοποιήσει όλους τους λίθους που θα αγοράσει).*

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να βρείτε τον μικρότερο φυσικό αριθμό α για τον οποίο οι αριθμοί:
   (α) α, $\alpha+1$, $\alpha+2$ είναι όλοι σύνθετοι,
   (β) α, $\alpha+1$, $\alpha+2$, $\alpha+3$ είναι όλοι σύνθετοι.

2. Να βρείτε τον μικρότερο αριθμό που διαιρείται με τους αριθμούς $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ και 10.

3. Να βρείτε τρεις σύνθετους αριθμούς α, β και γ που έχουν $ΜΚΔ$ το 1.

4. Σε έναν πίνακα είναι τυπωμένοι όλοι οι ακέραιοι από το 1 μέχρι και το 2006. Η Άννα υπογράμμισε όσους από αυτούς είναι πολλαπλάσια του 2, η Μαρία υπογράμμισε όσους από αυτούς είναι πολλαπλάσια του 3 και ο Νίκος υπογράμμισε όσους από αυτούς είναι πολλαπλάσια του 4. Πόσοι από αυτούς τους αριθμούς υπογραμμίστηκαν ακριβώς δύο φορές; *(Να επιλέξετε την ορθή απάντηση)*
   Α) 1003 Β) 668 Γ) 501 Δ) 334 Ε) 167

5. Να αποδείξετε ότι σε τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς ο ένας από τους τρεις είναι πολλαπλάσιο του 3.

6. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του 3^{20} διά το 5.

7. Να μελετήσετε πώς αποδεικνύεται η πιο κάτω Ιδιότητα των διαιρετών:

Ιδιότητα:
Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί έναν άλλο φυσικό αριθμό, θα **διαιρεί** και τα **πολλαπλάσιά** του.

Απόδειξη
Ο α διαιρεί τον β, άρα υπάρχει φυσικός αριθμός λ, τέτοιος ώστε $\beta = \lambda \cdot \alpha$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας με $\kappa \in \mathbb{N}_0$ και έχουμε:

$$\kappa \cdot \beta = \kappa \cdot (\lambda \cdot \alpha) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \alpha .$$

Άρα, ο αριθμός α διαιρεί το $\kappa \cdot \beta$, αφού $(\kappa \cdot \lambda)$ φυσικός αριθμός. Δηλαδή, ισχύει ότι $\alpha \mid \kappa \cdot \beta$.

- Για κάθε αριθμό $\alpha \in \mathbb{N}$, ισχύουν:
  $\alpha|\alpha$
  $1|\alpha$
- Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\alpha|\beta$ και $\beta|\alpha$ τότε $\alpha = \beta$.
- Αν ρ πρώτος αριθμός και $\rho|\alpha \cdot \beta$ τότε $\rho|\alpha$ ή $\rho|\beta$.

Να αποδείξετε με παρόμοιο τρόπο τις ιδιότητες:

- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί δύο άλλους αριθμούς, θα διαιρεί το άθροισμα και τη διαφορά τους.
  Δηλαδή, αν $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{N}$, $\beta > \gamma$, τέτοιοι ώστε $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, τότε $\alpha|(\beta+\gamma)$ και $\alpha|(\beta-\gamma)$.
- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί δύο άλλους αριθμούς, θα διαιρεί και το άθροισμα οποιωνδήποτε πολλαπλασίων τους.
  Δηλαδή, αν $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{N}$, τέτοιοι ώστε $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, τότε $\alpha|(\kappa\beta+\lambda\gamma)$ όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$.
- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί έναν δεύτερο φυσικό αριθμό και ο δεύτερος αριθμός διαιρεί έναν τρίτο, τότε ο πρώτος αριθμός θα διαιρεί και τον τρίτο (Μεταβατική ιδιότητα).
  Δηλαδή, αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $\alpha|\beta$ και $\beta|\gamma$, τότε $\alpha|\gamma$.

8. Να εξετάσετε κατά πόσο τα έτη 2050, 2088, 1999 είναι δίσεκτα. Να εξετάσετε ποια κοινή ιδιότητα παρουσιάζουν όλες οι πιο πάνω χρονολογίες και να διατυπώσετε ένα κριτήριο, με το οποίο μπορείτε να ελέγχετε αν ένα έτος είναι δίσεκτο.

9. Να μελετήσετε τα πιο κάτω κριτήρια διαιρετότητας και να τα παρουσιάσετε στους συμμαθητές σας με αριθμητικό παράδειγμα:

<u>Κριτήριο διαιρετότητας με το 7:</u>
- Διπλασιάζουμε τις εκατοντάδες του αριθμού.
- Στον αριθμό που προκύπτει προσθέτουμε το υπόλοιπο διψήφιο μέρος.
- Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να καταλήξουμε σε διψήφιο αριθμό.
- Αν ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 7, τότε θα διαιρείται και ο αρχικός αριθμός.

<u>Κριτήριο διαιρετότητας με το 11:</u>
- Ξεκινούμε από το τελευταίο ψηφίο του αριθμού και αφαιρούμε και προσθέτουμε εναλλάξ τα ψηφία του.
- Εξετάζουμε το αποτέλεσμα και αν ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 11, τότε θα διαιρείται και ο αρχικός αριθμός.

<u>Κριτήριο διαιρετότητας με το 19:</u>
- Προσθέτουμε στο πλήθος των δεκάδων του αριθμού το διπλάσιο του πλήθους των μονάδων του.
- Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να καταλήξουμε σε διψήφιο αριθμό.
- Αν ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 19, τότε θα διαιρείται και ο αρχικός αριθμός.

Το κριτήριο διαιρετότητας του 7 είναι γνωστό από την Παλαιά Διαθήκη, γιατί οι Εβραίοι της εποχής ήθελαν να γνωρίζουν τα Σαββατικά έτη (αυτά που διαιρούνται με το 7), διότι σύμφωνα με τη θρησκεία τους κατά τα έτη αυτά υπήρχαν σοβαρότατοι περιορισμοί στην εκτέλεση διάφορων εργασιών. Είναι προφανές ότι δεν είχαν εύκολους τους υπολογισμούς όπως σήμερα. Έτσι χρησιμοποιούσαν το συγκεκριμένο κριτήριο.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

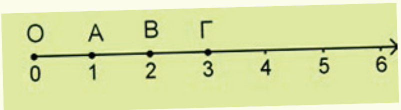
Ακέραιοι – Ρητοί αριθμοί

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε το σύνολο των ακεραίων και των ρητών αριθμών.
- Να αναγνωρίζουμε, να συγκρίνουμε και να αναπαριστούμε θετικούς και αρνητικούς αριθμούς στην ευθεία των ρητών αριθμών.
- Να αναγνωρίζουμε ομόσημους, ετερόσημους, αντίθετους και αντίστροφους ρητούς αριθμούς.
- Να ορίζουμε και να διερευνούμε την έννοια της απόλυτης τιμής ενός ρητού αριθμού.
- Να ορίζουμε και να εκτελούμε πράξεις στο σύνολο των ρητών αριθμών.
- Να ορίζουμε και να υπολογίζουμε δυνάμεις με βάση ρητό αριθμό και εκθέτη φυσικό αριθμό.
- Να εκτιμούμε και να υπολογίζουμε την τιμή αριθμητικών παραστάσεων και την αριθμητική τιμή αλγεβρικών παραστάσεων.
- Να κατασκευάζουμε και να επιλύουμε προβλήματα με ρητούς αριθμούς και να ελέγχουμε κατά πόσον οι απαντήσεις μας είναι λογικές.
- Να βρίσκουμε το δεκαδικό ανάπτυγμα των ρητών αριθμών.
- Να διακρίνουμε από το δεκαδικό ανάπτυγμα ενός αριθμού κατά πόσον είναι ρητός αριθμός ή όχι.
- Να κατανοούμε και να εφαρμόζουμε αλγεβρικές τεχνικές, για να κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων, να απλοποιούμε ή να αναλύουμε αλγεβρικές εκφράσεις.
- Να επιλύουμε εξισώσεις πρώτου βαθμού, χρησιμοποιώντας ποικιλία μεθόδων και να επιλύουμε προβλήματα με τη χρήση εξίσωσης.

Έχουμε μάθει …

- Η δυνατότητα της διάταξης των φυσικών αριθμών επιτρέπει να τους τοποθετήσουμε πάνω σε μια ευθεία γραμμή με τον πιο κάτω τρόπο:
  - Διαλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο Ο της ευθείας που το λέμε **αρχή,** για να παραστήσουμε τον αριθμό 0.
  - Δεξιά από το σημείο διαλέγουμε ένα άλλο σημείο Α που παριστάνει τον αριθμό 1.
  - Τότε με μονάδα μέτρησης το ΟΑ βρίσκουμε τα σημεία που παριστάνουν τους αριθμούς 2, 3, 4, 5, …



- Το γινόμενο, $\underbrace{\boldsymbol{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ \cdots \ \cdot \alpha}}_{\boldsymbol{\nu}\ \textbf{παράγοντες}}$ που αποτελείται από $\boldsymbol{\nu}$ παράγοντες, ίσους με $\boldsymbol{\alpha}$**,** όπου $\nu > 1$, συμβολίζεται ως $\boldsymbol{\alpha^{\nu}}$ και ονομάζεται **δύναμη του** ***α*** **στη** ***ν*** ή **νιοστή δύναμη του** ***α*****.**
Το $\boldsymbol{\alpha}$ ονομάζεται **βάση** της δύναμης και το $\boldsymbol{\nu}$ ονομάζεται **εκθέτης** της.

Παράδειγμα:
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ *και* $3^4 = 81$, *το* 3 *είναι η βάση και το* 4 *ο εκθέτης της δύναμης.*

- Ορίζεται:
  - $\boldsymbol{\alpha^1 = \alpha}$ **,** όπου $\alpha \in \mathbb{N}$
  - $\boldsymbol{\alpha^0 = 1}$ **,** όπου $\alpha \in \mathbb{N}$

Παραδείγματα:
$2^0 = 1$, $5^1 = 5$

- Η σειρά με την οποία πρέπει να κάνουμε τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση (**προτεραιότητα πράξεων**) είναι η ακόλουθη:
  - Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
  - Στη συνέχεια, εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
  - Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

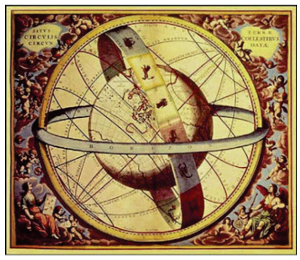
Αν υπάρχουν στην παράσταση παρενθέσεις, τότε με βάση την προηγούμενη σειρά εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.

Ρητοί Αριθμοί – Απόλυτη Τιμή

Εξερεύνηση

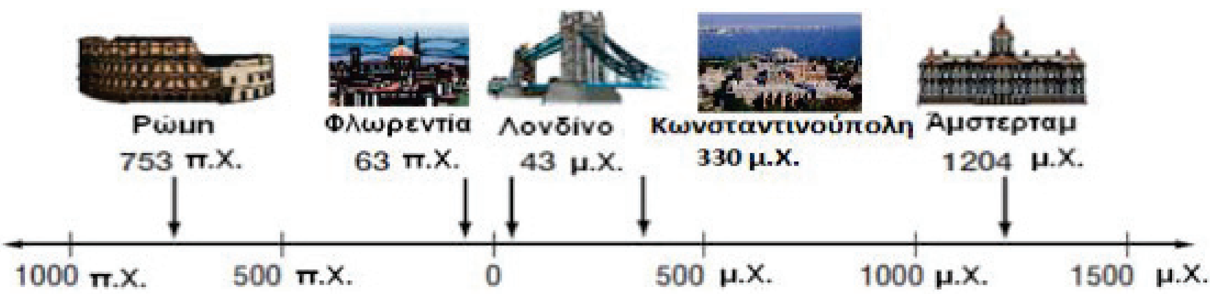
Η χρονολόγηση των ιστορικών γεγονότων, αρχικά, δεν ήταν ενιαία στον Αρχαίο Κόσμο. Κάθε λαός είχε τον δικό του τρόπο να τοποθετεί χρονικά ένα ιστορικό γεγονός. Κάποιοι λαοί χρησιμοποίησαν σημαντικά αστρονομικά γεγονότα, όπως οι εκλείψεις του Ηλίου, ενώ κάποιοι άλλοι χρησιμοποίησαν σημαντικά ιστορικά γεγονότα, όπως την κτίση της Ρώμης, την πραγματοποίηση των πρώτων Ολυμπιακών Αγώνων στην Ολυμπία.

Ήταν, λοιπόν, φανερό, ότι ο διαφορετικός τρόπος χρονολόγησης των ιστορικών γεγονότων στα διάφορα μέρη δημιουργούσε προβλήματα συνεννόησης μεταξύ των ανθρώπων. Πολύ αργότερα έγινε αποδεκτή η χρονολόγηση με βάση το έτος που γεννήθηκε ο Ιησούς.

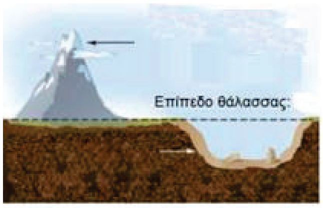


Το ημερολογιακό σύστημα με βάση τη γέννηση του Ιησού επινοήθηκε από τον μοναχό Διονύσιο το έτος 525 μ.Χ..

✓ Να μελετήσετε την πιο κάτω γραμμή του χρόνου, η οποία δείχνει το έτος ίδρυσης μερικών πόλεων της Ευρώπης. Πώς συνδέεται η γραμμή του χρόνου με την αριθμητική γραμμή;



Διερεύνηση (1)

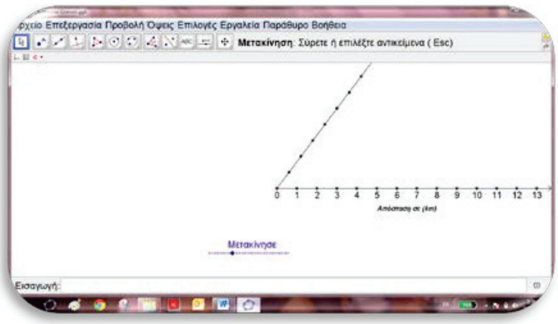


Το όρος **Έβερεστ** με υψόμετρο 8844 m είναι το ψηλότερο βουνό της οροσειράς των Ιμαλαΐων, με την κορυφή του να αποτελεί το υψηλότερο σημείο της Γης. Στην Κύπρο το ψηλότερο σημείο είναι η κορυφή του Τροόδους, ο **Όλυμπος**, με ύψος 1953 m.

Η **Νεκρά Θάλασσα** αποτελεί το χαμηλότερο χερσαίο σημείο στην επιφάνεια της Γης, με τις ακτές της να είναι στα 422 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.

Το βαθύτερο σημείο της Γης, με βάθος 10971 m, εντοπίσθηκε στον Ειρηνικό Ωκεανό, βόρεια των Μαριαννών νήσων από το βαθυσκάφος "Challenger II". Η ζωή σε τόσο μεγάλο βάθος είναι ακόμα άγνωστη. Το πιο διάσημο ναυάγιο του κόσμου, ο **Τιτανικός**, εντοπίσθηκε το Σεπτέμβριο του 1985, σε βάθος 3784 m, ενώ το **Ζηνοβία**, το οποίο βυθίστηκε έξω από το λιμάνι της Λάρνακας, βρίσκεται σε βάθος 42,5 m.

- ✓ Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «A_En4_ArithmitikiGrammi.ggb» και να σύρετε τον δρομέα. Τι παρατηρείτε;



- ✓ Να τοποθετήσετε τα σημεία που περιγράφονται στο πιο πάνω κείμενο στην κατάλληλη θέση στην αριθμητική γραμμή.

Διερεύνηση (2)

Ο Γιάννης και η Μαρία οδηγούν τα ποδήλατά τους, αναχωρώντας από το σπίτι του Ανδρέα. Ύστερα από λίγο ο Γιάννης βρίσκεται 4 km μακριά από το σπίτι του Ανδρέα, οδηγώντας το ποδήλατό του ανατολικά και η Μαρία βρίσκεται 4 km μακριά, οδηγώντας το ποδήλατό της δυτικά.

✓ Ποιο παιδί βρίσκεται πιο μακριά από το σπίτι του Ανδρέα;

✓ Αν το σπίτι του Ανδρέα βρίσκεται στη θέση μηδέν, να τοποθετήσετε τη θέση των δύο παιδιών στην αριθμητική γραμμή.

✓ Να βρείτε ένα άλλο ζεύγος αριθμών που να απέχουν εξίσου από το μηδέν. Πόσα τέτοια ζεύγη υπάρχουν;

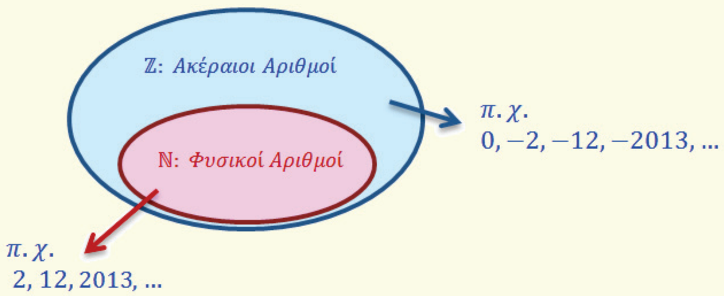
Μαθαίνω

- Το σύμβολο «+» ή «−» ονομάζεται **πρόσημο** του αριθμού. Γράφεται πριν από τον αριθμό και τον χαρακτηρίζει ως **θετικό** ή **αρνητικό** αριθμό αντίστοιχα.

- **Θετικός αριθμός** είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος από το μηδέν. **Αρνητικός αριθμός** είναι ένας αριθμός μικρότερος από το μηδέν.

- **Ακέραιοι αριθμοί** είναι το σύνολο που περιλαμβάνει τους φυσικούς αριθμούς, τους αντίστοιχους αρνητικούς και το μηδέν. Συμβολίζεται με $\mathbb{Z}$. Δηλαδή,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots\}$$



Τα σύμβολα «+» και «−» χρησιμοποιούνται:

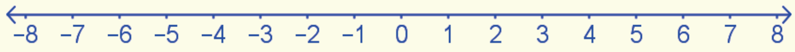
➢ για την πράξη της πρόσθεσης και της αφαίρεσης αντίστοιχα, και

➢ ως πρόσημα για να χαρακτηρίσουν θετικούς ή αρνητικούς τους αριθμούς.

Στους θετικούς αριθμούς συνήθως το πρόσημο + παραλείπεται.

Το μηδέν δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός και δεν έχει πρόσημο.

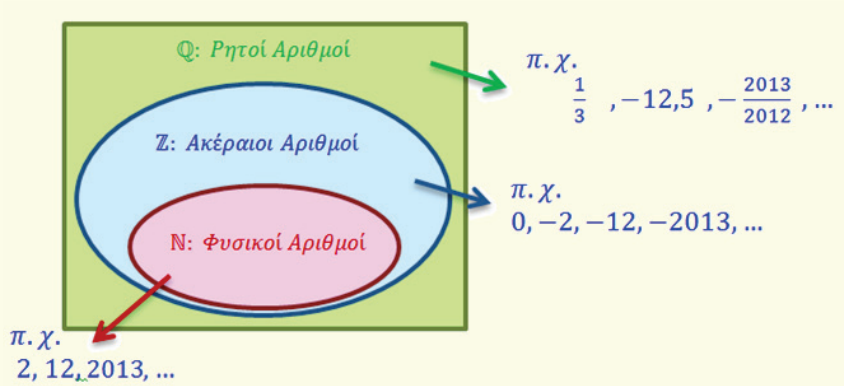
- Τοποθετούμε τους αριθμούς στην αριθμητική γραμμή ως εξής:
  - όλοι οι **θετικοί** αριθμοί τοποθετούνται **δεξιά** του μηδενός και
  - όλοι οι **αρνητικοί** αριθμοί τοποθετούνται **αριστερά** του μηδενός και έχουν πρόσημο «−» .



- Δύο ή περισσότεροι αριθμοί που έχουν το **ίδιο πρόσημο,** ονομάζονται **ομόσημοι**.
- Δύο αριθμοί που έχουν **διαφορετικό πρόσημο,** ονομάζονται **ετερόσημοι.**

Ένας δεκαδικός αριθμός είναι μια άλλη μορφή αναπαράστασης ενός κλάσματος. π.χ. $0{,}5 = \frac{1}{2}$

- **Ρητοί** είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν στη μορφή κλάσματος, με αριθμητή και παρονομαστή ακέραιους αριθμούς και παρονομαστή διαφορετικό από το μηδέν. Το σύνολο των Ρητών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$.



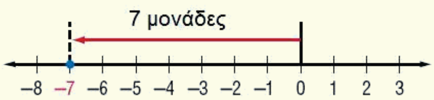
Πιο συγκεκριμένα οι ρητοί αριθμοί μπορούν να ορισθούν ως εξής:

Ρητοί είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$ όπου μ, ν είναι ακέραιοι αριθμοί και ν είναι διαφορετικός από το μηδέν.

Δηλαδή, $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\mu}{\nu} \ / \ \mu \in \mathbb{Z},\ \nu \in \mathbb{Z},\ \nu \neq 0 \right\}$

- Η απόσταση ενός αριθμού $\boldsymbol{\alpha}$ από το μηδέν πάνω στην ευθεία των αριθμών ονομάζεται **απόλυτη τιμή** ή **μέτρο** του αριθμού $\boldsymbol{\alpha}$. Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού συμβολίζεται με $|\boldsymbol{\alpha}|$.

Παράδειγμα:
Το −7 βρίσκεται 7 μονάδες αριστερά του μηδενός. Άρα, η απόλυτη τιμή του είναι $|-7| = 7$



Παραδείγματα

1. Από τους πιο κάτω αριθμούς να επιλέξετε:

   (α) τους φυσικούς: $-4,\ \frac{2}{3},\ 2013,\ 9,\ -\frac{4}{5}$

   (β) τους ακέραιους: $-\frac{1}{5},\ +6{,}7,\ -1001,\ \frac{4}{3},\ 0$

   (γ) τους αρνητικούς ακέραιους $-35,\ 13, -\frac{1}{8},\ -1{,}5,\ -\frac{1}{4}$

Λύση:

(α) *Φυσικοί είναι οι αριθμοί:* $-4,\ \frac{2}{3},\ 2013,\ 9,\ -\frac{4}{5}$

(β) *Ακέραιοι είναι οι αριθμοί:*

$$-\frac{1}{5},\ +6{,}7,\ -1001,\ \frac{4}{3},\ 0$$

(γ) *Αρνητικοί ακέραιοι είναι:* $-35,\ 13,\ -\frac{1}{8},\ -1{,}5,\ -\frac{1}{4}$

2. Δίνεται ο αριθμός -15. Να βρείτε:

   (α) την απόλυτη τιμή του

   (β) έναν άλλον αριθμό που έχει την ίδια απόλυτη τιμή με το -15

Λύση:

(α) *Το -15 βρίσκεται 15 μονάδες αριστερά από το μηδέν. Η απόλυτη τιμή του είναι 15, δηλαδή $|-15| = 15$.*

(β) *Ο αριθμός $+15$, ο οποίος βρίσκεται 15 μονάδες δεξιά του μηδενός, έχει την ίδια απόσταση από το μηδέν με το -15. Άρα, οι αριθμοί $+15$ και -15 έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.*

$$|-15| = |+15| = 15$$

3. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

   $\mathrm{A} = |5{,}5| + |-6|$ και $\mathrm{B} = |5-3| + \left|-\frac{1}{2}\right|$

Λύση:

$A = |5{,}5| + |-6| = 5{,}5 + 6 = 11{,}5$

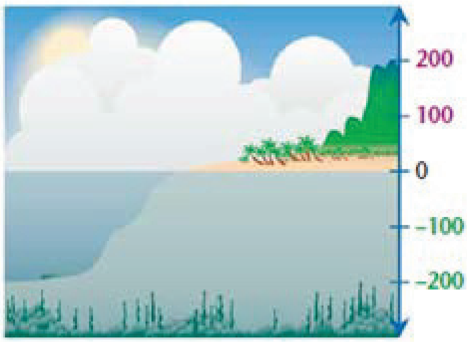
Υπολογίζουμε την απόλυτη τιμή και στη συνέχεια εκτελούμε την πρόσθεση.

$B = |5-3| + \left|-\frac{1}{2}\right| = |2| + \left|-\frac{1}{2}\right| = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

Υπολογίζουμε τη διαφορά, στη συνέχεια την απόλυτη τιμή και τέλος εκτελούμε την πρόσθεση.

Δραστηριότητες

1. Να σημειώσετε τη θέση των αντικειμένων και των προσώπων στη διπλανή εικόνα, σύμφωνα με τις πιο κάτω πληροφορίες:



(α) Το υποβρύχιο βρίσκεται σε βάθος 115 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.

(β) Το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 220 m.

(γ) Ο ορειβάτης βρίσκεται σε ύψος 150 m.

(δ) Η άγκυρα βρίσκεται σε βάθος 102,5 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.

2. Να τοποθετήσετε τους αριθμούς των πιο κάτω συνόλων στις αντίστοιχες αριθμητικές γραμμές:

(α) $\{-4\ ,\ 5\ ,\ \ 4\ ,\ -3\ ,\ 1\}$

(β) $\{-5\frac{1}{2}\ ,\ -1\frac{1}{4}\ ,\ 6{,}5\ ,\ -3\ ,\ -\frac{1}{2}\}$

3. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, όπως στο παράδειγμα.

	ΦΥΣΙΚΟΣ	ΑΚΕΡΑΙΟΣ	ΡΗΤΟΣ	ΘΕΤΙΚΟΣ	ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ
2013	✓	✓	✓	✓	
-99					
$-4{,}052$					
$+0{,}023$					
$-\frac{4}{5}$					
3^4					

4. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	*Κάθε ακέραιος αριθμός είναι και ρητός.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	*Κάθε ρητός αριθμός είναι φυσικός.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	*Οι φυσικοί αριθμοί δεν είναι ρητοί.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	*Το 0 ανήκει στους ρητούς αριθμούς.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	*Το $-\frac{3}{4}$ και το $+\frac{3}{4}$ είναι ομόσημοι.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	*Οι αριθμοί $-3{,}42$ και $-2\frac{17}{100}$ είναι ετερόσημοι.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

5. Δίνονται οι αριθμοί -4 και $1\frac{1}{4}$.
   (α) Ποιος από τους πιο πάνω αριθμούς έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή;
   (β) Να βρείτε δύο ακέραιους που βρίσκονται μεταξύ των πιο πάνω αριθμών.
   (γ) Πόσοι αρνητικοί ακέραιοι υπάρχουν μεταξύ τους;

6. Να συμπληρώσετε τα τετραγωνάκια με κατάλληλους αριθμούς, ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω ισότητες:

   (α) $|-2| = \square$ (β) $|+7{,}5| = \square$ (γ) $\left|-12\frac{1}{3}\right| = \square$

   (δ) $|\square| = 8{,}3$ (ε) $|\square| = 0$ (στ) $|\square| = 123$

7. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων, όταν $\alpha = -2$ και $\beta = -13$:
   (α) $|\alpha|$ (β) $|\alpha| + |\beta|$ (γ) $|\beta| - |\alpha|$

8. Να βρείτε όλους τους ακέραιους που έχουν απόλυτη τιμή:
   (α) μικρότερη του 3,
   (β) μικρότερη του 1,
   (γ) μικρότερη ή ίση του 2.

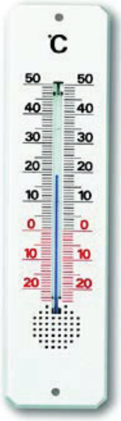
9. Να εξετάσετε ποια από τις παραστάσεις ΔΕΝ ισούται με τις υπόλοιπες:

   $Α = |-8|$ $Β = |-2| + |6|$

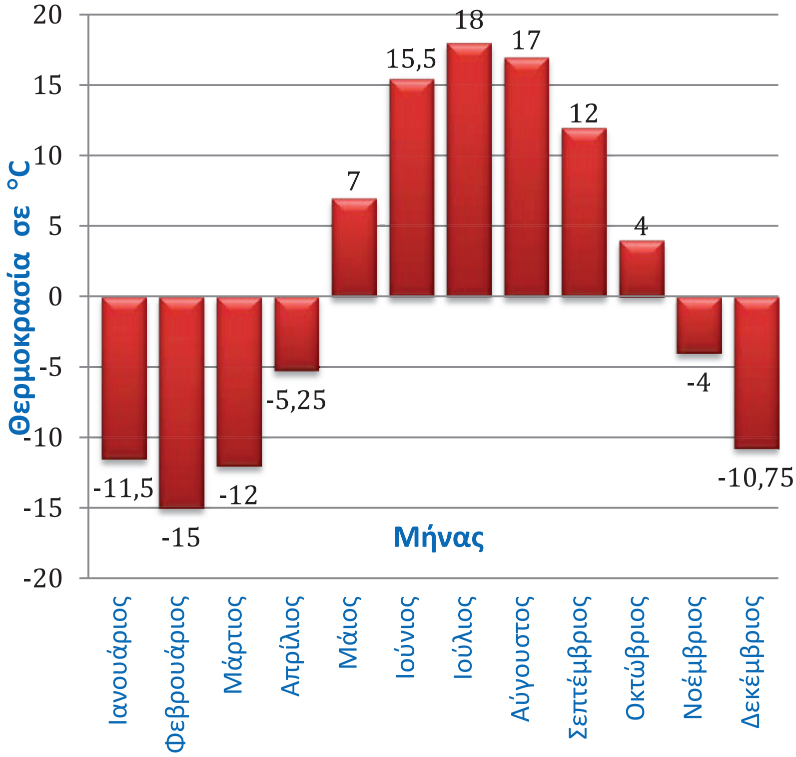
   $Γ = |12 - |-4||$ $Δ = |7 - |+1||$

Σύγκριση Ρητών Αριθμών

Διερεύνηση (1)



Στο πιο κάτω διάγραμμα παρουσιάζεται η μέση θερμοκρασία (°C) κάθε μήνα μιας πόλης το 2011.



Η πιο ψηλή θερμοκρασία (57,8 °C) καταγράφηκε το 1922 στο Αλ Αζιζάια στη Λιβύη. Σύμφωνα, όμως, με έναν δορυφόρο της NASA, το ρεκόρ αυτό έχει καταρριφθεί από τους 71 °C που καταγράφηκαν στην έρημο Λουτ του Ιράν.

- ✓ Ποιος ήταν ο πιο κρύος μήνας και ποιος ο πιο ζεστός μήνας;
- ✓ Ποιους μήνες η θερμοκρασία ήταν χαμηλότερη από τον Ιανουάριο;
- ✓ Να συγκρίνετε τη θερμοκρασία του Μαρτίου με την αντίστοιχη του Σεπτεμβρίου.
- ✓ Να κατατάξετε σε αύξουσα σειρά τους μήνες σε σχέση με τη θερμοκρασία τους.

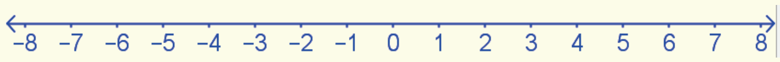
Η πιο χαμηλή θερμοκρασία (−71,2 °C), σε μέρος που κατοικείται, καταγράφηκε το 1926, σε χωριό της Δημοκρατίας της Σακά, στη Ρωσία. Η πιο χαμηλή θερμοκρασία (−89,4 °C) που έχει καταγραφεί ποτέ στη Γη ήταν το 1983 στην Ανταρκτική.

Μαθαίνω

- **Ανισότητα** ονομάζεται ένα οποιοδήποτε ζεύγος αριθμητικών παραστάσεων που συνδέονται με ένα από τα σύμβολα
  $<$, $>$, $\geq$, $\leq$.
  Οι εκφράσεις: $Α > Β$, $Α < Β$, $Α \geq Β$, $Α \leq Β$ είναι ανισότητες. Το Α και το Β είναι μαθηματικές παραστάσεις.
  Παραδείγματα:
  $$2 > 0$$
  $$2 + 5 < 3 \cdot 4$$

- Κάθε ανισότητα χαρακτηρίζεται ως **ΑΛΗΘΗΣ** ή **ΨΕΥΔΗΣ**.
  Παραδείγματα:
  $2 \geq 0$ *αληθής*
  $2 < 0$ *ψευδής*

- Μπορούμε να συγκρίνουμε ρητούς αριθμούς, βρίσκοντας τη θέση τους στην ευθεία των αριθμών. Όσο **πιο δεξιά** βρίσκεται ένας αριθμός στην αριθμητική γραμμή τόσο πιο μεγάλος είναι.



Παράδειγμα:
$$-8 < -2 < 0 < 7$$

  - Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.
  - Κάθε θετικός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
  - Κάθε αρνητικός είναι μικρότερος από το μηδέν.

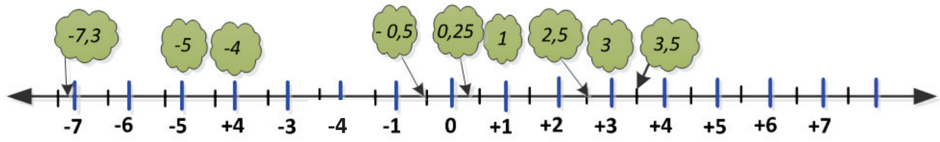
$$\delta < \gamma < 0 < \beta < \alpha$$

Παραδείγματα

1. Να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά (από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο) τους πιο κάτω ρητούς αριθμούς:
   $$3\ ,\ -\frac{32}{8}\ ,\ +3{,}5\ ,\ -5\ ,\ 1\ ,\ \frac{5}{20}\ ,\ -\frac{4}{8}\ ,\ -7{,}3\ ,\ \frac{5}{2}$$

   Λύση:
   Μετατρέπουμε τους κλασματικούς αριθμούς σε δεκαδικούς ή τους δεκαδικούς σε κλασματικούς: $-\frac{32}{8} = -4$, $\frac{5}{20} = 0{,}25$,
   $-\frac{4}{8} = -0{,}5$, $\frac{5}{2} = 2{,}5$

Τοποθετούμε τους αριθμούς στην αριθμητική γραμμή:



Άρα, $\quad -7{,}3 < -5 < -\frac{32}{8} < -\frac{4}{8} < \frac{5}{20} < 1 < \frac{5}{2} < 3 < +3{,}5$

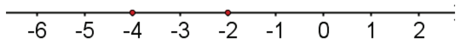
2. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο σύμβολο >, = , <, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

   (α) -2 ….. -4 (β) $|-2|$ ….. $|-4|$ (γ) -2 ….. $|-4|$

Λύση:

Τοποθετούμε στην αριθμητική γραμμή τους αριθμούς -2 και -4. Παρατηρούμε ότι:

(α) *Ο αριθμός -2 βρίσκεται δεξιά του -4.*
Άρα, $-2 > -4$.



(β) *Η απόσταση του -2 από το μηδέν είναι μικρότερη από την απόσταση του -4. Άρα, $|-2| < |-4|$ αφού $|-2| = 2$ και $|-4| = 4$.*

(γ) *Αφού $|-4| = 4$ ισχύει ότι $-2 < |-4|$.*

Δραστηριότητες

1. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο σύμβολο >, =, <, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

   (α) 3 ….. 7 (β) -20 ….. -2

   (γ) -7 ….. 5 (δ) -2011 ….. 0

   (ε) -2012 ….. $0{,}001$ (στ) $-6{,}999999$ ….. $-9{,}6$

   (ζ) $-3{,}45$ ….. $-5{,}43$ (η) $+23$ ….. $+\frac{1}{123}$

   (θ) $-\frac{1}{3}$ ….. $-\frac{1}{2}$ (ι) $-12\frac{1}{3}$ ….. $+12\frac{1}{3}$

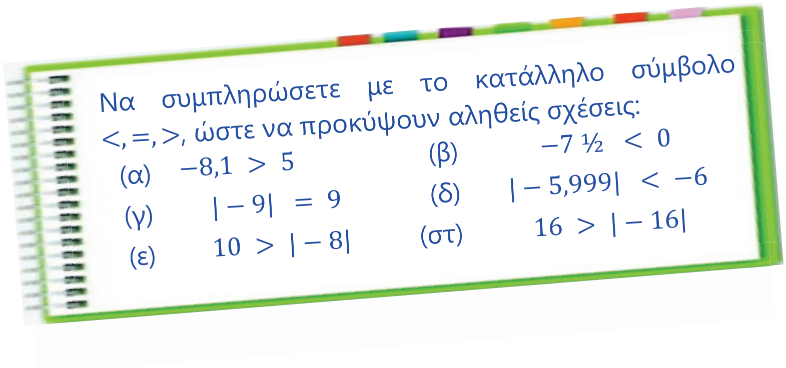
2. Να γράψετε σε αύξουσα σειρά τους πιο κάτω αριθμούς:

   $-280{,}12$ $\quad -28{,}12$ $\quad -28{,}012$ $\quad -2{,}8$ $\quad -280{,}21$

3. Στον διπλανό πίνακα παρουσιάζεται η μέση θερμοκρασία (℃) στην επιφάνεια του Δία, του Άρη, της Γης και της Σελήνης. Με βάση τις πληροφορίες του πίνακα να γράψετε τρεις ανισότητες, οι οποίες να συγκρίνουν τις θερμοκρασίες των πλανητών.

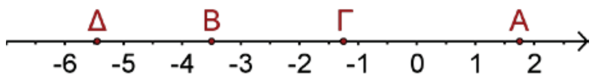
Αστρικό Σώμα	Θερμοκρασία Επιφάνειας
Δίας	-107
Σελήνη	-23
Άρης	-62
Γη	15

4. Η Νικολέττα συμπλήρωσε μια άσκηση, όπως φαίνεται πιο κάτω. Να εξετάσετε την ορθότητα των προτάσεων.



5. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

Για τους αριθμούς $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ ισχύει:



(α) $\lvert \mathrm{B} \rvert < \lvert \Gamma \rvert$	ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ
(β) $\mathrm{B} > \Gamma$	ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ
(γ) $\Gamma > \mathrm{A}$	ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ
(δ) $\lvert \Delta \rvert > \lvert \mathrm{A} \rvert$	ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ

6. Να συμπληρώσετε τα κενά με κατάλληλους ρητούς αριθμούς, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

(α) $-2 < \cdots < \cdots < \cdots < \ +1$ (β) $-\frac{1}{3} < \cdots < \cdots < \cdots < \ +1\frac{1}{2}$

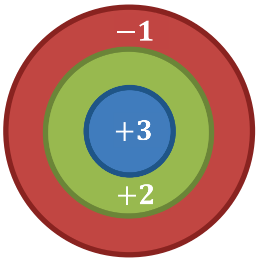
7. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $>, =, <$, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

(α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ και $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, τότε $\alpha \ldots \beta$

(β) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ και $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ και $|\alpha| < |\beta|$, τότε $\alpha \ldots \beta$

Πρόσθεση Ρητών Αριθμών

Διερεύνηση (1)



Ο Χρίστος και η Νεφέλη έχουν πάρει δώρο ένα καινούργιο παιχνίδι. Σύμφωνα με τους κανόνες, κάθε παίκτης ρίχνει δύο βελάκια στον στόχο. Ανάλογα με την περιοχή στην οποία κολλά το βελάκι από μαγνήτη, ο παίκτης παίρνει τους αντίστοιχους βαθμούς.

✓ Να καταγράψετε όλα τα δυνατά αθροίσματα βαθμών που μπορεί να πάρει ο κάθε παίκτης, ρίχνοντας δύο βελάκια κάθε φορά.

✓ Ποιο είναι το μεγαλύτερο και ποιο το μικρότερο άθροισμα βαθμών που μπορεί να συγκεντρώσει ένας παίκτης;

Για να υπολογίσουν τα αθροίσματα αρνητικών ή ετερόσημων αριθμών πρότειναν τους πιο κάτω τρόπους:

Ο Χρίστος έχει πάρει τα πράσινα και τα κόκκινα πλακίδια από ένα παιχνίδι και πρότεινε να τα χρησιμοποιήσουν ως εξής:

Κάθε πράσινο πλακίδιο θα αναπαριστά έναν θετικό βαθμό ⊕, ενώ κάθε κόκκινο πλακίδιο θα αναπαριστά έναν αρνητικό βαθμό ⊖.

Για παράδειγμα, αν κάποιος ρίξει +3 και −1 , θα παίρνει: ⊕⊕⊕ και ⊖

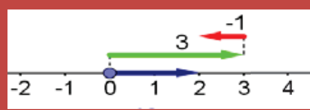
Άρα ⊕⊕ ⊕⊖

Άρα, θα έχει 2 θετικούς βαθμούς.

Η Νεφέλη πρότεινε το εξής:

Μπορούμε να υπολογίζουμε τα αθροίσματα με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής.

Για παράδειγμα, αν κάποιος ρίξει +3 και −1:

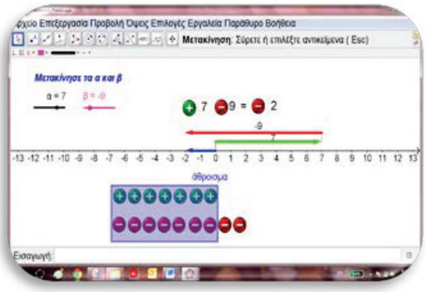


Άρα, 2 θετικούς Βαθμούς.

✓ Να μελετήσετε και να επεξηγήσετε τον τρόπο που πρότεινε το κάθε παιδί, για να υπολογίσει τα αθροίσματα.

✓ Να υπολογίσετε, με όποιο τρόπο θέλετε, τα δυνατά αθροίσματα βαθμών που μπορεί να πάρει ένας παίκτης, ρίχνοντας δύο βελάκια.

✓  Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «A_En4_ArithGrammi_Plakidia.ggb». Να μετακινήσετε τους δύο δρομείς και να διατυπώσετε έναν γενικό κανόνα για το πώς μπορούμε να υπολογίζουμε το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε ρητών αριθμών.



Διερεύνηση (2)

Η Ιωάννα έχει καταγράψει στον πιο κάτω πίνακα τα δυνατά αθροίσματα που προκύπτουν, όταν αθροίσουμε δύο από τους αριθμούς του συνόλου $\{-4, -3, \ldots, +3, +4\}$.

✓ Να μελετήσετε τον πίνακα και να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας.

+	+4	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3	−4
+4	+8	+7	+6	+5	+4	+3	+2	+1	0
+3	+7	+6	+5	+4	+3	+2	+1	0	−1
+2	+6	+5	+4	+3	+2	+1	0	−1	−2
+1	+5	+4	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3
0	+4	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3	−4
−1	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3	−4	−5
−2	+2	+1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6
−3	+1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7
−4	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8

✓ Ποια ιδιότητα της πρόσθεσης μπορείτε να εντοπίσετε στον πίνακα;

✓ Να εξετάσετε πότε ένα άθροισμα είναι θετικό και πότε αρνητικό.

✓ Να γράψετε ένα ζεύγος αριθμών που έχει άθροισμα -5. Πόσα τέτοια ζεύγη αριθμών υπάρχουν; Ποια είναι αυτά;

✓ Να εντοπίσετε τα ζεύγη που δίνουν άθροισμα 0 και να διατυπώσετε έναν γενικό κανόνα.

✓ Να βρείτε τρεις προσθετέους που έχουν άθροισμα 0.

Διερεύνηση (3)

Στον πίνακα φαίνεται μέρος της κατάστασης του τραπεζικού λογαριασμού του κυρίου Φαίδωνα.

Όταν το υπόλοιπο ενός λογαριασμού φαίνεται αρνητικό, σημαίνει ότι έχουμε υπερβεί το ποσό που διαθέτουμε και ότι χρησιμοποιούμε χρήματα από το παρατράβηγμα - όριο που μάς διαθέτει η τράπεζα.

Ημερομηνία	Καταθέσεις	Αναλήψεις	Υπόλοιπο
⋮			
8/3/2012	100		−378,68
9/3/2012		210,14	
10/4/2012	1000,55		
10/4/2012		125,20	
12/4/2012		50,00	
12/4/2012	500,00		
12/4/2012		467,32	
13/4/2012		1445,39	;
⋮			

✓ Να υπολογίσετε το υπόλοιπο του λογαριασμού του στις 13/4/2012. Να περιγράψετε τη μέθοδο που χρησιμοποιήσατε.

Μαθαίνω

Το άθροισμα: $(-3)+(+7)$ μπορεί να γραφτεί και ως: $-3+7$

- Για να **προσθέσουμε δύο ομόσημους** ρητούς αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημό τους.

  Παραδείγματα:
  $(+2)+(+5)=+(2+5)=+7$
  $(-4)+(-9)=-(4+9)=-13$

- Για να **προσθέσουμε δύο ετερόσημους** ρητούς αριθμούς, αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη, τη μικρότερη απόλυτη τιμή των αριθμών και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

  Παραδείγματα:
  $(-3)+(+7)=+(7-3)=+4$
  $(-8)+(+1)=-(8-1)=-7$

- Στην πρόσθεση ρητών αριθμών ισχύουν οι ιδιότητες:
Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, τότε:

  - $\boldsymbol{\alpha + \beta = \beta + \alpha}$ **Αντιμεταθετική**
  - $\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)}$ **Προσεταιριστική**

Παραδείγματα:
$(-12) + (+3) = (+3) + (-12)$ *Αντιμεταθετική*
$[(-2) + (+7)] + (-1) = (-2) + [(+7) + (-1)]$ *Προσεταιριστική*

- Το μηδέν είναι το **ουδέτερο στοιχείο** στην πρόσθεση, γιατί σε όποιο αριθμό προστεθεί δεν τον διαφοροποιεί. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha}$$

Παράδειγμα:
$(-13) + 0 = (-13)$ *Ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης*

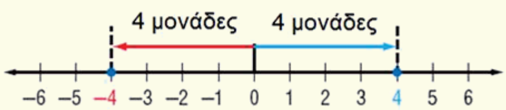
- **Αντίθετος** ενός αριθμού α είναι ο ρητός αριθμός $-\alpha$, που όταν προστεθεί στο α το άθροισμα είναι μηδέν. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{\alpha + (-\alpha) = 0}$$

Παράδειγμα:
$(-12) + (+12) = 0$
Άρα, ο αντίθετος του -12 είναι ο αριθμός $+12$.

  - Δύο ετερόσημοι αριθμοί που έχουν την ίδια απόσταση από το μηδέν, δηλαδή την ίδια απόλυτη τιμή, είναι **αντίθετοι**.

Παράδειγμα:
Οι αριθμοί $+4$ και -4 είναι αντίθετοι, αφού απέχουν εξίσου 4 μονάδες από το μηδέν.



Παραδείγματα

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α)	$(+12) + (+15)$	(β)	$-20 + 4$
(γ)	$(-9{,}5) + \left(+6\frac{1}{4}\right)$	(δ)	$\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-1\frac{1}{5}\right)$
(ε)	$(-7) + 0$	(στ)	$\left(-\frac{5}{3}\right) + \left(+\frac{5}{3}\right)$

Λύση:

(α) $(+12) + (+15) = +(12 + 15) = +27$

Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Άρα, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και βάζουμε το πρόσημό τους.

(β) $-20 + 4 \quad = -(20 - 4) = -16$

Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Άρα, αφαιρούμε τη μικρότερη από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή των αριθμών και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

(γ) $(-9{,}5) + \left(+6\frac{1}{4}\right) \quad = -9{,}50 + 6{,}25 = -3{,}25$

Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι.

(δ) $\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-1\frac{1}{5}\right)$

$$= -\overset{5}{\frac{1}{3}} - 1\overset{3}{\frac{1}{5}}$$
$$= -\frac{5}{15} - 1\frac{3}{15}$$
$$= -1\frac{8}{15}$$

Οι αριθμοί είναι ομόσημοι.

(ε) $(-7) + 0 \quad = -7$

Το μηδέν είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης.

(στ) $\left(-\frac{5}{3}\right) + \left(+\frac{5}{3}\right) \quad = 0$

Οι προσθετέοι είναι αντίθετοι. Άρα, το άθροισμά τους είναι μηδέν.

2. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $(-1{,}3) + (+5) + (+3{,}2) + \left(-\frac{5}{2}\right) + (+1{,}3) + \left(+\frac{5}{2}\right)$

(β) $(-3) + (+1) + (+3{,}2) + (-1{,}1) + (+1{,}3) + (-5)$

Λύση:

Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες της πρόσθεσης, για να υπολογίσουμε το άθροισμα με πιο εύκολο τρόπο.

(α) *Παρατηρούμε ότι υπάρχουν* ***αντίθετοι προσθετέοι****, οπότε τους διαγράφουμε, αφού το άθροισμά τους είναι* 0. *Ακολούθως, υπολογίζουμε το άθροισμα των ετερόσημων αριθμών που παραμένουν.*

$(-1{,}3) + (+5) + (+3{,}2) + \left(-\frac{5}{2}\right) + (+1{,}3) + \left(+\frac{5}{2}\right)$
$= \cancel{(-1{,}3) + (+1{,}3)} + \cancel{\left(-\frac{5}{2}\right) + \left(+\frac{5}{2}\right)} + (+3{,}2) + (+5)$
$= 0 + 0 + 3{,}2 + 5$
$= +8{,}2$

(β) *Υπολογίζουμε το άθροισμα όλων των αρνητικών και το άθροισμα όλων των θετικών αριθμών. Ακολούθως, υπολογίζουμε το άθροισμα των ετερόσημων αριθμών που προκύπτουν.*

$(-3) + (+1) + (+3{,}2) + (-1{,}1) + (+1{,}3) + (-5)$
$= -3 + 1 + 3{,}2 - 1{,}1 + 1{,}3 - 5$
$= -3 - 11 - 5 + 3{,}2 + 1{,}3 + 1$
$= -19 + 5{,}5$
$= -13{,}5$

Δραστηριότητες

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$ (β) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

(γ) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ (δ) $\frac{1}{5}+\frac{3}{4}$

(ε) $0{,}3+0{,}15$ (στ) $2{,}35+4{,}2$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(+8)+(+14)$ (β) $-3+25$

(γ) $(-9)+(+15)$ (δ) $+3-25$

(ε) $(-13)+(-15)$ (στ) $-28-2$

(ζ) $(+6)+(-19)$ (η) $-24+(-30)$

(θ) $(+16)+(-16)$ (ι) $-17+17$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

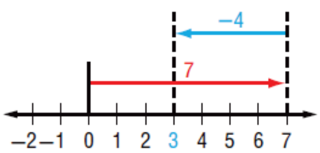
(α) $(-2{,}95)+(-1{,}2)$ (β) $-1{,}20+2$

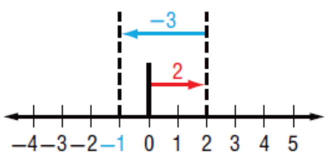
(γ) $\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(+\frac{2}{5}\right)$ (δ) $-2\frac{1}{3}-3\frac{1}{3}$

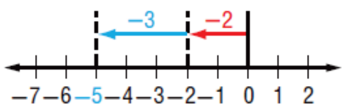
(ε) $\left(-\frac{1}{5}\right)+(-2{,}15)$ (στ) $-1\frac{1}{7}+4\frac{1}{2}$

(ζ) $\left(-1\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{10}\right)$ (η) $-3+1\frac{3}{4}$

4. Να γράψετε μια μαθηματική πρόταση με πρόσθεση που να περιγράφει καθεμιά από τις πιο κάτω αναπαραστάσεις:







5. Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα, που να μπορεί να λυθεί με την εξίσωση $(+33)+x=-16$. Στη συνέχεια, να λύσετε το πρόβλημα και να ερμηνεύσετε τη λύση.

6. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(+8)+(-3{,}5)+(+3{,}5)$

(β) $(-7{,}2)+(+3)+(+6{,}1)+(-9)+(-3)$

(γ) $+61+29-41-29$

(δ) $(+20)+(+14)+(-1013)+(+6)+(+1013)$

(ε) $(-5)+\left(+\frac{1}{2}\right)+(+12)+\left(-\frac{1}{2}\right)$

(στ) $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)+(-3)$

(ζ) $-\frac{1}{3}-2-2\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

7. Αν $\alpha=-5+12-9$ και $\beta=+7-3+1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\alpha+\beta$.

8. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω αριθμητικές παραστάσεις, όταν $x=-10$, $y=7$ και $z=-8$.

(α)	$x+\lvert -1\rvert$	(β)	$6+\lvert z\rvert$	(γ)	$z+(-5)$
(δ)	$y+z$	(ε)	$x+y+z$	(στ)	$\lvert x+y\rvert$

9. Να συμπληρώσετε τα πιο κάτω μαγικά τετράγωνα:

$+3$		$+1$
	0	
-1		

-1		$+1$
	-2	
		-3

10. Το υπόλοιπο του τραπεζικού λογαριασμού του κυρίου Παντελή ήταν σήμερα το πρωί €500,75. Να βρείτε το νέο υπόλοιπο στο τέλος της μέρας, αν έχουν πληρωθεί από τον λογαριασμό δύο επιταγές €315,45 και €224,22.

11. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$A=(-2{,}4)+(+1{,}5)+(-2014)+(+1)+(+2013)$

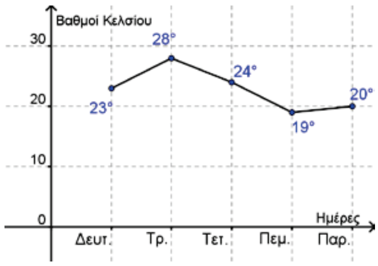
$B=(-3)+\left(-\frac{1}{2013}\right)+(-2{,}3)+\left(+\frac{1}{2013}\right)$

$\Gamma=A+B$

12. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

(α)	*Το άθροισμα δύο ρητών αριθμών είναι πάντα μεγαλύτερο από τον κάθε προσθετέο.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	*Αν το άθροισμα δύο ρητών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός, τότε και οι δύο ρητοί είναι πάντα αρνητικοί αριθμοί.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	*Αν $\alpha+\beta=0$, τότε οι α, β είναι αντίθετοι αριθμοί.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	*Το άθροισμα δέκα θετικών ρητών είναι πάντα θετικός αριθμός.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

13. Η διπλανή γραφική παράσταση παρουσιάζει τη μέγιστη ημερήσια θερμοκρασία για μια συγκεκριμένη εβδομάδα (Δευτέρα – Παρασκευή). Να υπολογίσετε τη συνολική μεταβολή της θερμοκρασίας από τη Δευτέρα μέχρι την Παρασκευή.



14. Να τοποθετήσετε τους αριθμούς $-6, -7, -5, -3$, 1, 2, 4, 5, 9 στα κουτάκια, ώστε να προκύψουν τρία ίσα αθροίσματα:

$$\square + \square + \square = \square + \square + \square = \square + \square + \square$$

15. Να γράψετε τις πιο κάτω παραστάσεις στην πιο απλή τους μορφή:

(α) $5\beta - 14\beta$ (β) $+2x - 3x - 5x + 12x - 15x$

(γ) $4y + 3 - 15y - 5$ (δ) $3y - 5 - 6 - 12y - 3$

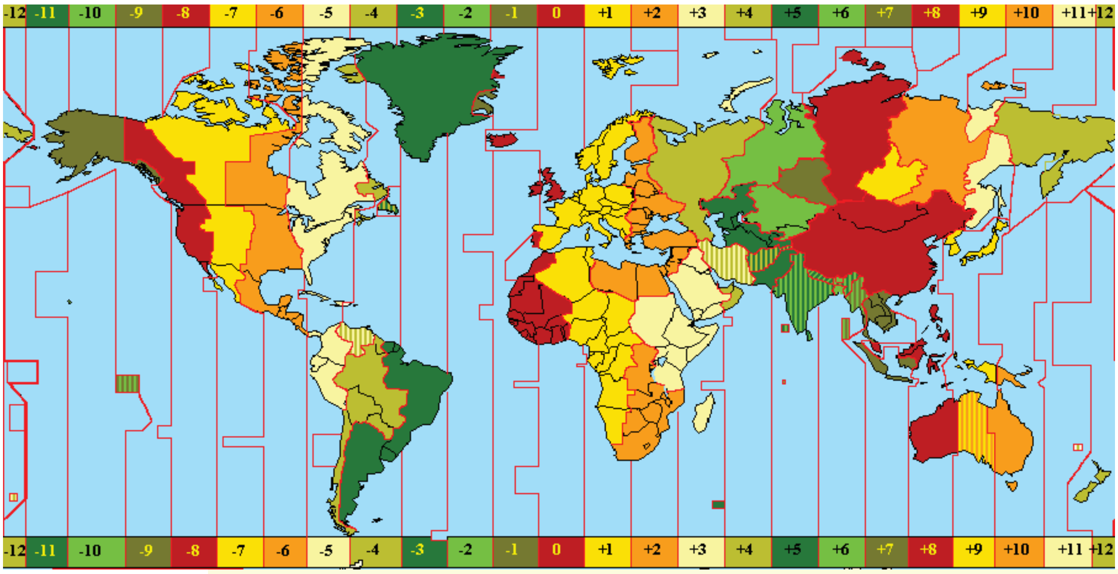
(ε) $5\alpha + 3\beta + 4\alpha - \beta$ (στ) $y + 2\omega - 3y + 2 + \omega - 5$

16. Ποιο είναι το συμπέρασμά σας για τους ρητούς α και β, αν:
(α) $\alpha + \beta = 0$
(β) $\alpha + \beta = \alpha$
(γ) $\alpha + \beta = 0$ και $\alpha + \beta = \alpha$

Αφαίρεση Ρητών Αριθμών

Εξερεύνηση

Οι επιστήμονες έχουν χωρίσει την υδρόγειο σφαίρα σε 24 ζώνες που λέγονται ωριαίες άτρακτοι. Ως αρχική ζώνη έχει καθοριστεί αυτή, στην οποία περιέχεται το αστεροσκοπείο του Greenwich στην Αγγλία. Η ώρα αυξάνεται για τις ζώνες που βρίσκονται δεξιά από αυτή στον χάρτη και μειώνεται για τις ζώνες που βρίσκονται στα αριστερά. Τα όρια των ζωνών δεν είναι ευθείες γραμμές, αλλά για πρακτικούς λόγους ακολουθούν τα σύνορα των χωρών (εκτός από μεγάλες σε έκταση χώρες π.χ. Η.Π.Α., Καναδάς).



- ✓ Να μελετήσετε τον χάρτη και να σχολιάσετε τις πληροφορίες που παρουσιάζει.

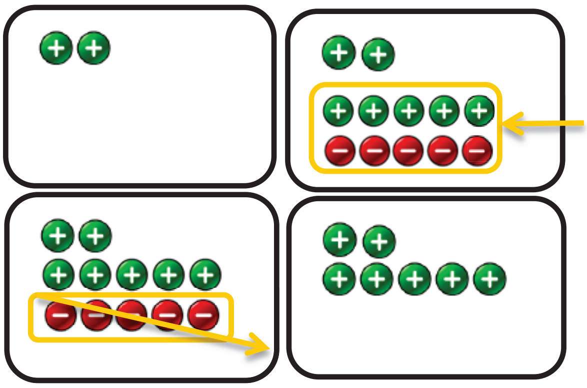
Διερεύνηση

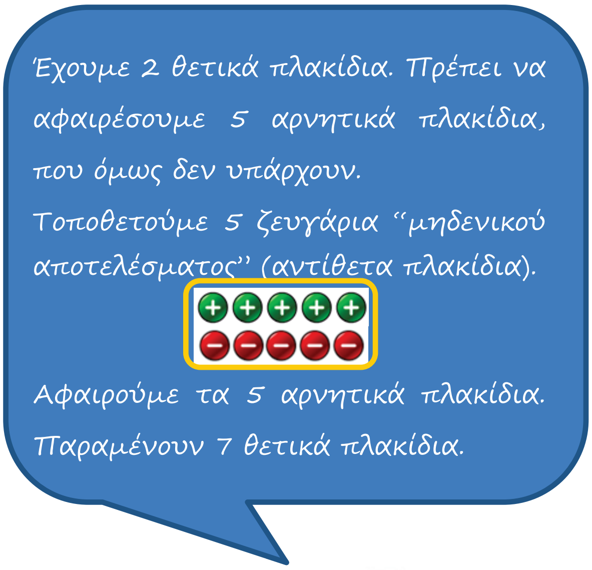
Μελετώντας τον πιο πάνω χάρτη, να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:

- ✓ Όταν στην Κύπρο είναι μεσημέρι, να σημειώσετε στον χάρτη, σε ποιες χώρες είναι μεσάνυχτα.
- ✓ Να σημειώσετε στον χάρτη ποιες χώρες έχουν διαφορά 5 ώρες με την Κύπρο.

Ο Παναγιώτης θέλει να υπολογίσει τη διαφορά της ώρας της Κύπρου και της Πολιτείας των Η.Π.Α., στην οποία διαμένει ο παππούς του. Η Κύπρος βρίσκεται στη ζώνη +2, ενώ η Πολιτεία αυτή βρίσκεται στη ζώνη −5.

Στις εικόνες φαίνεται ο τρόπος που χρησιμοποίησε ο Παναγιώτης, για να βρει τη διαφορά $(+2)-(-5)$.





Επομένως, $(+2)-(-5)=(+2)+(+5)=+7$

✓ Να ερμηνεύσετε το πιο πάνω μοντέλο και να διατυπώσετε έναν γενικό κανόνα για το πώς μπορούμε να υπολογίζουμε τη διαφορά δύο ρητών αριθμών.

Μαθαίνω

- Για να **αφαιρέσουμε** από τον ρητό αριθμό α τον ρητό αριθμό β, **προσθέτουμε** στον αριθμό α τον **αντίθετο** αριθμό του β.

  Δηλαδή, $\boldsymbol{\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)}$

  Παραδείγματα:
  $(+3)-(-4)=(+3)+(+4)=+7$
  $+12{,}5-(+2{,}3)=+12{,}5+(-2{,}3)=+10{,}2$

Στους ρητούς αριθμούς **η αφαίρεση μετατρέπεται σε πρόσθεση.** Είναι πάντα δυνατή και δεν απαιτείται να είναι ο μειωτέος πάντα μεγαλύτερος από τον αφαιρετέο.

- Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το «+» (ή δεν έχει πρόσημο), μπορούμε να την απαλείψουμε γράφοντας τους όρους που περιέχει με το ίδιο πρόσημο.

  Παράδειγμα:
  $+(-4+2-1) = -4+2-1 = -3$

- Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της «−» , μπορούμε να την απαλείψουμε γράφοντας τους όρους που περιέχει με αντίθετο πρόσημο.

  Παράδειγμα:
  $-(-4+2-1) = +4-2+1 = +3$

Παραδείγματα

1. Να κάνετε τις πράξεις:
   (α) $(+9)-(+12)$ (β) $7{,}3-(-15{,}14)$
   (γ) $(+3-4)-(-2+3-1)$

Λύση:

(α) $(+9)-(+12)$ $= (+9)+(-12)$
$= -3$

Για να αφαιρέσουμε το $+12$, προσθέτουμε τον αντίθετό του, δηλαδή το -12

(β) $7{,}3-(-15{,}14)$ $= +7{,}3+(+15{,}14)$
$= 22{,}44$

Για να αφαιρέσουμε το $-15{,}4$, προσθέτουμε τον αντίθετό του, το $+15{,}4$.

(γ) <u>Α΄ τρόπος</u>

Απαλείφουμε τις παρενθέσεις και υπολογίζουμε το άθροισμα.

$(+3-4)-(-2+3-1)$
$= \cancel{+3}-4+2-\cancel{3}+1$
$= +3-4$
$= -1$

<u>Β΄ τρόπος</u>

Υπολογίζουμε το άθροισμα κάθε παρένθεσης.

$(+3-4)-(-2+3-1)$
$= (-1)-(\cancel{-3}+\cancel{3})$
$= (-1)-0$
$= -1$

2. Η θερμοκρασία τήξης του υδραργύρου είναι περίπου $-38{,}9\ ^{\circ}\mathrm{C}$ και του αλουμινίου είναι περίπου $660{,}2\ ^{\circ}\mathrm{C}$. Ποια είναι η διαφορά των θερμοκρασιών τήξης του αλουμινίου και της θερμοκρασίας τήξης του υδραργύρου;

Λύση:

Υπολογίζουμε τη διαφορά των δύο θερμοκρασιών:

$$\begin{aligned} 660{,}2 - (-38{,}9) &= 660{,}2 + (+38{,}9) \\ &= 660{,}2 + 38{,}9 \\ &= 699{,}1 \end{aligned}$$

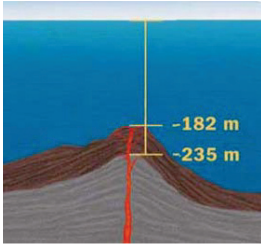
Δραστηριότητες

1. Να κάνετε τις πράξεις:
   (α) $(-17) - (+13)$ (β) $(+27) - (-8)$
   (γ) $(+5) - (+7)$ (δ) $4 - (-19)$
   (ε) $(-20) - (+5)$ (στ) $-19 - (-19)$
   (ζ) $0 - (-25)$ (η) $(+8) - (-10)$

2. Να κάνετε τις πράξεις:
   (α) $(+1{,}2) - (+2{,}6)$ (β) $4{,}9 - (-1{,}9)$
   (γ) $(-11) - (+4{,}2)$ (δ) $-1{,}5 - \left(-\frac{1}{2}\right)$
   (ε) $15\frac{1}{3} - \left(-14\frac{1}{2}\right)$ (στ) $-\frac{1}{8} - \left(-2\frac{1}{6}\right)$

3. Να γράψετε τους επόμενους 3 όρους των πιο κάτω μοτίβων:
   (α) $10,\ 8,\ 6,\ 4,\ \square,\ \square,\ \square$ (β) $-10, -7, -4, -1, \square, \square, \square$
   (γ) $19,\ 14,\ 9,\ 4,\ \square,\ \square,\ \square$ (δ) $-1\frac{1}{2}, -3, -4\frac{1}{2}, -6, \square, \square, \square$

4. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $>$, $=$, $<$, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:
   (α) -2000 ….. $-(-2000)$ (β) $-(+5)$ ….. $(+5) - (-10)$
   (γ) $-2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3}$ ….. $-2 - 4$ (δ) $-\left(-4\frac{1}{5}\right)$ ….. $-\left|-4\frac{1}{5}\right|$
   (ε) $|-1| - |-2|$ ….. $(-1) - (-2)$ (στ) $-3 - (-2)$ ….. $|-1 + 2|$



5. Οι εκρήξεις του υποθαλάσσιου ηφαιστείου Κίκεμ – Νζένη στην Καραϊβική θάλασσα ανεβάζουν το ύψος του ηφαιστείου. Το 1962 το ηφαίστειο βρισκόταν σε υψόμετρο $-235\,m$, ενώ το 2002 σε υψόμετρο $-182\,m$. Να υπολογίσετε τη διαφορά του υψομέτρου του ηφαιστείου το 2002 σε σχέση με το υψόμετρό του το 1962.

6. Να συμπληρώσετε κατάλληλα τα κενά, ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις:

(α) $\square - (-5) = +1$ (β) $\square - (+11) = +4$

(γ) $-5 + \square = 13$ (δ) $+12 - \square = -12$

(ε) $|-11| + \square = +20$ (στ) $\square - |-3| = +10\frac{1}{5}$

(ζ) $\left(-\frac{3}{11}\right) + \square = \left(-\frac{5}{11}\right)$ (η) $-1\frac{1}{2} + \square = -2\frac{19}{30}$

(θ) $-2 + \square > 0$ (ι) $7 - \square > 0$

7. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $(+10) + (-15) + (-3) - (-1) - (+7)$

(β) $-(-7) + (-5) - (+8) + (-7) - (-15)$

(γ) $12 - (11 - 3) + (5 - 7) - (8 + 6)$

(δ) $-(13{,}7 - 2{,}6) + 14{,}8 - (-8{,}7 + 5)$

(ε) $\frac{7}{12} - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{4}\right)$

8. Αν $x = -3$ και $y = +\frac{2}{3}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

$A = 3 + \left(x - y - \frac{5}{3}\right)$

$B = |x - y|$

9. Να εξετάσετε κατά πόσον οι επόμενες προτάσεις είναι ΚΑΠΟΤΕ, ΠΟΤΕ ή ΠΑΝΤΟΤΕ αληθείς. Να εξηγήσετε ή να δώσετε αντιπαράδειγμα, για να υποστηρίξετε την απάντησή σας.

(α) $Αρνητικός - Θετικός = Αρνητικός$

(β) $Αρνητικός - Αρνητικός = Θετικός$

(γ) $Θετικός - Θετικός = Θετικός$

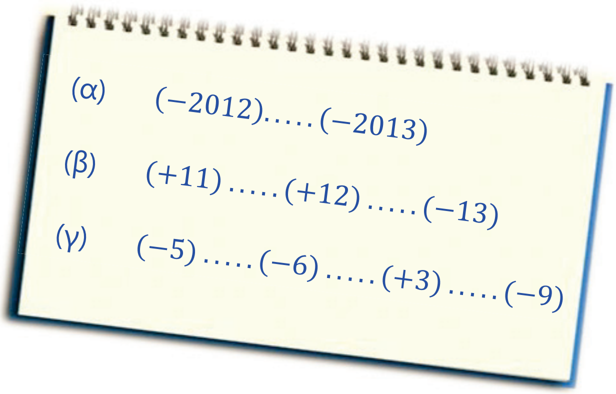
(δ) $Αρνητικός + Αρνητικός = Θετικός$

10. Να εκτιμήσετε την τιμή των επόμενων παραστάσεων. Στη συνέχεια, να χρησιμοποιήσετε την υπολογιστική σας, για να υπολογίσετε την ακριβή τιμή τους και να τη στρογγυλοποιήσετε στην πλησιέστερη ακέραια μονάδα.

$A = (-2{,}3 + 7{,}2) - (-5{,}9)$

$B = (-104{,}99 - 4{,}8) - (-100 + 2{,}99) - (-100{,}3)$

11. Να τοποθετήσετε + ή − στα κενά, ώστε οι πιο κάτω παραστάσεις να παίρνουν τη μέγιστη τιμή:



12. Ο Παναγιώτης έχει πάει για διακοπές στον παππού και στη γιαγιά του που διαμένουν στις Η.Π.Α.. Ο παππούς του, όπως και αρκετοί άλλοι εργαζόμενοι, δουλεύει σε διαφορετική Πολιτεία από αυτή στην οποία κατοικεί. Ο Παναγιώτης δεν μπορεί να καταλάβει πώς, ενώ ο παππούς του ξεκινά το πρωί από το σπίτι του η ώρα $08:00$ και ταξιδεύει για μια ώρα, φθάνει στην εργασία του στις $08:00$.

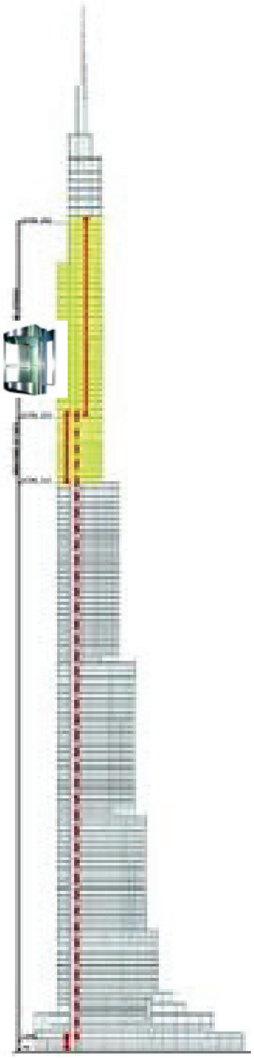
(α) Να εξηγήσετε στον Παναγιώτη πώς μπορεί να συμβαίνει αυτό.

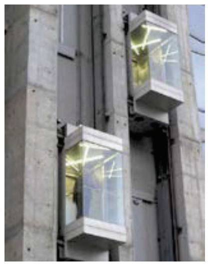
(β) Τι ώρα πρέπει να τον περιμένει το βράδυ, αν φεύγει από την εργασία του στις $17:00$;

Πολλαπλασιασμός Ρητών Αριθμών

Διερεύνηση (1)

Ο ουρανοξύστης $Burj\ Khalifa$ στο Ντουμπάι, με ύψος $829{,}84\ m$ και 160 ορόφους, είναι το ψηλότερο κτήριο στον κόσμο. Διαθέτει 57 ανελκυστήρες! Ένας από τους ανελκυστήρες του κατέχει το ρεκόρ της μεγαλύτερης διαδρομής που διανύει ανελκυστήρας στον κόσμο ($504\ m$). Ο ουρανοξύστης διαθέτει, επίσης, τους ταχύτερους ανελκυστήρες στον κόσμο, οι οποίοι κινούνται με ταχύτητα 18 μέτρα ανά δευτερόλεπτο.



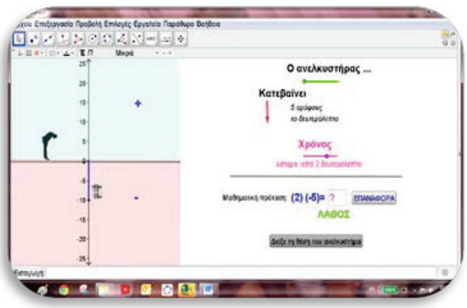


Ο ταχύτερος ανελκυστήρας του $Burj\ Khalifa$, σύμφωνα με τα πιο πάνω δεδομένα, ανεβαίνει ή κατεβαίνει 5 ορόφους το δευτερόλεπτο. Ένας ένοικος του κτηρίου, του οποίου το διαμέρισμα είναι περίπου στο μέσο του κτηρίου, παρατηρεί τον ανελκυστήρα. Να περιγράψετε με μαθηματικές προτάσεις τα πιο κάτω:

✓ Αυτή τη στιγμή ο ανελκυστήρας περνά μπροστά από τον ένοικο ανεβαίνοντας. Σε σχέση με τη θέση του ενοίκου:
- πού θα βρίσκεται σε 4 δευτερόλεπτα;
- πού βρισκόταν πριν από 3 δευτερόλεπτα;
- πόσο χρόνο θα χρειαστεί, για να ανεβεί ακόμη 20 ορόφους;
- πόσο χρόνο θα χρειαστεί, για να ανεβεί ακόμη 45 ορόφους;

✓ Αργότερα, ο ανελκυστήρας περνά μπροστά από τον ένοικο κατεβαίνοντας. Σε σχέση με τη θέση του ενοίκου:
- πού θα βρίσκεται σε 4 δευτερόλεπτα;
- πού βρισκόταν πριν από 3 δευτερόλεπτα;
- πόσο χρόνο θα χρειαστεί, για να κατεβεί ακόμη 10 ορόφους;
- πόσο χρόνο θα χρειαστεί, για να κατεβεί ακόμη 40 ορόφους;

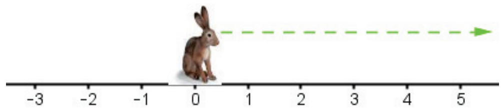
✓  Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «A_En_4_Ginomeno_1.ggb» και να διατυπώσετε έναν γενικό κανόνα για το γινόμενο *ομόσημων* και *ετερόσημων* αριθμών.



Διερεύνηση (2)

Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «A_En_4_Ginomeno_2.ggb», για να απαντήσετε τα ερωτήματα της δραστηριότητας.

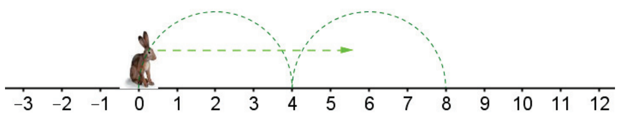
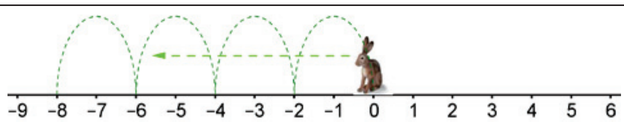
Ένας κλόουν σε τσίρκο ισχυρίζεται ότι ο λαγός του ξέρει μαθηματικά. Καλεί τον λαγό στη σκηνή και ξεκινά την επίδειξη. Ο λαγός στέκεται σε μια αριθμητική γραμμή στο σημείο 0 και βλέπει προς τα θετικά. Παρακολουθεί τέσσερις φωτεινές ενδείξεις.



✓ Να αλλάξετε τις ενδείξεις και να εξετάσετε προς τα πού βλέπει ο λαγός. Να διατυπώσετε τα συμπεράσματά σας.

Ένδειξη 1	Ένδειξη 2	Κατεύθυνση
+	+	*Βλέπει προς τα θετικά*
+	−	
−	+	
−	−	

✓ Να μεταβάλετε τις τέσσερις ενδείξεις στο εφαρμογίδιο ώστε να δώσετε οδηγίες στον λαγό να κινηθεί όπως φαίνεται στις πιο κάτω περιπτώσεις:

Περίπτωση	
Α	
Β	

✓ Να δώσετε εντολές στον λαγό για να μεταβεί στο -6. Να βρείτε όλους τους δυνατούς τρόπους που μπορεί να γίνει αυτό.

Μαθαίνω

- Το γινόμενο δυο **ομόσημων** αριθμών είναι **θετικός** αριθμός. Το γινόμενο δυο **ετερόσημων** αριθμών είναι **αρνητικός** αριθμός.

Το γινόμενο $(+3)\cdot(+7)$ γράφεται και ως: $(+3)(+7)$, παραλείποντας δηλαδή, το σύμβολο του πολλαπλασιασμού.

- Για να **πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς**, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «+».

  Παραδείγματα:

  $(+3)\cdot(+7) = +(7\cdot 3) = +21$
  $(-8)(-1) = +(8\cdot 1) = +8$

- Για να **πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς**, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «−».

  Παράδειγμα:
  $(+3)(-7) = -(7\cdot 3) = -21$

- Στον πολλαπλασιασμό ρητών αριθμών ισχύουν οι ιδιότητες:
  Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, τότε:
  - $\boldsymbol{\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha}$ ***Αντιμεταθετική***
  - $\boldsymbol{(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)}$ ***Προσεταιριστική***
  - $\boldsymbol{\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma}$ **και** $\boldsymbol{\alpha\cdot(\beta-\gamma) = \alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma}$
    Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την **πρόσθεση** και την **αφαίρεση.**

  Παραδείγματα:

  $(-2)(+3) = (+3)(-2)$ *Αντιμεταθετική*
  $[(-2)(+7)](-1) = (-2)[(+7)(-1)]$ *Προσεταιριστική*
  $(-2)[(-4)+(+6)] = (-2)(-4)+(-2)(-6)$ *Επιμεριστική*

- Το **1** είναι το **ουδέτερο** στοιχείο του πολλαπλασιασμού, έτσι με όποιο αριθμό πολλαπλασιαστεί δεν τον διαφοροποιεί. Δηλαδή,

$$\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{1}$$

  Παράδειγμα:
  $(-3)(+1) = (-3)$ *Ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού*

- Το γινόμενο δύο ή περισσότερων μη μηδενικών παραγόντων είναι:
  - **Αρνητικό**, αν το πλήθος των **αρνητικών** παραγόντων είναι **περιττός** αριθμός.
  - **Θετικό**, αν το πλήθος των **αρνητικών** παραγόντων είναι **άρτιος** αριθμός.

  Παραδείγματα:
  $(-3)(-1)(-2) = -6$
  $(-1)(-5)(-4)(-2) = +40$

- Για κάθε ρητό αριθμό α, $\alpha \neq 0$, υπάρχει μοναδικός ρητός αριθμός $\frac{1}{\alpha}$ που ονομάζεται **αντίστροφός** του. Το γινόμενο δυο αντίστροφων αριθμών είναι η μονάδα.

  Δηλαδή, $\boldsymbol{\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1}$

  Παράδειγμα:

  Οι αριθμοί -4 και $-\frac{1}{4}$ είναι αντίστροφοι.

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

(α) $3 \cdot (-4)$ (β) $-2 \cdot (+2)$

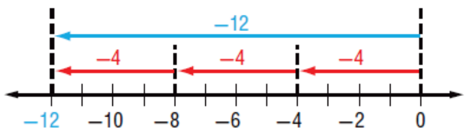
(γ) $-2 \cdot (-3)$ (δ) $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$

(ε) $0 \cdot (-2014)$ (στ) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$

Λύση:

(α) $3 \cdot (-4) = -(3 \cdot 4) = -12$

Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Άρα, το γινόμενο είναι αρνητικό.



(β) $-2 \cdot (+2) = -(2 \cdot 2) = -4$

Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Άρα, το γινόμενο είναι αρνητικό.

(γ) $-2 \cdot (-3) = +6$

Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Άρα, το γινόμενο είναι θετικό.

(δ) $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} = -\frac{3}{10}$

Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Άρα, το γινόμενο είναι αρνητικό.

(ε) $0 \cdot (-2014) = 0$

Ο ένας παράγοντας είναι μηδέν. Άρα, το γινόμενο είναι μηδέν.

(στ) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = +\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2} = +1$

Οι παράγοντες είναι αντίστροφοι αριθμοί. Άρα, το γινόμενο είναι $+1$.

2. Ένα αυτόματο σύστημα ποτίσματος αντλεί κάθε μέρα $1000\ l$ από μία δεξαμενή για την άρδευση του κήπου. Αν η δεξαμενή έχει σήμερα $30\ 000\ l$, να υπολογίσετε:
   (α) πόσο νερό είχε πριν από 3 ημέρες;
   (β) πόσο νερό θα έχει ύστερα από 3 ημέρες;

Λύση:

(α) *Αφού αφαιρούνται* $1000\,l$ *κάθε μέρα, πριν από* 3 *ήμερες είχαμε:* $(-3)(-1000) = +3000$

Άρα, είχαμε $30000 + 3000 = 33000\ l$.

(β) *Αφού αφαιρούνται* $1000\,l$ *κάθε μέρα, σε* 3 *ήμερες θα έχουμε:* $(+3)(-1000) = -3000$. *Δηλαδή, θα έχουμε* $30000 - 3000 = 27000\ l$.

3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης, όταν $\alpha = 0{,}5$.
   $A = \alpha\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$

Λύση:

$$\begin{aligned} A &= \alpha\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right)\left(\alpha - \tfrac{1}{2}\right) \\ &= 0{,}5 \cdot \left(0{,}5 + \tfrac{1}{2}\right) \cdot \left(0{,}5 - \tfrac{1}{2}\right) \\ &= 0{,}5 \cdot (0{,}5 + 0{,}5) \cdot (0{,}5 - 0{,}5) \\ &= 0{,}5 \cdot 1 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή.

Εκτελούμε τις πράξεις σύμφωνα με τους κανόνες προτεραιότητας.

4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
   $B = (-2)(+3)(-4)(+5) + (-2)(-3)(-4)(+5)$

Λύση:

Υπολογίζουμε το πρόσημο του κάθε γινομένου. Το πρώτο γινόμενο έχει 2 αρνητικούς παράγοντες και επομένως είναι θετικό. Το δεύτερο γινόμενο έχει 3 αρνητικούς παράγοντες και επομένως είναι αρνητικό.

$$\begin{aligned} B &= (-2)(+3)(-4)(+5) + (-2)(-3)(-4)(+5) \\ &= \cancel{+(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)} - \cancel{(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Αφού οι παράγοντες είναι οι ίδιοι, θα προκύψουν δύο ***αντίθετοι*** *αριθμοί. Άρα, το άθροισμα είναι μηδέν.*

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
   (α) $x - 2(x + 5)$ (β) $-\frac{1}{2}(4z - 6)$

Λύση:

(α) $x - 2(x+5)$

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

$= x - 2\cdot x - 2\cdot(+5)$

$= 1x - 2x - 10$

$= -x - 10$

Απλοποιούμε την αλγεβρική παράσταση, κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων.

(β) $-\frac{1}{2}(4z - 6)$

$= -\frac{1}{2}\cdot 4z - \frac{1}{2}\cdot(-6)$

$= -2z + 3$

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

Δραστηριότητες

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\frac{3}{4}\cdot 2$ (β) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}$

(γ) $\frac{1}{5}\cdot 2\frac{1}{2}$ (δ) $3{,}2\cdot 5{,}1$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(-7)\cdot(+2)$ (β) $(-2)\cdot(-5)$

(γ) $(-3)\cdot 0$ (δ) $-2\cdot(+3)$

(ε) $3\cdot(-12)$ (στ) $-5\cdot(-11)$

(ζ) $(-6{,}2)\cdot(-3)$ (η) $(-1)\cdot 0$

(θ) $8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ (ι) $(-2{,}1)\cdot(-3{,}2)$

(ια) $\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$ (ιβ) $-1\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(+3)\cdot(-1)\cdot(+2)$ (β) $(+3)\cdot(-1)\cdot(-2)$

(γ) $(+3)\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-2)$ (δ) $(+3)\cdot(+1)\cdot(+2)\cdot(-1)$

(ε) $(+3)\cdot 0\cdot(+2{,}5)\cdot(+1{,}2)$ (στ) $\underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot\ \dots\ \cdot(-1)}_{10\ \ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}$

(ζ) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(+\frac{2}{9}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ (η) $\underbrace{(-1)\cdot(+1)\cdot(-1)\cdot(+1)\cdot\dots\cdot(+1)}_{100\ \ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}$

(θ) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)\cdot 0$ (ι) $\underbrace{(+1)\cdot(-1)\cdot(+1)\cdot(-1)\cdot\ \dots\ \cdot(+1)}_{101\ \ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}$

4. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, όπως το παράδειγμα:

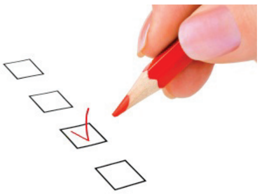
Ρητός Αριθμός	$+3$		$-2{,}5$		
Αντίθετος	-3	$+7$			$-1\frac{2}{7}$
Αντίστροφος	$+\frac{1}{3}$			$-\frac{3}{5}$	

5. Δίνονται τα πιο κάτω μοτίβα. Να γράψετε τους τρεις επόμενους όρους των μοτίβων και να διατυπώσετε τον κανόνα που χρησιμοποιήσατε για τον υπολογισμό του επόμενου όρου.

(α) $1, -2,\ 4, -8, \square, \square, \square$ (β) $2, -2,\ 2, -2, \square, \square, \square$

(γ) $1, -10, 100, -1000, \square, \square, \square$ (δ) $1, -3, 9, -27, \square, \square, \square$

6. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:



(α)	*Το γινόμενο δυο θετικών αριθμών είναι αρνητικό.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	*Ένας αρνητικός αριθμός πολλαπλασιαζόμενος με έναν αρνητικό αριθμό δίνει θετικό αριθμό.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	*Το γινόμενο τριών αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	*Το γινόμενο ενός αριθμού (διαφορετικού του μηδενός) με τον εαυτό του είναι πάντα θετικό.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	*Δύο αντίστροφοι ρητοί αριθμοί μπορούν να έχουν άθροισμα μηδέν.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

7. Να βρείτε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $3 \cdot (-6+8)$ (β) $-3 + 6 \cdot (-2)$

(γ) $6 - 2 \cdot (5+4)$ (δ) $6 \cdot (-2) - (-8)$

(ε) $-2 \cdot (-4) - (-1) \cdot (-1)$ (στ) $3 \cdot (-6) + 3 \cdot (-8+2)$

(ζ) $5 \cdot (-4+3) - 2 \cdot 21$ (η) $-2 \cdot (-6+10) - (-15)$

(θ) $(-3+3) \cdot (-3) - (-3)$ (ι) $\underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot \ \dots\ \cdot (-1)}_{5\ \ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma} - (-1)$

8. Να συμπληρώσετε τα κενά με τους κατάλληλους ρητούς αριθμούς, ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

(α) $(-3) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \square$ (β) $\left(+\frac{5}{7}\right) \cdot \left(+\frac{7}{5}\right) = \square$

(γ) $\left(-\frac{2012}{2013}\right) \cdot \left(-\frac{2013}{2012}\right) = \square$ (δ) $2 \cdot \square = +1$

(ε) $\square \cdot (-5) = 0$ (στ) $\left(+2\frac{1}{2}\right) \cdot \square = \left(-2\frac{1}{2}\right) \cdot (+1)$

(ζ) $(-3) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \square = -1$ (η) $(-2012) \cdot \square = (-1) - (-2)$

9. Να γράψετε με 8 διαφορετικούς τρόπους το -6 ως γινόμενο δύο ή περισσότερων ακέραιων παραγόντων.

10. Δίνονται οι ρητοί αριθμοί $-2{,}5$, $+9$, 0 , -1 , $+10$, -2100.
Να βρείτε ποιο ζεύγος αριθμών δίνει:
(α) το μέγιστο γινόμενο,
(β) το ελάχιστο γινόμενο.

11. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων, αντικαθιστώντας με $x = -1$.
$A = 2x + x\,(x + 1)$
$B = (3x + 2)(1 - x)(x + 0{,}5)$
$\Gamma = x(-2010)(-2011)(-2012) + x(-2012)(-2011)(+2010)$
$\Delta = x(-2)(+3)(+5)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) + x(-2)(-3)(-5)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$

12. Να γράψετε τις πιο κάτω παραστάσεις στην πιο απλή τους μορφή:

(α)	$-3(x+2)$	(β)	$-3(\kappa-1)+5$
(γ)	$\frac{1}{2}(6\alpha+32)$	(δ)	$6-(x-5)+7$
(ε)	$5(3x-2)+7x$	(στ)	$(4+x)-(x+2)$
(ζ)	$4(\mu+7)-6(4-\mu)$	(η)	$-5(y-11)+2y$

13. Σε έναν κινηματογράφο πωλήθηκαν 350 εισιτήρια των €6 και των €9.

(α) Αν πωλήθηκαν x εισιτήρια των €6, να εκφράσετε συμβολικά:
   i. τον αριθμό των εισιτηρίων των €9 που πωλήθηκαν,
   ii. την είσπραξη από τα εισιτήρια των €6,
   iii. την είσπραξη από τα εισιτήρια των €9,
   iv. τη συνολική είσπραξη.

(β) Αν γνωρίζουμε ότι πωλήθηκαν συνολικά 120 εισιτήρια των €6, να υπολογίσετε πόσα χρήματα ήταν η συνολική είσπραξη.

14. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση:
$B = 2(x-3y) + 4(2y-x) - 2(3-2x)$. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης B, όταν $x + y = 4$.

Δυνάμεις Ρητών Αριθμών

Διερεύνηση

Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο πρόσημο τη 2η στήλη του πιο κάτω πίνακα και ακολούθως να συμπληρώσετε και την τελευταία στήλη. Τι παρατηρείτε;

1η	2η	3η	4η
Δύναμη	Αποτέλεσμα	Δύναμη	Αποτέλεσμα
$(+3)^1$	3	$(-3)^1$	
$(+3)^2$	9	$(-3)^2$	
$(+3)^3$	27	$(-3)^3$	
$(+3)^4$	81	$(-3)^4$	
$(+3)^5$	243	$(-3)^5$	
$(+3)^6$	729	$(-3)^6$	
$(+3)^7$	2187	$(-3)^7$	
$(+3)^8$	6561	$(-3)^8$	
$(+3)^9$	19683	$(-3)^9$	
$(+3)^{10}$	59049	$(-3)^{10}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(+3)^{15}$	14348907	$(-3)^{15}$	
$(+3)^{16}$	43046721	$(-3)^{16}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(+3)^{20}$	3486784401	$(-3)^{20}$	

Μπορείτε να βρείτε ποιο θα είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 3^{40};

✓ Μπορεί μια δύναμη με βάση θετικό αριθμό να δώσει αρνητικό αποτέλεσμα; Αν ναι, να δώσετε ένα παράδειγμα.

✓ Πότε μια δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό δίνει θετικό και πότε αρνητικό αποτέλεσμα;

Μαθαίνω

- Κάθε δύναμη με **βάση θετικό αριθμό** είναι **θετικός αριθμός**.
  Αν $\boldsymbol{\alpha > 0}$, τότε $\boldsymbol{\alpha^{\nu} > 0}$ **όπου** $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{N}$.

  Παράδειγμα:
  $(+7)^3 = +343$

- Κάθε δύναμη με **βάση αρνητικό αριθμό** είναι:
  - **Θετικός αριθμός,** αν ο **εκθέτης είναι άρτιος.**
    Αν $\boldsymbol{\alpha < 0}$ και $\boldsymbol{\nu}$ άρτιος τότε $\boldsymbol{\alpha^{\nu} > 0}$.
    Παράδειγμα:
    $(-3)^2 = +9$
  - **Αρνητικός αριθμός,** αν ο **εκθέτης είναι περιττός.**
    Αν, $\boldsymbol{\alpha < 0}$ και $\boldsymbol{\nu}$ περιττός τότε $\boldsymbol{\alpha^{\nu} < 0}$.
    Παράδειγμα:
    $(-2)^3 = -8$

Παραδείγματα

1. Να βρείτε το πρόσημο των πιο κάτω δυνάμεων:
   (α) 5^2 (β) $(-5)^2$ (γ) $(+4)^5$ (δ) $(-1256)^{27}$

   Λύση:
   (α) *Η δύναμη 5^2 είναι **θετικός** αριθμός, αφού η βάση της δύναμης (5) είναι θετικός αριθμός.*
   (β) *Η δύναμη $(-5)^2$ είναι **θετικός** αριθμός, αφού η βάση της δύναμης (-5) είναι αρνητικός αριθμός και ο εκθέτης (2) είναι άρτιος αριθμός.*
   (γ) *Η δύναμη $(+4)^5$ είναι **θετικός** αριθμός, αφού η βάση της δύναμης $(+4)$ είναι θετικός αριθμός.*
   (δ) *Η δύναμη $(-1256)^{27}$είναι **αρνητικός** αριθμός, αφού η βάση της δύναμης (-1256) είναι αρνητικός αριθμός και ο εκθέτης (27) είναι περιττός αριθμός.*

2. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω δυνάμεις:
   (α) $(-4)^2$ (β) -4^2 (γ) $(-3)^3$
   (δ) $(+4{,}2)^0$ (ε) $(+1)^{2011}$ (στ) $(-1)^{2014}$

Λύση:

(α) $(-4)^2 = +(4^2) = 16$

(β) $-4^2 = -(4)^2 = -16$

(γ) $(-3)^3 = -27$

(δ) $(+4{,}2)^0 = 1$

(ε) $(+1)^{2011} = +1$

(στ) $(-1)^{2014} = +1$

Δραστηριότητες

1. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

Δύναμη	Βάση	Εκθέτης	Γινόμενο
$(-2)^3$			
	$-6{,}3$	2	
			$\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$

2. Να βρείτε το πρόσημο των δυνάμεων:

(α) $(-3)^4$ (β) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$ (γ) -2012^2 (δ) $(+2{,}15)^{2013}$

3. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο πρόσημο:

(α) $(-1)^8 = \cdots 1$ (β) $(-2)^4 = \cdots 16$ (γ) $(+3)^3 = \cdots 27$

(δ) $(-1)^5 = \cdots 1$ (ε) $-2^4 = \cdots 16$ (στ) $-6^2 = \cdots 36$

(ζ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \cdots \frac{1}{81}$ (η) $(-2{,}7)^1 = \cdots 2{,}7$ (θ) $(0{,}5)^3 = \cdots 0{,}125$

4. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

(α) $(-5)^2$ (β) -2^4

(γ) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$ (δ) $\left(\frac{1}{7}\right)^2$

(ε) $(-1)^{106}$ (στ) $(-18)^0$

(ζ) $-(-3)^3$ (η) $-(-10)^2$

5. Να γράψετε τους πιο κάτω αριθμούς υπό μορφή δύναμης με περισσότερους από έναν τρόπους:

(α) 25 (β) -8 (γ) 1

6. Η Αριάδνη συμπλήρωσε με τα σύμβολα $<, =, >$ τις πιο κάτω σχέσεις. Να εξετάσετε την ορθότητα του συλλογισμού της.

(α) $(-2)^3 = 8$	(β) $(-5)^0 = -5$
(γ) $-3^2 = +9$	(δ) $(-1)^9 = -1$
(ε) $-(-5)^2 = +25$	(στ) $-(-1)^8 = 1$
(ζ) $-3^0 = -1$	(η) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{6}$
(θ) $-(3-5)^0 > 0$	(ι) $(-5^3)^2 < 0$

7. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $<$, $=$, $>$, ώστε οι σχέσεις που θα προκύψουν να είναι αληθείς:

(α)	$(+2)^2$ …… $(-2)^2$	(β)	$(-7)^8$ …… $(+7)^8$
(γ)	$(+12)^3$ …… $(-12)^3$	(δ)	$(+113)^2$ …… $(-113)^2$
(ε)	$(-2)^{2013}$ …… $(+2)^{2013}$	(στ)	$(+4)^{41}$ …… $(-4)^{41}$

8. Να διατάξετε τους αριθμούς $(-6)^2$, 6^1, $(-6)^3$, 6^9 από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, χωρίς να υπολογίσετε τις δυνάμεις.

9. Η καθηγήτρια ζήτησε από τους μαθητές να σκεφτούν έναν αριθμό και να τον υψώσουν στο τετράγωνο.
   - *Η Μαρίνα βρήκε απάντηση ίση με τον αρχικό αριθμό που είχε σκεφτεί.*
   - *Ο Ιωάννης βρήκε απάντηση το δεκαπλάσιο από τον αρχικό αριθμό που είχε σκεφτεί.*
   - *Η Ισμήνη βρήκε έναν αριθμό μικρότερο από τον αρχικό αριθμό που είχε σκεφτεί.*

   Να βρείτε αριθμούς που μπορεί να σκέφτηκε το κάθε παιδί.

10. Αν $x = 1$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

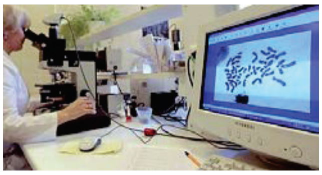
$$A = 2^{x+4} - 4^{3-x} + 1^{x+2} - 5^{x-1}$$

11. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^{2015} + (-1)^{2016}$$

Διαίρεση Ρητών Αριθμών

Διερεύνηση (1)



Σε ένα εργαστήριο γενετικής θέλουν να εξετάσουν πώς συμπεριφέρεται ένας ιός, όταν αλλάζει η θερμοκρασία. Έχει σχεδιαστεί ένα πείραμα, στο οποίο έχει δοθεί εντολή στον υπολογιστή να μεταβάλλει τη θερμοκρασία της καλλιέργειας κατά $-2\ ℃$ ανά ώρα.

- ✓ Αν ο επιστήμονας θέλει να πετύχει μείωση $12\ ℃$, σε πόσες ώρες θα το πετύχει;
- ✓ Αν στις $08{:}00$ η θερμοκρασία είναι στους $2\ ℃$, πότε θα φθάσει στους $-8\ ℃$;
- ✓ Ποια ήταν η θερμοκρασία στις $03{:}00$, αν στις $08{:}00$ η θερμοκρασία ήταν $2\ ℃$;

Διερεύνηση (2)

Να βρείτε τους κοινούς ακέραιους αριθμούς που διαιρούν το -12 και το -15.

- ✓ Να εξετάσετε πώς συνδέεται η πράξη του πολλαπλασιασμού με την πράξη της διαίρεσης.
- ✓ Να διατυπώσετε έναν κανόνα για το πώς υπολογίζουμε το πηλίκο δύο ρητών αριθμών.

Μαθαίνω

- Το πηλίκο δυο **ομόσημων ρητών** αριθμών είναι **θετικό.** Το πηλίκο δυο **ετερόσημων ρητών** αριθμών είναι **αρνητικό**.

- Για να **διαιρέσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς**, **διαιρούμε** τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε το πρόσημο «+».
  Παραδείγματα:
  $(+12) : (+2) = +(12 : 2) = +6$
  $(-30) : (-5) = +(30 : 5) = +6$

- Για να **διαιρέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς**, **διαιρούμε** τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε το πρόσημο «−».
  Παραδείγματα:
  $(-45) : (+5) = -(45 : 5) = -9$
  $(+2{,}1) : (-7) = -(2{,}1 : 7) = -0{,}3$

Το πηλίκο και το γινόμενο ακολουθούν τους ίδιους κανόνες σε ό,τι αφορά στο πρόσημο.
Η διαίρεση μπορεί να μετατραπεί σε πολλαπλασιασμό του αντίστροφου αριθμού.

- Η διαίρεση $\frac{\alpha}{\beta}$ μπορεί να γραφεί ως **γινόμενο** του α επί τον **αντίστροφο** του αριθμού β.
  Δηλαδή , $\quad \boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}}, \qquad \beta \neq 0$

  Παράδειγμα:
  $(-5) : (+2) = (-5) \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$

- Ισχύει ότι: $\quad \boldsymbol{\frac{-\alpha}{-\beta} = \frac{\alpha}{\beta}} \quad$ και $\quad \boldsymbol{\frac{-\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{-\beta} = -\frac{\alpha}{\beta}}$
  Παραδείγματα:
  $\frac{-5}{-20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \qquad \frac{-15}{3} = \frac{15}{-3} = -\frac{15}{3} = -5$

- **Σύνθετο κλάσμα** ονομάζεται το κλάσμα, του οποίου ένας τουλάχιστον από τους δύο όρους (αριθμητής – παρονομαστής) είναι κλάσμα. Ένα σύνθετο κλάσμα μετατρέπεται σε απλό διαιρώντας τον αριθμητή με τον παρονομαστή.

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma} \qquad \beta \neq 0, \gamma \neq 0, \delta \neq 0$$

  Παράδειγμα:
  $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{21}{20}$

Ειδικές περιπτώσεις:
$\alpha : \alpha = 1$, $\alpha \neq 0$
$\alpha : 1 = \alpha$
$0 : \alpha = 0$, $\alpha \neq 0$

- Στη διαίρεση ρητών αριθμών ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα:

  - **Επιμεριστική ιδιότητα** της διαίρεσης ως προς την **πρόσθεση** και την **αφαίρεση.** Δηλαδή, αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ και $\alpha \neq 0$, τότε:

$$(\beta + \gamma) : \alpha = \beta : \alpha + \gamma : \alpha \quad \textbf{και} \quad (\beta - \gamma) : \alpha = \beta : \alpha - \gamma : \alpha$$

Παράδειγμα:
$[(-4) + (+6)] : (-2) = (-4) : (-2) + (+6) : (-2)$ *Επιμεριστική*

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:
(α) $-12 : 3$ (β) $-24 : (-3)$ (γ) $\frac{-55}{11}$
(δ) $\frac{-28-14}{-7}$ (ε) $\frac{5}{12} : \left(-\frac{4}{25}\right)$

Λύση:

(α) $-12 : 3 = -(12 : 3) = -4$
Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Άρα, το πηλίκο είναι αρνητικό.

(β) $-24 : (-3) = +(24 : 3) = 8$
Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Άρα, το πηλίκο είναι θετικό.

(γ) $\frac{-55}{11} = -\frac{55}{11} = -5$
Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Άρα, το πηλίκο είναι αρνητικό.

(δ) $\frac{-28-14}{-7} = \frac{-42}{-7} = +6$
Εκτελούμε πρώτα την πράξη στον αριθμητή και ακολούθως τη διαίρεση. Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Άρα, το πηλίκο είναι αρνητικό.

(ε) $\frac{5}{12} : \left(-\frac{4}{25}\right) = \frac{5}{12} \cdot \left(-\frac{25}{4}\right) = -\frac{125}{48} = -2\frac{29}{48}$
Μετατρέπουμε τη διαίρεση σε πολλαπλασιασμό, αντιστρέφοντας τον διαιρέτη.

2. Από στοιχεία της NASA φαίνεται ότι η μέση θερμοκρασία στην επιφάνεια του Άρη είναι -85 βαθμοί Φαρενάιτ. Να χρησιμοποιήσετε τον τύπο, $C = \frac{5(F-32)}{9}$ όπου F η θερμοκρασία σε βαθμούς Φαρενάιτ και C η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου, για να βρείτε τη θερμοκρασία του Άρη σε βαθμούς Κελσίου.

Λύση:

$C = \frac{5(F-32)}{9} = \frac{5(-85-32)}{9}$ *Αντικαθιστούμε το F με -85.*

$= \frac{5(-117)}{9}$ *Υπολογίζουμε το άθροισμα.*

$= \frac{-585}{9}$ *Υπολογίζουμε το γινόμενο.*

$= -65$ *Διαιρούμε τους δυο ετερόσημους αριθμούς.*

3. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
   (α) $\left(-\frac{2012}{2013}\right) \cdot \left(-\frac{2013}{2012}\right) - (-3+1+2) : (-2)$
   (β) $[-52 + (-6)^2] : (-1) - \ (8-9)^9$

Λύση:

(α) *Εφαρμόζουμε τους κανόνες προτεραιότητας που ισχύουν και στις αριθμητικές παραστάσεις ρητών αριθμών.*

$\left(-\frac{2012}{2013}\right) \cdot \left(-\frac{2013}{2012}\right) - (-3+1+2) : (-2)$ *Εκτελούμε την πράξη στην παρένθεση.*

$= \left(-\frac{2012}{2013}\right) \cdot \left(-\frac{2013}{2012}\right) - \ 0 : (-2)$ *Εκτελούμε τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση.*

$= (+1) - 0$ *Εκτελούμε την αφαίρεση.*

$= +1$

(β) *Υπολογίζουμε αρχικά το αποτέλεσμα στην αγκύλη (πρώτα τη δύναμη και μετά την πρόσθεση) καθώς και το αποτέλεσμα της παρένθεσης.*

$[-52 + (-6)^2] : (-1) - (8-9)^9$

$= [-52 + 36] : (-1) - (-1)^9$

$= (-16) : (-1) - (-1)^9$ *Εκτελούμε τη διαίρεση.*

$= (+16) - (-1)$ *Εκτελούμε την αφαίρεση.*

$= +16 + 1$

$= +17$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις και να τις κατατάξετε από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη:

   $\mathrm{A} = \frac{10}{-2}$ $\quad \mathrm{B} = -20 : 5$ $\quad \Gamma = (-4) : (-3)$

   $\Delta = (-2) : (+5)$ $\quad \mathrm{E} = 8 : (-10)$ $\quad \mathrm{Z} = (-12) : (-16)$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(-10):(-2)$ (β) $(-15):5$ (γ) $18:(-3)$

(δ) $(-70):(-7)$ (ε) $(-2{,}1):(-3)$ (στ) $(-4{,}5):9$

(ζ) $50:(-0{,}5)$ (η) $(-12{,}24):(-4)$ (θ) $80:(-2)$

(ι) $\frac{3}{25}:\left(-\frac{21}{10}\right)$ (ια) $\left(-1\frac{2}{3}\right):5$ (ιβ) $(-7):\left(-\frac{1}{14}\right)$

3. Να βρείτε τους κοινούς ακέραιους αριθμούς που διαιρούν το -20 και το -15.

4. Να βρείτε τρεις διαφορετικούς αριθμούς που διαιρούνται με το $+2$ και έχουν άθροισμα $+4$.

5. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο σύμβολο $<$, $=$, $>$, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

(α) $(+6):(-2)\ \ldots\ldots\ +5-2$ (β) $(-12):(-3)\ \ldots\ldots\ -12-(-3)$

(γ) $(+6)\left(-\frac{2}{3}\right)\ \ldots\ldots\ 0$ (δ) $(-1)^2\ \ldots\ldots\ (-1):(-1)$

(ε) $\left(-\frac{1}{2}\right)(+2)\ \ldots\ldots\ -2-2$ (στ) $\left(-\frac{1}{2}\right)(+6)\ \ldots\ldots\ \left(+\frac{3}{5}\right)(-10)$

6. Να συμπληρώσετε τα κενά με τους κατάλληλους αριθμούς, ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

(α) $(+32):\square=(+8)$ (β) $(-24):(-6)=\square$

(γ) $(-25):\square=+5$ (δ) $(+24):\square=+2$

(ε) $\square:(-3)=-4$ (στ) $\square\cdot(-5)=-5$

(ζ) $(-4)\cdot\square=-\frac{1}{2}$ (η) $(+3)\cdot\square=-9$

(θ) $\frac{-40}{+5}=\square$ (ι) $-\frac{4}{\square}=-2$

(ια) $\frac{\square}{-12}=+2$ (ιβ) $\frac{\square}{\square}=-2$

7. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τη μέση θερμοκρασία στην Ανταρκτική κατά τους μήνες Ιούλιο μέχρι Δεκέμβριο.

Μήνας	Ι	Α	Σ	Ο	Ν	Δ
Θερμοκρασία °F	-49	-58	-50	-41	-40	-20

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $C=\frac{5(F-32)}{9}$ να μετατρέψετε τη μέση θερμοκρασία του Ιουλίου και του Αυγούστου σε βαθμούς Κελσίου.

8. Να εξετάσετε πότε το πηλίκο δύο ακέραιων αριθμών είναι:
   (α) ίσο με $+1$
   (β) ίσο με -1
   (γ) ίσο με 0

9. Να κάνετε τις πράξεις:

   (α) $(-12-4):(-4)$ (β) $(-9+3):(-2-4)$
   (γ) $(-2+3-1):(-3+2)$ (δ) $(-2-5-1):(-3+1)$
   (ε) $\left(+\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\right):\left(-\frac{9}{28}\right)$ (στ) $\left(-\frac{2}{11}\right):(-4-2)$
   (ζ) $\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{2}{3}}$ (η) $\dfrac{-\frac{2}{5}}{-4}$

10. Να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:
   (α) $(-20):2-(-2)$
   (β) $(-21)+6:3$
   (γ) $10+3\cdot 2-7$
   (δ) Να τοποθετήσετε παρενθέσεις/αγκύλες σε κάθε παράσταση, ώστε να έχει αποτέλεσμα -5.

11. Να τοποθετήσετε στα κενά την κατάλληλη πράξη, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

   (α) $(-10)\ldots\ldots\ (-2)\ldots\ldots\ (+1)=21$
   (β) $(-5)\ldots\ldots\ (-2)\ldots\ldots\ (+4)=1$
   (γ) $6\ldots\ldots\ (-7)\ldots\ldots\ (+2)=-44$
   (δ) $(-8)\ldots\ldots\ (-2)\ldots\ldots\ (-2\ )=-9$

12. Να κάνετε τις πράξεις:
   (α) $-45-35:(-5)$
   (β) $15-(-2)\cdot(-1+3)$
   (γ) $(-2)\cdot(-3)-(-12):(-1)$
   (δ) $127-25\cdot(-1+2)$
   (ε) $-2-[-3-2:(-1-1)]$
   (στ) $\left(2\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+2-\frac{1}{2009}+\frac{1}{2009}\right):(-1)$
   (ζ) $\dfrac{-2-4}{(-6)(-1)}$ (η) $\dfrac{-2-(-6)(+1)}{(-2+4)(-1)}$
   (θ) $\dfrac{-(-2)+(+8-3)}{-(-9+5+3)}$ (ι) $\dfrac{(-6)(+2)+(-4-3)+1}{(-8+10)+7}$
   (ια) $\dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)}{(-2)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}$ (ιβ) $\dfrac{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{-2:\left(-\frac{4}{3}\right)}$

13. Να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων, όταν $\alpha = 12$, $\beta = -4$ και $\gamma = -6$:

(α) $\alpha : \beta$ (β) $\frac{-\alpha}{\gamma}$

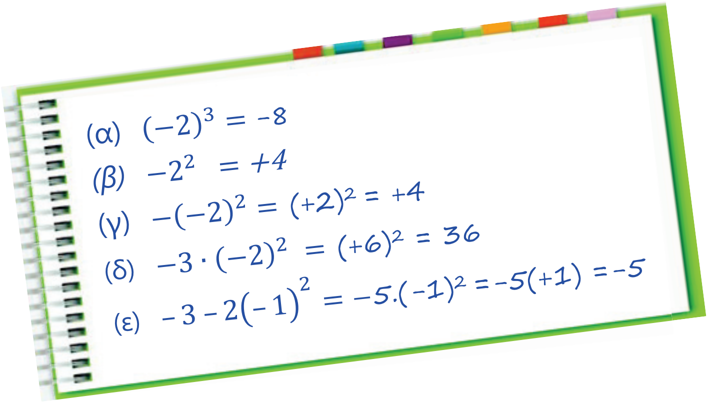
(γ) $(\alpha + \gamma) : (\beta + 2)$ (δ) $(\alpha - \beta)(\gamma + \beta)$

(ε) $\frac{\alpha\beta + \gamma\alpha}{\beta}$ (στ) $\frac{16-(-\alpha)}{-\beta}$

14. Να τοποθετήσετε **παρενθέσεις ή αγκύλες** στην πιο κάτω παράσταση, ώστε να προκύψει η παράσταση με τιμή -11:

$$(-5) + (+4) - (-2) : (-1) \cdot (-3)$$

15. Ο Χριστόφορος έκανε τις πράξεις, όπως φαίνεται δίπλα. Να εξετάσετε την ορθότητα των πράξεών του.



16. Αν $\alpha = -2$ και $\beta = 3$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $3\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

(β) $(\alpha^2 - \beta) : (-1) + \alpha\beta^2$

17. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $-3(-3)^2$

(β) $6 - (-2 + 1)^5$

(γ) $(-4)^2 + 3^2 - 1^3 - (+2)^3$

(δ) $(2^3 - 3) : (-5) + (3 - 5)^2$

(ε) $(-7)^2 : (-7) + (-3)^2 + 5^0 - 1^{20}$

(στ) $7{,}25 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-1 + 2)^3 + (-3) : (-4{,}2)^0$

(ζ) $(-2)^3 - (-2)^2 - (-5)^2 : \left(+2\frac{1}{2}\right) - (-3)^2$

(η) $\frac{3 \cdot (-2)^2 + 2 - (+5)}{5^2 - 2 \cdot (2011 - 2012)^3}$

Περιοδικοί Ρητοί Αριθμοί

Διερεύνηση

Στον πιο κάτω πίνακα ο Άγγελος έχει γράψει τα κλάσματα $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{16}$ ως δεκαδικούς αριθμούς.

Κλάσμα	Δεκαδικός αριθμός	Κλάσμα	Δεκαδικός αριθμός
1	1	$\frac{1}{9}$	0,111111111111 ....
$\frac{1}{2}$	0,5	$\frac{1}{10}$	0,1
$\frac{1}{3}$	0,333333333333 ...	$\frac{1}{11}$	0,090909090909 ...
$\frac{1}{4}$	0,25	$\frac{1}{12}$	0,833333333333 ...
$\frac{1}{5}$	0,2	$\frac{1}{13}$	0,076923076923 ...
$\frac{1}{6}$	0,1666666666666 ...	$\frac{1}{14}$	0,0714285714285714 ...
$\frac{1}{7}$	0,142857142857 ...	$\frac{1}{15}$	0,066666666666666 ...
$\frac{1}{8}$	0,125	$\frac{1}{16}$	0,625

✓ Να μελετήσετε τον πίνακα και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

✓ Ο Άγγελος ισχυρίζεται ότι όλα τα κλάσματα, που ο παρονομαστής τους μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο με παράγοντες δυνάμεις του 2 ή/και του 5, αναλύονται σε δεκαδικούς με πεπερασμένα στο πλήθος δεκαδικά ψηφία. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό του.

Για να υποδείξουμε ότι επαναλαμβάνεται ένα ψηφίο ή ομάδα ψηφίων, βάζουμε μία παύλα πάνω από το επαναλαμβανόμενο ή τα επαναλαμβανόμενα ψηφία.

Μαθαίνω

- Ένας δεκαδικός αριθμός ονομάζεται **περιοδικός δεκαδικός**, όταν έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία και από ένα ψηφίο και μετά αποτελείται από ένα επαναλαμβανόμενο «τμήμα». Το επαναλαμβανόμενο «τμήμα» του αριθμού ονομάζεται **περιοδικό τμήμα**. Το πλήθος των ψηφίων του επαναλαμβανόμενου τμήματος ονομάζεται **περίοδος**.

  Παράδειγμα:
  $0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$ *, το 3 είναι το περιοδικό τμήμα του αριθμού ενώ η περίοδος του αριθμού είναι 1.*
  $-34{,}23181818\ldots = -34{,}23\overline{18}$ *, το 18 είναι το περιοδικό τμήμα του αριθμού ενώ η περίοδος του αριθμού είναι 2.*

- Ένας περιοδικός δεκαδικός αριθμός ονομάζεται:
  - **απλός περιοδικός**, όταν το περιοδικό τμήμα αρχίζει αμέσως μετά την υποδιαστολή ή
  - **μικτός περιοδικός**, όταν το περιοδικό τμήμα δεν αρχίζει αμέσως μετά την υποδιαστολή.

  Παράδειγμα:
  Ο αριθμός $0{,}\overline{3}$ *είναι απλός περιοδικός*
  Ο αριθμός $-34{,}23\overline{18}$ *είναι μικτός περιοδικός*

- Κάθε **ρητός** αριθμός μπορεί να γραφεί ως **δεκαδικός** με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων ή ως **περιοδικός δεκαδικός** και, αντιστρόφως, κάθε δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να γραφεί ως κλάσμα.

  Παράδειγμα:
  $\frac{5}{16} = 0{,}3125$, $\frac{5}{12} = 0{,}41\overline{6}$

- Για να μετατρέψουμε έναν **απλό περιοδικό** δεκαδικό αριθμό σε κλασματικό, ακολουθούμε τα πιο κάτω βήματα:
  - Θέτουμε τον αριθμό ίσο με μια μεταβλητή (x).
  - Πολλαπλασιάζουμε την ισότητα που προκύπτει με τη δύναμη του 10 που έχει εκθέτη την περίοδο του αριθμού.
  - Αφαιρούμε κατά μέλη τις δύο ισότητες και προκύπτει εξίσωση της μορφής $\alpha x = \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{Z},\ \alpha \neq 0)$.

  Η λύση $x = \frac{\beta}{\alpha}$ είναι η κλασματική μορφή του περιοδικού αριθμού.
  Βλέπε παράδειγμα 2, σελίδα 171

- Για να μετατρέψουμε έναν **μικτό περιοδικό** δεκαδικό αριθμό σε κλασματικό, ακολουθούμε τα πιο κάτω βήματα:
  - Θέτουμε τον αριθμό ίσο με μια μεταβλητή.
  - Πολλαπλασιάζουμε την ισότητα με την κατάλληλη δύναμη του 10 ώστε να προκύψει απλός περιοδικός αριθμός.

  Ακολουθούμε τα βήματα της διαδικασίας μετατροπής απλού περιοδικού δεκαδικού αριθμού.
  Βλέπε παράδειγμα 3, σελίδα 172

Παραδείγματα

1. Να γράψετε τους πιο κάτω αριθμούς σε δεκαδική μορφή:

(α) $2\frac{3}{5}$ (β) $\frac{5}{8}$ (γ) $\frac{-5}{3}$

Λύση:

(α) *Ο αριθμός* $2\frac{3}{5}$ *μπορεί να γραφεί* $2\frac{3}{5} = 2\frac{6}{10} = 2{,}6$.

(β) *Ο αριθμός* $\frac{5}{8}$ *ισοδυναμεί με το πηλίκο του* $5 : 8$

Επομένως, $\frac{5}{8} = 0{,}625$

$$\begin{array}{r|l} 5{,}000 & 8 \\ \cline{2-2} \underline{-48} & 0{,}625 \\ 20 & \\ \underline{-16} & \\ 40 & \\ \underline{-40} & \\ 0 & \end{array}$$

(γ) *Για να γράψουμε τον αριθμό* $\frac{-5}{3}$ *ως δεκαδικό, διαιρούμε τον αριθμό* 5 *με τον* 3 *και βάζουμε το αρνητικό πρόσημο.*

$$\begin{array}{r|l} 5{,}000 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{-3} & 1{,}666 \\ 20 & \\ \underline{-18} & \\ 20 & \\ \underline{-18} & \\ 20 & \\ \vdots & \end{array}$$

Επομένως, $\frac{-5}{3} = -\frac{5}{3} = -1{,}666\cdots = -1{,}\overline{6}$

2. Να μετατρέψετε τον αριθμό $0{,}\overline{3}$ σε κλασματικό αριθμό.

Λύση:

$x = 0{,}333\ldots$	*Θέτουμε τον αριθμό ίσο με* x.
$10x = 3{,}333\ldots$	*Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το* 10.
$10x - x = 3{,}333\ldots - 0{,}333\ldots$ $\Rightarrow 9x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$	*Αφαιρούμε κατά μέλη τις δύο ισότητες και λύουμε την εξίσωση που προκύπτει.*

Άρα $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$

3. Να μετατρέψετε τον αριθμό $0{,}58\overline{6}$ σε κλασματικό αριθμό.

Λύση:

$x = 0{,}58666\ldots$	*Θέτουμε τον αριθμό ίσο με x.*
$100x = 58{,}666\ldots$	*Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το 100 για να γίνει απλός περιοδικός δεκαδικός αριθμός.*
$1000x = 586{,}666\ldots$	*Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το 1000.*

$1000x - 100x = 586{,}666\ldots - 58{,}666\ldots$

$\Rightarrow 900x = 528$

$\Rightarrow x = \frac{528}{900} = \frac{44}{75}$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις δύο ισότητες και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.

Άρα $0{,}58\overline{6} = \frac{44}{75}$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε με ποιο κλασματικό αριθμό είναι ίσοι οι επόμενοι περιοδικοί αριθμοί:
   (α) $4,\overline{7}$ (β) $2,\overline{3}$
   (γ) $3{,}4\overline{17}$ (δ) $0{,}2\overline{8}$

2. Να γράψετε τα κλάσματα $1\frac{3}{11}$, $\frac{3}{8}$ και $\frac{-5}{6}$ σε δεκαδική μορφή.

3. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:
   (α) $1,\overline{1}$ και $1{,}11111111$
   (β) $3{,}6\overline{8}$ και $3{,}68$
   (γ) $4{,}9\overline{12}$ και $4{,}9\overline{102}$

4. Να κατατάξετε κατά αύξουσα σειρά τους πιο κάτω αριθμούς:

$0{,}6\overline{9}$ $0,\overline{69}$ $0{,}0\overline{69}$ $0,\overline{6}$ $0{,}69$

Επίλυση Εξισώσεων
στο Σύνολο των Ρητών Αριθμών

Εξερεύνηση

Όταν πέθανε ο Διόφαντος, μεγάλος Έλληνας μαθηματικός του 3ου μ.Χ. αιώνα, οι μαθητές του, κατά παραγγελία του, αντί άλλου επιγράμματος, συνέθεσαν έναν γρίφο και τον έγραψαν πάνω στον τάφο του.

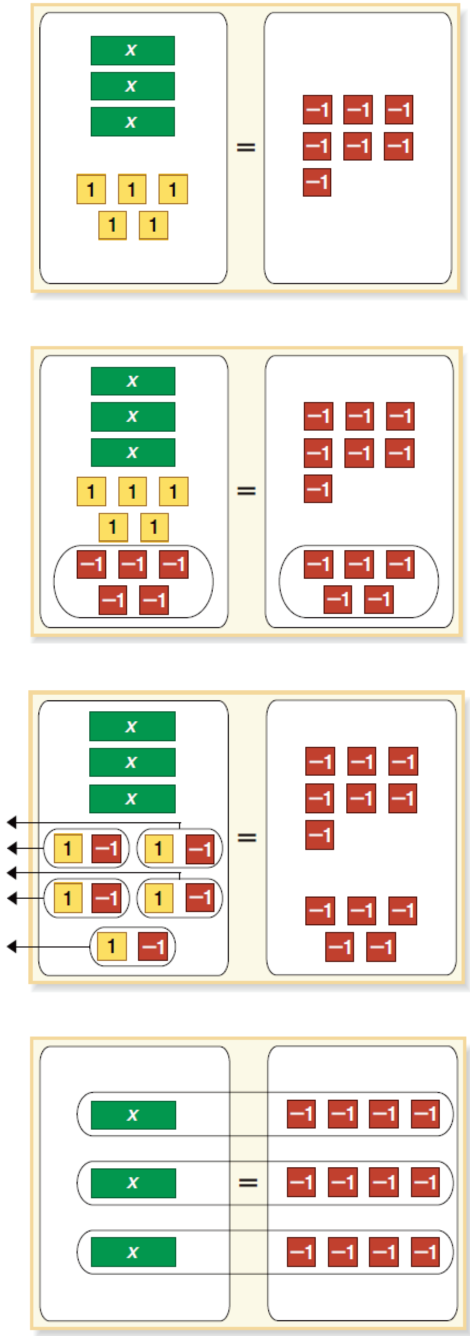
«Διαβάτη σε αυτό τον τάφο αναπαύεται ο Διόφαντος. Σε εσένα που είσαι σοφός, η επιστήμη θα δώσει το μέτρο της ζωής του. Άκουσε:
– Ο Θεός τού επέτρεψε να είναι νέος για το ένα έκτο της ζωής του.
– Ακόμη ένα δωδέκατο και φύτρωσε το μαύρο γένι του.
– Μετά από ένα έβδομο ακόμα ήρθε του γάμου του η μέρα.
– Τον πέμπτο χρόνο αυτού του γάμου γεννήθηκε ένα παιδί.
– Τι κρίμα για τον νεαρό γιο. Αφού έζησε μονάχα τα μισά χρόνια από τον πατέρα του γνώρισε την παγωνιά του θανάτου.
– Τέσσερα χρόνια αργότερα ο Διόφαντος βρήκε παρηγοριά στη θλίψη του φτάνοντας στο τέλος της ζωής του» .

✓ Πώς θα μπορούσε ένας διαβάτης να υπολογίσει την ηλικία του Διόφαντου;

Ο Διόφαντος συνεισέφερε πολύ στην ανάπτυξη της αριθμητικής, καθιέρωσε και τυποποίησε έναν τύπο σύντομου μαθηματικού συμβολισμού για τη γραφή προβλημάτων. Οι εργασίες του Διόφαντου είχαν τεράστια σημασία για τη θεμελίωση της Άλγεβρας.
Από τα 13 έργα του σώθηκαν μόνο τα 10. Στο πιο διάσημο από τα έργα του, τα «Αριθμητικά», χρησιμοποιείται για πρώτη φορά η μεταβλητή για την επίλυση προβλήματος. Προς τιμή του μια ειδική κατηγορία εξισώσεων ονομάζονται «Διοφαντικές εξισώσεις».

Διερεύνηση

Να βρείτε την εξίσωση που η λύση της αναπαρίσταται στο πιο κάτω διάγραμμα και να εξηγήσετε πώς επιλύουμε εξισώσεις με βάση το πιο κάτω μοντέλο.



Μαθαίνω

- Σε μια εξίσωση οι όροι που περιέχουν τον άγνωστο ονομάζονται **άγνωστοι όροι** της εξίσωσης.
  Παράδειγμα:
  $2x-6=3-x$ *Το $2x$ και $-x$ είναι άγνωστοι όροι.*
  Το -6 και το 3 είναι γνωστοί όροι.

- Δύο ή περισσότερες **εξισώσεις** λέγονται **ισοδύναμες**, αν έχουν την ίδια λύση.

  Παράδειγμα:
  Η λύση της εξίσωσης $x+3=5$ είναι το $x=2$.
  Η λύση της εξίσωσης $2x-1=3$ είναι το $x=2$.
  Οι εξισώσεις $x+3=5$ και $2x-1=3$ έχουν την ίδια λύση.
  Άρα, οι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες.

- Επίλυση **εξίσωσης** είναι η διαδικασία που εφαρμόζουμε, για να βρούμε την τιμή του αγνώστου που επαληθεύει την εξίσωση.

- Για να λύσουμε μια εξίσωση, θα πρέπει να δημιουργήσουμε μια **ισοδύναμη** εξίσωση με την αρχική, η οποία θα έχει **τον άγνωστο στο ένα μέλος.**

  - **Επίλυση εξίσωσης $\boldsymbol{x+\beta=\gamma}$**

$$\boldsymbol{x+\beta=\gamma}$$
$$\Leftrightarrow x+\cancel{\beta}-\cancel{\beta}=\gamma-\beta$$
$$\Leftrightarrow x=\gamma-\beta$$

Αφαιρούμε και από τα δύο μέλη τον αριθμό β (ιδιότητες ισοτήτων).

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος μπορεί να μεταφερθεί από το ένα μέλος της εξίσωσης στο άλλο, με **αντίθετο πρόσημο**.

Παράδειγμα:

$$2x+3=8x+15$$
$$\Leftrightarrow 2x-8x=+15-3$$
$$\Leftrightarrow \frac{-6x}{-6}=\frac{12}{-6}$$
$$\Leftrightarrow x=-2$$

Κάθε όρος μπορεί να μεταφερθεί από το ένα μέλος στο άλλο, αλλάζοντας πρόσημο (αντίθετο πρόσημο).

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων και διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.

Παραδείγματα

1. Να λύσετε την εξίσωση $4x + 3 = 5x - 5 - 3x$

Λύση:

$4x + 3 = 5x - 5 - 3x$

$\Leftrightarrow 4x + 3 = 5x - 5 - 3x$ *Χωρίζουμε τους γνωστούς όρους από τους άγνωστους.*

$\Leftrightarrow 4x - 5x + 3x = -5 - 3$

$\Leftrightarrow 2x = -8$ *Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.*

$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-8}{2}$ *Διαιρούμε με τον συντελεστή του άγνωστου όρου.*

$\Leftrightarrow x = \frac{-8}{2}$

$\Leftrightarrow x = -4$ *Λύση της εξίσωσης.*

2. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2y}{3} + 1 = \frac{y}{2} - \frac{y+3}{3}$

Λύση:

$\frac{2y}{3} + 1 = \frac{y}{2} - \frac{y+3}{3}$

$\Leftrightarrow \overset{2}{\frac{2y}{3}} + \overset{6}{\frac{1}{1}} = \overset{3}{\frac{y}{2}} - \overset{2}{\frac{y+3}{3}}$ *Βρίσκουμε το $ΕΚΠ[3,2,1] = 6$ και μετατρέπουμε σε ομώνυμα.*

$\Leftrightarrow \frac{4y+6}{6} = \frac{3y-2(y+3)}{6}$ *Απαλείφουμε τους παρονομαστές εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ισοτήτων.*

$\Leftrightarrow 4y + 6 = 3y - 2(y + 3)$ *Απαλείφουμε τις παρενθέσεις.*

$\Leftrightarrow 4y + 6 = 3y - 2y - 6$ *Χωρίζουμε τους γνωστούς από τους άγνωστους όρους.*

$\Leftrightarrow 4y - 3y + 2y = -6 - 6$ *Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.*

$\Leftrightarrow 3y = -12$

$\Leftrightarrow \frac{3y}{3} = \frac{-12}{3}$ *Διαιρούμε με τον συντελεστή του άγνωστου όρου.*

$\Leftrightarrow y = -4$ *Βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης.*

3. Σε ένα κουτί υπάρχουν 30 κέρματα των 5 και 10 σεντ.

(α) Να βρείτε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει την αξία των κερμάτων.
(β) Αν η αξία των κερμάτων είναι €2,40, να βρείτε πόσα κέρματα από κάθε είδος υπάρχουν.

Λύση:

(α) *Έστω* x *ο αριθμός των κερμάτων των* 5 *σεντ, τότε ο αριθμός των κερμάτων των* 10 *σέντ είναι* $30-x$.

Αριθμός των κερμάτων των 5 *σεντ:* x
Αριθμός των κερμάτων των 10 *σεντ:* $30-x$

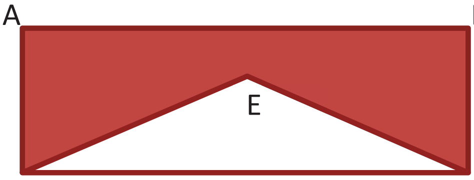
Άρα, η αξία των κερμάτων των 5 *σεντ είναι:* $5x$
η αξία των κερμάτων των 10 *σεντ είναι:* $10(30-x)$

$$\begin{aligned} Αξία &= 5x+10(30-x) \\ &= 5x+300-10x \\ &= 300-5x \end{aligned}$$

(β)
$$\begin{aligned} Αξία = 240 &\Leftrightarrow 300-5x=240 \\ &\Leftrightarrow -5x = 240-300 \\ &\Leftrightarrow -5x=-60 \\ &\Leftrightarrow -\frac{5x}{-5} = \frac{-60}{-5} \\ &\Leftrightarrow x=12 \end{aligned}$$

Άρα, τα κέρματα των 5 *σεντ είναι* 12, *ενώ τα κέρματα των* 10 *σεντ είναι* 18.

4. Στο διπλανό σχήμα $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο, ενώ το $ΓΔΕ$ είναι ισοσκελές τρίγωνο με τις πλευρές $ΔΕ = ΓΕ$. Το μήκος των $ΔΕ$ και $ΓΕ$ είναι $3\,cm$ μικρότερο από το διπλάσιο του πλάτους $ΑΔ$ του ορθογωνίου, ενώ το μήκος $ΑΒ$ του ορθογωνίου είναι $7\,cm$ μικρότερο από το τριπλάσιο του μήκους του $ΔΕ$. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου, αν η περίμετρος του σκιασμένου σχήματος είναι $38\,cm$.



Λύση:

Έστω $ΑΔ = x$ *το πλάτος του ορθογωνίου. Άρα, το μήκος των πλευρών* $ΔΕ$ *και* $ΓΕ$ *θα είναι* $2x-3$, *ενώ το μήκος των πλευρών* $ΑΒ$ *και* $ΔΓ$ *θα είναι* $3(2x-3)-7$.

$$\begin{aligned} ΑΔ &= ΒΓ = x \\ ΔΕ &= ΕΓ = 2x-3 \\ ΑΒ &= ΔΓ = 3(2x-3)-7 \\ &= 6x-9-7 \\ &= 6x-16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\sigma\kappa\iota\alpha\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu o\upsilon\ \sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma} &= \Delta A + AB + B\Gamma + \Gamma E + E\Delta = 38 \\
&\Leftrightarrow x + 6x - 16 + x + 2x - 3 + 2x - 3 = 38 \\
&\Leftrightarrow x + 6x + x + 2x + 2x = 38 + 16 + 3 + 3 \\
&\Leftrightarrow 12x = 60 \\
&\Leftrightarrow \frac{12x}{12} = \frac{60}{12} \\
&\Leftrightarrow x = 5
\end{aligned}$$

Άρα,

$\Delta\Delta$ —

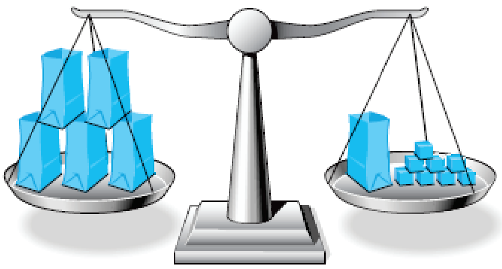
$A\Delta = B\Gamma = 5\ cm$

$AB = \Delta\Gamma = 6x - 16 = 14\ cm$

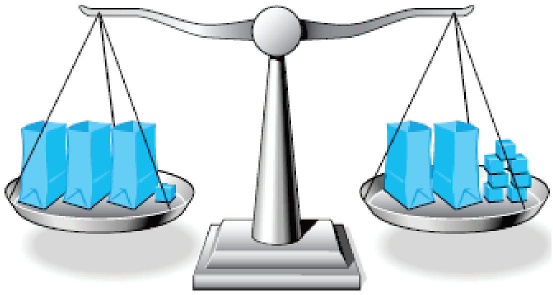
Δραστηριότητες

1. Στο καθένα από τα πιο κάτω σχήματα κάθε σακούλι περιέχει ίσο αριθμό κύβων. Να βρείτε πόσους κύβους έχει μέσα το σακούλι, αν σε κάθε περίπτωση η ζυγαριά ισορροπεί (η μάζα της σακούλας είναι αμελητέα).

(α)



(β)



2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α)	$7 + y = -5$	(β)	$4\nu = -16$
(γ)	$6 - \omega = 3$	(δ)	$3\alpha - 4 = -19$
(ε)	$11 = 4\alpha - 1$	(στ)	$5 + 2\kappa = 9 - 2\kappa$
(ζ)	$8\omega - 4 + 3\omega + 26 = 3\omega - 4 + 2$		
(η)	$-2\beta + 4 - \beta - \beta = 2\beta + 4$		

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $5(x + 1) = 3(3x - 1)$

(β) $-x + (5x - 7) = -5$

(γ) $5(\alpha - 2) - 2(2\alpha - 1) = 11$

(δ) $7\psi - 4(\psi - 3) - 5 = 0$

(ε) $7(\beta - 3) - 12 = 5\beta - 13$

(στ) $3(\alpha + 2) - (\alpha - 2) = -4(\alpha + 1)$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

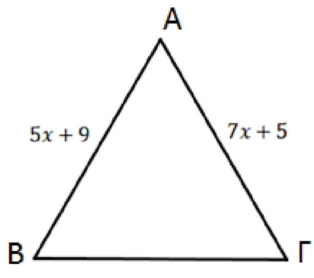
(α)	$\frac{x}{2} = \frac{3}{2}$	(β)	$\frac{\alpha-1}{3} = \frac{5}{3}$
(γ)	$\frac{y}{2} = 1$	(δ)	$\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
(ε)	$\frac{\kappa-3}{4} = \frac{\kappa}{6}$	(στ)	$\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{3} = \frac{1}{12}$
(ζ)	$\frac{2\alpha}{3} - 1 = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}$	(η)	$\frac{2x-1}{3} - \frac{x+2}{6} = -2$

5. Να βρείτε το λάθος που έγινε στην επίλυση των πιο κάτω εξισώσεων:

(α) $3x - 9 = 18$	(β) $-2y = 6$	(γ) $5 - \alpha = 9$
$\Leftrightarrow 3x = 9$	$\Leftrightarrow y = 6 + 2$	$\Leftrightarrow \alpha = 9 - 5$
$\Leftrightarrow x = 3$	$\Leftrightarrow y = 8$	$\Leftrightarrow \alpha = 4$

6. Να υπολογίσετε τον ακέραιο αριθμό, του οποίου το τριπλάσιο ισούται με τον αριθμό αυξημένο κατά 10.

7. Αν το τρίγωνο $ΑΒΓ$, στο διπλανό σχήμα, είναι ισόπλευρο και $ΑΒ = 5x + 9$, $ΑΓ = 7x + 5$. Να υπολογίσετε την περίμετρό του.



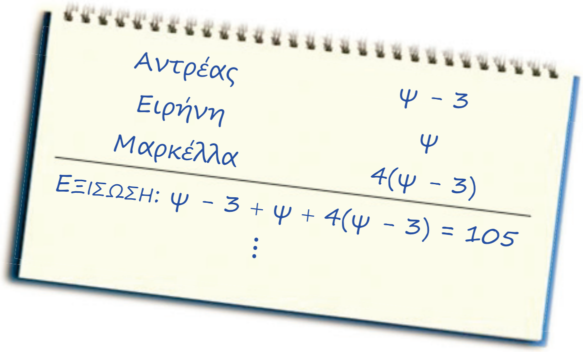
8. Δίνεται τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ στο οποίο η πλευρά $ΔΓ$ είναι πενταπλάσια της $ΑΒ$, η $ΒΓ$ είναι $3\ cm$ μεγαλύτερη της $ΑΒ$ και η $ΑΔ$ είναι $1\ cm$ μικρότερη της $ΔΓ$. Αν η περίμετρος του τετραπλεύρου είναι $86\ cm$, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του.

9. Σε ένα αεροπλάνο ταξιδεύουν 280 επιβάτες. Αν τα παιδιά είναι 20 λιγότερα από τις γυναίκες και οι άνδρες είναι τόσοι όσοι είναι το άθροισμα των παιδιών και των γυναικών, να υπολογίσετε πόσοι άνδρες, πόσες γυναίκες και πόσα παιδιά ταξιδεύουν.

10. Κόβουμε ένα σύρμα μήκους $31\ cm$ και φτιάχνουμε ένα τετράγωνο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Αν η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου είναι κατά $1\ cm$ μεγαλύτερη από την πλευρά του τετραγώνου, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου και την περίμετρο του τριγώνου.

11. Ο Κώστας έχει €5 περισσότερα από τα διπλάσια του Γιάννη. Αν ο Κώστας δώσει €6 στο Γιάννη, τότε θα έχουν το ίδιο ποσό χρημάτων. Να υπολογίσετε πόσα χρήματα κρατεί ο καθένας.

12. Ο Κυριάκος έλυσε ένα πρόβλημα όπως φαίνεται δίπλα. Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα που πιθανόν να έλυσε ο Κυριάκος.



13. Σε μια εκδρομή το κανονικό εισιτήριο ήταν €10, ενώ για τους συνταξιούχους ήταν €6. Οι συνταξιούχοι ήταν 10 λιγότεροι από τους υπόλοιπους. Αν συνολικά πλήρωσαν €260, να υπολογίσετε πόσοι ήταν οι συνταξιούχοι.

14. Ένας μαθητής απάντησε σε 50 ερωτήματα και πήρε 2 μονάδες για κάθε ορθή απάντηση, ενώ έχασε 1 μονάδα για κάθε λανθασμένη απάντηση. Αν τελικά ο μαθητής συγκέντρωσε 79 μονάδες, να βρείτε πόσα ερωτήματα απάντησε ορθά.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(-2)\cdot(-3)$ (β) $(-2)\ +(-3)$

(γ) $(-2)-(-3)$ (δ) $-2-3$

(ε) $(-3)-(-5)+(+4)$ (στ) $-3+4-|-5|$

(ζ) $-(-3)-|-5+4|$ (η) $(-3)\cdot(-5)\cdot(+4)$

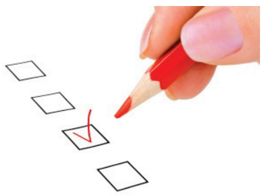
(θ) $(-3-5):(-4)$ (ι) $(-5):(-4+3)$

2. Να συμπληρώσετε το κενό με το κατάλληλο πρόσημο:

(α) $(+1)^7=\cdots 1$ (β) $(+1)^{21}\ =\cdots\ 1$ (γ) $(-2)^6=\cdots 64$

(δ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4=\cdots\ \frac{1}{16}$ (ε) $(-25)^1=\cdots\ 25$ (στ) $(-4)^3=\cdots\ 64$

3. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις παρακάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:



(α)	Ο αντίστροφος του -10 είναι το $+\frac{1}{10}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Ο αντίθετος του -10 είναι το 10	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$-10<0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\|-10\|<0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	$\|-10\|=-(-10)$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	$-10<-\|-10\|$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	$(-10)^3>(-10)^2$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

4. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω δυνάμεις:

(α) $(-3)^2$ (β) $(+1)^5$

(γ) -2^4 (δ) $(-2)^0$

(ε) $\left(-\frac{1}{5}\right)^2$ (στ) $-(-2)^4$

(ζ) $(-3+2)^6$ (η) $(-6+1)^2$

(θ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^0$ (ι) $\left(+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2012}\right)^{10}$

5. Να γράψετε τη δεκαδική μορφή των ρητών αριθμών:

$-\frac{15}{10},\ \ \frac{13}{3},\ \ \frac{20}{11},\ \ \frac{7}{8}$

6. Να συμπληρώσετε τα κενά με τα σύμβολα $<, =, >$, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

(α) $0 \ldots\ldots -1$ (β) $5 \ldots\ldots -6$

(γ) $-5 \ldots\ldots |-5|$ (δ) $-5 \ldots\ldots -12$

(ε) $+5 \ldots\ldots -5\frac{3}{4}$ (στ) $-3\frac{1}{2} \ldots\ldots -3\frac{2}{3}$

(ζ) $-2010 \ldots\ldots -2011\frac{1}{2}$ (η) $-3-2-1 \ldots\ldots -(+3)$

(θ) $-9+2 \ldots\ldots (-1)^3$ (ι) $-(-3+1) \ldots\ldots (-16):(-4)$

(ια) $-3\cdot(-2) \ldots\ldots -3-(-2)$ (ιβ) $0:(-1) \ldots\ldots |-1|-1$

7. Να εξετάσετε σε ποιο μέρος της Κύπρου σημειώθηκε η μεγαλύτερη μεταβολή θερμοκρασίας:

Πόλη	Ελάχιστη θερμοκρασία	Μέγιστη θερμοκρασία
Λευκωσία	-1	5
Πρόδρομος	-5	-1
Λεμεσός	0	3

8. Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες:

(α) $(+14) + \square = +5$ (β) $(-2{,}4) - \square = -9{,}2$

(γ) $(-20)\cdot \square = +100$ (δ) $(-8) : \square = 1$

(ε) $(-2-1)\cdot \square = 1$ (στ) $\square : (+2) = 4$

(ζ) $\left(-12\frac{1}{3}\right) + \square = -7$ (η) $\left(+2\frac{1}{5}\right) - \square = +7\frac{3}{10}$

(θ) $\square \cdot (+3-1) = -6$ (ι) $\square : (+2-4) = |-2|$

(ια) $\frac{-2+4}{\square} = -2+3$ (ιβ) $\frac{\square}{-2+7-1} = -2014+2014$

9. Να εξετάσετε κατά πόσο οι επόμενες προτάσεις είναι ΚΑΠΟΤΕ, ΠΟΤΕ ή ΠΑΝΤΟΤΕ αληθείς. Να εξηγήσετε ή να δώσετε αντιπαράδειγμα για να στηρίξετε την απάντησή σας.

(α) *Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι αρνητικός αριθμός.*

(β) *Αν α και β είναι ρητοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, τότε $|\alpha| > |\beta|$.*

(γ) *Αν α και β είναι ρητοί αριθμοί, τότε $|\alpha-\beta| = |\alpha| - |\beta|$.*

(δ) *Αν α και β είναι ρητοί αριθμοί, τότε $|\alpha\beta| = \alpha\beta$.*

(ε) *Ο κύβος ενός ρητού αριθμού είναι αρνητικός αριθμός.*

10. Αν ο αριθμός α είναι αρνητικός ακέραιος, ποια από τις πιο κάτω παραστάσεις παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή:
$A = 3 + \alpha$ $B = 3 - \alpha$ $\Gamma = 3 : \alpha$ $\Delta = 3\alpha$

11. Μερικοί κάτοικοι της Φινλανδίας συνηθίζουν να κάνουν σάουνα σε θερμοκρασία $48\ ^\circ\mathrm{C}$ και αμέσως να βγαίνουν έξω και να κολυμπούν σε πισίνες σε θερμοκρασία $-28\ ^\circ\mathrm{C}$. Πιστεύουν ότι η έκθεση του ανθρώπινου σώματος σε τόσο μεγάλη διαφορά θερμοκρασίας, είναι ευεργετική για την υγεία. Να βρείτε τη διαφορά θερμοκρασίας.

12. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $(-1-3)\cdot(4-7)$ (β) $(12-24) : (-3)$

(γ) $(-6)\cdot(-3)+(-4)$ (δ) $(-5)\cdot 4-(-3)$

(ε) $-8\cdot(-7)-8\cdot 7$ (στ) $-11\cdot 4+(-8)\cdot(-3)$

(ζ) $\frac{-6-10}{-2}$ (η) $\frac{(-3)\cdot(-4)}{-2}$

(θ) $\frac{5\cdot(-6)}{-3}$ (ι) $\frac{(-7)\cdot(-5)\cdot(-2)}{5}$

(ια) $\frac{(-3)\cdot 2-(-3):(-1)}{5\cdot(-2+1)+(-4)}$ (ιβ) $\frac{\left(-4\frac{1}{6}\right) : 1\frac{2}{3}}{-2\frac{1}{2}-1\frac{1}{4}}$

13. Η Νάγια και ο Παναγιώτης παίζουν ένα παιχνίδι, στο οποίο ο ένας καλείται να μαντέψει ένα από τα πιο κάτω ζεύγη αριθμών που σκέφτεται ο άλλος.
Ο Παναγιώτης ρώτησε: Η Νάγια απάντησε
- *Τι πρόσημο έχει το γινόμενό τους;* *Αρνητικό*
- *Και το άθροισμά τους τι πρόσημο έχει;* *Αρνητικό.*

(α) Ποιο από τα πιο κάτω ζεύγη αριθμών μπορεί να σκέφτηκε η Νάγια:

i. $-2, +4$ ii. $-2, -4$ iii. $+2, -4$ iv. $+2, +4$

(β) Γιατί επέλεξε αυτές τις ερωτήσεις ο Παναγιώτης; Θα μπορούσε να βρει το ζεύγος των αριθμών με λιγότερες ερωτήσεις;

14. Να βρείτε όλες τις ακέραιες τιμές που μπορεί να πάρει το x, ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω προτάσεις:
(α) $-4 > x > -6$
(β) $|\,x\,| = 12$
(γ) $|\,x\,| < 3$

15. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $(-1)^{2012} - 1^{2012}$

(β) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 : \left(-1\frac{1}{3}\right)$

(γ) $(-2)^2 - (+1)^3 - 7^0$

(δ) $(-1)^5 - 2 \cdot (+5 - 1)^2$

(ε) $(-2)^3 \cdot (-2)^0 - (-3)^3 : (-3 + 4)^{99}$

(στ) $(-4 + 2)^3 - 4^2 - [\,(+5) - (-3)^2\,] + (-2)^4$

16. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις παρακάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	*Ο αριθμός* $-x$, , *είναι πάντοτε ένας αρνητικός ρητός αριθμός.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	*Ο αριθμός* $-x$ *είναι ο αντίθετος του αριθμού* x $(x \neq 0)$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	*Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού μπορεί να είναι και αρνητικός αριθμός.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	*Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο* 0.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	*Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο* -1.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	*Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν διαφορετικές απόλυτες τιμές.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	*Η διαφορά δύο αντίθετων αριθμών είναι μηδέν.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

17. Να αντιστοιχίσετε κάθε πρόταση της στήλης Ι με την αντίστοιχή της από τη στήλη ΙΙ:

Ι Στήλη	ΙΙ Στήλη	
Α. Οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι.	i.	$\alpha - \beta = 0$
Β. Οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.	ii.	$\alpha \cdot \beta < 0$
Γ. Οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι	iii.	$\alpha \cdot \beta > 0$
Δ. Οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι.	iv.	$\alpha \cdot \beta = 1$
	v.	$\alpha + \beta = 0$

18. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $<$, $=$, $>$, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις. Αν $x < 0$, $\omega > 0$ και $\psi > 0$, τότε:

(α) $|x|$ …… 0 (β) $x\psi$ …… 0 (γ) $\frac{3x}{2\psi}$ …… 0

(δ) $-\psi$ …… 0 (ε) $x - \psi$ …… 0 (στ) $\frac{x^2}{\omega}$ …… 0

19. Αν α , β είναι αριθμοί ετερόσημοι $(\alpha, \beta \neq 0)$ να εξετάσετε σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις κατά πόσο ο αριθμός γ είναι ΘΕΤΙΚΟΣ ή ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ αριθμός ή ΜΗΔΕΝ:

	ΘΕΤΙΚΟΣ	ΜΗΔΕΝ	ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ
(α) Αν $\alpha\beta\gamma < 0$, τότε *ο αριθμός* γ *είναι:*			
(β) Αν $\alpha\beta\gamma > 2$, τότε *ο αριθμός* γ *είναι:*			
(γ) Αν $(-2)\alpha\beta\gamma = 0$, τότε *ο αριθμός* γ *είναι:*			
(δ) Αν$(-\alpha)(-\beta)(-\gamma) > 0$, τότε *ο αριθμός* γ *είναι:*			

20. Αν ο κ είναι φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι:
$(-1)^{\kappa} + (-1)^{\kappa+1} + (-1)^{\kappa+2} + (-1)^{\kappa+3} = 0$

21. Αν $\chi - \psi = -3$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$A = 2\,(x-5) - 4\,(\psi - 2) - 4\psi + 6x$

$B = x + 5(3-x) - 4\psi - 4(5 - 2\psi)$

22. Αν $\alpha + \beta = -5$ και $\alpha - \beta = 3$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
(α) $3\alpha + (-3\beta)$
(β) $5\alpha - (-\beta) + 4\beta$

23. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $-x + 6 - 5x = 14 - 2x$ (β) $5\omega - 16 = 14 - 5\omega$

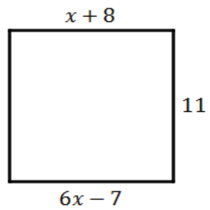
(γ) $2(y-1) = 3y + 4$ (δ) $5\alpha - (2\alpha - 1) = -2$

(ε) $3 - (2x+1) = x - 1$ (στ) $2x - 3(2-x) = 4x - 8$

(ζ) $\frac{x}{5} = -2$ (η) $\frac{y}{5} - \frac{y}{10} = \frac{7}{10}$

(θ) $\frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{2} = 1 + \alpha$ (ι) $\frac{2y-1}{3} + \frac{y}{2} = 2$

24. Να εξετάσετε κατά πόσο το διπλανό ορθογώνιο είναι τετράγωνο και αν ναι, να βρείτε το εμβαδόν του.



25. Η κυρία Γιολάντα είναι 27 χρόνια μεγαλύτερη από τις δίδυμες κόρες της. Σε 3 χρόνια θα έχει ηλικία διπλάσια από το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών της. Να βρείτε την ηλικία της κυρίας Γιολάντας.

26. Σε μια εκδήλωση του σχολείου πήραν μέρος 115 συνολικά άτομα (μαθητές, γονείς και καθηγητές). Αν οι γονείς ήταν το $\frac{1}{4}$ των μαθητών και οι καθηγητές 5 λιγότεροι από τους γονείς, να βρείτε πόσοι μαθητές, πόσοι γονείς και πόσοι καθηγητές έλαβαν μέρος στην εκδήλωση.

27. Ένας πατέρας μοίρασε στα τέσσερα παιδιά του €160. Στον Φίλιππο έδωσε τριπλάσια χρήματα από όσα έδωσε στον Κωνσταντίνο, στην Αννίτα έδωσε €20 λιγότερα από τα διπλάσια χρήματα του Κωνσταντίνου και στον Σταύρο έδωσε τα τριπλάσια χρήματα από όσα έδωσε στην Αννίτα. Πόσα χρήματα πήρε ο καθένας;

28. Ένας μαθητής εργάστηκε κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών για 50 μέρες και πήρε συνολικά €1200. Κάθε εργάσιμη μέρα έπαιρνε €20 και για κάθε αργία τα διπλάσια λεφτά. Να βρείτε πόσες αργίες είχε δουλέψει.

29. Ένας περαστικός χαιρέτησε έναν βοσκό λέγοντάς του: *«Γεια σου, βοσκέ, πρωτοβοσκέ των 100 προβάτων»*. Ο βοσκός χαμογέλασε και του απάντησε *«Μακάρι άνθρωπε μου να ήταν έτσι! Μόνο αν είχα όσα έχω και τα μισά που έχω και 5 και 50, θα ήμουν τότε ο βοσκός των 100 προβάτων»*. Πόσα πρόβατα είχε ο βοσκός;

30. Ο A έχει τριπλάσια χρήματα από τον B. Αν ο A δώσει €20 στον B, τότε ο B θα έχει διπλάσια χρήματα από τον A. Πόσα χρήματα έχει ο καθένας τώρα;

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Αν $\kappa \cdot \lambda = -11$ να βρείτε την τιμή της παράστασης
$-\kappa : \left(\frac{1}{\lambda}\right) + \frac{3}{11} \cdot \kappa \cdot (-2) \cdot \lambda$

2. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι ρητοί αριθμοί και ισχύει ότι $-\frac{2}{3}\alpha\beta\gamma\delta > 0$, $\frac{\beta}{\alpha} = -222$ και $\gamma^{31} < 0$, να βρείτε το πρόσημο του δ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Η Μαριάννα παρατήρησε και έχει δοκιμάσει για αρκετά ζεύγη ρητών αριθμών ότι ισχύει $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$. Να εξετάσετε κατά πόσο ο ισχυρισμός της είναι δυνατόν να γενικευτεί για κάθε ζεύγος ρητών αριθμών α και β.

4. Ο Λίνος και ο Μάριος έχουν από μια υπολογιστική μηχανή. Ο Λίνος ξεκινά από το 100 και αφαιρεί 7 κάθε φορά, ενώ ο Μάριος ξεκινά από το 0 και προσθέτει 3 κάθε φορά και καταγράφουν το αποτέλεσμά τους. Υπάρχει περίπτωση οι υπολογιστικές μηχανές σε κάποια στιγμή να δείχνουν τον ίδιο αριθμό; Αν ναι, να βρείτε τον αριθμό αυτό. Να εξηγήσετε τον τρόπο που εργαστήκατε.

5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$(-200 + 199) - (-199 + 198) + (-198 + 197) - (-197 + 196) + \cdots + (-2 + 1) - (-1)$$

6. Σε μια κατασκήνωση, 34 παιδιά έλαβαν μέρος στο πρωτάθλημα σκακιού που διοργανώθηκε. Κάθε παιδί μπορούσε να λάβει μέρος το πολύ μια φορά. Την πρώτη ημέρα έγιναν μόνο μερικοί αγώνες στους οποίους οι δύο αντίπαλοι ήταν ένα αγόρι και ένα κορίτσι. Στους αγώνες αυτούς της πρώτης ημέρας πήραν μέρος τα $\frac{3}{4}$ του αριθμού των αγοριών της τάξης και τα $\frac{2}{3}$ του αριθμού των κοριτσιών της τάξης.

   (α) Πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει η τάξη;

   (β) Πόσα κορίτσια δεν πήραν μέρος την πρώτη ημέρα στους αγώνες;

7. Τι συμπεραίνετε για τους αριθμούς α και β, αν γνωρίζετε ότι:
$|2010\alpha\beta\gamma| = -2010\alpha\beta\gamma$ και $\gamma > 0$

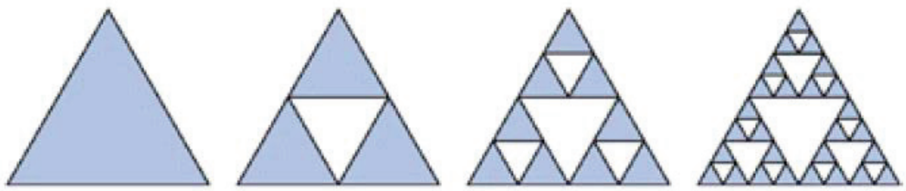
8. Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός θεωρούνται κλειστές πράξεις στο σύνολο των φυσικών αριθμών, γιατί όταν προσθέτεις ή πολλαπλασιάζεις δύο φυσικούς αριθμούς το αποτέλεσμα είναι πάλι στοιχείο του συνόλου των φυσικών αριθμών. Να εξετάσετε κατά πόσο ο πολλαπλασιασμός και η πρόσθεση είναι κλειστές πράξεις στο σύνολο των ακεραίων και των ρητών.

9. Αν η εξίσωση $4x - \mu\,(x + 3) = (x - 2)\,\mu - 7$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x + 5 = 2x + 3$, να βρείτε την τιμή του μ.

10. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης, αν ο α είναι άρτιος αριθμός και ο β περιττός αριθμός:
$(-1)^{\alpha} + (+1)^{\beta} - (-1)^{\beta} + 1 + (\alpha)^{2011} + (-\alpha)^{2011}$

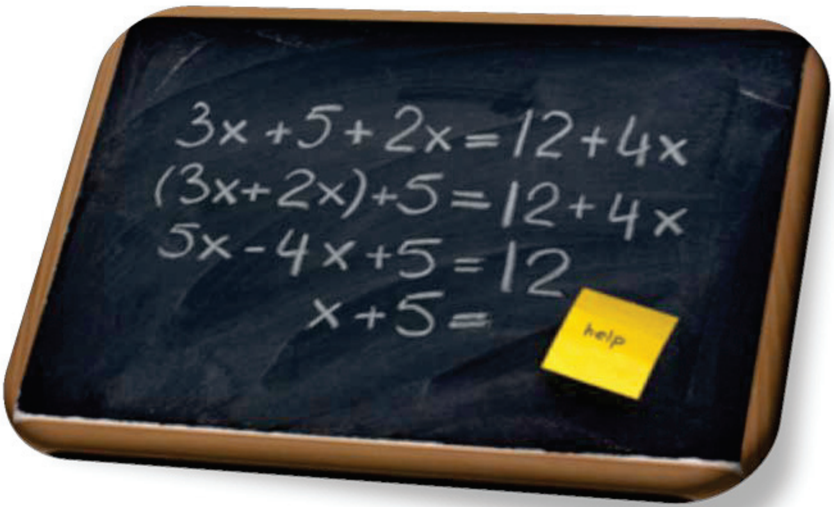
11. Αν $x = -1$ και $y = 2$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$$A = \frac{4x^3 + 3y^2}{(x+y)^{2011}} + \frac{3x^2y^3}{(3x+y)^{2012}}$$

12. Να υπολογίσετε πόσα σκιασμένα τρίγωνα θα έχει το δέκατο σχήμα του πιο κάτω μοτίβου, το οποίο είναι γνωστό ως ακολουθία τριγώνων Sierpinski:



Απαντήσεις Δραστηριοτήτων

Α΄ τεύχους



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ: Από το Δημοτικό

ΑΡΙΘΜΟΙ				*Σελίδα 11*
Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	258, 285, 528, 582, 825, 852		
	(β)	258, 285, 528, 582, 825, 852		
	(γ)	περιττός: 285 , άρτιος: 852		
2.	(α)	άρτιος: 982 , περιττός: 203		
	(β)	άρτιος: 9832 , περιττός: 2039		
	(γ)	άρτιος: 98320 , περιττός: 20389		
3.	(α)	εκατοντάδες	(β)	δέκατα
	(γ)	χιλιοστά	(δ)	δεκάδες χιλιάδες εκατομμύρια
4.	(α)	ΛΑΘΟΣ	(β)	ΣΩΣΤΟ
	(γ)	ΣΩΣΤΟ	(δ)	ΛΑΘΟΣ
	(ε)	ΣΩΣΤΟ		
5.	(α)	Ανδρέας 10, Νίκη 40, Ντίνα 9, Γιάννης 5, Σόλωνας 5, Δημήτρης 0, Μαριάννα 12		
	(β)	Νίκη		
6.		$A = 10$, $B = 25$, $\Gamma = 0$, $\Delta = 192$, $E = 16$ $\Gamma < A < E < B < \Delta$		
7.		39, 93, 48, 84, 57, 75 , 66		
8.	(α)	26,65	(β)	10
	(γ)	7,82	(δ)	16,328
9.	(α)	140	(β)	35,28
	(γ)	778	(δ)	184
	(ε)	5148	(στ)	18,6
	(ζ)	7,875	(η)	18
10.	(α)	5700	(β)	8200
	(γ)	46000	(δ)	0,09
	(ε)	110	(στ)	2000
11.	(α)	81 – 243 – 729	(β)	83 – 65 – 47
	(γ)	6,5 – 7,1 – 7,7	(δ)	800 – 400 – 200
12.	(α)	100	(β)	0,0574
	(γ)	0,01	(δ)	0,00001
	(ε)	57400	(στ)	0,53

13.		0,045		
14.	(α)	ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ, ΛΑΘΟΣ, ΣΩΣΤΟ		
	(β)	ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ, ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ		
	(γ)	ΣΩΣΤΟ, ΣΩΣΤΟ, ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ		
15.		$A = 806600$		$B = 80{,}66$
		$\Gamma = 8066$		$\Delta = 8066$
16.	(α)	i. Θα αυξηθεί η διαφορά κατά 8 ii. Θα μειωθεί η διαφορά κατά 8 iii. Θα αυξηθεί η διαφορά κατά 3 iv. Η διαφορά δεν θα αλλάξει		
17.	(β)	i. Θα υποδιπλασιαστεί το πηλίκο ii. Θα διπλασιαστεί το πηλίκο iii. Θα διπλασιαστεί το πηλίκο iv. Το πηλίκο δεν θα αλλάξει		
	(α)	5654	(β)	6120
	(γ)	37962		
18.		(α) , (β)		

Κλασματικοι Αριθμοι *Σελίδα 17*

Δραστηριότητα				Απαντήσεις		
1.	(α)	$>$		(β)	$<$	
	(γ)	$=$		(δ)	$<$	
2.		$A: \frac{1}{4}$	$B: \frac{3}{16}$		$\Gamma: \frac{1}{8}$	$\Delta: \frac{5}{24}$
3.	(α)	$2\frac{3}{8}$		(β)	$\frac{2}{3}$	
	(γ)	$3\frac{1}{12}$		(δ)	$1\frac{7}{8}$	
	(ε)	8		(στ)	$\frac{3}{10}$	
	(ζ)	$\frac{1}{4}$		(η)	$\frac{1}{16}$	
	(θ)	10		(ι)	$\frac{9}{10}$	
	(ια)	$\frac{2}{3}$		(ιβ)	$5\frac{1}{6}$	
4.		$171000000\ km^2$				
5.		$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{2}{15}+\frac{4}{15}+\frac{1}{15}$				
6.		$A = 0{,}9$	$B = 1{,}6$		$\Gamma = 2{,}5$	$\Delta = 0{,}5625$
7.		20 κανάτες				
8.		$\frac{1}{20}$ του λίτρου				
9.		(γ)				

10.	Όχι	$A{:}\frac{3}{9}$	$B{:}\frac{2}{9}$	$\Gamma{:}\frac{4}{9}$

Μετρηση Τριγωνων και Τετραπλευρων				*Σελίδα 21*
Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	$\Pi = 20\ cm,\ E = 25\ cm^2$		
	(β)	$\Pi = 26\ cm,\ E = 40\ cm^2$		
	(γ)	$\Pi = 20\ cm,\ E = 20\ cm^2$		
	(δ)	$\Pi = 18\ cm,\ E = 14\ cm^2$		
2.		$1800\ m$		
3.	(α)	Γ	(β)	B
	(γ)	Δ		
4.		$8\ cm$		
5.		$140\ m^2$		
6.		$1\ m$		
7.	(α)	$135{,}2\ m$	(β)	€500,24

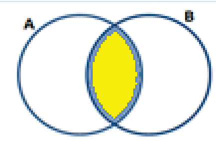
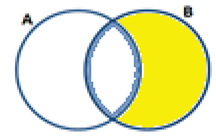
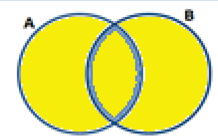
ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Σύνολα

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ				*Σελίδα 29*
Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.		$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, $\nu(A) = 5$ $B = \{86, 88, 90, 92, 94, 96, 98\}$ $\nu(B) = 7$ $\Gamma = \{\,\}$ ή $\emptyset$, $\nu(\Gamma) = 0$ $\Delta = \{18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99\}$ $\nu(\Delta) = 10$ $\Gamma = \{M, A, \Theta, H, T, I, K\}$ $\nu(E) = 7$		
2.		A: Οι εποχές του χρόνου B: Οι τριψήφιοι αριθμοί που σχηματίζονται από τα ψηφία 1,2,3 Γ: τα διψήφια πολλαπλάσια του 11		
3.	(α)	$\in$	(β)	$\in$
	(γ)	$\notin$	(δ)	$\notin$
	(ε)	$\notin$	(στ)	$\notin$
	(ζ)	$\in$	(η)	$\notin$
5.	ΣΩΣΤΟ,	ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ, ΛΑΘΟΣ, ΣΩΣΤΟ		

ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ — *Σελίδα 34*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	$A = B$	(β)	$A \subseteq \Gamma$
2.	(α)	$A \subseteq \Omega$	(β)	$B \subseteq \Omega$
	(γ)	$\Gamma \nsubseteq \Omega$		
3.	(α)	5, 3 και 1,2	(β)	π, o και μ, ν, o
4.		Δεν ισχύει	Π.χ. $A = \{1,2\}$ $B = \{*, \#\}$	
5.	(α)	Π.χ. $A = \{2,4,6,8, \dots\}$	(β)	Π.χ. $B = \{1,2,3,4,5\}$
6.	(α)	$A \subseteq B$	(β)	$A \nsubseteq B$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ — *Σελίδα 37*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις
1.	(α)	$A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
	(β)	$A \cap B = \{4, 6\}$
2.		$A \cap B$
3.	(α)	$A \cup B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \omega, \mu, \tau, \rho, \iota\}$
	(β)	$A \cap B = \{\alpha, \gamma, \varepsilon\}$
	(γ)	$A \cap \Gamma = \{\delta, \varepsilon, \zeta\}$
	(δ)	$B \cup \Gamma = \{\gamma, \varepsilon, \omega, \mu, \tau, \rho, \iota, \alpha, \delta, \zeta\}$
4.	(α)	
	(β)	
	(γ)	
5.		$K = \{\varepsilon, \zeta, \gamma, \delta, \eta\}$
7.	(α)	Π.χ. $\{\varphi, \omega, \alpha, \chi\} \cap \{\alpha, \chi, \upsilon, \psi, \omega\} = \{\alpha, \chi, \omega\}$
	(β)	$\{22, 33, 11\} \cup \{11, 22, 55, 33, 66\} = \{11, 22, 33, 55, 66\}$
8.		8
9.	(γ)	$A \cap \Gamma$

	(δ)	$B \cup \Gamma$		

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ *Σελίδα 40*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.		$A = \{7{,}0{,}1\} \quad \nu(A) = 3$ $B = \{Πέμπτη, Παρασκευή\} \quad \nu(B) = 2$ $\Gamma = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}\} \quad \nu(\Gamma) = 7$ $\Delta = \{\Gamma, M, T, P\} \quad \nu(\Delta) = 4$ $E = \{\ \ \} \quad \nu(E) = 0$		
2.		Α: οι μήνες του καλοκαιριού στο Βόρειο ημισφαίριο Π.χ. B: τα φωνήεντα της λέξης π.χ ΥΛΙΚΗ ή ΥΒΡΙΔΙΚΗ Γ: οι διψήφιοι άρτιοι μικρότεροι του 21 Δ: το φύλο του ανθρώπου E: τα ψηφία του αριθμού 224466 Z: οι μέρες της εβδομάδας που αρχίζουν από Τ		
3.		$A \neq B$		
4.	(α)	B	(β)	$B \cap \Gamma$
	(γ)	$B \cup \Gamma$		
5.	(α)	$A \cup B = \{M, A, \Theta, H, T, I, K, O, \Sigma\}$		
	(β)	$A \cap B = \{M, A, \Theta, H, T\}$		
	(γ)	$A \cup B \cup \Gamma = \{M, A, \Theta, H, T, I, K, O, \Sigma\}$		
	(δ)	$A \cap B = \{M, A, T\}$		
7.	(ε)	ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ, ΛΑΘΟΣ, ΛΑΘΟΣ, ΣΩΣΤΟ, ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ		
8.	(α)	→ iv	(β)	→ iii
	(γ)	→ i	(δ)	→ ii
	(ε)	→ iv		
9.		ΣΩΣΤΟ, ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ, ΣΩΣΤΟ, ΛΑΘΟΣ		
10.	(α)	Και στην Α΄ και στη Β΄ και στη Γ΄ Γυμνασίου		
	(β)	Μόνο στην Α΄ και στη Γ΄ Γυμνασίου		
	(γ)	Μόνο στην Α΄ και στη Β΄ Γυμνασίου		
	(δ)	Μόνο στη Γ΄ Γυμνασίου		

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ *Σελίδα 43*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις
1.		3
2.	(γ)	Π.χ. $\Gamma \subseteq B$, $A \cap \Gamma = \emptyset$, $B \cup \Gamma = B$, …

3.	(α)	K	(β)	Λ
4.	(α)	$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$		
	(β)	$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B)$		
5.	(γ)	45		
6.	(α)	$\Sigma \subseteq \Pi$	(β)	$\Pi \subseteq \Sigma$
	(γ)	Π και Σ κενά σύνολα		
7.		15 άτομα		

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Αριθμοί

ΔΥΝΑΜΕΙΣ			*Σελίδα*	*50*
Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	3^4	(β)	Δεν μπορεί
	(γ)	2013^3	(δ)	Δεν μπορεί
	(ε)	β^2	(στ)	Δεν μπορεί
2.	(α)	49 Βάση: 7 Εκθέτης: 2	(β)	144 Βάση: 12 Εκθέτης: 2
	(γ)	8 Βάση:2 Εκθέτης: 3	(δ)	10000 Βάση: 10 Εκθέτης: 4
	(ε)	243 Βάση: 3 Εκθέτης: 5	(στ)	1 Βάση: 1 Εκθέτης: 3
	(ζ)	1234 Βάση: 1234 Εκθέτης: 1	(η)	1 Βάση: 5 Εκθέτης: 0
	(θ)	1 Βάση: 2012 Εκθέτης: 0		
3.	(α)	2^5	(β)	7^2
	(γ)	Δεν μπορεί	(δ)	10^3
4.	(α)	π.χ. 1^5 , 1^{2015}, 2014^0, …		
	(β)	8^2 ή 4^3 ή 2^6		
	(γ)	9^2 ή 3^4 ή 81^1		
	(δ)	16^2 ή 4^4 ή 2^8		
5.	(α)	390625	(β)	20736
	(γ)	117649	(δ)	4096
6.		$1^5 < 5^2 < 2^5 < 5^3$		
7.		5 φορές		
8.		Με τον δεύτερο τρόπο παίρνει: Για την 21η μέρα ο μισθός του θα είναι $2^{20} = 1048576\ \sigma\varepsilon\nu\tau$ €10484,76 για την 20η μέρα €5242,38, κ.ο.κ. Άρα, ήδη με τις δυο τελευταίες μέρες θα ξεπεράσει τις €15000 που θα έπαιρνε με τον Α΄ τρόπο.		
9.	(α)	8	(β)	29

	(γ)	129	(δ)	21
	(ε)	10	(στ)	81
10.	(α)	14	(β)	5
	(γ)	148	(δ)	5
	(ε)	112	(στ)	26
11.	(α)	$2 \cdot (5+2)^2 = 11^2 - 23$		
	(β)	$22 - (7-5)^2 \cdot 2 = 2 \cdot 3^2 - 4$		
12.		$6,\ 2,\ 5,\ 3$		

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ *Σελίδα 57*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	1333331		
2.		1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010		
3.	(α)	6	(β)	15
	(γ)	9	(δ)	127
	(ε)	113	(στ)	170
4.	(α)	1010	(β)	1000
	(γ)	1110	(δ)	10001
	(ε)	1110	(στ)	101111
	(ζ)	110100	(η)	1000011
5.	(α)	100, 101, 110		
	(β)	1110, 1111, 10000		
	(γ)	1100, 1101, 1110		
6.	(α)	Μικρότερος αριθμός: 100_2		Μεγαλύτερος αριθμός: 111_2
	(β)	Μικρότερος αριθμός: 4		Μεγαλύτερος αριθμός: 7
7.		Οποιοσδήποτε αριθμός από τους: $8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$		

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ *Σελίδα 62*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	$2x$	(β)	$4a$
	(γ)	$5a$	(δ)	8β
	(ε)	$8a+1$	(στ)	$13x-5$
2.	(α)	ΛΑΘΟΣ	(β)	ΣΩΣΤΟ
	(γ)	ΣΩΣΤΟ	(δ)	ΛΑΘΟΣ
3.	(α)	8β	(β)	2

	(γ)	5	(δ)	$\kappa,\ 10$
	(ε)	2λ	(στ)	3
4.	(α)	$\Pi = 4\alpha$	(β)	$\Pi = 6x$
	(γ)	$\Pi = 3\beta$		
5.		ΣΩΣΤΟ , ΛΑΘΟΣ, ΣΩΣΤΟ		
6.	(α)	$x + 2$	(β)	Ο Αλέξης έχει €14 λιγότερα από τον Ανδρέα
	(γ)	$2x$	(δ)	$\frac{x}{2}$
	(ε)	$3x - 4$	(στ)	$5(x + 2)$
	(ζ)	Η Έλενα έχει €20 λιγότερα από τα επταπλάσια χρήματα του Ανδρέα		
7.		$\Pi = 4x + 3$		
8.	(α)	$M{:}\,3x$ $\quad A{:}\,x$		
	(β)	$M{:}\,3x + 7$ $\quad A{:}\,x + 7$		
	(γ)	$M{:}\,3x - 6$ $\quad A{:}\,x - 6$		
9.		(γ)		
10.		Δανάη, Γιώργος, Έλενα, Αλέξανδρος, Βάσια		

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ *Σελίδα 67*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	$E = \frac{x(x+3)}{2}$, *όπου x το μήκος της βάσης του τριγώνου*		
	(β)	i. $E = 44\ cm^2$	ii.	$E = 77\ cm^2$
2.	(α)	36	(β)	9
	(γ)	12	(δ)	0
	(ε)	26	(στ)	29
3.	(α)	Αριθμός κουλουριών σε κάθε σακούλα: $8,\ 10,\ 13,\ 15,\ 20$ Συνολικός αριθμός κουλουριών: $44,\ 54,\ 69,\ 79,\ 104$		
	(β)	$\Sigma = 5x + 4$		
4.	(α)	22 άτομα	(β)	42 άτομα
5.	(α)	$\Pi = 20\ cm$	(β)	$\Pi = 4\alpha$
	(γ)	Του $32^{ου}$		
6.		$A = \{5,10,15, \dots\}$ $B = \{1,3,5,7, \dots\}$ $\Gamma = \{5,9,13,17,21\}$		
7.		$A = \{2\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}\}$ $B = \{\kappa + 1 \mid \kappa \in \mathbb{N}\}$ $\Gamma = \{\mu \mid$ μ μονοψήφιος περιττός αριθμός$\}$ $\Delta = \{\chi \mid \chi \in \mathbb{N}\ \kappa\alpha\iota\ \chi < 5\}$		

8.	(α)	x: χρόνος σε λεπτά y:αριθμός μηνυμάτων $Χρέωση = 100 + x + 2y$
	(β)	$X = 357$ σεντ €3,57

ΙΣΟΤΗΤΑ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΤΗΤΩΝ *Σελίδα 72*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.		(α) και (γ)		
2.	(α)	ΛΑΘΟΣ	(β)	ΣΩΣΤΟ
	(γ)	ΣΩΣΤΟ	(δ)	ΛΑΘΟΣ
	(ε)	ΛΑΘΟΣ		
3.	(α)	$\alpha = 9 + \beta$	(β)	$y = x$
	(γ)	$x = 4y$	(δ)	$\beta = 13 + \gamma$
	(ε)	$\omega = x$		
4.	(α)	Θα έχουν ίση βαθμολογία		
	(β)	Θα έχουν ίσο μέσο όρο βαθμολογίας		
6.		2012, 2013, 2014		

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ *Σελίδα 78*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.		10 δεν είναι λύση, 11 είναι λύση της εξίσωσης		
2.	(α)	$\psi = 7$	(β)	$\gamma = 30$
	(γ)	$\omega = 15$	(δ)	$x = 64$
	(ε)	$\mu = 3125$	(στ)	$\delta = 510$
	(ζ)	$x = 57$	(η)	$x = 5$
	(θ)	$\alpha = 5$	(ι)	$\omega = 15$
3.	(α)	$\psi = 11$	(β)	$\alpha = 7$
	(γ)	$\kappa = 3$	(δ)	$\alpha = 6$
	(ε)	$\alpha = 3$	(στ)	$x = 25$
	(ζ)	$\beta = 15$	(η)	$\alpha = 2$
4.		$\alpha + x = \beta \Leftrightarrow x = \beta - \alpha$ $x - \alpha = \beta \Leftrightarrow x = \beta + \alpha$ $\alpha - x = \beta \Leftrightarrow x = \alpha - \beta$ $\alpha \cdot x = \beta \Leftrightarrow x = \beta : \alpha$ $x : \alpha = \beta \Leftrightarrow x = \beta \cdot \alpha$ $\alpha : x = \beta \Leftrightarrow x = \alpha : \beta$		
5.		π.χ. $x + 5 = 15$, $5x = 50$, $x + 2012 = 2022$, $100 : x = 10$, $x - \frac{1}{2} = 9\frac{1}{2}$, …		

6.		Και οι δύο λύσεις έχουν λάθος, αφού δεν εφάρμοσε ορθά τις ιδιότητες των ισοτήτων.
7.		$2x + 3 = 11$
8.		$22\ m$
9.		€13680
10.		$10\ m$
11.		€12
12.		Διαστάσεις: $6\ cm$ και $12\ cm$
13.		14 και 16
14.		Κουτί: $2\ \kappa g$ περιεχόμενο: $8\ kg$
15.		30 σελίδες
16.		$AB = 12\ cm,\ B\Gamma = 5\ cm,\ A\Gamma = 13\ cm$
17.	(α)	24 τετράγωνα
	(β)	Δεν μπορώ, θα μου περισσέψουν μερικά
18.		$\beta = 10\ cm$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ *Σελίδα 81*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.		Ο αριθμός 2 δεν είναι λύση της εξίσωσης		
2.	(α)	$\alpha = 84$	(β)	$\psi = 24$
	(γ)	$x = 28$	(δ)	$\omega = 110$
	(ε)	$\alpha = 24$	(στ)	$\omega = 11$
	(ζ)	$x = 5$	(η)	$\beta = 9$
3.	(α)	$=$	(β)	$>$
	(γ)	$=$	(δ)	$=$
	(ε)	$<$	(στ)	$>$
4.	(α)	3^4 ή 9^2	(β)	1000^1 ή 10^3
	(γ)	3^3 ή 27^1	(δ)	36^1 ή 6^2
	(ε)	12^2 ή 144^1	(στ)	2^4 ή 4^2 ή 16^1
5.	(α)	122	(β)	0
	(γ)	36	(δ)	13
	(ε)	1	(στ)	17
	(ζ)	20	(η)	134
6.		$A = 17,\quad B = 27,\quad \Gamma = 7$		

7.	(α)	3	(β)	6
	(γ)	15	(δ)	18
8.	(α)	111	(β)	10010
	(γ)	1110101	(δ)	10110101
9.	(α)	6ν	(β)	$2+4\nu$
10.	(α)	A	(β)	$\varDelta$
	(γ)	$\varDelta$	(δ)	B
11.	(α)	$\varPi = x + 600$	(β)	$\varLambda = \frac{4}{5}(x+600)$
	(γ)	$Συνολικός\ αριθμός = \frac{14}{5}x + 1080$		
12.	(α)	Έστω ο αριθμός x, $x - 6 = 11$		
	(β)	Έστω ο αριθμός x, $4x = 20$		
	(γ)	Έστω ο αριθμός x, $x + 5 = 8$		
	(δ)	Έστω ο αριθμός x, $x - 7 = 12$		
	(ε)	Έστω ο αριθμός x, $6x = 54$		
	(στ)	Έστω ο αριθμός x, $4x + 12 = 26$		
13.		$3, \quad 9, \quad 27, \quad 81, \ \ldots$		
14.		Μαρίνα: 36 χρονών		Εβελίνα: 12 χρονών
15.		$194, \quad 195$		
17.		$242, \quad 243, \quad 244$		
18.		$E_{τριγώνου} = 16\ cm^2$, *Πλευρά:* $4\ cm$, $\varPi_{τετραγώνου} = 16\ cm$		
19.		$A = 26, \quad B = 40$		
20.		€4		
21.	(α)	$1001, \quad 1010, \quad 1100$		
	(β)	$9, \quad 10, \quad 12$		

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ *Σελίδα 84*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις
1.	(α)	Αν x ο αριθμός των ενηλίκων, τότε χρειάζονται $4x + 1$ διαδρομές Για 6 ενήλικες, χρειάζονται 25 διαδρομές.
2.		Δανία. Έστω x ο αριθμός που έχετε σκεφτεί. Η παράσταση που προκύπτει είναι ανεξάρτητη του x και ίση πάντα με 4.
3.		$28\ cm$
4.	(α)	Στο τετραδικό σύστημα
	(β)	$12 = 1100_{(2)} \quad = 14_{(8)}$ $123 = 1111011_{(2)} \quad = 173_{(8)}$

		$724 = 1011010100_{(2)} = 1324_{(8)}$			
	(γ)	i.	ΣΩΣΤΟ	ii.	ΛΑΘΟΣ
	(δ)	i.	$736_{(12)} = 1050_{(10)}$		
		ii.	Η ισότητα ισχύει για όλα τα συστήματα με βάση μεγαλύτερη του 9		
5.	(α)	$11110110_{(2)}$		(β)	$10011111_{(2)}$
	(γ)	$1100100_{(2)}$			
8.	(β)	Γιατί χρειάζονται περίπου 580 χιλιάδες εκατομμύρια χρόνια			
	(γ)	$2^x - 1$			

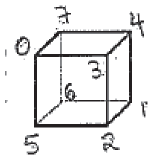
ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Διαιρετότητα

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ			*Σελίδα 93*	
Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	$\pi = 19, \upsilon = 0$	(β)	$\pi = 30, \upsilon = 2$
	(γ)	$\pi = 42, \upsilon = 0$		
2.		$\pi = 7, \upsilon = 4$		
3.		739, 100, 20, 15		
4.		36		
5.	(α)	ΣΩΣΤΟ	(β)	ΛΑΘΟΣ
	(γ)	ΛΑΘΟΣ	(δ)	ΣΩΣΤΟ
	(ε)	ΛΑΘΟΣ	(στ)	ΛΑΘΟΣ
	(ζ)	ΣΩΣΤΟ		
6.		4		
7.		19, 38		
8.		ΟΡΘΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ		
9.	(α)	Κυριακή	(β)	Μάιος
10.	(α)	57	(β)	36
11.		2 ,2 , 9 χρονών		

Ιδιοτητες των Διαιρετων		Σελίδα 97
Δραστηριότητα		Απαντήσεις
1.	(α)	Διαιρείται
	(β)	Δεν Διαιρείται
	(γ)	Διαιρείται
	(δ)	Διαιρείται
3.	(α)	2814 και 28028 Διαιρούνται
	(β)	Π.χ. 1428, 4242, …
4.		Τέλεια διαίρεση
6.	(α)	$\alpha = 2\mu + \upsilon \quad \beta = 2\nu + \upsilon$
7.		Σε κουτιά των 14, 10, 7, 5, 2
8.		$x = 12, 24, 36, \ldots.$ Άπειρα σύνολα

Κριτηρια Διαιρετοτητας		Σελίδα 104		
Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	1520, 4404, 3850	(β)	765, 4404
	(γ)	1520, 4404	(δ)	765, 1520, 3850
	(ε)	3850	(στ)	765
2.	(α)	0 ή 2 ή 4 ή 6 ή 8	(β)	2 ή 6
	(γ)	1 ή 4 ή 7	(δ)	6
	(ε)	2 ή 8		
3.	(α)	2 ή 3 ή 4 ή 6 ή 7 ή 8 ή 9	(β)	0 ή 2 ή 3 ή 6 ή 8
	(γ)	0 ή 1 ή 2 ή 3 ή 4 ή 5 ή 8 ή 9		
	(δ)	0	(ε)	4 *και* 5
4.	(α)	100	(β)	100
	(γ)	102	(δ)	108
	(ε)	100	(στ)	105
5.		Ορθός συλλογισμός		
6.		0 ή 3 ή 9		
7.		90		
8.		102		
9.		Πολλαπλάσια του 6		
10.		N: 64 και A: 90		
14.	(β)	$37, 111, \alpha, 3\alpha, 37\alpha$		

Πρωτοι και Συνθετοι Αριθμοι *Σελίδα 110*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις
1.		$56 = 2^3 \cdot 7$, $108 = 2^2 \cdot 3^3$, $73 = 73^1$, $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, $65 = 5 \cdot 13$ πρώτοι: 73
2.		42
3.		30
4.		Π.χ. $2 + 3 = 5$ ΟΧΙ
5.	(α)	$32 = 3 + 29$
	(β)	20 , $23, 29, 31, 37,$ 40
6.		211
7.		Δεν είναι πρώτος
11.		28 δεν είναι πρώτος
12.	(α)	$12 = 3 \cdot 4$ $\left.\begin{array}{l} 3 \mid (2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \alpha) \\ 4 \mid (2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow 12 \mid (2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \alpha)$
	(β)	$15 = 3 \cdot 5$ $\left.\begin{array}{l} 3 \mid (2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \alpha) \\ 5 \mid (2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow 15 \mid (2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \alpha)$
	(γ)	$21 = 3 \cdot 7$ $\left.\begin{array}{l} 3 \mid (2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \alpha) \\ 7 \mid (2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow 21 \mid (2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \alpha)$
13.		

Μεγιστος Κοινος Διαιρετης και Ελαχιστο Κοινο Πολλαπλασιο *Σελίδα 116*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.		$ΜΚΔ(32, 36) = 4,\ ΕΚΠ[32, 36] = 288$ $ΜΚΔ(24, 45) = 3,\ ΕΚΠ[24, 45] = 360$ $ΜΚΔ(32,48,80) = 16,\ ΕΚΠ[32, 48, 80] = 480$ $ΜΚΔ(252,294, 378) = 42,\ ΕΚΠ[252,294, 378] = 5292$		
2.		$Α \cap Β \cap Γ$, *4 στοιχεία*		
3.	(α)	είναι πρώτοι	(β)	είναι πρώτοι
	(γ)	δεν είναι πρώτοι	(δ)	είναι πρώτοι
4.	(α)	$\frac{49}{38}$	(β)	$\frac{41}{107}$

	(γ)	$\frac{1}{3}$		
5.	(α)	$\frac{5}{48}$	(β)	$\frac{25}{576}$
	(γ)	$\frac{4}{37}$		
6.		18 δέματα, Τετράδια: 6, Βιβλία: 1, Μολύβια: 3		
7.		150 δευτερόλεπτα, Μεγάλος τροχός: 3, Μικρός τροχός: 5		
8.		24 *ώρες* , 1 φορά		
9.		45 δευτερόλεπτα		
10.		Να είναι πρώτοι μεταξύ τους Π.χ. 5, 9		
11.		$x = 24$		
12.		$\alpha = 13$ ή $\alpha = 26$ ή $\alpha = 52$		
13.		14 *και* 35		
15.		Το πρωί, στις 3, στις 6		
16.		Η φιγούρα θα αντιπροσωπεύει 4 μαθητές		

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ *Σελίδα 119*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	195	(β)	42
	(γ)	66		
2.	(α)	ΛΑΘΟΣ	(β)	ΛΑΘΟΣ
	(γ)	ΛΑΘΟΣ	(δ)	ΛΑΘΟΣ
	(ε)	ΣΩΣΤΟ	(στ)	ΣΩΣΤΟ
	(ζ)	ΛΑΘΟΣ		
3.		180, 270, 360, 450, 540, 630, 720, 810, 900, 990		
4.		2184		
5.		δεν είναι πρώτοι αλλά είναι πρώτοι μεταξύ τους		
6.		36 χρονών		
7.		12 ή 13 ή 15 ή 17 ή 21 ή 31 ή 51 ή 71		
9.		78		
10.		1080 μαθητές		
11.		8 πιατέλες με 4 φράουλας, 6 σοκολάτας, 9 βανίλιας		
12.		252		
13.		2010		
14.		€195		

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού				Σελίδα 121
Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	8	(β)	24
2.		2520		
3.		Π.χ. $4, 9, 10$		
4.		501		

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: Ακέραιοι – Ρητοί Αριθμοί

Ρητοί Αριθμοί – Απόλυτη τιμή *Σελίδα 130*

Δραστηριότητα — Απαντήσεις

3.

	ΦΥΣΙΚΟΣ	ΑΚΕΡΑΙΟΣ	ΡΗΤΟΣ	ΘΕΤΙΚΟΣ	ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ
2013	✓	✓	✓	✓	
-99		✓	✓		✓
$-4{,}052$			✓		✓
$+0{,}023$			✓	✓	
$-\frac{4}{5}$			✓		✓
3^4	✓	✓	✓	✓	

4.	(α)	ΣΩΣΤΟ	(β)	ΛΑΘΟΣ
	(γ)	ΛΑΘΟΣ	(δ)	ΣΩΣΤΟ
	(ε)	ΛΑΘΟΣ	(στ)	ΛΑΘΟΣ
5.	(α)	$1\frac{1}{4}$	(β)	Π.χ. $-3, 1$
	(γ)	Τρεις αριθμοί		
6.	(α)	2	(β)	$7{,}5$
	(γ)	$12\frac{1}{3}$	(δ)	$\pm 8{,}3$
	(ε)	0	(στ)	± 123
7.	(α)	2	(β)	15
	(γ)	11		
8.	(α)	$-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2$	(β)	0
	(γ)	$-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2$		
9.		*Δ*		

Σύγκριση Ρητών Αριθμών				*Σελίδα 134*
Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	$<$	(β)	$<$
	(γ)	$<$	(δ)	$<$
	(ε)	$<$	(στ)	$>$
	(ζ)	$>$	(η)	$>$
	(θ)	$>$	(ι)	$<$
2.		$-280{,}21$ $\quad -280{,}12$ $\quad -28{,}12$ $\quad -28{,}012$ $\quad -2{,}8$		
3.		π.χ. $-107 < -62$, $\quad -62 < -23$, $\quad 15 > -23$		
4.	(α)	ΛΑΘΟΣ π.χ. $+8{,}1 > 5$	(β)	ΣΩΣΤΟ
	(γ)	ΣΩΣΤΟ	(δ)	ΛΑΘΟΣ π.χ. $\lvert -5{,}999\rvert < +6$
	(ε)	ΣΩΣΤΟ	(στ)	ΛΑΘΟΣ π.χ. $16 > -\lvert -16\rvert$
5.	(α)	ΛΑΘΟΣ	(β)	ΛΑΘΟΣ
	(γ)	ΛΑΘΟΣ	(δ)	ΣΩΣΤΟ
6.	(α)	π.χ. $-2 < -1 < 0 < \frac{1}{2} < 1$		
	(β)	π.χ. $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{4} < 0 < 1 < 1\frac{1}{2}$		
7.	(α)	$>$	(β)	$>$

Πρόσθεση Ρητών Αριθμών				*Σελίδα 141*
Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	1	(β)	$\frac{5}{6}$
	(γ)	$1\frac{1}{6}$	(δ)	$\frac{19}{20}$
	(ε)	$0{,}45$	(στ)	$6{,}55$
2.	(α)	$+22$	(β)	$+22$
	(γ)	$+6$	(δ)	-22
	(ε)	-28	(στ)	-30
	(ζ)	-13	(η)	-54
	(θ)	0	(ι)	0
3.	(α)	$-4{,}15$	(β)	$0{,}8$
	(γ)	$+\frac{1}{5}$	(δ)	$-5\frac{2}{3}$
	(ε)	$-2{,}35$	(στ)	$+3\frac{5}{14}$
	(ζ)	$-1\frac{4}{5}$	(η)	$-1\frac{1}{4}$
4.	(α)	$+7-4=+3$	(β)	$-3+2=-1$

	(γ)	$-3-2=-5$		
6.	(α)	$+8$	(β)	$-10{,}1$
	(γ)	$+20$	(δ)	$+40$
	(ε)	$+7$	(στ)	$-3\frac{5}{12}$
	(ζ)	$-4\frac{11}{30}$		
7.		$+3$		
8.	(α)	-9	(β)	14
	(γ)	-13	(δ)	-1
	(ε)	-11	(στ)	3

9.

$+3$	-4	$+1$
-2	0	$+2$
-1	$+4$	-3

-1	-6	$+1$
0	-2	-4
-5	$+2$	-3

10.		$-38{,}92$ ευρώ		
11.		$A=-0{,}9$ $B=-5{,}3$ $\Gamma=-6{,}2$		
12.	(α)	ΛΑΘΟΣ	(β)	ΛΑΘΟΣ
	(γ)	ΣΩΣΤΟ	(δ)	ΣΩΣΤΟ
13.		$-3°C$		
14.		$+9-6-3=-7+5+2=-5+1+4$		
15.	(α)	-9β	(β)	$-9x$
	(γ)	$-11y-2$	(δ)	$-9y-14$
	(ε)	$9\alpha+2\beta$	(στ)	$-2y+3\omega-3$
16.	(α)	$\alpha=\beta=0$ ή α και β αντίθετοι αριθμοί		
	(β)	$\beta=0$ και α οποιοσδήποτε ρητός αριθμός		
	(γ)	$\alpha=\beta=0$		

Αφαίρεση Ρητών *Σελίδα 147*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	-30	(β)	$+35$
	(γ)	-2	(δ)	$+23$
	(ε)	-25	(στ)	0
	(ζ)	$+25$	(η)	$+18$
2.	(α)	$-1{,}4$	(β)	$+6{,}8$
	(γ)	$-15{,}2$	(δ)	-1

	(ε)	$+29\frac{5}{6}$	(στ)	$+2\frac{1}{24}$
3.	(α)	$2, 0, -2,$	(β)	$2, 5, 8$
	(γ)	$-1, -6, -11$	(δ)	$-7\frac{1}{2}, -9, -10\frac{1}{2},$
4.	(α)	$<$	(β)	$<$
	(γ)	$>$	(δ)	$>$
	(ε)	$<$	(στ)	$<$
5.		Ανέβηκε κατά $53\ m$		
6.	(α)	-4	(β)	$+15$
	(γ)	$+18$	(δ)	24
	(ε)	$+9$	(στ)	$+13\frac{1}{5}$
	(ζ)	$-\frac{2}{11}$	(η)	$-1\frac{2}{15}$
	(θ)	Οποιοσδήποτε αριθμός μεγαλύτερος του $+2$	(ι)	Οποιοσδήποτε αριθμός μικρότερος του $+7$
7.	(α)	-14	(β)	$+2$
	(γ)	-12	(δ)	$+7{,}4$
	(ε)	$+\frac{1}{12}$		
8.		$A = -2\frac{1}{3}, \qquad B = 3\frac{2}{3}$		
9.	(α)	ΠΑΝΤΟΤΕ		
	(β)	ΚΑΠΟΤΕ Αντιπαράδειγμα: $-2-(-1)=-1$		
	(γ)	ΚΑΠΟΤΕ Αντιπαράδειγμα: $+2-(+11)=-9$		
	(δ)	ΠΟΤΕ		
10.		$\mathrm{A} = 10{,}8 \cong 11, \qquad \mathrm{B} = 87{,}52 \cong 88$		
11.	(α)	$-$	(β)	$+, -$
	(γ)	$-, +, -$		
12.	(α)	Ταξιδεύει προς τα δυτικά και αλλάζει η ζώνη της ώρας.		
	(β)	Θα φθάνει στις $17:00$		

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΡΗΤΩΝ *Σελίδα 155*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	$1\frac{1}{2}$	(β)	$\frac{1}{2}$
	(γ)	$\frac{1}{2}$	(δ)	$16{,}32$
2.	(α)	-14	(β)	$+10$
	(γ)	0	(δ)	-6
	(ε)	-36	(στ)	$+55$

	(ζ)	$+18{,}6$	(η)	0
	(θ)	-4	(ι)	$6{,}72$
	(ια)	$-\frac{1}{10}$	(ιβ)	$+\frac{16}{21}$
3.	(α)	-6	(β)	$+6$
	(γ)	-12	(δ)	-6
	(ε)	0	(στ)	$+1$
	(ζ)	$+\frac{1}{12}$	(η)	$+1$
	(θ)	0	(ι)	$+1$

4.

Αριθμός	$+3$	-7	$-2{,}5$	$-\frac{5}{3}$	$+1\frac{2}{7}$
Αντίθετος	-3	$+7$	$+2{,}5$	$+\frac{5}{3}$	$-1\frac{2}{7}$
Αντίστροφος	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{7}{9}$

5.	(α)	$16, -32, +64$		
	(β)	$2, -2, \ 2$		
	(γ)	$10000, -100000, \ 1000000$		
	(δ)	$81, -243, \ 729$		
6.	(α)	ΛΑΘΟΣ	(β)	ΣΩΣΤΟ
	(γ)	ΣΩΣΤΟ	(δ)	ΣΩΣΤΟ
	(ε)	ΛΑΘΟΣ		
7.	(α)	$+6$	(β)	-15
	(γ)	-12	(δ)	-4
	(ε)	$+7$	(στ)	-36
	(ζ)	-47	(η)	$+7$
	(θ)	$+3$	(ι)	0
8.	(α)	$+1$	(β)	$+1$
	(γ)	$+1$	(δ)	$+\frac{1}{2}$
	(ε)	0	(στ)	-1
	(ζ)	-1	(η)	$-\frac{1}{2012}$
9.		π.χ. $(-1)(+6)$, $(+1)(-6)$, $(-2)(+3)$, $(+2)(-3)$ $(+1)(-2)(+3)$, $(+1)(-1)(+1)(+6)$, $(-1)(-2)(-1)(-1)(-3)$, $(-1)(+1)(-1)(-1)(-1)(-6)$ …		
10.	(α)	$(-2100)\cdot(-2{,}5)$		
	(β)	$(-2100)\cdot(+10)$		
11.		$\mathrm{A}=-2$, $\mathrm{B}=+1$, $\Gamma=0$, $\Delta=+10$		
12.	(α)	$-3x-6$	(β)	$-3\kappa+8$

	(γ)	$3\alpha + 16$	(δ)	$18 - x$
	(ε)	$22x - 10$	(στ)	2
	(ζ)	$10\mu + 4$	(η)	$-3y + 55$
13.	(α)	i. $350 - x$		ii. $6x$
		iii. $9(350 - x)$		iv. $-3x + 3150$
	(β)	€2790		
14.		2		

Δυναμεις Ρητων Αριθμων *Σελίδα 160*

Δραστηριότητα — Απαντήσεις

1.

Δύναμη	*Βάση*	*Εκθέτης*	*Γινόμενο*
$(-2)^3$	-2	3	$(-2)(-2)(-2)$
$(-6{,}3)^2$	$-6{,}3$	2	$(-6{,}3)(-6{,}3)$
$\left(-\frac{1}{3}\right)^4$	$-\frac{1}{3}$	4	$\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$

2.	(α)	*θετικό*	(β)	*αρνητικό*
	(γ)	*αρνητικό*	(δ)	*θετικό*
3.	(α)	$+$	(β)	$+$
	(γ)	$+$	(δ)	$-$
	(ε)	$-$	(στ)	$-$
	(ζ)	$+$	(η)	$-$
	(θ)	$+$		
4.	(α)	25	(β)	-16
	(γ)	$-\frac{27}{64}$	(δ)	$\frac{1}{49}$
	(ε)	1	(στ)	1
	(ζ)	27	(η)	-100
5.	(α)	$25 = (-5)^2 = (+5)^2 = (+25)^1$		
	(β)	$-8 = (-2)^3 = (-8)^1$		
	(γ)	*π.χ.* $1 = (-1)^{2012} = (+1)^{2012} = (-2012)^0$		
6.	(α)	ΛΑΘΟΣ	(β)	ΛΑΘΟΣ
	(γ)	ΛΑΘΟΣ	(δ)	ΣΩΣΤΟ
	(ε)	ΛΑΘΟΣ	(στ)	ΛΑΘΟΣ
	(ζ)	ΣΩΣΤΟ	(η)	ΛΑΘΟΣ
	(θ)	ΛΑΘΟΣ	(ι)	ΛΑΘΟΣ

7.	(α)	$=$	(β)	$=$
	(γ)	$>$	(δ)	$=$
	(ε)	$<$	(στ)	$>$
8.		$(-6)^3 < 6^1 < (-6)^2 < 6^9$		
9.		Μαρίνα: 0 , ή 1 Ιωάννης: 0 , ή 10 Ισμήνη: Κάθε αριθμός μεταξύ του 0 και του 1		
10.		$A = 16$		
11.		$A = 0$		

Διαιρεση Ρητων — *Σελίδα 165*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.		$A = -5,\quad B = -4\,,\quad \Gamma = +1\frac{1}{3},\quad \Delta = -\frac{2}{5},\quad E = -\frac{4}{5}\,,\quad Z = +\frac{3}{4}$ $A < B < E < \Delta < Z < \Gamma$		
2.	(α)	$+5$	(β)	-3
	(γ)	-6	(δ)	$+10$
	(ε)	$+0{,}7$	(στ)	$-0{,}5$
	(ζ)	-100	(η)	$+3{,}06$
	(θ)	-40	(ι)	$-\frac{2}{35}$
	(ια)	$-\frac{1}{3}$	(ιβ)	$+98$
3.		$\pm 1\,,\pm 5$		
4.		π.χ. $-4, +2, +6$		
5.	(α)	$<$	(β)	$>$
	(γ)	$<$	(δ)	$=$
	(ε)	$>$	(στ)	$>$
6.	(α)	$+4$	(β)	$+4$
	(γ)	-5	(δ)	$+12$
	(ε)	$+12$	(στ)	$+25$
	(ζ)	$+\frac{1}{8}$	(η)	-3
	(θ)	-8	(ι)	$+2$
	(ια)	-24	(ιβ)	π.χ. $\frac{-12}{+6}$ ή $\frac{20}{-10}$ ή …
7.		Ιούλιος: -45 ℃	Αύγουστος: -50 ℃	
8.	(α)	Όταν οι δύο αριθμοί είναι ίσοι		
	(β)	Όταν οι δύο αριθμοί είναι αντίθετοι		
	(γ)	Όταν ο διαιρετέος είναι μηδέν		

9.	(α)	$+4$	(β)	$+1$
	(γ)	0	(δ)	$+4$
	(ε)	$-\frac{4}{3}$	(στ)	$+\frac{1}{33}$
	(ζ)	$-\frac{3}{4}$	(η)	$+\frac{1}{10}$
10.	(α)	-12	(β)	-19
	(γ)	$+9$		
	(δ)	$(-20):[2-(-2)]$, $[(-21)+6]:3$, $10+3\cdot(2-7)$		
11.	(α)	$(-10)\cdot(-2)+(+1)=21$	(β)	$(-5)-(-2)+(+4)=1$
	(γ)	$6\cdot(-7)-(+2)=-44$	(δ)	$(-8)-(-2):(-2)=-9$
12.	(α)	-38	(β)	$+19$
	(γ)	-6	(δ)	$+102$
	(ε)	0	(στ)	$+4\frac{1}{2}$
	(ζ)	-1	(η)	-2
	(θ)	$+7$	(ι)	-2
	(ια)	$-\frac{1}{4}$	(ιβ)	$\frac{2}{9}$
13.	(α)	-3	(β)	2
	(γ)	-3	(δ)	-160
	(ε)	30	(στ)	7
14.		$(-5)+[(+4)-(-2):(-1)]\cdot(-3)$		
15.	(α)	ΣΩΣΤΟ	(β)	ΛΑΘΟΣ
	(γ)	ΛΑΘΟΣ	(δ)	ΛΑΘΟΣ
	(ε)	ΛΑΘΟΣ		
16.	(α)	$+9$	(β)	-19
17.	(α)	-27	(β)	7
	(γ)	16	(δ)	3
	(ε)	2	(στ)	4
	(ζ)	-31	(η)	$\frac{1}{3}$

Περιοδικοί Ρητοί Αριθμοί *Σελίδα 172*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	$\frac{43}{9}$	(β)	$\frac{7}{3}$
	(γ)	$\frac{3383}{990}$	(δ)	$\frac{13}{45}$
2.		$1,\overline{27}$, $0{,}375$, $-0{,}8\overline{3}$		
3.	(α)	$1,\overline{1}>1{,}11111111$	(β)	$3{,}6\overline{8}>3{,}68$

	(γ)	$4{,}9\overline{12} > 4,\overline{102}$
4.		$0{,}0\overline{69}$ $\quad 0,\overline{6}$ $\quad 0{,}69$ $\quad 0,\overline{69}$ $\quad 0{,}6\overline{9}$

Εξισώσεις *Σελίδα 178*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	2 *κύβους*	(β)	6 *κύβους*
2.	(α)	$y = -12$	(β)	$v = -4$
	(γ)	$\omega = 3$	(δ)	$\alpha = -5$
	(ε)	$\alpha = 3$	(στ)	$\kappa = 1$
3.	(α)	$x = 2$	(β)	$x = \frac{1}{2}$
	(γ)	$\alpha = 19$	(δ)	$y = -2\frac{1}{3}$
	(ε)	$\beta = 10$	(στ)	$\alpha = -2$
4.	(α)	$x = 3$	(β)	$\alpha = 6$
	(γ)	$y = 2$	(δ)	$\alpha = 3$
	(ε)	$\kappa = 9$	(στ)	$\omega = \frac{1}{2}$
	(ζ)	$\alpha = 8$	(η)	$x = -2\frac{2}{3}$
6.		Αριθμός: 5		
7.		Περίμετρος: 57 μ		
8.		AB: 7 cm , $\mathrm{A\Delta}$: 34 cm , $\mathrm{B\Gamma}$: 10 cm , $\mathrm{\Delta\Gamma}$: 35 cm		
9.		Άνδρες: 140 , Γυναίκες: 80, Παιδιά: 60		
10.		$\mathrm{E}_{\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon} = 16\ \mathrm{cm}^2$ $\quad \Pi_{\tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon} = 15\ \mathrm{cm}$		
11.		Κώστας: €19 Γιάννη: €7		
13.		Συνταξιούχοι: 10		
14.		43 ερωτήματα		

Δραστηριότητες Ενότητας *Σελίδα 181*

Δραστηριότητα		Απαντήσεις		
1.	(α)	$+6$	(β)	-5
	(γ)	$+1$	(δ)	-5
	(ε)	$+6$	(στ)	-4
	(ζ)	$+2$	(η)	$+60$
	(θ)	$+2$	(ι)	$+5$

2.	(α)	$+$	(β)	$+$
	(γ)	$+$	(δ)	$+$
	(ε)	$-$	(στ)	$-$
3.	(α)	ΛΑΘΟΣ	(β)	ΣΩΣΤΟ
	(γ)	ΣΩΣΤΟ	(δ)	ΛΑΘΟΣ
	(ε)	ΣΩΣΤΟ	(στ)	ΛΑΘΟΣ
	(ζ)	ΛΑΘΟΣ		
4.	(α)	9	(β)	1
	(γ)	-16	(δ)	1
	(ε)	$\frac{1}{25}$	(στ)	-16
	(ζ)	1	(η)	25
	(θ)	1	(ι)	0
5.	(α)	$-1{,}5$	(β)	$4,\overline{3}$
	(γ)	$1,\overline{81}$	(δ)	$0{,}875$
6.	(α)	$>$	(β)	$>$
	(γ)	$<$	(δ)	$>$
	(ε)	$>$	(στ)	$>$
	(ζ)	$>$	(η)	$<$
	(θ)	$<$	(ι)	$<$
	(ια)	$>$	(ιβ)	$=$
7.		*Λευκωσία*		
8.	(α)	-9	(β)	$+6{,}8$
	(γ)	-5	(δ)	-8
	(ε)	$-\frac{1}{3}$	(στ)	$+8$
	(ζ)	$+5\frac{1}{3}$	(η)	$-5\frac{1}{10}$
	(θ)	-3	(ι)	-4
	(ια)	$+2$	(ιβ)	0
9.	(α)	ΠΟΤΕ		
	(β)	ΚΑΠΟΤΕ	*Αντιπαράδειγμα:*	$-2 > -7$, $\lvert -2\rvert < \lvert -7\rvert$
	(γ)	ΚΑΠΟΤΕ	*Αντιπαράδειγμα:*	$\lvert 3-(-1)\rvert \neq \lvert 3\rvert - \lvert -1\rvert$
	(δ)	ΚΑΠΟΤΕ	*Αντιπαράδειγμα:*	$\lvert 3\cdot(-1)\rvert \neq 3\cdot(-1)$
	(ε)	ΠΑΝΤΟΤΕ		
10.		*Β*		
11.		$76^{\circ}C$		

12.	(α)	$+12$	(β)	$+4$
	(γ)	$+14$	(δ)	-17
	(ε)	0	(στ)	-20
	(ζ)	$+8$	(η)	-6
	(θ)	$+10$	(ι)	-14
	(ια)	$+1$	(ιβ)	$+\frac{2}{3}$
13.		*iii.*		
14.	(α)	$x = -5$	(β)	$x = \pm 12$
	(γ)	$x = 0 \,, x = \pm 1 \,,\ x = \pm 2$		
15.	(α)	0	(β)	$-\frac{3}{5}$
	(γ)	$+2$	(δ)	-33
	(ε)	19	(στ)	-4
16.	(α)	ΛΑΘΟΣ	(β)	ΣΩΣΤΟ
	(γ)	ΛΑΘΟΣ	(δ)	ΛΑΘΟΣ
	(ε)	ΛΑΘΟΣ	(στ)	ΛΑΘΟΣ
	(ζ)	ΛΑΘΟΣ		
17.		*Α → v , Β → iv , Γ → ii , Δ → iii*		
18.	(α)	$>$	(β)	$<$
	(γ)	$<$	(δ)	$<$
	(ε)	$<$	(στ)	$>$
19.	(α)	ΘΕΤΙΚΟΣ	(β)	ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ
	(γ)	ΜΗΔΕΝ	(δ)	ΘΕΤΙΚΟΣ
21.		$A = -26$		$B = +7$
22.	(α)	$+9$	(β)	-25
23.	(α)	$x = -2$	(β)	$\omega = +3$
	(γ)	$y = -6$	(δ)	$\alpha = -1$
	(ε)	$x = +1$	(στ)	$x = -2$
	(ζ)	$x = -10$	(η)	$y = +7$
	(θ)	$a = -6$	(ι)	$y = +2$
24.		Είναι τετράγωνο με εμβαδόν 121 μ^2		
25.		Γιολάντα: 33 χρονών		Κόρες: 6 χρονών
26.		Μαθητές: 80 · Γονείς: 20		Καθηγητές: 15
27.		Φίλιππος: €60 Κωνσταντίνος: €20		Αννίτα: €20 Σταύρος: €60

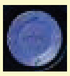
28.	Αργίες: 10	Εργάσιμες μέρες: 40
29.	Πρόβατα: 30	
30.	Α: 36	Β: 12

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΥ			*Σελίδα 160*
Δραστηριότητα		Απαντήσεις	
1.		17	
2.		$\delta < 0$	
3.		ΟΧΙ	
4.		Αριθμός: 30	θα εκτελέσουν τον αλγόριθμο 10 φορές
5.		0	
6.	(α)	Αγόρια: 16	Κορίτσια: 18
	(β)	6 κορίτσια	
7.		α, β ετερόσημοι	
8.		Είναι κλειστές πράξεις στο σύνολο των ακέραιων αριθμών	
9.		$\mu = 3$	
10.		4	
11.		32	
12.		19683	

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

$\in$	ανήκει
$\notin$	δεν ανήκει
$\forall$	για κάθε
$\exists$	υπάρχει
$\cup$	ένωση συνόλων
$\cap$	τομή συνόλων
$\subset$	γνήσιο υποσύνολο
$\subseteq$	υποσύνολο
$\emptyset$ ή $\{\ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
$\neq$	άνισο
$\equiv$	ταυτοτικά ίσο
$\cong$	κατά προσέγγιση ίσο
$\mathbb{N}$	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{N}_0$	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{Z}$	ακέραιοι αριθμοί $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\dots\}$
$\mathbb{Z}^+$	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{Z}^-$	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1,-2,-3,-4,\dots\}$
$\mathbb{Q}$	ρητοί αριθμοί $\{α/β\text{: } α,β\in Z \text{ και } β\neq 0\}$
$\mathbb{Q}^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{Q}_0^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
$\mathbb{Q}^-$	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{R}$	πραγματικοί αριθμοί
$\Rightarrow$	απλή συνεπαγωγή
$\Leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
$\perp$	κάθετες
$\parallel$	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή

=		Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)
.		Υποδιαστολή
EXP		Εκθέτης δύναμης με βάση το 10
Ans		Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος
$x^{\square}$	ή x^y ή ^	Δύναμη
		Ποντίκι (Mouse)
SHIFT	ή 2nd F	Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί
AC		Επανεκκίνηση υπολογιστικής
DEL		Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή
Abs		Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)
(-)		Εισαγωγή Προσήμου –
a b/c	ή $\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$	Κλάσμα
S⇔D	ή a b/c	Μετατροπή Κλάσμα⇔ Δεκαδικός
CLR		Σβήσιμο μνήμης
M+		Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη
M-		Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη
M		Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3+4$	3 + 4 =	3+4 7
2,34 – 1,1	2 . 3 4 – 1 . 1 =	2.34 – 1.1 1.24
$3 \cdot 2$	3 x 2 =	$3X2$ 6
2^5	2 x^y 5 =	2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$	5 EXP 3 =	$5E3$ ή $5X103$ 5000
$\frac{3}{4}$	a b/c 3 ↓ 4 → = ή 3 a b/c 4 =	$\frac{3}{4}$ 3⌟4
$2\frac{3}{4}$	SHIFT ▪ 2 → 3 ↓ 4 = ή 2 a b/c 3 a b/c 4 =	$2\frac{3}{4}$ 2 ⌟3 ⌟4
$\sqrt{4}$	√ 4 =	$\sqrt{4}$ 2
5^2	5 X² =	5^2 25
$2 \cdot (7-3)$	2 x (7 – 3) =	$2X(7-3)$ 8
$2 \cdot (7-3)$	7 – 3 = 2 x Ans =	$2XAns$ 8
$2-(-3)$	2 – ((-) 3) =	$2-(-3)$ 5
$\lvert -3 \rvert$	Abs (-) 3 =	$\lvert -3 \rvert$ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης	S⇔D ή SHIFT a b/c	$\frac{1}{4}$
$9-6:2$	Υπολογισμός και αποθήκευση 9 – 6 ÷ 2 = M+	9 – 6 : 2 $M+$ 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9-6{:}2) - 6{:}(9-6{:}2)$	3 X M – 6 ÷ M =	3 X M – 6 : M 17