ΕΝΟΤΗΤΑ

Ακολουθίες

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

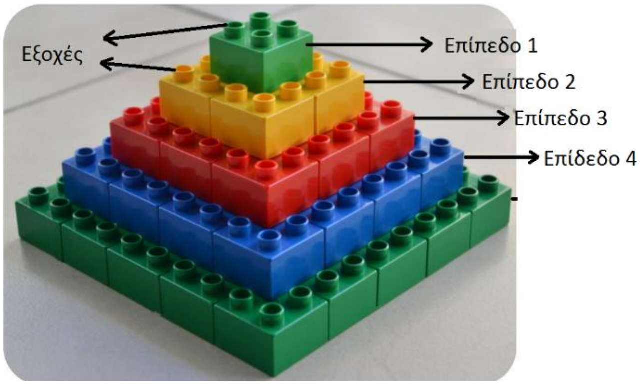
- Να ορίζουμε την ακολουθία.
- Να ορίζουμε τι είναι όρος ακολουθίας.
- Να αναπαριστούμε τις ακολουθίες με διάφορους τρόπους.
- Να βρίσκουμε τον επόμενο όρο ή τον όρο που λείπει σε μια ακολουθία.
- Να περιγράφουμε λεκτικά τον κανόνα της ακολουθίας
- Να εκφράζουμε το νιοστό όρο σε λεκτική ή συμβολική μορφή.
- Να βρίσκουμε τους όρους της ακολουθίας όταν είναι γνωστός ο γενικός όρος.
- Να υπολογίζουμε τον γενικό όρο μιας ακολουθίας.
- Να επιλύουμε και να κατασκευάζουμε αριθμητικά και αλγεβρικά προβλήματα.

Ακολουθία

Εξερεύνηση

Τέσσερα παιδιά παρακολουθούν στην τηλεόραση ένα ντοκιμαντέρ για τους Μάγια, ένα λαό Ινδιάνων που είχε αναπτύξει τον λαμπρότερο πολιτισμό του Δυτικού Ημισφαιρίου. Ο λαός αυτός ασχολείτο με τη γεωργία, έκτιζαν πέτρινα σπίτια και πυραμιδοειδείς ναούς. Μερικές τέτοιες πυραμίδες διασώζονται μέχρι σήμερα στο Μεξικό.

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε την πυραμίδα των Μάγια με κύβους κατασκευών όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το εσωτερικό της πυραμίδας είναι γεμάτο με κύβους. Κάθε κύβος έχει ύψος 3cm και φέρει στο πάνω μέρος του 4 εξοχές. Με βάση το διπλανό σχήμα να συζητήσετε κατά πόσο είναι δυνατό:



- Να υπολογίσουμε το ύψος της Πυραμίδας.
- Να υπολογίσουμε τον αριθμό των κύβων για κάθε επόμενο επίπεδο.
- Να υπολογίσουμε τον αριθμό των εξοχών που φαίνονται σε κάθε επίπεδο.
- Να υπολογίσουμε το μήκος της πλευράς που θα έχει το κάθε πράσινο επίπεδο.

Σε μια ακολουθία έχει σημασία η διάταξη των αντικειμένων της, (σε αντίθεση με τα σύνολα στα οποία δεν έχει σημασία η διάταξη).

Μαθαίνω

Ακολουθία είναι μια **διατεταγμένη** λίστα αντικειμένων.
Π.χ. $2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \cdots$

Κάθε αντικείμενο στην ακολουθία ονομάζεται **όρος της ακολουθίας** και συνήθως συμβολίζεται με α_ν $όπου\ \nu = 1, 2, 3, 4, \cdots$. .

Στις ακολουθίες υπάρχει μια **αντιστοιχία** των φυσικών αριθμών και του όρου της ακολουθίας. Ο φυσικός αριθμός ν δηλώνει τη θέση του όρου στην ακολουθία.

Π.χ. Στην ακολουθία $2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \cdots$ Ο πρώτος όρος είναι το 2, ο δεύτερος όρος είναι το 5, ο τρίτος όρος είναι το 8 κ.ο.κ. όπως φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

Θέση (ν) στην ακολουθία α	1ος	2ος	3ος	4ος	5ος	6ος	7ος
Συμβολισμός όρου α_ν	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
Όρος	2	5	8	11	14	17	20

Ένα αντικείμενο μπορεί να εμφανίζεται περισσότερες από μια φορές σε μια ακολουθία.

Π.χ. Στην ακολουθία 1,2,2,3,3,3, $\cdots$ ο αριθμός 2 και ο αριθμός 3 εμφανίζονται περισσότερο από μια φορά ο καθένας.

Οι ακολουθίες βασίζονται σε κάποιο τύπο ή κανόνα. Για να καταγραφούν οι όροι μιας ακολουθίας, θα πρέπει να είναι γνωστός ο τύπος ή ο κανόνας.
Κάθε ακολουθία μπορεί να αναπαρασταθεί με διάφορους τρόπους.
(α) Λεκτική μορφή, περιγραφή της ακολουθίας
π.χ. Ο πρώτος όρος είναι 4 και κάθε επόμενος όρος αυξάνεται κατά 5

(β) Διατεταγμένη μορφή, καταγραφή των όρων τις ακολουθίας
π.χ. $4, 9, 14, 19 \cdots$

(γ) **Αναγωγικός τύπος,** Ο όρος εκφράζεται συναρτήσει του προηγούμενου ή του επόμενού του όρου.

π.χ. $\alpha_1 = 4, \qquad \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + 5 \quad όπου\ \nu \in \mathbb{N}$

$\alpha_1 = 4, \qquad \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 5 \quad όπου\ \nu \in \mathbb{N}$

(ν καθορίζει την θέση του όρου)

(δ) **Γενικός τύπος** της μορφής α_ν. (ν καθορίζει την θέση του όρου)
π.χ. $\alpha_\nu = 5\nu + 4$, όπου $\nu \in \mathbb{N}$

Παραδείγματα

1. Δίνεται η ακολουθία $3, 7, 11, 15, 19, 23, \cdots$. Να βρείτε:
   (1) τον τρίτο όρο
   (2) τον όρο α_2

Λύση:

(1) Ο τρίτος όρος είναι το τρίτο αντικείμενο της ακολουθίας, Δηλαδή $\alpha_3 = 11$.

(2) ο α_2 είναι το δεύτερο αντικείμενο της ακολουθίας, Δηλαδή $\alpha_2 = 7$.

2. Να γράψετε τους πέντε πρώτους όρους για κάθε ακολουθία
   (1) Ο πρώτος όρος είναι το 3 και κάθε επόμενος όρος πολλαπλασιάζεται με -2
   (2) $\alpha_\nu = 3\nu + 1$
   (3) $\alpha_1 = 20\,,\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 3$
   (4) Τα τετράγωνα των φυσικών αριθμών μέχρι και το 5

Λύση:

(1) πρώτος όρος $+3$

δεύτερος όρος $+3 \cdot (-2) = -6$

τρίτος όρος $-6 \cdot (-2) = +12$

τέταρτος όρος $+12 \cdot (-2) = -24$

πέμπτος όρος $-24 \cdot (-2) = +48$

Η ακολουθία είναι $+3, -6, +12, -24, +48$

(2) $\alpha_\nu = 3\nu + 1$

1ος όρος $\nu = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 3(1) + 1 = 4$

2ος όρος $\nu = 2 \Rightarrow \alpha_2 = 3(2) + 1 = 7$

3ος όρος $\nu = 3 \Rightarrow \alpha_3 = 3(3) + 1 = 10$

4ος όρος $\nu = 4 \Rightarrow \alpha_1 = 3(4) + 1 = 13$

5ος όρος $\nu = 5 \Rightarrow \alpha_1 = 3(5) + 1 = 16$

Η ακολουθία είναι $4, 7, 10, 13, 16$

(3) $\alpha_1 = 20\,,\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 3$

Για $\nu = 1$ $\quad \alpha_{1+1} = \alpha_1 - 3 \Rightarrow \quad \alpha_2 = 20 - 3 = 17$

Για $\nu = 2$ $\quad \alpha_{2+1} = \alpha_2 - 3 \Rightarrow \quad \alpha_3 = 17 - 3 = 14$

Για $\nu = 3$ $\quad \alpha_{3+1} = \alpha_3 - 3 \Rightarrow \quad \alpha_4 = 14 - 3 = 11$

Για $\nu = 4$ $\quad \alpha_{4+1} = \alpha_4 - 3 \Rightarrow \quad \alpha_5 = 11 - 3 = 8$

Η ακολουθία είναι $20, 17,\ 14,\ 11, 8$

(4) Τα τετράγωνα των φυσικών αριθμών μέχρι και το 5

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$$

ή

$$1, 4, 9, 16, 25$$

3. Δίνεται ο γενικός τύπος της ακολουθίας $\alpha_\nu = 30\nu - 100$
   (1) Να υπολογίσετε τον 5° και τον 200° όρος της ακολουθίας.
   (2) Ποιος όρος είναι ίσος με 200;

Λύση:

(1) Ο 5ος όρος $\alpha_5 = 30 \cdot 5 - 100 = 50$

Ο 200ος όρος $\alpha_{200} = 30 \cdot 200 - 100 = 5900$

(2) $30\nu - 100 = 200 \implies 30\nu = 300 \Rightarrow \nu = 10$

Ο 10ος όρος είναι ίσος με 200

4. Να συμπληρώσετε τους 3 επόμενους όρους σε καθεμία από τις ακολουθίες:

(1) $6, 11, 16, 21, 26 \cdots$

(2) $256, 128, 64, 32, 16, \cdots$

(3) $3, 5, 8, 12, 17 \cdots$

(4) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \cdots$

Λύση:

(1) $6, \xrightarrow{+5} 11, \xrightarrow{+5} 16, \xrightarrow{+5} 21, \xrightarrow{+5} 26, \xrightarrow{+5} 31 \xrightarrow{+5} 36 \xrightarrow{+5} 41$

(2) $256, \xrightarrow{:2} 128, \xrightarrow{:2} 64, \xrightarrow{:2} 32, \xrightarrow{:2} 16, \xrightarrow{:2} 8 \xrightarrow{:2} 4 \xrightarrow{:2} 2$

(3) $3, \xrightarrow{+2} 5, \xrightarrow{+3} 8, \xrightarrow{+4} 12, \xrightarrow{+5} 17, \xrightarrow{+6} 23 \xrightarrow{+7} 30 \xrightarrow{+8} 38$

(4) $1, \longrightarrow 1, \xrightarrow{+1} 2, \xrightarrow{+1} 3, \xrightarrow{+2} 5, \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+5} 13 \xrightarrow{+8} 21 \xrightarrow{+13} 34$

Δραστηριότητες

1. Να γράψετε τουλάχιστον 5 διαφορετικές ακολουθίες, χρησιμοποιώντας το πιο κάτω ημερολόγιο.

ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ						
ΔΕΥΤΕΡΑ	ΤΡΙΤΗ	ΤΕΤΑΡΤΗ	ΠΕΜΠΤΗ	ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ	ΣΑΒΒΑΤΟ	ΚΥΡΙΑΚΗ
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

2. Να συμπληρώσετε τις πιο κάτω ακολουθίες:

(1) 4, 15, 26, 37, …, … , …, … ,

(2) 47,42, 37, 32, …, …, … , … , …

(3) 8, … , … , 14, … , … , 20, … , … , 26,

(4) 5,10,20,40, …, …, … , … , …

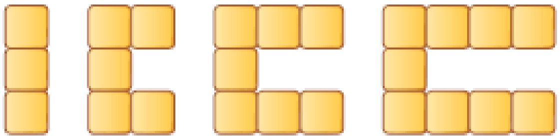
(5) 120, 60, 30 15, …, …, … , … , …

(6) … , …, 7 , 7 , 7 , …

3. Να γράψετε τους 5 πρώτους όρους της ακολουθίας που δημιουργείται σε κάθε περίπτωση αν γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της και την διαδικασία που ακολουθούμε για να βρούμε τον επόμενο όρο της.

$1^{ος}$ όρος	Διαδικασία	Ακολουθία
2	Προσθέτω 4	
110	Αφαιρώ 8	
7	Τριπλασιάζω	
5	Διπλασιάζω και αυξάνω κατά 2	

4. Να γράψετε τους 4 πρώτους όρους για κάθε ακολουθία με γενικό τύπο:
   (1) $\alpha_\nu = 5\nu$
   (2) $\alpha_\nu = \nu + 5$
   (3) $\alpha_\nu = 10\nu - 3$
   (4) $\beta_\nu = 20 - 3\nu$
   (5) $\gamma_\nu = \frac{4}{\nu+3}$
   (6) $\delta_\nu = \nu^2$
   (7) $\varepsilon_\nu = (-2)^\nu$
   (8) $\beta_\nu = (\nu - 1)^2$
5. Δίνεται η πιο κάτω ακολουθία σχημάτων



   (1) Να βρείτε από πόσα τετράγωνα αποτελείται ο 5ος όρος.
   (2) Να δώσετε την λεκτική μορφή της ακολουθίας που δείχνει τον αριθμό των τετραγώνων σε κάθε όρο της.

6. Να γράψετε τους 6 πρώτους όρους των πιο κάτω ακολουθιών που έχουν αναγωγικό τύπο
   (1) $\alpha_1 = 2, \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 5$
   (2) $\alpha_1 = 3, \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu$
   (3) $\alpha_1 = -5, \ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu$
   (4) $\alpha_1 = 4, \alpha_{\nu+1} = \frac{2}{\alpha_\nu}$
   (5) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \ \alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu$

7. Να υπολογίσετε τους τρεις επόμενους όρους σε κάθε ακολουθία
   (1) 4, 44, 444, 4444, …
   (2) 1, 11, 121, 1331, 14641, ….
   (3) 1, 11, 121, 12321, 1234321, ….
   (4) $\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 5^2, \alpha^3 = 5^3$
   (5) 1, 5, 1, 6, 1, 7, 1…
8. Για κάθε ακολουθία να βρείτε τον όρο που αναγράφεται.
   (1) $\alpha_\nu = 4\nu$ $\qquad \alpha_{20} =$
   (2) $\beta_\nu = \frac{2\nu}{3}$ $\qquad \beta_{60} =$
   (3) $\gamma_\nu = 5\nu + 3$ $\qquad \gamma_{2020} =$
   (4) $\delta_\nu = \nu^2 + 10\nu$ $\qquad \delta_8 =$

Γενικός Τύπος Ακολουθίας

Διερεύνηση (1)

Δίνονται οι πιο κάτω ακολουθίες .
$2,5,8,11,14,\ldots$

$2,6,18,54,162,\ldots$

$1,3,7,15,31,63,\ldots$

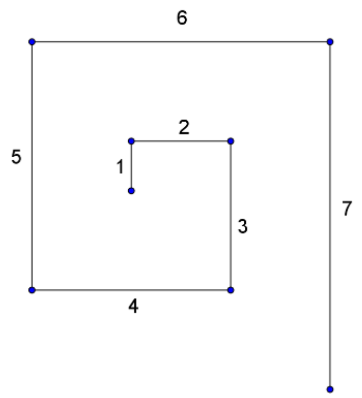
$4,5,9,13,22,35,57,\ldots$

$2,3,5,7,11,13,17,\ldots$

Αν ένας φίλος σας κάθεται απέναντί σας και δεν βλέπει τα πιο πάνω μοτίβα. Να του περιγράψετε ένα «κανόνα» (λεκτικά ή με τύπο) ώστε να μπορέσει να σχηματίσει τα πιο πάνω μοτίβα;

Διερεύνηση (2)

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια μεταλλική κατασκευή. Να βρείτε πόσο θα είναι το μήκος του μετάλλου που θα χρειαστεί αν η κατασκευή έχει στις 20 πλευρές.



$Αριθμός$ $Πλευρών\ \nu$	$Μήκος$ $Πολυγώνου$	α_ν	$Γενική\ Μορφή$
1	1	1	$\frac{1\cdot 2}{2}$
2	$1+2$	3	$\frac{2\cdot 3}{2}$
3	$1+2+3$	6	$\frac{3\cdot 4}{2}$
4			
5			
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
ν			

Η ακολουθία που έχει όλους τους όρους της ίσους με ένα αριθμό κ έχει γενικό τύπο
$\alpha_\nu = \kappa$
Π.χ. $4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4$
έχει γενικό τύπο
$\alpha_\nu = 4$

Μαθαίνω

Σε κάθε ακολουθία μπορούμε να εντοπίσουμε ένα γενικό κανόνα για τον τρόπο που αναπτύσσεται. Σε πολλές περιπτώσεις, όχι πάντα, μπορούμε να εντοπίσουμε και τον γενικό τύπο α_ν της ακολουθίας.

Μερικές βασικές ακολουθίες είναι οι πιο κάτω
Η ακολουθία $1,2,3,4,\ldots.$ έχει γενικό τύπο $\alpha_\nu = \nu,\ \ \nu \in \mathbb{N}$
Η ακολουθία $0,1,2,3,\ldots.$ έχει γενικό τύπο $\alpha_\nu = \nu - 1,\ \ \nu \in \mathbb{N}$

Σε ακολουθίες όπου ένα μέρος κάθε όρου παραμένει σταθερό τότε αυτό το σταθερό μέρος θα εμφανίζεται και στον γενικό τύπο.
Αν ένα μέρος του όρου της ακολουθίας **αυξάνεται κατά ένα σταθερό αριθμό** $(\boldsymbol{\kappa})$ σε σχέση με τον προηγούμενο του, τότε ο γενικός όρος θα περιέχει το κομμάτι $\kappa \cdot \nu$
Παράδειγμα

$$3^2,\ \ 6^2,\ \ 9^2,\ \ 12^2,\ \ 15^2$$

+3 +3 +3 +3

Ο εκθέτης είναι πάντα το 2
Η βάση κάθε όρου αυξάνεται κατά 3, δηλαδή ο γενικός τύπος θα περιέχει το 3ν

$$\alpha_\nu = (3\nu)^2$$

Ο τρόπος υπολογισμού του γενικού όρου, στις περιπτώσεις όπου μπορούμε να τον υπολογίσουμε, φαίνεται στα λυμένα παραδείγματα.

Στις περιπτώσεις που δεν μπορούμε να εντοπίσουμε τον γενικό όρο περιγράφουμε την ακολουθία λεκτικά
Π.χ. $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ ...
η ακολουθία των πρώτων αριθμών.

Όταν μας δίνεται μια ακολουθία σε διατεταγμένη μορφή τότε μπορούμε να βρούμε περισσότερους από ένα γενικούς όρους

Μια ακολουθία μπορεί να προκύπτει από συνδυασμό ακολουθιών
Π.χ. $\frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{6}{45}, \frac{8}{135} \cdots$
Οι αριθμητές αποτελούν την ακολουθία
$2,4,6,8,$ άρα 2ν
Ο παρονομαστές αποτελούν την ακολουθία
$5,15,45,135$ άρα $5 \cdot 3^{\nu-1}$
Δηλαδή η ακολουθία έχει γενικό τύπο $\alpha_\nu = \frac{(2\nu)}{5 \cdot 3^{\nu-1}}$

Παραδείγματα

1. Να βρείτε ένα γενικό όρο α_ν , $\nu\epsilon\mathbb{N}$ που εκφράζει τις πιο κάτω ακολουθίες
   (1) $3,7,11,15,\ldots$
   (2) $22,16,10,4,\ldots$
   (3) $1,8,27,64,125,\ldots$
   (4) 2, 6, 18, 54, 108, …
   (5) $54, 18, 6, 2, \frac{2}{3} \ldots$
   (6) $\frac{2\cdot 2}{5}, \frac{2\cdot 4}{7}, \frac{2\cdot 8}{9}, \frac{2.16}{11}$

Λύση:

(α) 1ος Τρόπος

$$3, \xrightarrow{+4} 7, \xrightarrow{+4} 11, \xrightarrow{+4} 15, \xrightarrow{+4} 19$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία αυξάνεται με σταθερή διαφορά 4. Άρα, δοκιμάζω 4ν

$$\alpha_\nu = 4\cdot\nu + \cdots.$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Για } \nu = 1 \rightarrow \alpha_1 = 3 = 4\cdot 1 + \boxed{-1}\\
&\text{Για } \nu = 2 \rightarrow \alpha_2 = 7 = 4\cdot 2 + \boxed{-1}\\
&\text{Για } \nu = 3 \rightarrow \alpha_3 = 11 = 4\cdot 3 + \boxed{-1}\\
&\text{Για } \nu = 4 \rightarrow \alpha_4 = 15 = 4\cdot 4 + \boxed{-1}\\
&\text{Για } \nu = 5 \rightarrow \alpha_5 = 19 = 4\cdot 5 + \boxed{-1}
\end{aligned}\right\} \quad a_\nu = 4\nu - 1$$

2ος τρόπος

$$3, \xrightarrow{+4} 7, \xrightarrow{+4} 11, \xrightarrow{+4} 15, \xrightarrow{+4} 19$$

Σε κάθε επόμενο όρο προσθέτουμε 4

Όρος	*Ακολουθία*	*Ανάπτυγμα*	*Γενική μορφή*
$\alpha_1 =$	3	3	$3 + 4\cdot 0$
$\alpha_2 =$	7	$3+4$	$3 + 4\cdot 1$
$\alpha_3 =$	11	$3+4+4$	$3 + 4\cdot 2$
$\alpha_4 =$	15	$3+4+4+4$	$3 + 4\cdot 3$
$\alpha_5 =$	19	$3+4+4+4+4$	$3 + 4\cdot 4$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\alpha_\nu =$			$3 + 4\cdot(\nu - 1)$

(β) $1^{ος}$ Τρόπος

$$22, \quad 16, \quad 10, \quad 4$$

$$\underset{-6}{\curvearrowright} \quad \underset{-6}{\curvearrowright} \quad \underset{-6}{\curvearrowright}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος μειώνεται κατά 6 άρα δοκιμάζω 6ν

$$\alpha_\nu = -6\nu + \cdots$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } \nu = 1 \rightarrow \alpha_1 = 22 = -6\cdot 1 + \boxed{28} \\ \text{Για } \nu = 2 \rightarrow \alpha_2 = 16 = -6\cdot 2 + \boxed{28} \\ \text{Για } \nu = 3 \rightarrow \alpha_3 = 10 = -6\cdot 3 + \boxed{28} \end{array}\right\} \alpha_\nu = -6\nu + 28$$

$2^{ος}$ τρόπος

$$22, \quad 16, \quad 10, \quad 4$$

$$\underset{-6}{\curvearrowright} \quad \underset{-6}{\curvearrowright} \quad \underset{-6}{\curvearrowright}$$

Για κάθε επόμενο όρο αφαιρούμε 6

Όρος	*Ακολουθία*	*Ανάπτυγμα*	*Γενική μορφή*
$\alpha_1 =$	22	22	$22 - 6\cdot 0$
$\alpha_2 =$	16	$22 - 6$	$22 - 6\cdot 1$
$\alpha_3 =$	10	$22 - 6 - 6$	$22 - 6\cdot 2$
$\alpha_4 =$	4	$22 - 6 - 6 - 6$	$22 - 6\cdot 3$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\alpha_\nu =$			$22 - 6\cdot(\nu - 1)$

(γ) 3, 6, 12, 24, 48 …

$$3, \quad 6, \quad 12, \quad 24, \quad 48$$

$$\underset{\times 2}{\curvearrowright} \quad \underset{\times 2}{\curvearrowright} \quad \underset{\times 2}{\curvearrowright} \quad \underset{\times 2}{\curvearrowright}$$

Παρατηρούμε ότι ο κάθε όρος πολλαπλασιάζεται με 2.

Όρος	*Ακολουθία*	*Ανάπτυγμα*	*Γενική μορφή*
$\alpha_1 =$	3	3	$3\cdot 2^0$
$\alpha_2 =$	6	$3\cdot 2$	$3\cdot 2^1$
$\alpha_3 =$	12	$3\cdot 2\cdot 2$	$3\cdot 2^2$
$\alpha_4 =$	24	$3\cdot 2\cdot 2\cdot 2$	$3\cdot 2^3$
$\alpha_5 =$	48	$3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$	$3\cdot 2^4$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\alpha_\nu =$			$3\cdot 2^{\nu-1}$

(δ) 1, 8, 27, 81,

Παρατηρούμε ότι η συγκεκριμένη ακολουθία ούτε αυξάνεται με σταθερή διαφορά αλλά ούτε πολλαπλασιάζεται με σταθερό αριθμό.
Σε αυτή την περίπτωση προσπαθούμε να γράψουμε τον κάθε όρο της ακολουθίας με διαφορετικό τρόπο

$$1, \quad 8, \quad 27, \quad 81, \quad \ldots$$

$$1^3, \quad 2^3, \quad 3^3, \quad 4^3 \quad \ldots$$

Οι βάσεις αποτελούν την ακολουθία 1,2,3,4 και οι εκθέτες είναι σταθεροί και ίσοι με 3 άρα

$$\alpha_\nu = \nu^3$$

(ε) 54, 18, 6, 2,

$\div 3$ $\div 3$ $\div 3$

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος διαιρείται με το 3 σε σχέση με τον προηγούμενο του.

Όρος	*Ακολουθία*	*Ανάπτυγμα*	*Γενική μορφή*
$\alpha_1 =$	54	54	$\frac{54}{3^0}$
$\alpha_2 =$	18	$\frac{54}{3}$	$\frac{54}{3^1}$
$\alpha_3 =$	6	$\frac{54}{3 \cdot 3}$	$\frac{54}{3^2}$
$\alpha_4 =$	2	$\frac{54}{3 \cdot 3 \cdot 3}$	$\frac{54}{3^3}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\alpha_\nu =$			$\frac{54}{3^{\nu-1}}$

(στ) $\frac{2\cdot 2}{5}, \frac{2\cdot 4}{7}, \frac{2\cdot 8}{9}, \frac{2.16}{11}$

Ο αριθμητής προκύπτει από την ακολουθία $4,8,16,32$ *με γενικό όρο* $2 \cdot 2^\nu$ *και ο παρονομαστής από την ακολουθία* $5,7,9,11,$ *με γενικό όρο* $(2\nu + 3)$.

Έτσι ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = \frac{2\cdot 2^\nu}{2\nu+3}$

Δραστηριότητες

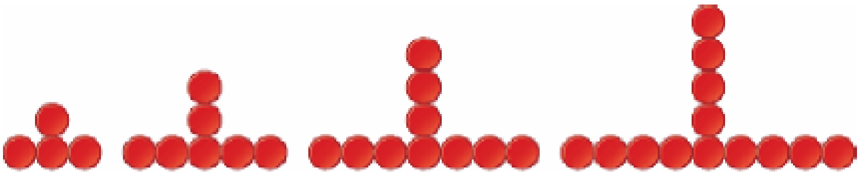
1. Να βρείτε πόσο πρέπει να προσθέτουμε κάθε φορά ώστε να δημιουργήσουμε την ακολουθία των
   (1) Άρτιων αριθμών
   (2) Περιττών αριθμών
   (3) Τα πολλαπλάσια του 9.
   (4) Οι ακέραιοι αριθμοί που λήγουν σε 8.

2. Να βρείτε ένα γενικό τύπο για κάθε μια από τις πιο κάτω ακολουθίες.
   (1) Οι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 100 αυξημένοι κατά 4.
   (2) Οι περιττοί μεγαλύτεροι του 10
   (3) Πολλαπλάσια του 3 που είναι μεγαλύτερα από το 20
   (4) Τα τετράγωνα των αριθμών που είναι μεγαλύτεροι από το 5

3. Να βρείτε ένα γενικό τύπο για κάθε μια από τις πιο κάτω ακολουθίες.
   (1) $2,6,10,14,18 \ldots$
   (2) $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$
   (3) $-7, -9, -11, -13, -15$
   (4) $10, 10, 10, 10 \cdots$
   (5) $\frac{3}{5}, \frac{6}{8}, \frac{12}{11}, \frac{24}{14}, \ldots$
   (7) $60, 57,54,51, \cdots$
   (8) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \cdots$

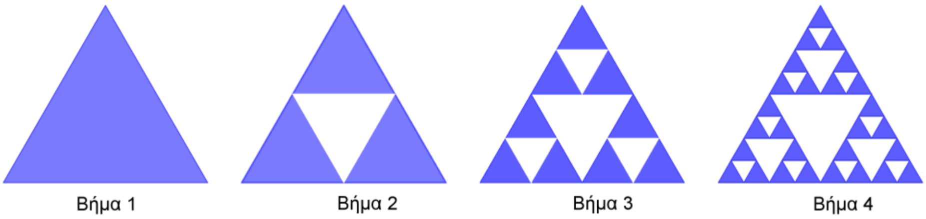
4. Ποιος από τους πιο κάτω τύπους περιγράφει καλύτερα τον γενικό όρο της ακολουθίας $30, 40, 50, 60, 70 \cdots$
   (1) $\alpha_\nu = 30$
   (2) $\alpha_\nu = 30\nu + 10$
   (3) $\alpha_\nu = 10\nu + 30$
   (4) $\alpha_\nu = 80 - 10\nu$
   (5) $\alpha_\nu = 20 + 10\nu$

5. Να βρείτε τον γενικό τύπο της ακολουθίας που δίνει τον αριθμό των κύκλων για κάθε σχήμα.



Να εξετάσετε κατά πόσο θα υπάρχει σχήμα στην πιο πάνω ακολουθία που να έχει κατασκευαστεί με ακριβώς 200 κύκλους.

6. Στο πιο κάτω σχήμα φαίνονται μια ακολουθία φτιαγμένη από τρίγωνα.
Το πρώτο τρίγωνο έχει εμβαδόν $1m^2$



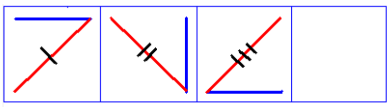
(1) Να γράψετε την ακολουθία που να δείχνει τον αριθμό των μπλε τριγώνων για κάθε βήμα.
(2) Να γράψετε ένα αναγωγικό τύπο της ακολουθίας που δείχνει τον αριθμό των άσπρων τριγώνων για κάθε βήμα(ανεξαρτήτως μεγέθους).
(3) Να βρείτε τον γενικό τύπο της ακολουθίας που δείχνει το εμβαδόν της μπλε σκιασμένης περιοχής για κάθε βήμα.

1. Για κάθε ακολουθία να βρείτε τους τρεις επόμενους όρους
   (1) 17, 12, 7, 2, …
   (2) -1, 2, -4, 8 , …
   (3) -5, -1 , 3 , 7 ….
   (4) 10000, 1000, 100, 10, ….
   (5) 3, 4, 7, 11, 18, 29, …
   (6) 1,2,6,24,120, ….

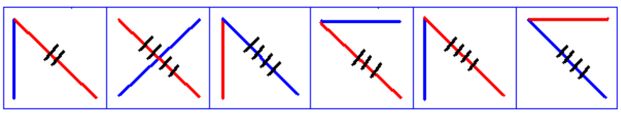
2. Να βρείτε ένα γενικό όρο της κάθε ακολουθίας και στην συνέχεια τον 30^{ο} όρο της κάθε ακολουθίας
   (1) 7, 9 , 11, 13, 15 ……
   (2) 2, -4, 8, -16, 32 ……
   (3) 50, 45,40,35, 30 …….
   (4) $\frac{4}{15}, \frac{19}{11}, \frac{34}{7}, \frac{49}{3}, \ldots$
   (5) 1,4,9,16,25, …

3. Ο Αβραάμ θέλει να αγοράσει το ποδήλατο της φωτογραφίας που αξίζει €193.
   Στα γενέθλια του που ήταν τον Γενάρη μάζεψε €50, στην συνέχεια εξοικονομούσε €13 τον μήνα. Ποιο μήνα θα έχει αρκετά λεφτά για να αγοράσει το ποδήλατο.

4. Δίνεται η ακολουθία σχημάτων



Ποιο από τα πιο κάτω πρέπει να μπει στο κενό τετραγωνάκι.

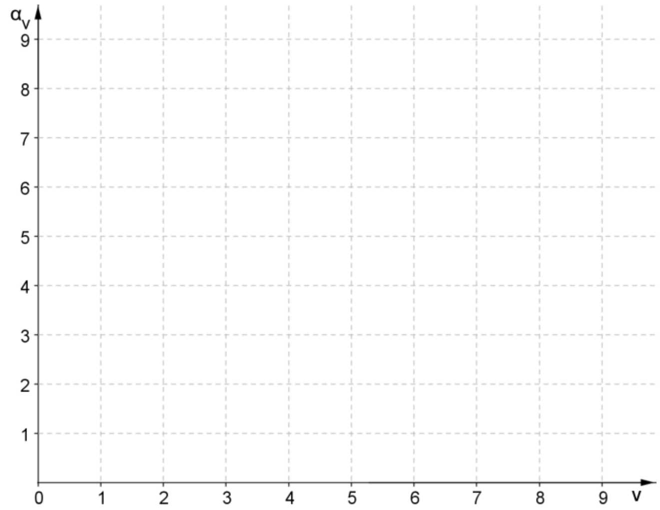


Α Β Γ Δ Ε Ζ

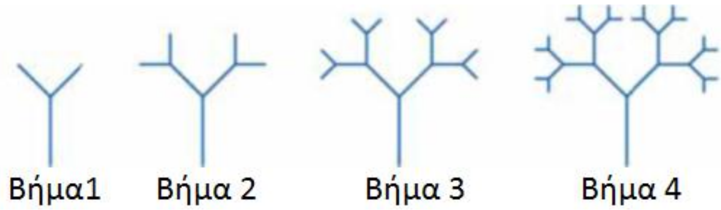
5. Να παραστήσετε γραφικά στο πιο κάτω σύστημα αξόνων τους πρώτους όρους τις κάθε ακολουθίας

    (1) $\alpha_\nu = 2\nu$.

    (2) $\alpha_\nu = \nu + 2$



6. Για να κατασκευάσεις αυτό το δέντρο φρακταλ παίρνεις ένα ευθύγραμμο τμήμα (κορμός) και προσθέτεις στο ένα άκρο του δύο άλλα μικρότερα τμήματα (κλαδιά) όπως φαίνεται στο πρώτο βήμα. Στην συνέχεια κάθε κλαδί γίνεται κορμός και προσθέτουμε νέα κλαδιά.



    (1) Να γράψετε μια ακολουθία που να δείχνει τον αριθμό των κλαδιών για κάθε βήμα.
    (2) Να βρείτε τον γενικό τύπο της ακολουθίας
    (3) Να βρείτε πόσα κλαδιά θα έχει το δέντρο στο 40^{o} βήμα

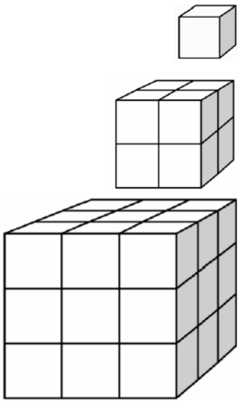
7. Να γράψετε πέντε ακολουθίες που έχουν πρώτο όρο τον αριθμό 3 και δεύτερο όρο τον αριθμό 6.

8. Το κάθε καροτσάκι μιας υπεραγοράς έχει μήκος $1m$. Όταν αποθηκεύονται το ένα πίσω από το άλλο δημιουργούν μια αλυσίδα η οποία αυξάνεται κατά $20cm$ για κάθε νέο καροτσάκι.

   (1) Να γράψετε μια ακολουθία που να δείχνει το μήκος της αλυσίδας για κάθε ένα από τα πρώτα 6 καροτσάκια.
   (2) Να γράψετε τον γενικό τύπο της ακολουθίας αυτής
   (3) Αν η υπεραγορά διαθέτει μόνο ένα διάδρομο αποθήκευσης καροτσιών, μήκους 8m, όπως φαίνεται στην φωτογραφία, ποιος θα είναι ο μέγιστος αριθμός από καροτσάκια που μπορούν να τοποθετηθούν στον διάδρομο.

9. Ένα ξενοδοχείο χρεώνει €50 την πρώτη ημέρα διαμονής και €30 για κάθε επόμενη μέρα.
   (1) Να βοηθήσετε τον ξενοδόχο να κατασκευάσει ένα κατάλογο στον οποίο να φαίνεται το συνολικό κόστος διαμονής από 1 μέχρι 7 μέρες.
   (2) Να γράψετε τον γενικό τύπο της πιο πάνω ακολουθίας
   (3) Να βρείτε πόσα θα πληρώσει ένας πελάτης που έμεινε στο ξενοδοχείο ολόκληρο τον Αύγουστο.
   (4) Αν ένας πελάτης διαθέτει €500 πόσες είναι οι περισσότερες μέρες που μπορεί να διαμένει στο ξενοδοχείο

10. Ο Ζήνων κάνει κατασκευές με μικρούς κύβους τους οποίους κολλάει μεταξύ τους και δημιουργεί μεγαλύτερους κύβους. Στην συνέχεια βάφει την εξωτερική επιφάνεια της κάθε κατασκευής. Να βρείτε ένα γενικό τύπο που να περιγράφει για κάθε κατασκευή:



   (1) Τον αριθμό των μικρών κύβων που χρειάζεται.
   (2) Τον αριθμό των μικρών τετραγώνων που έχουν βαφτεί
   (3) Τον αριθμό των κύβων που θα έχουν μπογιά πάνω τους.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Μια μπάλα που πέφτει από κάποιο ύψος κτυπά στο έδαφος και ανεβαίνει στο 40% του προηγούμενου ύψους της (δηλαδή κάνει μια αναπήδηση).
    (1) Αν μια μπάλα πέφτει από ύψος $40m$, να γράψετε τους τρεις πρώτους όρους της ακολουθίας που προκύπτει από τις τρεις πρώτες αναπηδήσεις της μπάλας.
    (2) Να βρείτε ποια θα είναι η τελευταία αναπήδηση στην οποία η μπάλα θα ανέβει πάνω από 1m.

2. Δίνεται η ακολουθία με γενικό τύπο $\alpha_\nu = 2\nu$ και η ακολουθία με γενικό τύπο $\beta_\nu = \nu + 1$
    (1) Να βρείτε τους 5 πρώτους όρους κάθε ακολουθίας
    (2) Να βρείτε τον γενικό όρο της ακολουθίας
    $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2,\ \alpha_3 + \beta_3, \ldots$

3. Να βρείτε τον γενικό όρο των ακολουθιών
    (1) 2, 5, 10, 17, 26 ……..
    (2) 1, 3, 6, 10, 15 …..
    (3) 0, 6, 24, 77, ….
    (4) -1 , +4, -9, +16, -25

4. Σε ένα πάρτι ο κάθε καλεσμένος θα ανταλλάξει μια μόνο χειραψία με κάθε άλλο καλεσμένο. Να γράψετε μια ακολουθία που να δείχνει των αριθμό των χειραψιών που θα γίνουν αν οι καλεσμένοι είναι από 1 μέχρι 6.
    (1) Να γράψετε ένα γενικό τύπο για την ακολουθία
    (2) Πόσες χειραψίες θα γίνουν αν υπάρχουν 15 καλεσμένοι.

5. Ο Παναγιώτης και ο Σταύρος εργάζονται στην ίδια πιτσαρία. Ο Παναγιώτης εργάζεται σε μια πιτσαρία και αμείβεται €400 τον μήνα και €0.80 για κάθε πίτσα που παραδίδει. Ο Σταύρος αμείβεται €391 τον μήνα και €1.10 για κάθε πίτσα που ετοιμάζει. Να γράψετε μια ακολουθία για το εισόδημα κάθε ενός. Ένα μήνα παρατήρησαν ότι το εισόδημα τους ήταν το ίδιο. Να

βρείτε ποιος ήταν ο ελάχιστος πιθανός αριθμός από πίτσες που ετοίμασε ο Σταύρος.

6. Να βρείτε το ν-οστό όρο των ακολουθιών

   (1) $\alpha_1 = 8$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2$

   (2) $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{\nu+1} = 4\alpha_\nu$

7. Να βρείτε τον α_{200} στην ακολουθία με $\alpha_{50} = 210$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 3$

8. Δίνονται οι γενικοί τύποι $\alpha_\nu = \nu + 3$ και $\beta_\nu = \nu^2$, $\nu \in \mathbb{N}$ δύο ακολουθιών.

   Να βρείτε με την βοήθεια των πιο πάνω

   (1) Τον γενικό τύπο της ακολουθίας που προκύπτει από το άθροισμα των δύο ακολουθιών

   (2) Το ανάπτυγμα της ακολουθίας με γενικό τύπο $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$

   (3) Τον γενικό τύπο της ακολουθίας

   $$4, 20, 54, 102, \cdots$$

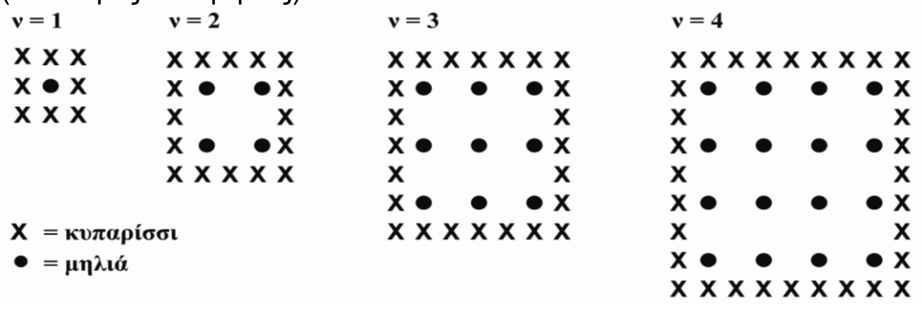
9. Άσκηση από την διεθνή έρευνα PISA του 2000

   ΜΗΛΙΕΣ

   Ένας αγρότης θέλει να φυτέψει μηλιές σε σειρές και σε τετράγωνο σχήμα. Σκέφτεται να προστατέψει της μηλιές από τον αέρα, περιφράζοντας τις με κυπαρίσσια.

   Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε την διάταξη των δέντρων όπως τα φαντάζεται ο αγρότης. Κάθε διάγραμμα περιλαμβάνει διαφορετικές σειρές από μηλιές.

(ν = σειρές από μηλιές)



Ερώτηση 1: ΜΗΛΙΕΣ

Συμπληρώστε τα στοιχεία που λείπουν στον παρακάτω πίνακα:

ν	Πλήθος δέντρων μηλιάς	Πλήθος κυπαρισσιών
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

Ερώτηση 2: ΜΗΛΙΕΣ

Οι τύποι που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, για να υπολογίσετε το πλήθος των δέντρων μηλιάς και το πλήθος των κυπαρισσιών στα παρακάτω διαγράμματα είναι δύο:
Πλήθος δέντρων μηλιάς = λ^2
Πλήθος κυπαρισσιών= 8λ
όπου ν είναι ο αριθμός των σειρών που σχηματίζουν οι μηλιές.

Υπάρχει μία τιμή του ν, για την οποία το πλήθος των δέντρων μηλιάς ισούται με το πλήθος των κυπαρισσιών. Να βρείτε την τιμή αυτή του ν και να περιγράψετε παρακάτω τον τρόπο, με τον οποίο την υπολογίσατε.

Ερώτηση 3: ΜΗΛΙΕΣ

Ας, υποθέσουμε ότι ο αγρότης μεγαλώνει συνέχεια το περιβόλι του προσθέτοντας συνεχώς σειρές δέντρων. Ενώ ο αγρότης μεγαλώνει το περιβόλι του προσθέτοντας σειρές, θα χρειαστεί περισσότερες μηλιές ή κυπαρίσσια; Γράψτε παρακάτω τον τρόπο με τον οποίο βρήκατε την απάντηση σας.

Σημείωση 1. Από *Διεθνές Πρόγραμμα για την Αξιολόγηση των Μαθητών - PISA* (σελ. 205-206), από Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, 2007, Αθήνα: Επτάλοφος Α.Β.Ε.Ε.
Σημείωση 2. Θέμα που δόθηκε στους μαθητές/τριες για το Πρόγραμμα PISA 2000 (κυρίως έρευνα).