

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ**  
**ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΕΝΙΑΙΑ ΤΕΛΙΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 2023 – 2024**

**Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**Διάρκεια: 90 λεπτά**

**Το δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες**

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
- Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
- Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

**ΜΕΡΟΣ Α: Αποτελείται από 6 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 60 μονάδες.  
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.  
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.**

**A1.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο: (2020 – 2021)

$$f(x) = 5x^4 - \sin 2x + \ln x, \quad x > 0$$

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f$ .

**A2.** Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια: (2022 – 2023 Α΄ Τετρ.)

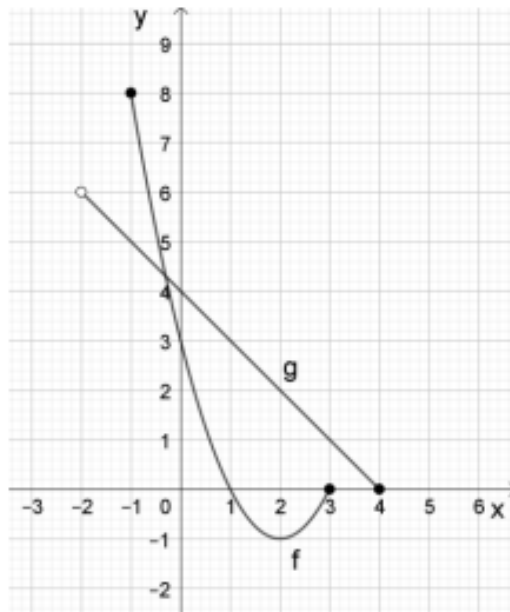
α)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 4x}{x + 2}$

β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 + 5x}{3x^2 - 4}$

**A3.** α) Να διατυπώσετε τον ορισμό της άρτιας συνάρτησης. (2021 – 2022 Α΄ Τετρ.)  
(2 μον.)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  είναι άρτια. (8 μον.)

- A4.** Στο πιο κάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f: A \rightarrow f(A)$  και  $g: B \rightarrow g(B)$ . Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο  $x = 2$ .  
(2020 – 2021)



Με τη βοήθεια των πιο πάνω γραφικών παραστάσεων να υπολογίσετε τις πιο κάτω τιμές:

α)  $(f - g)(2)$

β)  $\left(\frac{f}{g}\right)(1)$

γ)  $e^{g(4)}$

δ)  $f'(2)$

ε)  $g^{-1}(3)$

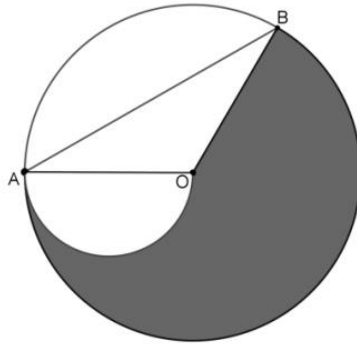
- A5.** α) Να δείξετε ότι: (2022 – 2023 Α΄ Τετρ.)

$$\sin 2x + 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin^2 x + \sin x \quad (3 \text{ μον.})$$

β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο να λύσετε την εξίσωση

$$\sin 2x + 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \quad (7 \text{ μον.})$$

- A6.** Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος  $(O, R)$  με χορδή  $AB = \lambda_3$  και ημικύκλιο με διάμετρο  $AO$ . Αν  $AO = 12 \text{ cm}$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου σκιασμένου χωρίου. (2020 – 2021)



**ΜΕΡΟΣ Β:** Αποτελείται από 3 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 40 μονάδες.  
Οι ασκήσεις B2 και B3 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία  
ενώ η άσκηση B1 βαθμολογείται με 10 μονάδες.  
Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

- B1.** α) Να λύσετε την εξίσωση (2021 – 2022 Β΄ Τετρ.)

$$\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$$

(6 μον.)

- β) Αν το  $\rho$  είναι η μεγαλύτερη από τις λύσεις της πιο πάνω εξίσωσης, να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = \log_2 \rho + \log_4 \rho + \log_{16} \rho + \log_{256} \rho + \dots$$

(4 μον.)

- B2.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο: (2022 – 2023 Β΄ Τετρ.)

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 1 \\ \sqrt{x} + \beta, & x > 1 \end{cases}$$

- α) Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ . (8 μον.)

- β) Αν  $\alpha = \frac{1}{4}$  και  $\beta = -\frac{3}{4}$ , να βρείτε:

i) Την παράγωγο συνάρτηση,  $f'(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . (3 μον.)

ii) Την εξίσωση της κάθετης ευθείας, της γραφικής παράστασης της  $f$ , στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 1$ . (4 μον.)

**B3.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  με τύπους: (2020 – 2021)

$$f(x) = \ln(x - 2) \text{ και } g(x) = \ln(x + 2)$$

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης,  $f^{-1}$  της  $f$ . (6 μον.)
- β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f^{-1}$  και στη συνέχεια τη συνάρτηση  $f$  στο ίδιο σύστημα αξόνων σημειώνοντας τα σημεία τομής της κάθε γραφικής παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. (3 μον.)
- γ) Να ορίσετε την συνάρτηση  $f + g$  (τύπος και πεδίο ορισμού) (3 μον.)
- δ) Να λύσετε την εξίσωση  $(f + g)(x) = 0$  (3 μον.)

**Στο Δειγματικό Δοκίμιο περιλαμβάνονται ερωτήσεις/ασκήσεις απ' όλη την Διδακτέα ύλη όπως έχει καθοριστεί στα Πλαίσια Μάθησης. Η Εξεταστέα ύλη θα ανακοινωθεί σε μεταγενέστερο στάδιο.**

**ΤΕΛΟΣ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ**