

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΕΝΙΑΙΑ ΤΕΛΙΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 2023 – 2024

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Διάρκεια: 90 λεπτά

Το δοκίμιο αποτελείται από τρεις (3) σελίδες

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
- Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
- Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

**ΜΕΡΟΣ Α: Αποτελείται από 6 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.**

A1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int (5x + e^{3x} + \eta\mu 2x) dx$

(2021 – 2022 Α΄

Τετρ.)

A2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB , αν δίνονται τα σημεία $A(1, -5)$ και $B(9, 1)$.

(2021 – 2022 Α΄ Τετρ.)

A3. α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού. (4 μον.)

β) Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(1, 3)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (-1, 1)$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): 2x + y - 5 = 0$.

(6 μον.)

(2021 – 2022 Α΄ Τετρ.)

A4. Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης με $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(A \cap B') = \frac{1}{5}$ και $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

α) $P(A \cap B)$

β) $P(A|B)$

A5. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta > 0$.

α) Αν η εστιακή απόσταση $EE' = 8$ μονάδες και η εκκεντρότητα της είναι $\frac{4}{5}$, να βρείτε τις τιμές του α και του β .

β) Αν η εξίσωση της πιο πάνω έλλειψης είναι $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν αυτή περιστραφεί κατά π γύρω από τον άξονα των τετμημένων.

A6. Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους 4 διαφορετικά χρυσόψαρα μπορούν να τοποθετηθούν σε 5 αριθμημένες γυάλες ($\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$), αν:

α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός (4 μον.)

β) τα 4 χρυσόψαρα θα τοποθετηθούν σε διαφορετικές γυάλες (4 μον.)

γ) τα 4 χρυσόψαρα θα τοποθετηθούν σε ακριβώς 3 γυάλες. (2 μον.)

(2021 – 2022 Β' Τετρ.)

ΜΕΡΟΣ Β: Αποτελείται από 3 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 40 μονάδες.

Οι ασκήσεις **B1** και **B3** βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία

ενώ η άσκηση **B2** βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

B1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 2}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες και να την παραστήσετε γραφικά.

(15 μον.)

(2022 – 2023 Α' Τετρ.)

B2. Δίνονται τα ολοκληρώματα

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin x}{1+e^x} dx \text{ και } B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+e^x} dx$$

- α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = -u$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι $A = B$ (4 μον.)
- β) Να δείξετε ότι $A + B = 2$ (4 μον.)
- γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα A . (2 μον.)

(2021 – 2022 Β΄ Τετρ.)

B3. Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 4x$ και το σημείο της $P(\rho^2, 2\rho)$, $\rho > 0$.

Φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα PA κάθετο στον άξονα $O\psi$ (A σημείο του άξονα $O\psi$). Από το A φέρουμε ευθεία (ϵ) κάθετη στην OP (O η αρχή των αξόνων).

α) Να δείξετε ότι η (ϵ) τέμνει τον άξονα Ox σε σταθερό σημείο B . (5 μον.)

β) Αν Γ σημείο της παραβολής τέτοιο ώστε η GO να είναι κάθετη στην

PO , να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $PO\Gamma$ δίνεται από τον τύπο

$$E = 4\rho + \frac{16}{\rho} \quad (5 \text{ μον.})$$

γ) Να βρείτε για ποια τιμή του ρ το πιο πάνω εμβαδόν E , γίνεται ελάχιστο.

(5 μον.)

Στο Δειγματικό Δοκίμιο περιλαμβάνονται ερωτήσεις/ασκήσεις από όλη την Διδακτέα ύλη όπως έχει καθοριστεί στα Πλαίσια Μάθησης. Η Εξεταστέα ύλη θα ανακοινωθεί σε μεταγενέστερο στάδιο.

ΤΕΛΟΣ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ