

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε το διάνυσμα.
- Να ορίζουμε τις σχέσεις μεταξύ διανυσμάτων (παράλληλα, ομόρροπα, αντίρροπα, ίσα και αντίθετα διανύσματα).
- Να προσθέτουμε και να αφαιρούμε διανύσματα.



Η Έννοια του Διανύσματος

Διερεύνηση (1)

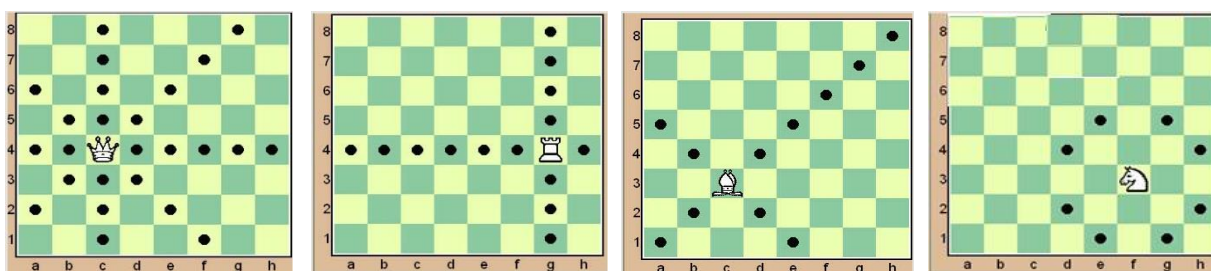
Το παιχνίδι του σκακιού παίζεται μεταξύ δύο αντιπάλων που κινούν εναλλάξ τα κομμάτια τους πάνω σε μια τετράγωνη επιφάνεια που λέγεται "σκακιέρα". Ο παίκτης με τα λευκά κομμάτια αρχίζει το παιχνίδι.

Ο αντικειμενικός σκοπός (στόχος) κάθε παίκτη είναι να «επιτεθεί» στον Βασιλιά του αντιπάλου του με τέτοιο τρόπο, ώστε ο αντίπαλος να μην έχει κίνηση.

Στο ξεκίνημα του παιχνιδιού ο ένας παίκτης έχει 16 ανοιχτόχρωμα κομμάτια (τα «λευκά κομμάτια») και ο άλλος έχει 16 σκουρόχρωμα κομμάτια (τα «μαύρα» κομμάτια).

ΚΟΜΜΑΤΙΑ	ΣΥΜΒΟΛΟ	ΑΡΧΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΤΗ ΣΚΑΚΙΕΡΑ
Βασιλιάς	 	
Βασίλισσα	 	
Πύργος	 	
Αξιωματικός	 	
Άλογο	 	
Πιόνι	 	

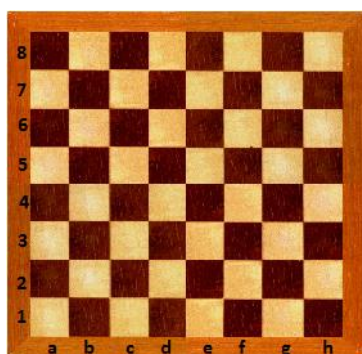
Το κάθε κομμάτι μπορεί να κινηθεί σε μια νέα θέση σύμφωνα με συγκεκριμένους κανόνες (κανονικές κινήσεις) που διέπουν το σκάκι. Στα πιο κάτω σχήματα φαίνονται ο τρόπος που κινούνται η βασίλισσα, ο πύργος, το άλογο και ο αξιωματικός.



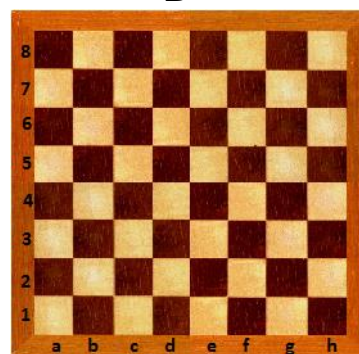
Η βασίλισσα κινείται σε οποιοδήποτε τετράγωνο οριζόντια, κατακόρυφα και διαγώνια, ο πύργος κινείται σε οποιοδήποτε τετράγωνο οριζόντια και κατακόρυφα, ο αξιωματικός κινείται σε οποιοδήποτε τετράγωνο διαγώνια και το άλογο κινείται σε ένα από τα πλησιέστερα τετράγωνα από αυτό που βρίσκεται, αλλά όχι στην ίδια οριζόντια ή κατακόρυφη ή διαγώνιο.

- Στη σκακιέρα *A* να τοποθετήσετε μια βασίλισσα στη θέση $(f, 7)$ και να περιγράψετε την κίνηση της βασίλισσας σε τρεις διαφορετικές θέσεις.
- Στη σκακιέρα *B* να τοποθετήσετε ένα άλογο στη θέση $(d, 4)$ και να περιγράψετε την κίνηση του πύργου σε τρεις διαφορετικές θέσεις.
- Στην σκακιέρα *Γ* να τοποθετήσετε ένα πύργο στη θέση $(c, 3)$ και να περιγράψετε την κίνηση του πύργου σε τρεις διαφορετικές θέσεις.
- Στη σκακιέρα *Δ* να τοποθετήσετε ένα αξιωματικό στη θέση $(e, 6)$ και να περιγράψετε την κίνηση του αξιωματικού σε τρεις διαφορετικές θέσεις.

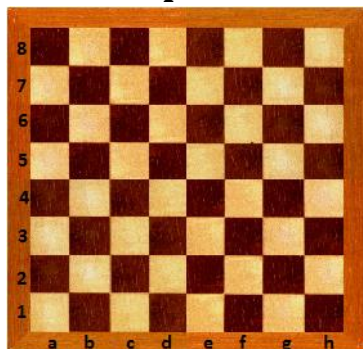
A



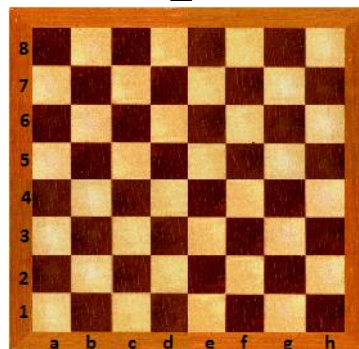
B



Γ



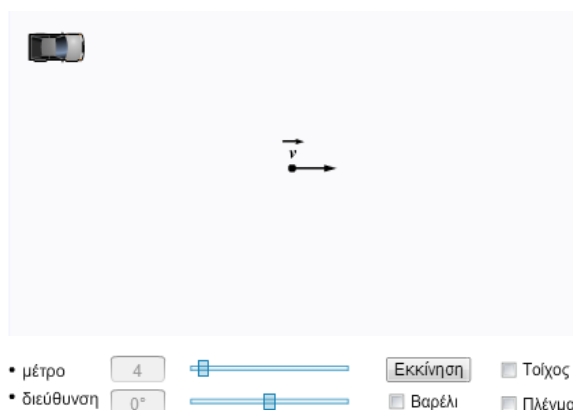
Δ



Διερεύνηση (2)

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο «ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ13_Έννοιες διανυσμάτων και πράξεις με διανύσματα_1.1»

- ✓ Να επιλέξετε το εικονίδιο «Εκκίνηση», για να αρχίσει το αυτοκίνητο να κινείται με ορισμένη ταχύτητα και προς ορισμένη κατεύθυνση. Με το εικονίδιο «Εκκίνηση» μπορείτε να σταματήσετε το αυτοκίνητο.



- ✓ Με το δρομέα «Μέτρο» μεταβάλλεται τη ταχύτητα με την οποία κινείται το αυτοκίνητο και με το δρομέα «Διεύθυνση» περιστρέφεται το αυτοκίνητο και καθορίζεται τη πορεία που θα ακολουθήσει.
- ✓ Να επιλέξετε τα εικονίδια, «Τοίχος» και «Βαρέλι» και να οδηγήσετε το αυτοκίνητο ώστε να συγκρουστεί με το βαρέλι, αποφεύγοντας τους τοίχους.
- ✓ Να περιγράψετε την κίνηση του αυτοκινήτου σε κάθε περίπτωση.

Μαθαίνω

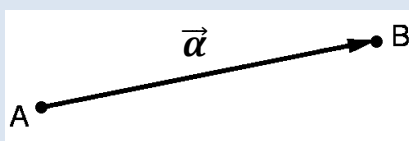
- **Μονόμετρο μέγεθος** λέγεται κάθε μέγεθος που χαρακτηρίζεται μόνο από το μέτρο του.

Για παράδειγμα, το μήκος, η μάζα, η θερμοκρασία είναι μονόμετρα μεγέθη.

- **Διανυσματικό μέγεθος** λέγεται κάθε μέγεθος που έχει μέτρο και κατεύθυνση.

Για παράδειγμα, η ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος.

- Τα διανυσματικά μεγέθη παριστάνονται με **διανύσματα** τα οποία συμβολίζονται με βέλη έχοντας ένα σημείο A που είναι η **αρχή** και λέγεται σημείο εφαρμογής του διανύσματος και ένα σημείο B το **τέλος** του διανύσματος. Το διάνυσμα το συμβολίζουμε με \overrightarrow{AB} ή με \vec{a} .

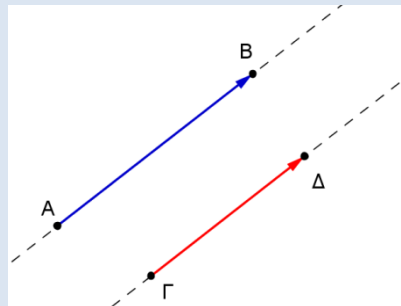


- Ένα διάνυσμα έχει τα εξής στοιχεία:
 - **Διεύθυνση**, την ευθεία ε που ορίζουν τα άκρα A, B ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη προς αυτή.
 - **Φορά**, που καθορίζεται από το αν το διάνυσμα έχει αρχή το A και τέλος το B (\overrightarrow{AB}) ή αρχή το B και τέλος το A (\overrightarrow{BA}).
 - **Μέτρο**, το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB , το οποίο συμβολίζουμε με $|\overrightarrow{AB}|$. Το μέτρο είναι πάντοτε ένας θετικός αριθμός ή μηδέν.

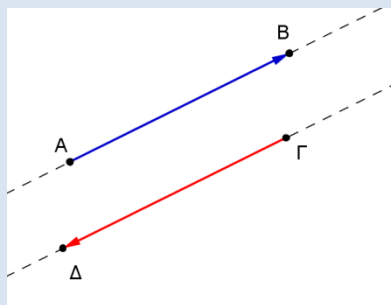
Η διεύθυνση μαζί με τη φορά καθορίζουν την κατεύθυνση ενός διανύσματος

- Ένα διάνυσμα λέγεται **μηδενικό**, όταν η αρχή και το τέλος του συμπίπτουν. Το συμβολίζουμε με $\vec{0}$ και έχει μέτρο μηδέν.
- **Παράλληλα** ή **συγγραμμικά** ονομάζονται τα μη-μηδενικά διανύσματα τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση.
- Τα παράλληλα διανύσματα διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

- Τα **ομόρροπα** τα οποία έχουν την **ίδια φορά**.



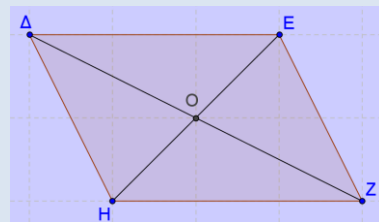
- Τα **αντίρροπα** τα οποία έχουν **αντίθετη φορά**.



- **Ίσα** είναι τα διανύσματα τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο.
Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο ίσα διανύσματα τότε γράφουμε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

- Δύο διανύσματα είναι **αντίθετα**, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, το ίδιο μέτρο, αλλά αντίθετη φορά.

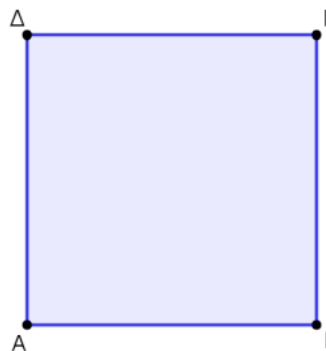
Για παράδειγμα στο παραλληλόγραμμο ΔEZH τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{H Z}$ είναι ίσα, ενώ τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta H}$ και $\overrightarrow{Z E}$ είναι αντίθετα. Επίσης ισχύει $\overrightarrow{\Delta O} = \overrightarrow{O Z}$, $\overrightarrow{E O} = \overrightarrow{O H}$, $\overrightarrow{E O} = -\overrightarrow{H O}$ κτλ.



Παράδειγμα

Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$.

- Να γράψετε δύο διανύσματα τα οποία έχουν ως αρχή το σημείο B .
- Να γράψετε ένα διάνυσμα που να είναι ίσο με το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- Να γράψετε τις σχέσεις που συνδέουν τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$.

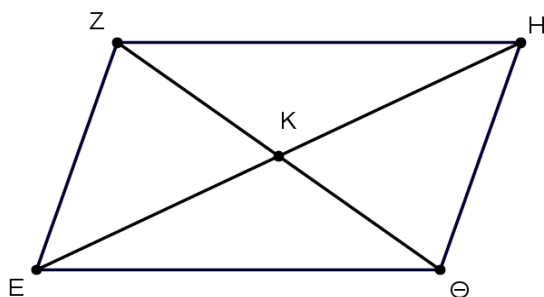


Λύση:

- Τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Delta}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ έχουν ως αρχή το σημείο B .
- Το διάνυσμα $\overrightarrow{A B}$ είναι ίσο με το $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, γιατί έχουν την ίδια διεύθυνση ως απέναντι πλευρές τετραγώνου, την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο ως πλευρές τετραγώνου.
- Τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$ έχουν την ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά, δηλαδή είναι αντίρροπα και έχουν το ίδιο μέτρο.

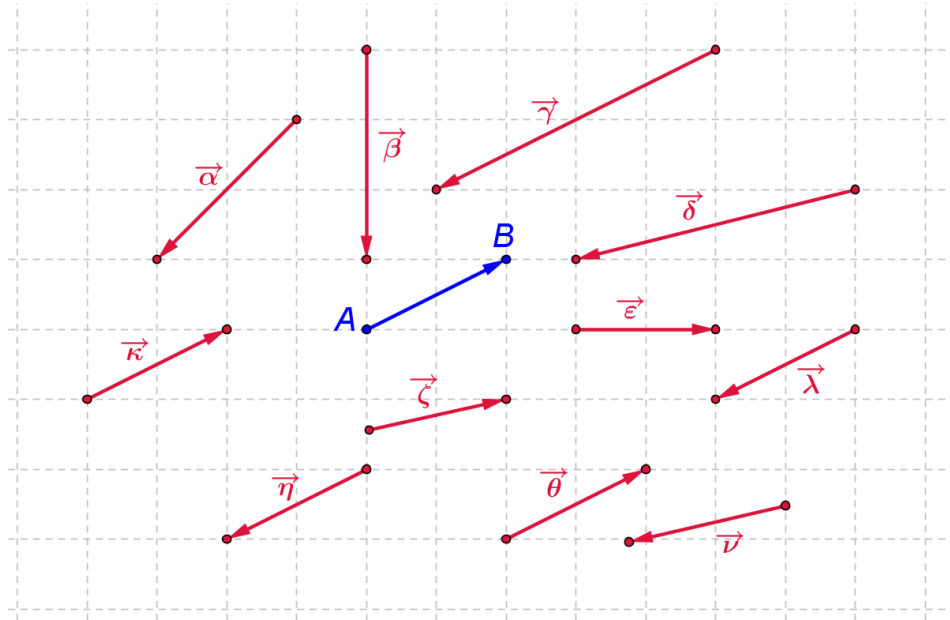
Δραστηριότητες

1. Ποια από τις πιο κάτω προτάσεις περιγράφει μονόμετρο και ποια διανυσματικό μέγεθος;
- (α) Ένα καρπούζι ζυγίζει 8 Kg .
 - (β) Η μοτοσυκλέτα έτρεχε με ταχύτητα 100 Km/h .
 - (γ) Ο πυρετός μου έφθασε τους 39°C .
 - (δ) Το σπίτι του φίλου μου του Αντρέα, βρίσκεται $1,5\text{ Km}$ μακριά από το δικό μου.
 - (ε) Το σπίτι του φίλου μου του Αντρέα, βρίσκεται $1,5\text{ Km}$ Δυτικά από το δικό μου.
 - (στ) Κοιμήθηκα μόνο 4 ώρες χθες.
2. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $EZH\Theta$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω ισότητες, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

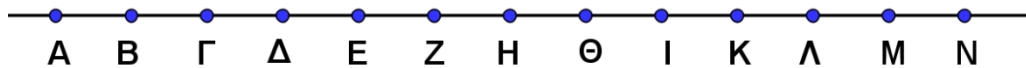


- | | | |
|-----|---------------------------------|----------------------|
| (α) | $\vec{EZ} = \vec{\Theta H}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (β) | $\vec{ZK} = \vec{\Theta K}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (γ) | $ \vec{ZH} = \vec{\Theta E} $ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (δ) | $\vec{EK} = \vec{KH}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |

3. Να βρείτε διανύσματα:
- (α) που είναι ίσα με το διάνυσμα \overrightarrow{AB}
- (β) που είναι αντίθετα με το διάνυσμα \overrightarrow{AB} .

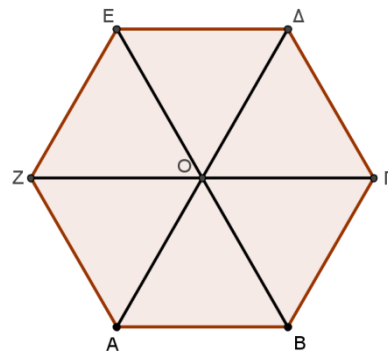


4. Στο σχήμα οι αποστάσεις μεταξύ όλων των διαδοχικών σημείων είναι ίσες με 1 cm .

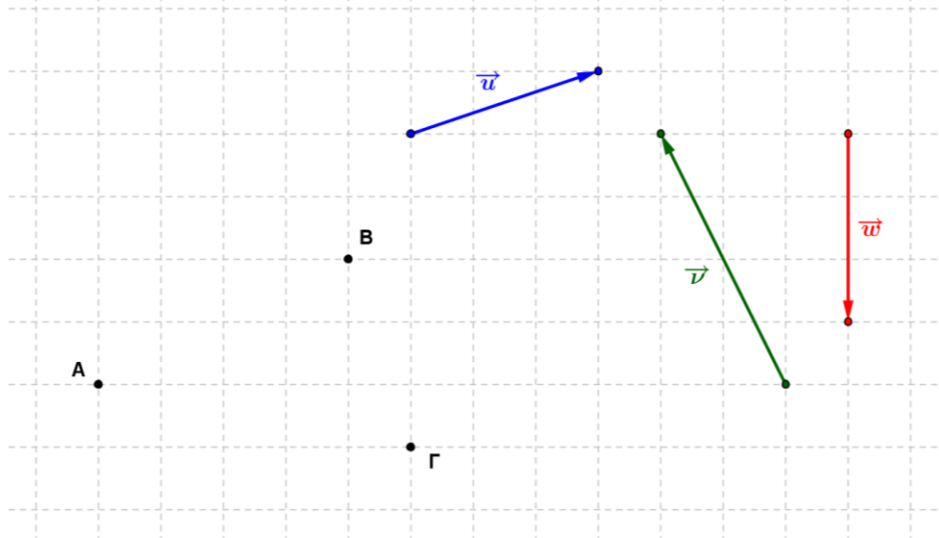


- (α) Να υπολογίσετε το μέτρο των διανυσμάτων:
 $\overrightarrow{\Delta E}, \overrightarrow{\Delta Z}, \overrightarrow{\Delta \Theta}, \overrightarrow{B A}, \overrightarrow{B \Gamma}, \overrightarrow{B \Delta}, \overrightarrow{B Z}, \overrightarrow{K \Theta}, \overrightarrow{N I}$
- (β) Ποια από τα πιο πάνω διανύσματα είναι μεταξύ τους ίσα και ποια αντίθετα;
- (γ) Να γράψετε ένα διάνυσμα που είναι αντίρροπο του $\overrightarrow{\Gamma E}$ και έχει μέτρο τριπλάσιο από το μέτρο του $\overrightarrow{\Gamma E}$.

5. Στο σχήμα δίνεται το εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ με όλες τις πλευρές ίσες με 2 cm και τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Αν $Z\Gamma \parallel E\Delta, A\Delta \parallel ZE, EB \parallel \Delta\Gamma$, να γράψετε δύο διανύσματα που:
- (α) είναι ίσα
- (β) είναι αντίθετα
- (γ) είναι παράλληλα με το $\overrightarrow{B\Gamma}$
- (δ) είναι αντίρροπα με το $\overrightarrow{E Z}$
- (ε) έχουν μέτρο 4 cm .



6. Να σχεδιάσετε στο πιο κάτω σχήμα, ένα διάνυσμα που:
- (α) είναι ίσο με το \vec{u} και αρχίζει από το A .
 - (β) είναι αντίθετο του \vec{v} και αρχίζει από το B .
 - (γ) έχει μέτρο ίσο με το μέτρο του \vec{w} , χωρίς να είναι ίσο με το \vec{w} και αρχίζει από το Γ .




Πράξεις με Διανύσματα

Διερεύνηση

Δύο παιδιά έχουν δέσει ένα καροτσάκι με δύο σχοινιά, όπως φαίνεται στην εικόνα. Θα τραβήξουν ταυτόχρονα τα σχοινιά για να το μετακινήσουν. Προς ποια κατεύθυνση θα κινηθεί το καροτσάκι;

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο «ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ13_Έννοιες διανυσμάτων και πράξεις με διανύσματα_3.1»

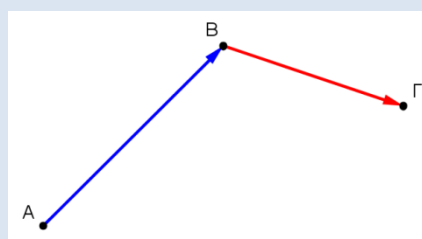


Αφού επιλέξετε το εικονίδιο  να παρακολουθήσετε την κίνηση του καροτσιού σε διαδοχικά βήματα. Να περιγράψετε την κίνηση του καροτσιού.

Μαθαίνω

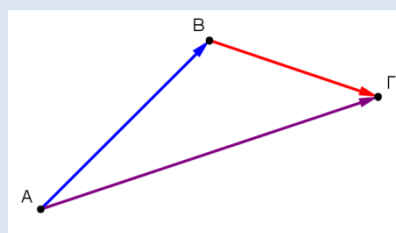
- Δύο διανύσματα λέγονται **διαδοχικά διανύσματα**, όταν το τέλος του πρώτου διανύσματος είναι η αρχή του δεύτερου.

Τα διανύσματα \vec{AB} και \vec{BG} είναι διαδοχικά.

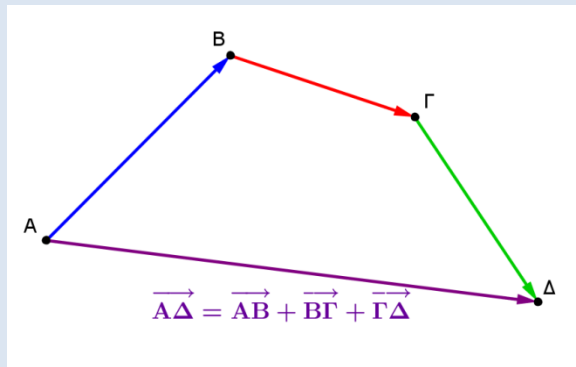


- **Άθροισμα δύο διαδοχικών διανυσμάτων** είναι το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και τέλος το τέλος του δεύτερου διανύσματος.

Το άθροισμα των διανυσμάτων \vec{AB} και \vec{BG} είναι το διάνυσμα \vec{AG} και γράφεται $\vec{AB} + \vec{BG} = \vec{AG}$

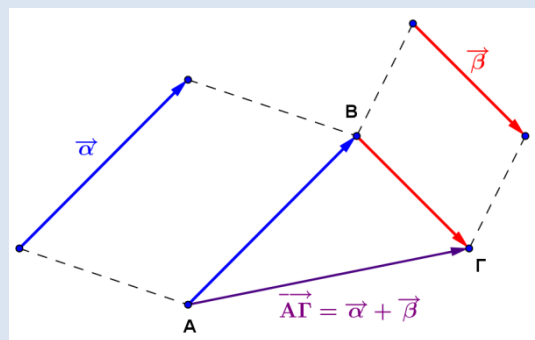


Αν έχουμε να προσθέσουμε περισσότερα από δύο διανύσματα, τα οποία είναι ανά δύο διαδοχικά, όπως φαίνεται στο σχήμα, τότε το άθροισμα τους έχει αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και τέλος το τέλος του τελευταίου.



Το άθροισμα των διανυσμάτων \vec{AB} , \vec{BG} και \vec{GD} είναι το διάνυσμα \vec{AD} και γράφεται $\vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GD} = \vec{AD}$

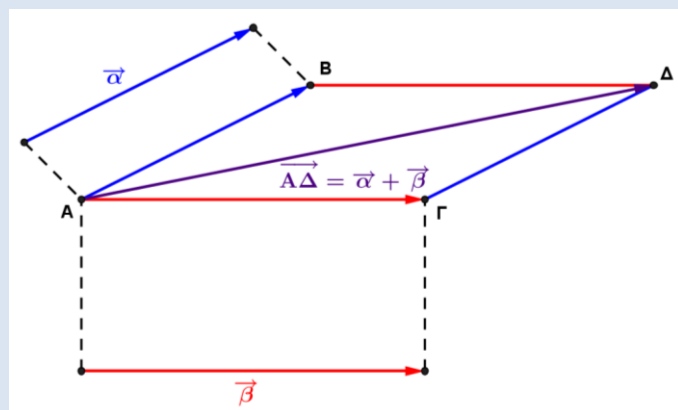
- Για να προσθέσουμε δύο **μη διαδοχικά** διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{BG} = \vec{\beta}$ τα οποία είναι διαδοχικά. Το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{AB} + \vec{BG} = \vec{AG}$.



Σημείωση:

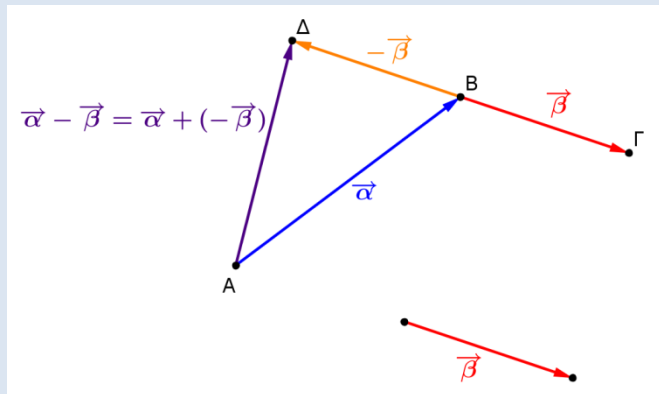
Για να προσθέσουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη **μέθοδο του παραλληλογράμμου** και εργαζόμαστε ως εξής:

Σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AG} = \vec{\beta}$, τα οποία να έχουν κοινή αρχή. Σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο που έχει πλευρές τα διανύσματα \vec{AB} και \vec{AG} . Το διάνυσμα το οποίο έχει ως αρχή την κοινή αρχή των δύο διανυσμάτων και τέλος την απέναντι κορυφή του παραλληλογράμμου είναι το άθροισμα των δύο διανυσμάτων.



• Διαφορά δύο διανυσμάτων

Η διαφορά του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και ορίζεται ως το άθροισμα του $\vec{\alpha}$ με το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{\beta}$.
 $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$.



Παραδείγματα

1. Δίνεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Να βρείτε το διάνυσμα που αντιστοιχεί στα πιο κάτω:

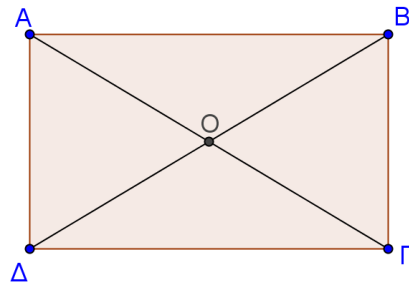
(α) $\vec{AB} + \vec{B\Gamma}$

(β) $\vec{A\Gamma} + \vec{\Delta A}$

(γ) $\vec{B\Delta} + \vec{O\Delta}$

(δ) $\vec{A\Delta} - \vec{O\Delta}$

(ε) $\vec{AB} - \vec{A\Gamma}$



Λύση:

(α) $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$

(β) $\vec{A\Gamma} + \vec{\Delta A} = \vec{\Delta A} + \vec{A\Gamma} = \vec{\Delta\Gamma}$

(γ) $\vec{B\Delta} + \vec{O\Delta} = \vec{B\Delta}$

(δ) $\vec{A\Delta} - \vec{O\Delta} = \vec{A\Delta} + (-\vec{O\Delta}) = \vec{A\Delta} + \vec{O\Delta} = \vec{A\Delta}$

(ε) $\vec{AB} - \vec{A\Gamma} = \vec{AB} + (-\vec{A\Gamma}) = \vec{AB} + \vec{\Gamma A} = \vec{\Gamma B}$

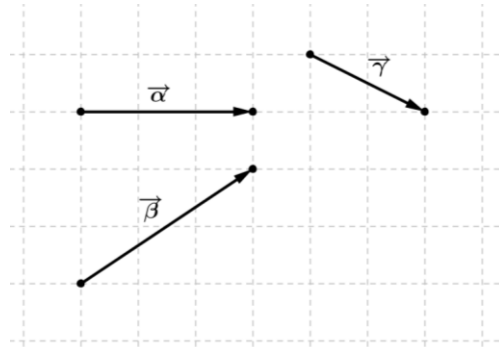
2. Δίνονται στο σχήμα τα διανύσματα

\vec{a} , $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$. Να σχεδιάσετε τα

διανύσματα:

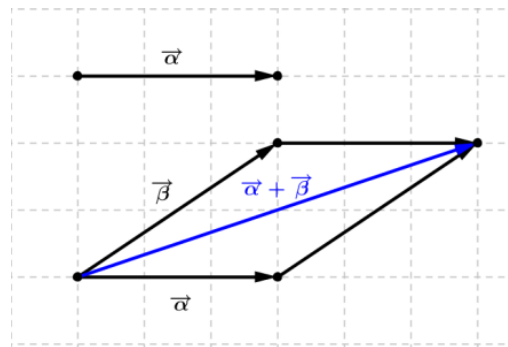
(α) $\vec{a} + \vec{\beta}$

(β) $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$

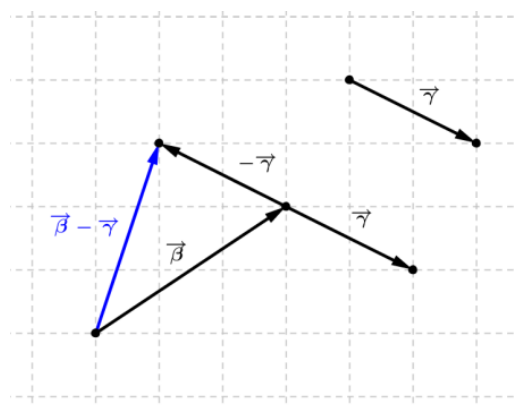


Λύση:

(α)

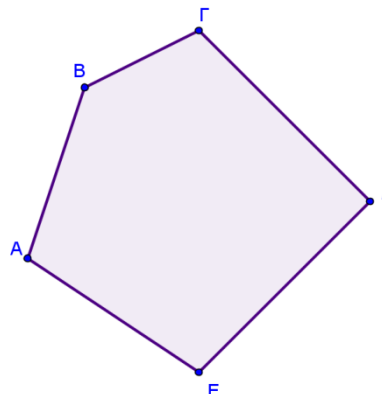


(β)



Δραστηριότητες

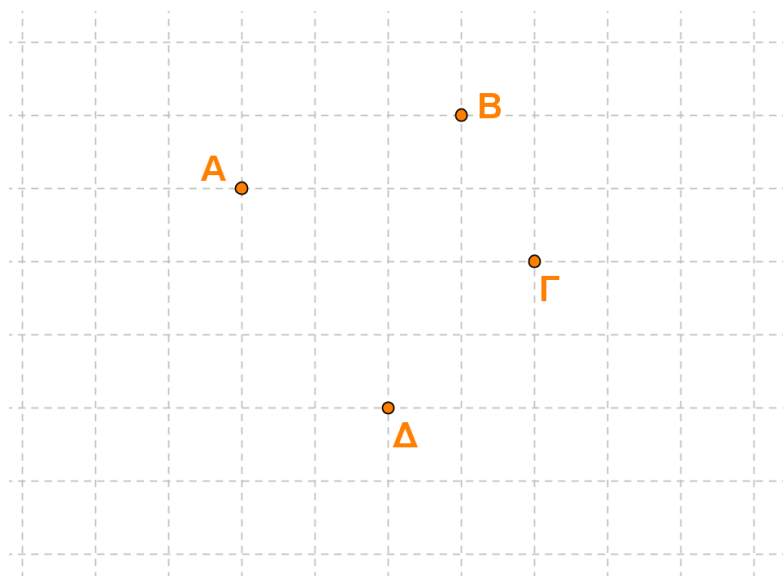
1. Στο σχήμα δίνεται το πολύγωνο $ABΓΔΕ$.
 Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω ισότητες, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.



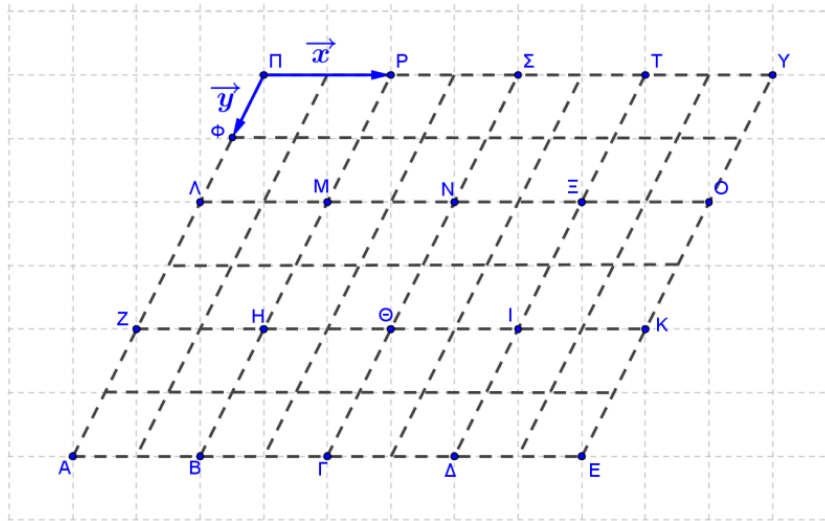
- | | |
|--|----------------------|
| (ε) $\vec{AB} + \vec{BΓ} = \vec{ΓA}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (στ) $\vec{AB} + \vec{BΔ} = \vec{AΔ}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ζ) $\vec{AB} + \vec{BΓ} + \vec{ΓΔ} = \vec{AΔ}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (η) $\vec{AE} + \vec{AΔ} = \vec{EΔ}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (θ) $\vec{AE} + \vec{EΔ} + \vec{ΔΓ} + \vec{ΓB} = \vec{AB}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |

2. Στο σχήμα να σχεδιάσετε ένα διάνυσμα που να είναι ίσο με:

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------------------|
| (α) $\vec{AB} + \vec{BΓ}$ | (β) $\vec{AB} + \vec{ΓA}$ | (γ) $\vec{AB} + \vec{BΓ} + \vec{ΓΔ}$ |
| (δ) $\vec{ΓΔ} + \vec{ΔA}$ | (ε) $\vec{AΔ} - \vec{ΔΓ}$ | (στ) $\vec{AΔ} + \vec{ΔΓ} + \vec{ΓB}$ |



3. Στο σχήμα δίνονται δύο διανύσματα $\overrightarrow{PP} = \vec{x}$ και $\overrightarrow{P\Phi} = \vec{y}$.

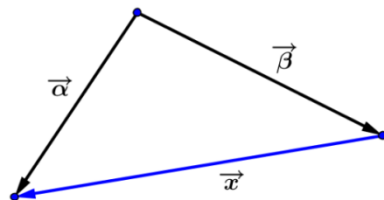


Να εκφράσετε τα πιο κάτω διανύσματα ως άθροισμα ή διαφορά των \vec{x} , \vec{y} .

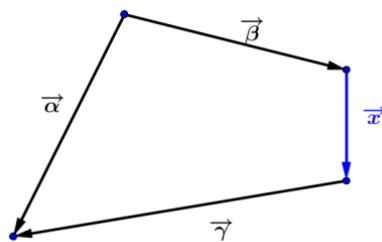
- | | | | |
|--------------------------------|------------------------------------|---------------------------|---------------------------------------|
| (α) $\overrightarrow{P\Sigma}$ | (β) $\overrightarrow{\Phi\Lambda}$ | (γ) \overrightarrow{PM} | (δ) $\overrightarrow{H\Delta}$ |
| (ε) $\overrightarrow{K\Theta}$ | (στ) $\overrightarrow{\Gamma N}$ | (ζ) \overrightarrow{KN} | (η) $\overrightarrow{\Upsilon\Theta}$ |

4. Για καθένα από τα πιο κάτω σχήματα, να εκφράσετε το διάνυσμα \vec{x} ως άθροισμα ή διαφορά των άλλων διανυσμάτων που δίνονται:

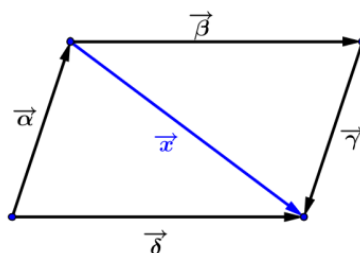
(α)



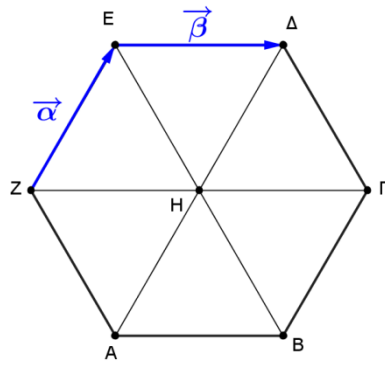
(β)



(γ)



5. Στο σχήμα δίνεται το εξάγωνο $ABΓΔEZ$ με όλες τις πλευρές ίσες και τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Αν $ZΓ \parallel EΔ$, $AΔ \parallel ZE$, $EB \parallel ΔΓ$ και $\overrightarrow{EΔ} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{ZE} = \vec{\alpha}$, να εκφράσετε τα πιο κάτω διανύσματα ως άθροισμα ή διαφορά των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.



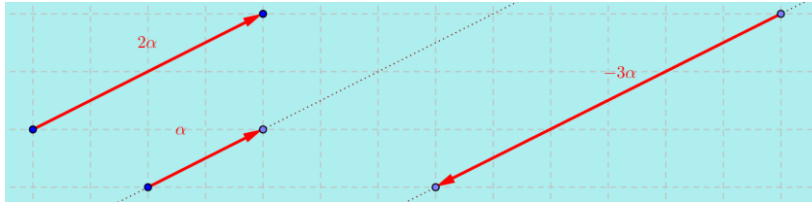
- | | | | |
|---------------------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| (α) $\overrightarrow{BΔ}$ | (β) $\overrightarrow{ZΓ}$ | (γ) $\overrightarrow{HΔ}$ | (δ) $\overrightarrow{EΗ}$ |
| (ε) $\overrightarrow{ΔΓ}$ | (στ) $\overrightarrow{BΕ}$ | (ζ) $\overrightarrow{ZΔ}$ | (η) $\overrightarrow{ΓΑ}$ |

6. Να σχεδιάσετε ισόπλευρο τρίγωνο $ABΓ$ και να βρείτε ένα διάνυσμα ίσο με:

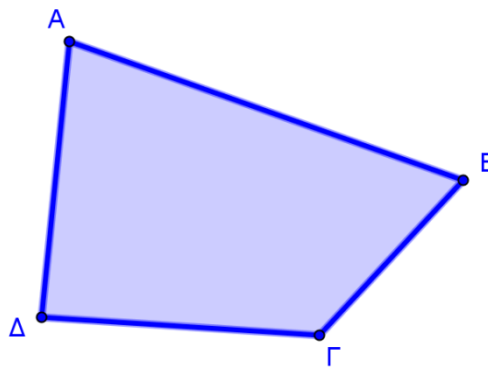
- (α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BΓ} + \overrightarrow{ΓB}$
 (β) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BΓ} + \overrightarrow{ΓΑ}$
 (γ) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AΓ}$
 (δ) $\overrightarrow{ΓΑ} - \overrightarrow{ΓB}$

Δραστηριότητες ενότητας

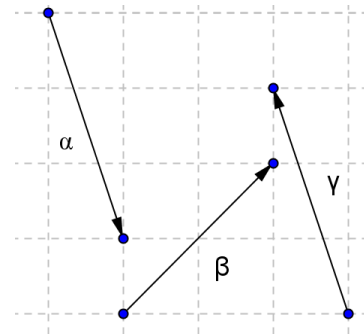
1. Να γράψετε ομοιότητες και διαφορές για τα διανύσματα \vec{a} , $2\vec{a}$ και $-3\vec{a}$.



2. Δίνεται τυχαίο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:
 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

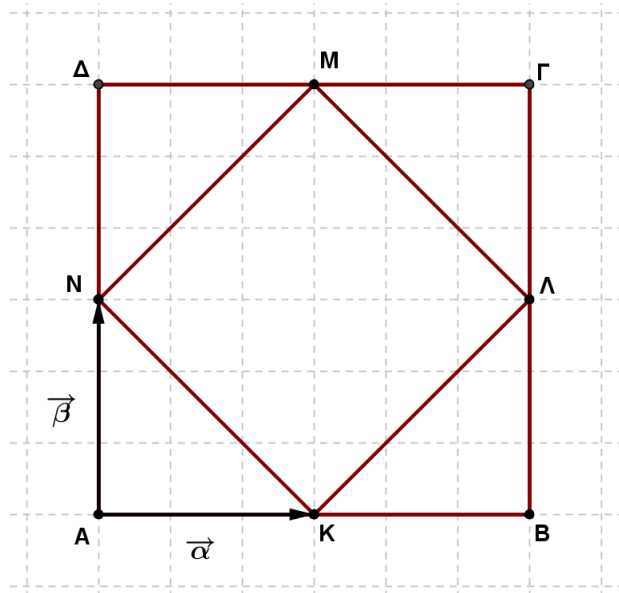


3. Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Να σχεδιάσετε τα πιο κάτω διανύσματα σε τετραγωνισμένο χαρτί, επεξηγώντας τη μέθοδο που ακολουθήσατε.

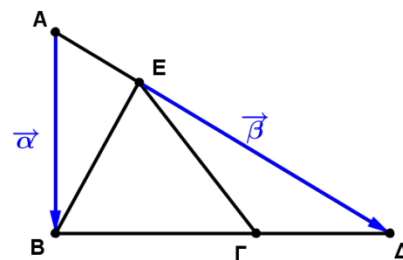


- (α) $\vec{a} + \vec{\beta}$
(β) $\vec{\beta} + \vec{\gamma}$
(γ) $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$
(δ) $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$
(ε) $\vec{a} - \vec{\beta}$
(στ) $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$
(ζ) $\vec{a} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$

4. Στο σχήμα δίνονται δύο τετράγωνα τα $AB\Gamma\Delta$ και $K\Lambda MN$, όπου K, Λ, M, N είναι τα μέσα των $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, A\Delta$, αντίστοιχα. Αν $\overrightarrow{AK} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AN} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{\Gamma M}, \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{M\Lambda}$ σε συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



5. Στο σχήμα δίνεται το τρίγωνο $AB\Delta$, με $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{3}{2}$, $\frac{AE}{E\Delta} = \frac{1}{3}$ και $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{E\Delta} = \vec{\beta}$.



- (α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ σε συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- (β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{E\Gamma} = \frac{1}{15}(6\vec{\alpha} + 7\vec{\beta})$.

6. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, όπως φαίνονται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AD}$, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία υπολογισμού του αθροίσματος δύο διαδοχικών διανυσμάτων.

