

ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΤΑΞΗ: Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 2

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ώρες

Όνοματεπώνυμο: Τμήμα: Αριθ.:

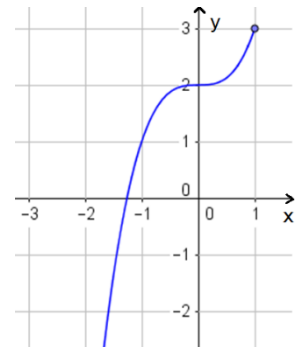
Οδηγίες:

- 1) Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε.
- 2) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- 3) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- 4) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).
- 5) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.
- 6) Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α'

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .(β) Να υπολογίσετε την τιμή $f(f(-1))$.(γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f^{-1} .

2. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των πιο κάτω:

(α) $x^3 + \psi^2 = 100$

(β) $\psi = \frac{2x^3+1}{x^3-3}$

3. Σε μια σκάλα το πρώτο σκαλί έχει ύψος 10cm και κάθε επόμενο σκαλί είναι 15cm πιο ψηλό από το προηγούμενο.

(α) Να βρείτε τον γενικό όρο που εκφράζει το ύψος του κάθε σκαλιού από το έδαφος.

(β) Να βρείτε ένα αναδρομικό τύπο της ακολουθίας που εκφράζει το ύψος κάθε σκαλιού από το έδαφος.

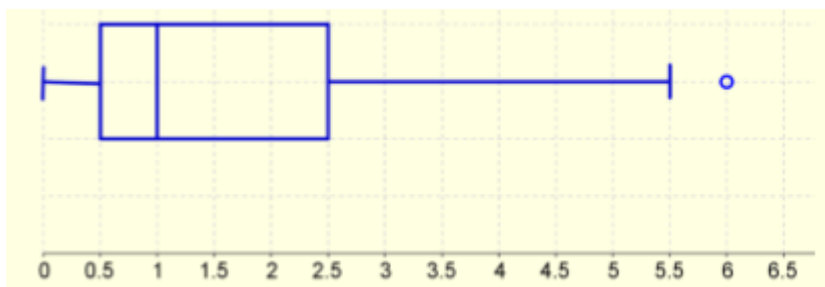
4. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n ισχύει:

$$1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{n-1} = \frac{5^n - 1}{4}$$

5. Ένας δασονόμος βρίσκεται στη θέση A και παρατηρεί με το τηλεσκόπιο το ψηλότερο σημείο της περιοχής Σ_1 , που απέχει 30 km από αυτόν. Στη συνέχεια ο δασονόμος παρατηρεί το ψηλότερο σημείο της περιοχής Σ_2 , που απέχει 55 km από αυτόν. Αν η απόσταση μεταξύ των περιοχών Σ_1 και Σ_2 είναι 45 km , να υπολογίσετε την κυρτή γωνία $\Sigma_1 A \Sigma_2$ που χρειάζεται να στρέψει το τηλεσκόπιό του, ώστε να παρατηρήσει το ψηλότερο σημείο της περιοχής Σ_2 .



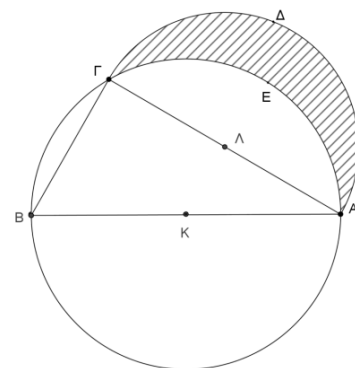
6. Στο πιο κάτω θηκόγραμμα παρουσιάζεται ο αριθμός των παιδιών που έχουν οι οικογένειες, που ζουν σε μια πολυκατοικία.



- (α) Να βρείτε τις ακραίες παρατηρήσεις, αν υπάρχουν.
 (β) Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη παρατήρηση και το εύρος των παρατηρήσεων.
 (γ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο, το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

7. Να λύσετε την εξίσωση $4^{\sigma\upsilon\nu 2x} + 4^{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 3$..

8. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο K και ακτίνα R . Η AB είναι διάμετρος του κύκλου (K, R) , η χορδή AG είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (K, R) και το ημικύκλιο $A\Delta\Gamma$ έχει κέντρο το μέσο Λ της AG . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος συναρτήσει της ακτίνας R .



9. Τρεις σκηνές είναι σημμένες σε μια κατασκήνωση έτσι ώστε να μην βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Σε ποιο σημείο θα πρέπει να τοποθετηθεί ένα βαρέλι με νερό για να ισαπέχει από τις τρεις σκηνές. Να αποδείξετε ότι το σημείο που επιλέξατε ισαπέχει από τις τρεις σκηνές.

10. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{3x+1} & , \quad x \leq 2 \\ \frac{x-2}{|x^2+3x-10|} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

(α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

(β) Να εξετάσετε αν η πιο κάτω συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη.

ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = 1 - \frac{7}{x+3}$, $g(x) = \sqrt{x}$ και $h(x) = \frac{x^2-6x+8}{x^2+x-6}$.

(α) Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του \mathbb{R} έτσι ώστε $f(x) = h(x)$.

(β) Να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο τιμών για το οποίο ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ και να γράψετε τον τύπο της.

(γ) Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(3^x) = 5\kappa - 4$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε την τιμή του κ .

2. Δίνονται οι καμπύλες: $f(x) = e^{2x} \cdot \eta\mu 3x$ και $g(x) = \frac{\nu x^3 + \mu}{x}$, $x \neq 0, \nu, \mu \in \mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι: $f''(x) - 4f'(x) + 13f(x) = 0$.

(β) Η γραφική παράσταση της καμπύλης g διέρχεται από το σημείο $A(1, -3)$ και η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης g στο A , είναι διπλάσια από την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης f στο σημείο με τετμημένη $x = 0$. Να υπολογίσετε τις τιμές των ν και μ .

3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{\log x + 2}{\log x - 2}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{5}{2}$.

4. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{\sigma\tau\epsilon\mu\chi}{\sigma\tau\epsilon\mu5\chi} - \frac{\tau\epsilon\mu\chi}{\tau\epsilon\mu5\chi}$ και $B = \frac{2\eta\mu3\chi \sigma\upsilon\eta\chi - 2\eta\mu2\chi}{2\sigma\upsilon\eta3\chi}$

(α) Να δείξετε ότι $A = 4\sigma\upsilon\eta2\chi$ και $B = \eta\mu\chi$.

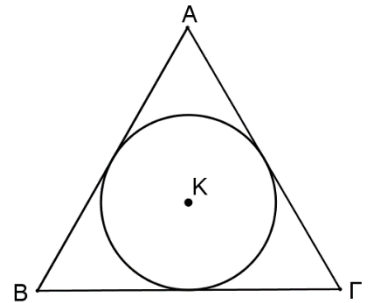
(β) Να λύσετε την εξίσωση: $A + 12B = 8$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

5. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ περιγεγραμμένο στο κύκλο (K, R) , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα

(α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίση με

$$2R\sqrt{3}.$$

(β) Αν Z και Δ είναι τα μέσα των πλευρών $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $AZ\Delta$.



(γ) Το χωρίο που βρίσκεται εντός του τριγώνου $AB\Gamma$ και εκτός του κύκλου (K, R)

περιστρέφεται γύρω από τη διάμεσο AE κατά π . Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.