ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Νικόλας Γιασουμής

Λευκωσία, Σεπτέμβριος 2017

Άσκηση A01

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{x^2-1}$$

Προτεινόμενη Λύση
Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\ln(2-x)=\ln 1=0 \quad \textit{και} \quad \lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$$

Επομένως, ο υπολογισμός του ορίου καταλήγει στην απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$.
Εφαρμόζουμε τον κανόνα του De L′ Hospital και παίρνουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{-1}{2-x}}{2x}=-\frac{1}{2}$$

Σχόλια

- Απουσία του υπολογισμού των επιμέρους ορίων (αριθμητή και παρονομαστή).
- Εμφάνιση του:
$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{x^2-1}=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}$$
- Λανθασμένος υπολογισμός της παραγώγου του αριθμητή. Κλασσικότερο παράδειγμα το:
$$(\ln(2-x))'=\frac{1}{2-x}$$
- Εφαρμογή του κανόνα του De L' Hospital, χωρίς να γίνεται κανένας έλεγχος των προϋποθέσεων που να επιτρέπουν κάτι τέτοιο.

Άσκηση Α02

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int \left(e^{3x} + \sqrt[3]{x} - 7\right) dx$$

Προτεινόμενη Λύση
Είναι:

$$\begin{aligned}
\int \left(e^{3x} + \sqrt[3]{x} - 7\right) dx &= \int \left(e^{3x} + x^{\frac{1}{3}} - 7\right) dx \\
&= \frac{e^{3x}}{3} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - 7x + c \\
&= \frac{e^{3x}}{3} + \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{x^4} - 7x + c
\end{aligned}$$

Σχόλια

- Αδυναμία μετατροπής του όρου $\sqrt[3]{x}$ σε $x^{\frac{1}{3}}$.
- Εμφάνιση στις απαντήσεις όρων, όπως για παράδειγμα:

$$e^{3x}, \quad 3e^{3x}, \quad \frac{e^{4x}}{4}, \quad \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}, \quad \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

- Αρκετοί εξεταζόμενοι δεν βρίσκουν όλους τους όρους του ολοκληρώματος.
- Απουσία στις απαντήσεις της σταθεράς c.

Άσκηση Α03

Δίνεται ο 2×2 πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(α) Να υπολογίσετε τον αντίστροφο πίνακα του A.

(β) Να δείξετε ότι $A^{-1} - A = 4I$, όπου I ο 2×2 μοναδιαίος πίνακας.

Προτεινόμενη Λύση

(α) Είναι:

$$|A| = (-3)(-1) - 4 \cdot 1 = 3 - 4 = -1$$

Αφού $|A| = -1 \neq 0$, τότε ο αντίστροφος του πίνακα A υπάρχει. Συνεπώς:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(β) Είναι:

$$A^{-1} - A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4I$$

Σχόλια

Για το **(α)** ερώτημα:

- Λανθασμένος υπολογισμός της ορίζουσας $|A|$.
- Λανθασμένη εφαρμογή του τύπου εύρεσης του αντίστροφου πίνακα A^{-1}.

Για το **(β)** ερώτημα:

- Λάθη στις πράξεις.

Άσκηση Α04

Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης με

$$P(A) = \frac{3}{10}, \quad P\left(A \cap B'\right) = \frac{1}{5} \quad \text{και} \quad P(A \cup B) = \frac{4}{5},$$

να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

(α) $P(A \cap B)$

(β) $P(A \mid B)$

Προτεινόμενη Λύση

(α) Είναι:

$$P\left(A\cap B'\right)=P(A)-P\left(A\cap B\right)\Rightarrow \frac{1}{5}=\frac{3}{10}-P\left(A\cap B\right)$$
$$\Rightarrow P\left(A\cap B\right)=\frac{3}{10}-\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$$

(β) Είναι:

$$P\left(A\cup B\right)=P(A)+P(B)-P\left(A\cap B\right)\Rightarrow \frac{4}{5}=\frac{3}{10}+P(B)-\frac{1}{10}$$
$$\Rightarrow P(B)=\frac{4}{5}+\frac{1}{10}-\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$$

Επομένως:

$$P\left(A\mid B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{6}$$

Σχόλια

- Άγνοια των αντίστοιχων τύπων.
- Λάθη στις πράξεις.

Άσκηση Α05

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = e^{ax} + (a-2)x, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

όπου a θετικός πραγματικός αριθμός.

(α) Να βρείτε την τιμή του a, για την οποία η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$.

(β) Να προσδιορίσετε το είδος του ακρότατου και να το υπολογίσετε.

Προτεινόμενη Λύση

(α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = ae^{ax} + a - 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για $x_0 = 0$. Επομένως, έχουμε:

$$f'(0) = 2a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

(β) Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f''(x) = a^2 e^{ax}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε $f''(0) = a^2 = 1 > 0$. Επομένως, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$.

Εναλλακτικά για το **(β)**, κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας για την f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Ο.Ε. $f(0) = 1$	$\nearrow$	

Επομένως, παρατηρούμε ότι αν $a = 1$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$.

Σχόλια

- Λάθη στην εύρεση των τύπων των f' και f''.
- Άγνοια του θεωρήματος Fermat.
- Λανθασμένος πίνακας μονοτονίας. Ειδικότερα, κατασκευάζουν τον πίνακα χωρίς να ελέγχουν το πρόσημο της f' και τοποθετούν στη θέση εμφάνισης του τοπικού ακρότατου το 1 (επειδή $a = 1$).
- Λανθασμένος υπολογισμός του $f(0)$.
- Η συντριπτική πλειοψηφία των εξεταζόμενων αντιμετωπίζει το ερώτημα **(β)** κατασκευάζοντας πίνακα μονοτονίας για τη συνάρτηση f.

Άσκηση Α06

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6\lambda x - 8\lambda y = 0$, όπου λ μη μηδενικός πραγματικός αριθμός.

(α) Να δείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του $\lambda, \lambda \neq 0$. Ακολούθως, συναρτήσει του λ, να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας του κύκλου.

(β) Να δείξετε ότι οι κύκλοι που ορίζονται από την πιο πάνω εξίσωση εφάπτονται στην ευθεία με εξίσωση $3x + 4y = 0$.

Προτεινόμενη Λύση

(α) Είναι:

$$x^2+y^2-6\lambda x-8\lambda y=0 \Rightarrow (x-3\lambda)^2-9\lambda^2+(y-4\lambda)^2-16\lambda^2=0$$
$$\Rightarrow (x-3\lambda)^2+(y-4\lambda)^2=25\lambda^2 \qquad (1)$$

Επομένως, η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(3\lambda, 4\lambda)$ και ακτίνα $R=5|\lambda|$, αφού $\lambda \neq 0$.
Εναλλακτικά για το **(α)**, έχουμε $g=-3\lambda, f=-4\lambda$ και $c=0$.
Άρα:

$$g^2+f^2-c=(-3\lambda)^2+(-4\lambda)^2=25\lambda^2>0, \text{ για κάθε } \lambda\neq 0$$

Επομένως, η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(3\lambda, 4\lambda)$ και ακτίνα $R=5|\lambda|$, αφού $\lambda \neq 0$.

(β) Η απόσταση του κέντρου K του κύκλου από την ευθεία με εξίσωση $3x + 4y = 0$ είναι:

$$d = \frac{|3(3\lambda) + 4(4\lambda)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|25\lambda|}{5} = 5|\lambda|$$

Αφού $d = R = 5|\lambda|$, οι κύκλοι που ορίζονται από την πιο πάνω εξίσωση εφάπτονται στην ευθεία με εξίσωση $3x + 4y = 0$.

Σχόλια

Για το **(α)** ερώτημα:

- Απουσία απόδειξης για το κατά πόσο η δοσμένη εξίσωση παριστάνει κύκλο.
- Λανθασμένη απόδειξη για το κατά πόσο η δοσμένη εξίσωση παριστάνει κύκλο.
- Λανθασμένη εύρεση των στοιχείων του κύκλου. (Καθολική απουσία της απολύτου τιμής από την ακτίνα.)

Για το **(β)** ερώτημα:

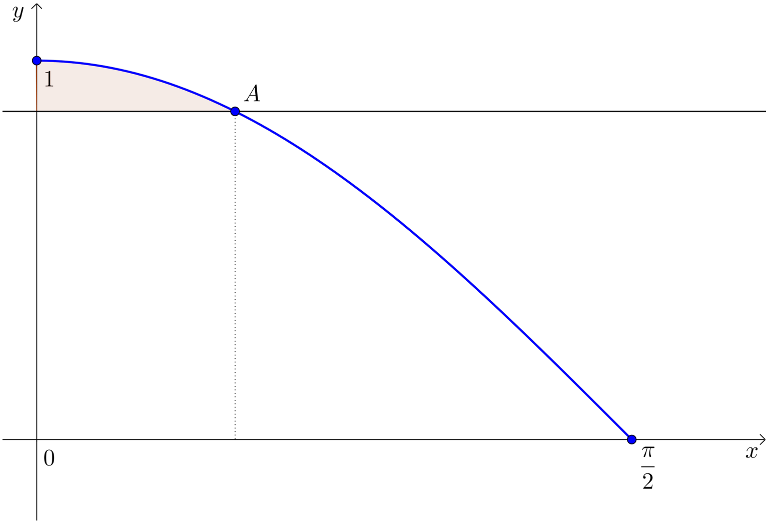
- Αρκετοί εξεταζόμενοι καταλήγουν είτε στη δευτεροβάθμια εξίσωση $25x^2 = 0$ είτε στη $25y^2 = 0$ και «μένουν» εκεί ή προχωρούν στον υπολογισμό της διακρίνουσάς της. (Η πλειοψηφία ακολουθεί τη συγκεκριμένη πορεία.)
- Καθολική απουσία της απολύτου τιμής στην απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία με εξίσωση $3x + 4y = 0$.

Άσκηση Α07

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = συνx$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, την ευθεία με εξίσωση $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και τον άξονα των τεταγμένων.

Προτεινόμενη Λύση

Το ζητούμενο χωρίο φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Για την τετμημένη του σημείου A, έχουμε:

$$\text{συν}x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6},\ \text{αφού } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Έχουμε:

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\text{συν}^2 x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1 + \text{συν}2x}{2} - \frac{3}{4} \right) dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\text{συν}2x}{2} - \frac{1}{4} \right) dx = \pi \left[\frac{\text{ημ}2x}{4} - \frac{x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \pi \left(\frac{\text{ημ}\frac{\pi}{3}}{4} - \frac{\pi}{24} \right) = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{24} \right) = \frac{\pi}{24} \left(3\sqrt{3} - \pi \right)\ \text{κυβ. μον.}$$

Σχόλια

- Αρκετοί εξεταζόμενοι σκιάζουν το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = συνx$, τον άξονα των τεταγμένων, τον άξονα των τετμημένων και την ευθεία με εξίσωση $x = \frac{\pi}{6}$.
- Δυσκολία στην εύρεση της τετμημένης του σημείου A.
- Άγνοια της έννοιας των λέξεων «τετμημένη», «τεταγμένη».
- Λανθασμένη εφαρμογή του τύπου εύρεσης του ζητούμενου όγκου.
- Δυσκολία στην ολοκλήρωση του $συν^2 x$.
- Λάθη στις πράξεις.

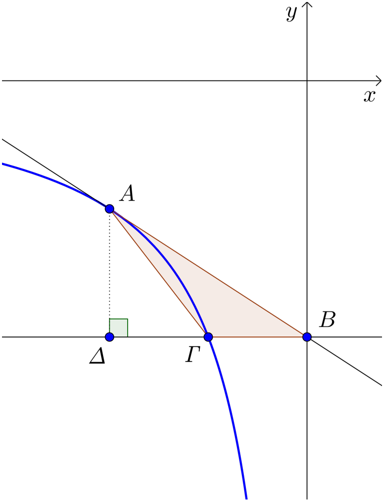
Άσκηση Α08

Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $xy = 4$. Η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο της $A\left(2\rho, \frac{2}{\rho}\right)$, $\rho < 0$, τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο B. Στο B φέρουμε κάθετη στον άξονα των τεταγμένων, η οποία τέμνει την υπερβολή στο σημείο $\Gamma\left(2t, \frac{2}{t}\right)$. Να δείξετε ότι:

(α) $\rho = 2t$

(β) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερό

Προτεινόμενη Λύση
Κατασκευάζουμε το σχήμα.



(α) Είναι:

$$xy = 4 \Rightarrow y + x \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

Η κλίση της εφαπτομένης (ε) της υπερβολής στο σημείο της A είναι:

$$\lambda_{(\varepsilon)} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_A = -\frac{1}{\rho^2}$$

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της υπερβολής στο σημείο της A είναι:

$$y - \frac{2}{\rho} = -\frac{1}{\rho^2}(x - 2\rho)$$

Η (ε) τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $B\left(0, \frac{4}{\rho}\right)$ και ισχύει $y_B = y_\Gamma$. Επομένως:

$$\frac{4}{\rho} = \frac{2}{t} \Rightarrow \rho = 2t$$

(β) Από το **(α)**, έχουμε $\Gamma\left(\rho, \frac{4}{\rho}\right)$. Επομένως:

$$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & \frac{4}{\rho} & 1 \\ 2\rho & \frac{2}{\rho} & 1 \\ \rho & \frac{4}{\rho} & 1 \end{vmatrix}\right| = 1 \text{ τετραγωνική μονάδα}$$

Εναλλακτικά για το **(β)**, έχουμε:

$$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}|A\Delta||B\Gamma| = \frac{1}{2}\left|\frac{2}{\rho} - \frac{4}{\rho}\right| |\rho| = 1 \text{ τετραγωνική μονάδα}$$

Σχόλια

Για το **(α)** ερώτημα:

- Λανθασμένο σχήμα. (Δεν δίνεται η απαιτούμενη σημασία στη συνθήκη $\rho < 0$.)
- Δυσκολία στην εύρεση των συντεταγμένων του σημείου B.
- Αρκετοί εξεταζόμενοι βρίσκουν την εξίσωση της κάθετης της $xy = 4$ στο σημείο της A και υπολογίζουν τις συντεταγμένες του σημείου τομής της με τον άλλο «κλάδο» της $xy = 4$.

Για το **(β)** ερώτημα:

- Λανθασμένοι υπολογισμοί στην ορίζουσα.
- Απουσία της απολύτου τιμής στην εύρεση του μήκους των $A\Delta$ και $B\Gamma$.

Άσκηση Α09

Το Κέντρο Εξυπηρέτησης του Πολίτη θέλει να αλλάξει τον τηλεφωνικό αριθμό επικοινωνίας του με το κοινό. Χρειάζεται έναν οκταψήφιο αριθμό, ο οποίος να σχηματίζεται το πολύ από δύο διαφορετικά ψηφία. Αν ο αριθμός αρχίζει με 77, πόσοι τέτοιοι διαφορετικοί αριθμοί υπάρχουν;

Προτεινόμενη Λύση

Χωρίζουμε το πρόβλημα σε δύο περιπτώσεις, δηλαδή μελετούμε τις περιπτώσεις στις οποίες θα χρησιμοποιηθεί μόνο ένα ψηφίο ή δύο διαφορετικά ψηφία.

- Στην πρώτη περίπτωση θα χρησιμοποιηθεί μόνο το ψηφίο 7, αφού ο αριθμός πρέπει να αρχίζει από 77. Ο μόνος αριθμός που ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος είναι ο 77777777.
- Στη δεύτερη περίπτωση θα χρησιμοποιηθούν τα ψηφία 7 και x, όπου $x \neq 7$. Μετά από τις δύο πρώτες θέσεις, οι οποίες είναι συμπληρωμένες με το ψηφίο 7, υπάρχουν 6 θέσεις κενές, στις οποίες μπορούμε να τοποθετήσουμε είτε το ψηφίο 7 είτε το ψηφίο x. Αυτό μπορεί να γίνει με $2^6 - 1 = 63$ τρόπους. (Αφαιρούμε την περίπτωση στην οποία τοποθετείται σε όλες τις θέσεις το ψηφίο 7.).
  Τώρα, το ψηφίο x μπορεί να πάρει 9 τιμές, τις $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$. Συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε $63 \cdot 9 = 567$ τέτοιους διαφορετικούς αριθμούς.

Τελικά, έχουμε $567 + 1 = 568$ αριθμούς που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος.

Εναλλακτικά για το $2^6 - 1$:

i. Θέλουμε να συμπληρώσουμε 6 θέσεις με τα ψηφία 7 και $x, x \neq 7$. Σε αυτές τις θέσεις θα υπάρχει τουλάχιστον ένα x. Τώρα, επιλέγουμε τις θέσεις στις οποίες θα τοποθετηθούν τα x και οι υπόλοιπες θέσεις συμπληρώνονται αυτόματα με 7αρια (αν υπάρχουν) ως εξής:

$$\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6} = 6+15+20+15+6+1 = 63$$

ii. Έχουμε γραμμικές μεταθέσεις 6 αντικειμένων (ψηφία 7 και $x, x \neq 7$), στα οποία υπάρχει τουλάχιστον ένα x ως εξής:

$$\frac{6!}{5!}+\frac{6!}{2!4!}+\frac{6!}{3!3!}+\frac{6!}{4!2!}+\frac{6!}{5!}+\frac{6!}{6!} = 6+15+20+15+6+1 = 63$$

Σχόλια

- Αρκετοί εξεταζόμενοι δυσκολεύτηκαν να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα.
- Εύρεση μόνο του αριθμού 77777777.
- Υπολογισμός του 2^6, χωρίς την αφαίρεση της μονάδας.
- Οι τιμές που μπορούσε να πάρει το ψηφίο x μετρήθηκαν να είναι 8. (Παράλειψη του ψηφίου 0.)

Άσκηση Α10

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, \pi) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + \ln(1 + \text{συν}x) - \ln 2, \ \forall x \in [0, \pi)$$

(α) Να δείξετε ότι η παράγωγος f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi)$ και να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

(β) Να δείξετε ότι:

$$x^2 + \ln(1 + \text{συν}x)^4 < \ln 16, \ \forall x \in (0, \pi)$$

Προτεινόμενη Λύση

(α) Για να δείξουμε ότι η παράγωγος f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi)$, αρκεί να δείξουμε ότι η f'' είναι αρνητική στο $(0,\pi)$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi)$ με:

$$f'(x)=\frac{2x}{4}+\frac{-\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{x}{2}-\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x},\ \forall x\in[0,\pi)$$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi)$ με:

$$\begin{aligned}
f''(x)&=\frac{1}{2}-\frac{\sigma\upsilon\nu x(1+\sigma\upsilon\nu x)-(-\eta\mu x)(\eta\mu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}\\
&=\frac{1}{2}-\frac{\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}=\frac{1}{2}-\frac{\sigma\upsilon\nu x+1}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}=-\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2(1+\sigma\upsilon\nu x)}\\
&=-\frac{1}{2}\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)\leqslant 0,\ \forall x\in[0,\pi)
\end{aligned}$$

Ειδικότερα, έχουμε

$$f''(x) < 0, \ \forall x \in (0, \pi),$$

με την ισότητα να λαμβάνεται μόνο για $x = 0$.
Επομένως, η παράγωγος f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi)$.
Επιπλέον, έχουμε:

$$f'(x) < f'(0), \ \forall x \in (0, \pi) \Rightarrow f'(x) < 0, \ \forall x \in (0, \pi) \ \ \textit{και} \ \ f'(0) = 0$$

Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi)$.

(β) Από το **(α)** ερώτημα, έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi) \subset [0, \pi)$. Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) < f(0), \ \forall x \in (0, \pi) &\Rightarrow f(x) < 0 \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{4} + \ln(1 + \sigma\upsilon\nu x) - \ln 2 < 0 \\ &\Rightarrow x^2 + 4\ln(1 + \sigma\upsilon\nu x) - 4\ln 2 < 0 \\ &\Rightarrow x^2 + \ln(1 + \sigma\upsilon\nu x)^4 < \ln 16, \ \forall x \in (0, \pi) \end{aligned}$$

Σχόλια

- Η πλειοψηφία των εξεταζόμενων βρίσκει τον τύπο της f' και στη συνέχεια αδυνατεί να προχωρήσει παρακάτω.
- Δυσκολία στην εύρεση του τύπου της f''.
- Εξαγωγή αυθαίρετων συμπερασμάτων, όπως για παράδειγμα:
  - Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi)$.
  - Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi)$.
  - $f'(x) < 0,\ \forall x \in [0,\pi) \Rightarrow f(x) < 0,\ \forall x \in [0,\pi)$
- Ορθή χρήση του δεύτερου «αυθαίρετου» συμπεράσματος για την απόδειξη του ερωτήματος **(β)**.

Άσκηση B01

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασής της, αν υπάρχουν, και να την παραστήσετε γραφικά.

Προτεινόμενη Λύση

Πεδίο Ορισμού: $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

Σημείο τομής με τους άξονες των συντεταγμένων: $O(0,0)$

Μονοτονία-Ακρότατα: Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{-1\}$, με:

$$f'(x) = \frac{4(x+1)^2 - 8x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{4(1-x)}{(x+1)^3}$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\nearrow$	Τ.Μ. $f(1) = 1$	$\searrow$	

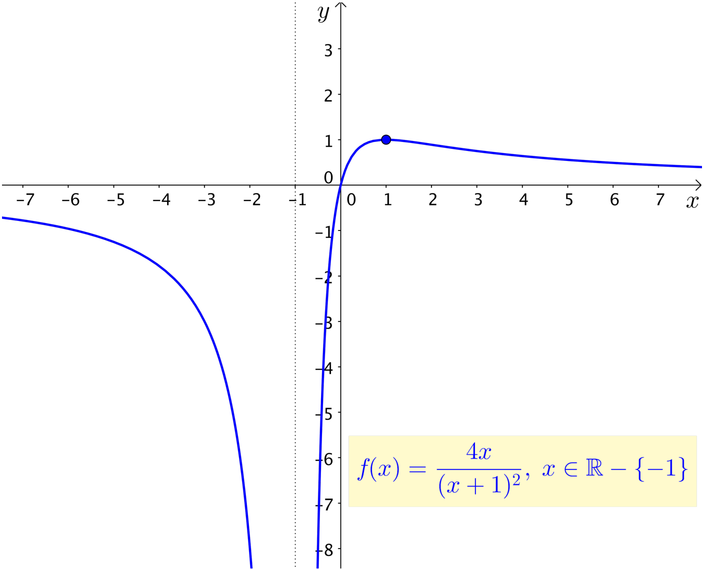
Η f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1), [1, +\infty)$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, 1]$

Ασύμπτωτες:

- Είναι:
$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$$
Άρα, η ευθεία $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.
- Είναι:
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \overset{\left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{2x} = 0$$
Άρα, η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Γραφική παράσταση της f:



$$f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}, \ x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

Σχόλια

- Λανθασμένο πεδίο ορισμού.
- Λανθασμένος τύπος για την f'.
- Λανθασμένος πίνακας μονοτονίας.
- Λάθη στους υπολογισμούς των ορίων για την εύρεση των ασύμπτωτων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.
- Άλλα λάθη, όπως για παράδειγμα:
  - Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$.
  - $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$
- Λανθασμένη χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Άσκηση Β02

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 9y$ και το σημείο $A(3, -3)$. Από το A φέρουμε τις εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) προς την παραβολή.

(α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2).

Προτεινόμενη Λύση

(α) Έστω $B(x_0, y_0)$ το σημείο επαφής μίας εφαπτομένης με την παραβολή. Έχουμε:

$$x^2 = 9y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{9}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο B είναι:

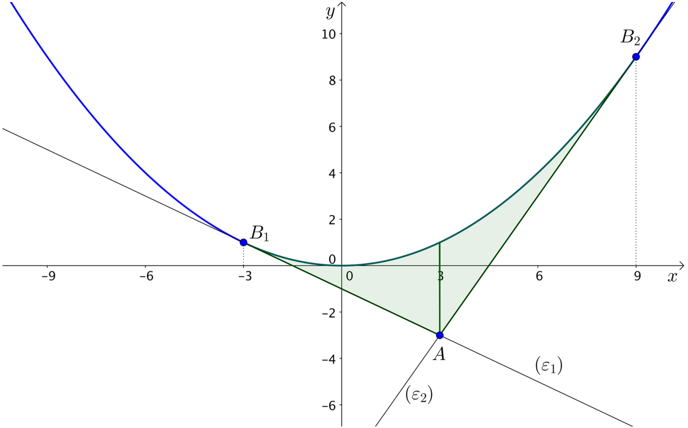
$$y - y_0 = \frac{2x_0}{9}(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{x_0^2}{9} = \frac{2x_0}{9}(x - x_0)$$

Αφού η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(-3, 3)$, έπεται ότι:

$$\begin{aligned} -3 - \frac{x_0^2}{9} = \frac{2x_0}{9}(3 - x_0) &\Rightarrow -27 - x_0^2 = 6x_0 - 2x_0^2 \\ &\Rightarrow x_0^2 - 6x_0 - 27 = 0 \\ &\Rightarrow (x_0 - 9)(x_0 + 3) = 0 \Rightarrow x_0 = 9, x_0 = -3 \end{aligned}$$

Έτσι, οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι οι $(\varepsilon_1): 2x+3y+3=0$ με σημείο επαφής το $B_1(-3,1)$ και $(\varepsilon_2): 2x-y-9=0$ με σημείο επαφής το $B_2(9,9)$.

(β) Χωρίζουμε το δοσμένο χωρίο με την ευθεία $x=3$ σε δύο μέρη.



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$
\begin{aligned}
E &= \int_{-3}^{3} \left(\frac{x^2}{9} + \frac{2x+3}{3} \right) dx + \int_{3}^{9} \left(\frac{x^2}{9} - (2x-9) \right) dx \\
&= \left[\frac{x^3}{27} + \frac{(2x+3)^2}{12} \right]_{-3}^{3} + \left[\frac{x^3}{27} - \frac{(2x-9)^2}{4} \right]_{3}^{9} \\
&= \left(1 + \frac{27}{4} \right) - \left(-1 + \frac{3}{4} \right) + \left(27 - \frac{81}{4} \right) - \left(1 - \frac{9}{4} \right) = 16 \quad \text{τ. μ.}
\end{aligned}
$$

Σχόλια

Για το **(α)** ερώτημα:

- Λανθασμένη γραφική παράσταση. (Χάραξη της $y^2 = 9x$.)
- Η συντριπτική πλειοψηφία των εξεταζόμενων θέτει τις (ε_1) και (ε_2) με την γενική εξίσωση ευθείας $y = \lambda x + \beta$, τις συνδέει με την εξίσωση της παραβολής και θέτει την διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης που προκύπτει ίση με μηδέν.

Για το **(β)** ερώτημα:

- Αδυναμία υπολογισμού - λανθασμένος υπολογισμός των συντεταγμένων των σημείων επαφής B_1 και B_2 των ευθειών (ε_1) και (ε_2) με την παραβολή.
- Αδυναμία έκφρασης του ζητούμενου εμβαδού με τη βοήθεια ορισμένων ολοκληρωμάτων.
- Λανθασμένοι υπολογισμοί των αντίστοιχων ορισμένων ολοκληρωμάτων.
- Προσπάθεια εύρεσης του εμβαδού του τριγώνου $\triangle AB_1B_2$.

Άσκηση B03

Δύο ομάδες, οι A και B, συμμετέχουν στη σειρά των τελικών του πρωταθλήματος πετοσφαίρισης. Νικήτρια της σειράς των τελικών είναι η ομάδα που θα πετύχει πρώτη 4 νίκες. Η πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα A έναν οποιονδήποτε αγώνα της σειράς των τελικών είναι $\frac{2}{3}$.

(α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου στη σειρά των τελικών να διεξαχθούν 6 αγώνες για να στεφθεί πρωταθλήτρια μία ομάδα.

(β) Δεδομένου ότι έχουν διεξαχθεί 6 αγώνες για να στεφθεί πρωταθλήτρια μία ομάδα, να υπολογίσετε την πιθανότητα η ομάδα αυτή να είναι η A.

(Σημείωση: Σε έναν αγώνα πετοσφαίρισης δεν υπάρχει το αποτέλεσμα της ισοπαλίας, δηλαδή υπάρχει πάντα νικητής.)

Προτεινόμενη Λύση
Ονομάζουμε:

A : «Στη σειρά των τελικών διεξήχθησαν 6 αγώνες.»
B : «Η ομάδα A στέφεται πρωταθλήτρια.»

(α) Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(A)$.
Συμβολίζουμε με A_i, B_i τη νίκη στον i-αγώνα της ομάδας A, B, αντίστοιχα, όπου $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Τα $A_i, B_j, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ είναι ανεξάρτητα ανά δύο μεταξύ τους.

- Νίκη της ομάδας A με σκορ $4-2$:
  Η ομάδα A κερδίζει $4-2$, όπως φαίνεται πιο κάτω:

$$\star, \star, \star, \star, \star, A_6$$

  Στα 5 αστέρια «κρύβονται» 3 νίκες της ομάδας A και 2 νίκες της ομάδας B. Αυτό μπορεί να συμβεί με $\binom{5}{3} = 10$ τρόπους.
  (Επιλέγουμε τους αγώνες που κερδίζει η ομάδα A, άρα αυτόματα οι υπόλοιποι αντιστοιχούν στην ομάδα B.)
  Έτσι:

$$P(\text{Νίκη } A \text{ με } 4-2) = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{160}{729}$$

- Νίκη της ομάδας B με $4-2$:
  Ομοίως, η ομάδα B κερδίζει $4-2$, όπως φαίνεται πιο κάτω:

$$\star, \star, \star, \star, \star, B_6$$

  Στα 5 αστέρια «κρύβονται» 3 νίκες της ομάδας B και 2 νίκες της ομάδας A. Αυτό μπορεί να συμβεί με $\binom{5}{3} = 10$ τρόπους.
  (Επιλέγουμε τους αγώνες που κερδίζει η ομάδα B, άρα αυτόματα οι υπόλοιποι αντιστοιχούν στην ομάδα A.)

Έτσι:

$$P(\text{Νίκη } B \text{ με } 4-2) = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{40}{729}$$

Έχουμε, δηλαδή, ότι:

$$P(A) = \frac{200}{729}$$

(β) Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(B \mid A)$.Έχουμε:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{160}{729}}{\frac{200}{729}} = \frac{4}{5}$$

Σχόλια

Για το **(α)** ερώτημα:

- Δεν δίνεται η απαραίτητη σημασία στην ανεξαρτησία των ενδεχομένων A_i, B_j.
- Δεν «σταθεροποιείται» η νίκη των A, B στον τελευταίο αγώνα, όταν οι A, B στέφονται πρωταθλήτριες με σκορ $4-2$, αντίστοιχα.
- Δεν γίνεται σωστή «κατανομή» στις νίκες των ομάδων A, B στους πρώτους 5 αγώνες της σειράς των τελικών.

Για το **(β)** ερώτημα:

- Άγνοια - Λανθασμένη εφαρμογή του τύπου $P(B \mid A)$.

Άσκηση B04

Δίνεται το σημείο $E(4,0)$ και η ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon) : x = \frac{25}{4}$.

(α) Να δείξετε ότι το σύνολο των σημείων $T(x, y)$ του επιπέδου με την ιδιότητα

$$\frac{(TE)}{(TN)} = \frac{4}{5},$$

όπου TN είναι η απόσταση του σημείου T από την ευθεία (ε), ανήκει στην έλλειψη με εξίσωση:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(β) Έστω $T(5συνθ, 3ημθ)$ ένα τυχαίο σημείο της έλλειψης και $Λ\left(\frac{8}{5}, 0\right)$ ένα σταθερό σημείο. Να υπολογίσετε τις τιμές του $θ, θ \in [0, 2π)$, για τις οποίες η απόσταση $TΛ$ γίνεται ελάχιστη.

Προτεινόμενη Λύση

(α) Είναι:

$$\frac{(TE)}{(TN)} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}{\left|x-\frac{25}{4}\right|} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow 25\left((x-4)^2+y^2\right) = 16\left(x-\frac{25}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow 9x^2+25y^2 = 225 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1$$

(β) Είναι:

$$T\Lambda = D(\theta) = \sqrt{\left(5\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{8}{5}\right)^2 + 9\eta\mu^2\theta}$$

$$= \sqrt{16\sigma\upsilon\nu^2\theta - 16\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{289}{25}}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

Η συνάρτηση D είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2\pi)$ με:

$$D'(\theta) = \frac{-32\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta + 16\eta\mu\theta}{2\sqrt{16\sigma\upsilon\nu^2\theta - 16\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{289}{25}}}$$

Έχουμε:

$$D'(\theta) = 0 \Rightarrow \eta\mu\theta(1 - 2\sigma\upsilon\nu\theta) = 0 \Rightarrow \eta\mu\theta = 0 \;\; \acute{\eta} \;\; \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$$

θ	0		$\pi/3$		π		$5\pi/3$		2π
$D'(\theta)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$D(\theta)$	T.M.	$\searrow$	O.E.	$\nearrow$	O.M.	$\searrow$	O.E.	$\nearrow$	

Επομένως, η απόσταση γίνεται ελάχιστη, όταν $\theta = \frac{\pi}{3}$ ή $\theta = \frac{5\pi}{3}$.

Εναλλακτικά, για το **(β)** ερώτημα έχουμε:
Η συνάρτηση D παίρνει την ελάχιστη τιμή της, όταν η υπόριζη ποσότητα πάρει την ελάχιστη τιμή της.
(Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x},\ x\geqslant 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.)
Είναι:

$$16\sigma\upsilon\nu^2\theta - 16\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{289}{25} = (4\sigma\upsilon\nu\theta - 2)^2 + \frac{189}{25},\ \ \theta \in [0, 2\pi)$$

Επομένως:

$$4\sigma\upsilon\nu\theta - 2 = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}\ \ \text{ή}\ \ \theta = \frac{5\pi}{3}$$

Σχόλια

Για το **(α)** ερώτημα:

- Αδυναμία εύρεσης των αποστάσεων TE, TN.
- Αρκετοί εξεταζόμενοι θεώρησαν δεδομένη την έλλειψη και υπολόγισαν τα στοιχεία της.

Για το **(β)** ερώτημα:

- Αδυναμία εύρεσης του τύπου της συνάρτησης D.
- Λανθασμένοι υπολογισμοί για την εύρεση του τύπου της συνάρτησης D'.
- Λανθασμένη επίλυση - Εύρεση μερικών λύσεων της εξίσωσης $D'(\theta) = 0$.
- Λανθασμένος πίνακας μονοτονίας.

Άσκηση Β05

(α) Δίνεται συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο διάστημα $[0, \pi]$. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x = \pi - u$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:

$$\int_0^\pi x f(\eta\mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\eta\mu x) dx$$

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^\pi \frac{x \eta\mu x}{8 + \eta\mu^2 x} dx$$

Προτεινόμενη Λύση

(α) Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $x = \pi - y$. Έχουμε $dx = -dy$ και:

x	0	π
y	π	0

Επομένως:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x f(\text{ημ} x) dx &= -\int_\pi^0 (\pi - y) f\left(\text{ημ}(\pi - y)\right) dy \\ &= \int_0^\pi (\pi - x) f\left(\text{ημ} x\right) dx \\ &= \pi \int_0^\pi f\left(\text{ημ} x\right) dx + \int_0^\pi x f\left(\text{ημ} x\right) dx \qquad (1) \end{aligned}$$

Τέλος, από την (1) έπεται ότι:

$$2\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx = \pi\int_0^{\pi} f\left(\eta\mu x\right)dx$$
$$\Rightarrow \int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f\left(\eta\mu x\right)dx$$

(β) Ορίζουμε τη συνεχή συνάρτηση f στο $[0, \pi]$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x}{8+x^2}$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του **(α)** ερωτήματος, παίρνουμε:

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu x}{8+\eta\mu^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu x}{9-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx \tag{2}$$

Θέτουμε συν$x = t$. Έχουμε $-$ημ$xdx = dt$ και:

x	0	π
t	1	-1

Επομένως, από την (2) έχουμε:

$$I = -\frac{\pi}{2}\int_{1}^{-1}\frac{1}{9-t^2}dt = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{9-t^2}dt \tag{3}$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$J = \int \frac{1}{9-t^2}dt,$$

ακολουθούμε τα πιο κάτω βήματα:

$$\frac{1}{9-t^2} \equiv \frac{A}{3-t} + \frac{B}{3+t} \Rightarrow 1 \equiv A(3+t) + B(3-t)$$

- Αν $t = 3$, τότε $A = 1/6$.
- Αν $t = -3$, τότε $B = 1/6$.

Επομένως:

$$J = \frac{1}{6}\int \frac{1}{3-t}dt + \frac{1}{6}\int \frac{1}{3+t}dt = -\frac{1}{6}\ln|3-t| + \frac{1}{6}\ln|3+t| + c \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) παίρνουμε:

$$I = -\frac{\pi}{12}\left[\ln\left(\frac{3+\sigma\upsilon\nu x}{3-\sigma\upsilon\nu x}\right)\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi}{12}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln 2\right) = \frac{\pi \ln 2}{6}$$

Σχόλια

Για το **(α)** ερώτημα:

- Η συντριπτική πλειοψηφία των εξεταζόμενων χειρίζεται άνετα το ερώτημα.
- Μετά τη χρήση του μετασχηματισμού $x = \pi - y$, γράφουν μέσα στο ολοκλήρωμα I το $-dy$ χωρίς τη χρήση παρένθεσης.

Για το **(β)** ερώτημα:

- Αρκετοί εξεταζόμενοι «φτάνουν» μέχρι την σχέση (2) και μετά αδυνατούν να χρησιμοποιήσουν κάποια τεχνική - μετασχηματισμό για να προχωρήσουν.
- Όσοι «φτάνουν» στη σχέση (3) της προτεινόμενης λύσης, συχνά ολοκληρώνουν την άσκηση.