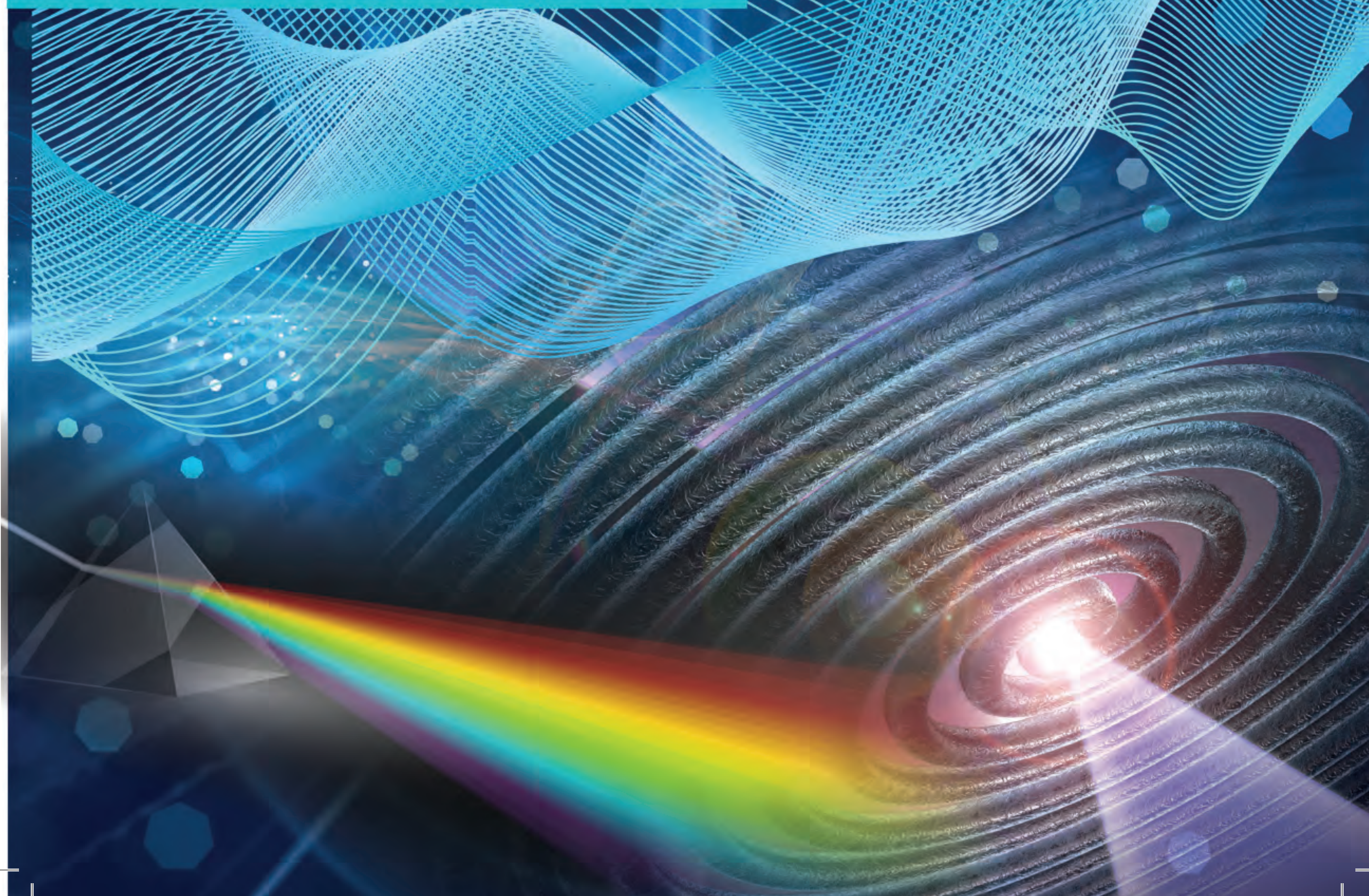
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ | ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

# ΦΥΣΙΚΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

## ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

# ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2



# ΦΥΣΙΚΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

# ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2


Συγγραφή: **Γεώργιος Αρχοντής**, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
**Φώτιος Πτωχός**, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
**Νικόλαος Τούμπας**, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
**Ζαχαρίας Ζαχαρία**, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
**Μιχάλης Ιωάννου**, Φυσικός, Εκπαιδευτικός Μέσης Εκπαίδευσης
**Ιωάννης Καρμιώτης**, Φυσικός, Εκπαιδευτικός Μέσης Εκπαίδευσης
**Σάββας Πολυδωρίδης**, Φυσικός, Εκπαιδευτικός Μέσης Εκπαίδευσης
**Δημήτριος Φιλίππου**, Φυσικός, Βοηθός Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης
**Παναγιώτης Ελευθερίου**, Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης Φυσικής
**Γιαννάκης Χατζηκωστής**, Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης Φυσικής

Επιμέλεια σχημάτων: **Αντώνης Τσάκωνας**, Φυσικός, Εκπαιδευτικός Μέσης Εκπαίδευσης



Σχεδιασμός έκδοσης: Έλενα Ηλιάδου, Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων
Επιμέλεια έκδοσης: Μαρίνα Άστρα-Ιωάννου, Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων
Συντονισμός έκδοσης: Χρίστος Παρπούνας, Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων

Α΄ Έκδοση 2019
Εκτύπωση: Printco Cassoulides Ltd





ISBN: 978-9963-54-209-3

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η διασφάλιση της ποιότητας ζωής στον αιώνα που διανύουμε, βασίζεται ολοένα και περισσότερο στην επιστημονική και τεχνολογική πρόοδο. Η απόκτηση εκπαίδευσης και δεξιοτήτων στην επιστήμη είναι απαραίτητη για την επίτευξη βιώσιμης ανάπτυξης και εδραίωσης της πραγματικής δημοκρατίας.

Με ιδιαίτερη χαρά προλογίζω την έκδοση του βιβλίου «Φυσική Γ΄ Λυκείου». Το βιβλίο αυτό γράφτηκε με τη σκέψη ότι εσείς, οι σημερινοί μαθητές και οι αυριανοί πολίτες, θα πρέπει να δομήσετε ένα συνεκτικό σώμα γνώσεων, να αναπτύξετε τις αναγκαίες δεξιότητες και ικανότητες για συμμετοχή σε μια κοινωνία ενεργών και κριτικά σκεπτόμενων ανθρώπων και να διαμορφώσετε θετικές στάσεις και συμπεριφορές έναντι της επιστήμης. Γι' αυτό τον λόγο σε αυτό το βιβλίο τα θέματα της Φυσικής συνδέονται με την καθημερινή ζωή, τη φύση και την εξέλιξη της επιστήμης.

Επιθυμώ να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους πανεπιστημιακούς Γεώργιο Αρχοντή, Ζαχαρία Ζαχαρία, Φώτιο Πτωχό, Νικόλαο Τούμπα, στους εκπαιδευτικούς Μιχάλη Ιωάννου, Ιωάννη Καρμιώτη, Σάββα Πολυδωρίδη και Δημήτριο Φιλίππου, και στους Επιθεωρητές Φυσικής Παναγιώτη Ελευθερίου και Γιαννάκη Χατζηκωστή, που ασχολήθηκαν με τη συγγραφή του βιβλίου.

Τέλος, ευχαριστώ την Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων που είχε την ευθύνη για την έκδοση του βιβλίου αυτού.

**Δρ Κυπριανός Λούης**
**Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης**

# ΛΙΓΑ ΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΝΕΟ ΒΙΒΛΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Αγαπητοί και αγαπητές μαθήτριες και μαθητές,

Σας καλωσορίζουμε στη νέα σχολική χρονιά, και σας ευχόμαστε, με αφετηρία αυτό το βιβλίο, να κάνετε ένα συναρπαστικό ταξίδι στον θαυμαστό κόσμο της Φυσικής.

Από τα βάθη της αρχαιότητας, οι άνθρωποι προσπαθούν να ερμηνεύσουν τα φαινόμενα του φυσικού κόσμου. Τον 6ο αιώνα π.Χ. οι αρχαίοι Έλληνες φυσικοί φιλόσοφοι της Ιωνίας βασίσθηκαν σε λογικά επιχειρήματα και διατύπωσαν τις πρώτες θεωρίες για την αρχή των όντων. Η σύγχρονη επιστημονική μεθοδολογία θεμελιώθηκε τον 17ο αιώνα από τον Γαλιλαίο (Galileo Galilei) και θέτει ως προϋπόθεση τη διεξαγωγή και ερμηνεία κατάλληλα σχεδιασμένων πειραμάτων. Σε συνδυασμό με την πειραματική μεθοδολογία, ο Γαλιλαίος τόνιζε ότι για την ερμηνεία των νόμων της Φύσης είναι απαραίτητη η χρήση των μαθηματικών ("το βιβλίο της Φύσης είναι γραμμένο με μαθηματικούς χαρακτήρες"). Τον ίδιο αιώνα, ο Ισαάκ Νεύτωνας διατύπωσε τους νόμους της κίνησης και τον νόμο της παγκόσμιας έλξης, στο φημισμένο έργο του *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

Οι σύγχρονες Φυσικές θεωρίες και πειράματα μελετούν και ερμηνεύουν σε μεγάλο βαθμό φαινόμενα που παρατηρούνται τόσο σε υποατομική, όσο και σε αστρονομική κλίμακα, από τη συμπεριφορά των στοιχειωδών σωματιδίων μέχρι τη δημιουργία αστέρων και την εξέλιξη του Σύμπαντος.

Σε συνδυασμό με την κατανόηση της συμπεριφοράς του Φυσικού κόσμου, η Φυσική έχει αναρίθμητες **πρακτικές εφαρμογές**. Η λειτουργία των συσκευών που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή ζωή για την παραγωγή φωτός, την παραγωγή και χρήση ηλεκτρικής ενέργειας, την απορρόφηση ηλιακής ενέργειας, την κίνηση, την επικοινωνία και την ψυχαγωγία, βασίζεται σε φυσικές αρχές.

Στα μέσα του 20ου αιώνα, ο φημισμένος Αυστριακός Φυσικός Erwin Schroedinger, διατύπωσε στο βιβλίο του "*What is Life*" την άποψη ότι η Φυσική μπορεί να συνεισφέρει και στην κατανόηση των φαινομένων που παρατηρούνται σε ζωντανούς οργανισμούς (**έμβια** ύλη). Η

αλματώδης ανάπτυξη όλων των Φυσικών Επιστημών, ιδιαίτερα από τις αρχές του εικοστού αιώνα, καθιστά δυνατή τη μελέτη και την ερμηνεία της συμπεριφοράς της έμβιας ύλης με μία **διεπιστημονική προσέγγιση**, στην οποία συνδυάζονται μέθοδοι από πολλές επιστημονικές περιοχές (Φυσική, Χημεία, Βιολογία, κλάδοι Μηχανικής). Πειραματικές συσκευές που βασίζονται σε φυσικές αρχές, όπως το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο, το μικροσκόπιο φθορισμού, το μικροσκόπιο ατομικής δύναμης και το σύγχροτρο προσφέρουν λεπτομερείς εικόνες της δομής του κυττάρου και των βιολογικών μορίων. Οι εικόνες αυτές, μαζί με θεωρητικά φυσικά μοντέλα για τη δομή και τις δυνάμεις μεταξύ μορίων, χρησιμοποιούνται στο στοχευμένο σχεδιασμό φαρμάκων. Ταυτόχρονα, η Φυσική συνεισφέρει ουσιαστικά σε πολλές διαγνωστικές και θεραπευτικές τεχνικές της σύγχρονης Ιατρικής, όπως η χρήση υπερήχων, ο πυρηνικός μαγνητικός συντονισμός (MRI), η τομογραφία ποζιτρονίου-ηλεκτρονίου (PET scan), η ακτινοβόληση καρκινικών όγκων.

Οι αλματώδεις εξελίξεις που περιγράψαμε υποδεικνύουν ότι η Φυσική είναι ένας εξαιρετικά υποσχόμενος τομέας απασχόλησης για τους νέους ανθρώπους, που θα συνεισφέρουν στην πρόοδο της ανθρωπότητας, παίρνοντας τη σκυτάλη από τους παλαιότερους.

Το βιβλίο που έχετε στα χέρια σας αποτελεί ένα περιεκτικό και πλήρες κείμενο αναφοράς, που συμβαδίζει πιστά με το Αναλυτικό Πρόγραμμα.

Κάθε κεφάλαιο περιλαμβάνει:

- Αρχική σύνοψη των διδακτικών στόχων,
- Ανάπτυξη της αντίστοιχης θεωρίας με συνδυασμό αναπαραστάσεων (κείμενο και εικόνες, διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις, πίνακες).
- Ερωτήσεις ελέγχου κατανόησης εννοιών
- Πολυάριθμα λυμένα παραδείγματα
- Τελικές ερωτήσεις ανακεφαλαίωσης και κατανόησης
- Άλυτες ασκήσεις.

Η **σύνοψη των διδακτικών στόχων** συνιστά έναν οδηγό για το τι πρέπει να γνωρίζετε με την ολοκλήρωση της μελέτης του κεφαλαίου. Οι συνοδευτικές αναπαραστάσεις (εικόνες, διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις, πίνακες) επεξηγούν πτυχές της θεωρίας και πρέπει να μελετώνται σε συνδυασμό με το γραπτό κείμενο.

Η **μελέτη των λυμένων παραδειγμάτων** είναι **απαραίτητη** προϋπόθεση για την κατανόηση της θεωρίας και πρέπει να προηγείται της επίλυσης των άλυτων ασκήσεων στο τέλος του βιβλίου. Ο στόχος των παραδειγμάτων είναι διπλός: **(1)** παρουσιάζουν τη μεθοδολογία επί-

λυσης μίας κατηγορίας προβλημάτων. **(2)** αναδεικνύουν λεπτομερώς τον τρόπο γραφής και τον χειρισμό μαθηματικών συμβόλων, εξισώσεων και μονάδων μέτρησης, που υιοθετείται στη διεθνή πρακτική.

Οι **ερωτήσεις ελέγχου κατανόησης** αναφέρονται σε επιλεγμένα σημεία του κειμένου, και αποσκοπούν στον έλεγχο της κατανόησης βασικών εννοιών. Εάν διαπιστώνετε έλλειψη κατανόησης, πρέπει να αφιερώνετε επιπλέον χρόνο πριν προχωρήσετε στα επόμενα σημεία του κειμένου.

Οι **τελικές ερωτήσεις κατανόησης** ελέγχουν την κατανόηση του συνολικού περιεχομένου του κεφαλαίου, και βοηθούν στην ανακεφαλαίωση. Σε περίπτωση που εντοπίζετε δυσκολίες, πρέπει να μελετήσετε ξανά το σχετικό περιεχόμενο και τα συνοδευτικά παραδείγματα.

Η **επίλυση προβλημάτων** είναι **απαραίτητο και αναντικατάστατο στοιχείο** της εκπαίδευσης στη Φυσική. Τόσο η Πειραματική, όσο και η Θεωρητική Φυσική έχουν σημαντική ποσοτική συνιστώσα. Μαζί με την ανάπτυξη ικανοτήτων διερεύνησης και διατύπωσης συμπερασμάτων, είναι απαραίτητη και η σταδιακή ωρίμανση σας στην ποσοτική επεξεργασία δεδομένων. Γι΄ αυτό το λόγο έχουμε συμπεριλάβει στο βιβλίο πολυάριθμα λυμένα παραδείγματα και ασκήσεις κλιμακούμενης δυσκολίας. Επίσης, είναι σημαντικό να γνωρίζετε ότι φροντίσαμε ώστε το κείμενο να βασίζεται στις ήδη αποκτηθείσες γνώσεις Μαθηματικών σας, χωρίς να τις υπερβαίνει.

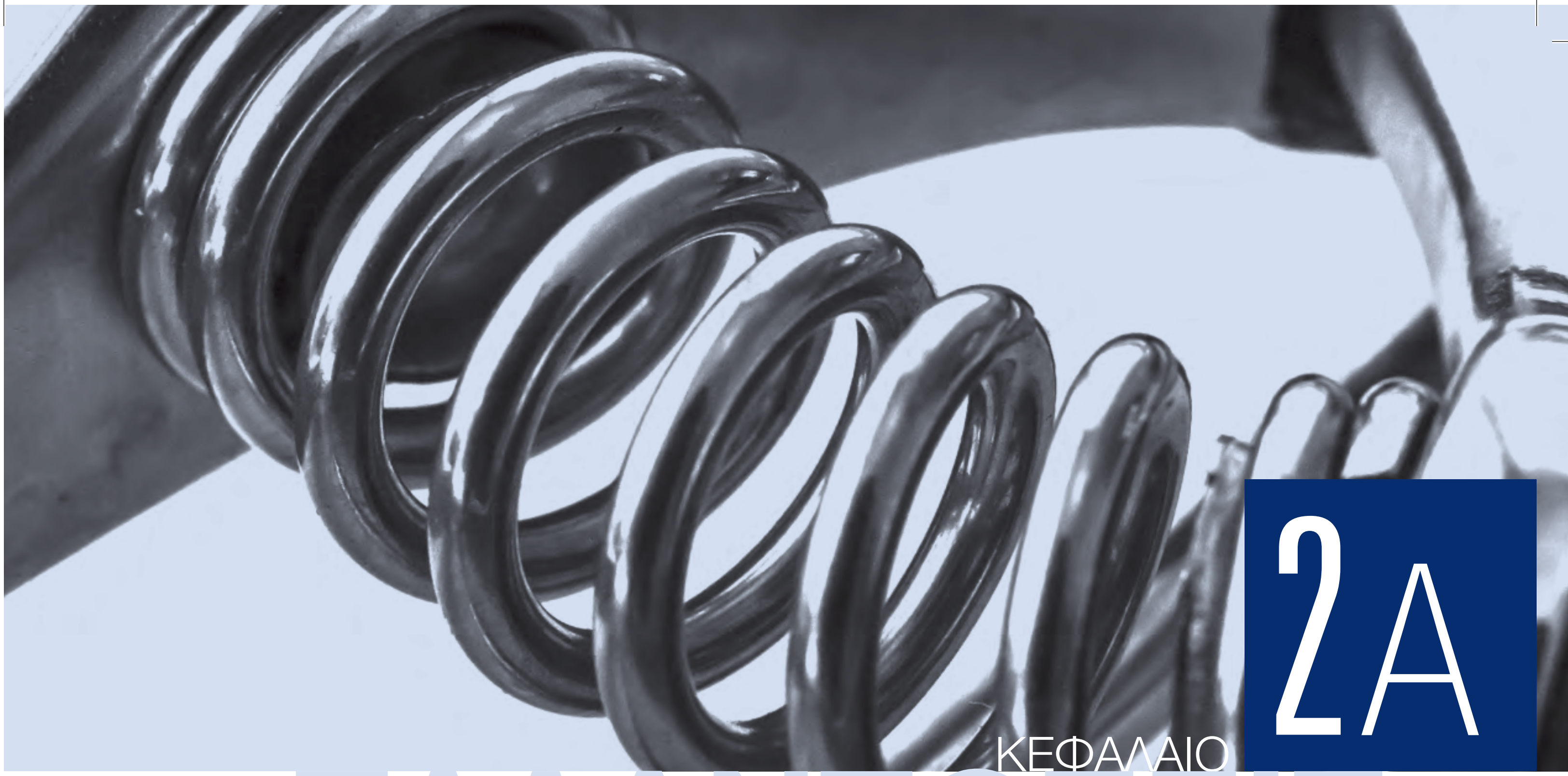
Για να επιτύχετε το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα, σας εισηγούμαστε όπως μελετάτε πρώτα το επιστημονικό περιεχόμενο μίας ενότητας, τα αντίστοιχα λυμένα παραδείγματα και τις ερωτήσεις ελέγχου κατανόησης εννοιών, πριν προχωρήσετε στο επόμενο μέρος. Στο τέλος, ασχοληθείτε με την επίλυση των άλυτων ασκήσεων. Οι άλυτες ασκήσεις βασίζονται στη θεωρία και τα λυμένα παραδείγματα. **Μην** προσπαθείτε να λύσετε τις ασκήσεις πριν συμβουλευτείτε το κείμενο, γιατί θα δυσκολευτείτε πολύ περισσότερο.

Το βιβλίο αποτελεί οδηγό μελέτης, αλλά το βασικό και αναντικατάστατο σημείο αναφοράς είναι ο/η εκπαιδευτικός σας. Πρέπει να δίνετε εξαιρετική προσοχή στις διαλέξεις, να συμμετέχετε ενεργά, και να συμβουλεύεστε εγκαίρως τον/την εκπαιδευτικό σας για σημεία στα οποία εντοπίζετε έλλειψη κατανόησης.

Ευχόμαστε να βρείτε το βιβλίο χρήσιμο, και σας ευχόμαστε **Καλή Νέα Σχολική Χρονιά**.

**Η Συγγραφική Ομάδα**

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2Α

# ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

## Ενότητες 2.1.-2.14.

**Στις Ενότητες 2.1. - 2.14. του Κεφαλαίου 2Α:**

- **Ανακαλούμε** την έννοια της περιοδικής κίνησης.
- **Εξηγούμε** ότι η ταλάντωση είναι περίπτωση περιοδικής κίνησης.
- **Ορίζουμε** την Απλή Αρμονική Ταλάντωση (ΑΑΤ).
- **Αναλύουμε** διάφορα παραδείγματα ΑΑΤ.
- **Ορίζουμε** τα χαρακτηριστικά μεγέθη της ΑΑΤ (πλάτος, περίοδος, συχνότητα, κυκλική συχνότητα).
- **Συζητούμε** την κατεύθυνση των διανυσματικών μεγεθών της ΑΑΤ (δύναμης επαναφοράς, επιτάχυνσης, ταχύτητας και μετατόπισης).
- **Αποδεικνύουμε** ότι η ομαλή κυκλική κίνηση αναλύεται σε δύο κάθετες ΑΑΤ. Το πλάτος των ΑΑΤ ισούται με την ακτίνα του κύκλου, και η κυκλική συχνότητα ισούται με το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της κυκλικής κίνησης.
- Με βάση την **αντιστοιχία ομαλής κυκλικής κίνησης - ΑΑΤ**:
  - **Αποδεικνύουμε** ότι η περίοδος της ΑΑΤ είναι ανεξάρτητη από το πλάτος.
  - **Υπολογίζουμε** την περίοδο της ΑΑΤ από τη σταθερά της ταλάντωσης.
  - **Εξάγουμε** τις σχέσεις θέσης - χρόνου και ταχύτητας - χρόνου της ΑΑΤ.
- **Σχεδιάζουμε** τις γραφικές παραστάσεις επιτάχυνσης - θέσης και ταχύτητας - θέσης της ΑΑΤ.

Σε προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε κινήσεις, όπως:

- Η ομαλή κυκλική κίνηση.
- Η κίνηση σε κατακόρυφο κύκλο σώματος στερεωμένου σε σχοινί.
- Η περιφορά της Σελήνης γύρω από τη Γη, και ενός πλανήτη γύρω από τον Ήλιο.
- Η περιστροφική κίνηση ενός στερεού σώματος με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ως προς ακλόνητο άξονα.

Οι κινήσεις αυτές ονομάζονται **περιοδικές**, επειδή **επαναλαμβάνονται** μετά από κάποιο χρονικό διάστημα. Ένας **κύκλος** μίας περιοδικής κίνησης ολοκληρώνεται κάθε φορά που το σώμα διέρχεται *από το ίδιο σημείο και με την ίδια ταχύτητα*.

### Ανάκληση Εννοιών της Περιοδικής Κίνησης

Η **περίοδος** $T$ είναι το χρονικό διάστημα, μέσα στο οποίο επαναλαμβάνεται η κίνηση. Για παράδειγμα, η περίοδος της ομαλής κυκλικής κίνησης είναι το χρονικό διάστημα, στο οποίο το σώμα διαγράφει έναν πλήρη κύκλο.

Η **συχνότητα** $f$ είναι ο αριθμός επαναλήψεων της κίνησης ανά μονάδα χρόνου. Σε οποιαδήποτε περιοδική κίνηση, τα δύο μεγέθη συνδέονται με τη σχέση:

$$f = \frac{1}{T}$$

Μονάδα μέτρησης της συχνότητας είναι το $s^{-1}$, το οποίο ονομάζεται **Hertz (Hz)**.

Η **κυκλική συχνότητα** $\omega$ είναι το μέγεθος

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Η κυκλική συχνότητα εκφράζεται σε rad/s, όπου rad είναι το **ακτίνιο**.

**Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:**

**2.1.1.** Η Γη κινείται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον Ήλιο. Είναι περιοδική αυτή η κίνηση; Να γράψετε την περίοδο της τροχιάς (σε ημέρες) και τη συχνότητα της τροχιάς (σε (ημέρες)$^{-1}$).

**2.1.2.** Μία βαλίτσα είναι ξεχασμένη στον κυλιόμενο ιμάντα της αίθουσας αποσκευών ενός αεροδρομίου. Είναι περιοδική η κίνηση της βαλίτσας;

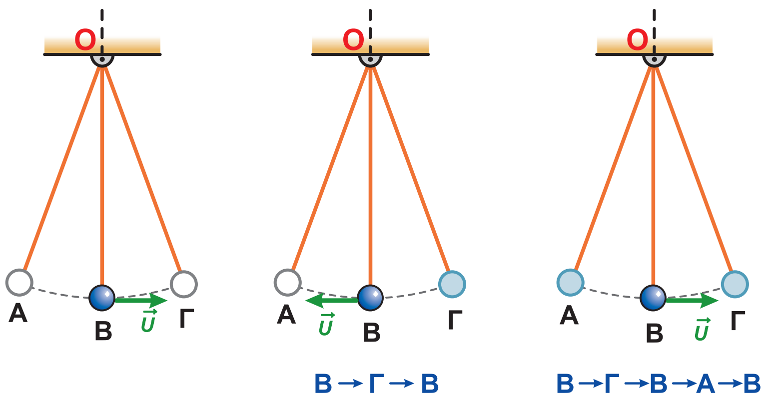
**2.1.3.** Ένας αθλητής του στίβου τρέχει μία διαδρομή 4000 m σε μία κυκλική πίστα των 200 m. Είναι περιοδική η κίνηση του αθλητή;

**2.1.4.** Ένα σώμα εκτελεί μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση. Είναι δυνατόν η κίνηση αυτή να είναι περιοδική; Να αναφέρετε ένα παράδειγμα σώματος, που εκτελεί περιοδική μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση.

## 2.2. Η Ταλάντωση είναι παράδειγμα Περιοδικής Κίνησης

Η διάταξη της **Εικόνας 2-1** απεικονίζει το **μαθηματικό ή απλό εκκρεμές:** Ένα μικρό σώμα μάζας *m* είναι στερεωμένο στην ελεύθερη άκρη ενός αβαρούς, μη εκτατού σχοινιού. Η άλλη άκρη του σχοινιού είναι στερεωμένη σε ένα ακλόνητο σημείο **Ο**.

Εάν το σώμα ξεκινήσει με κάποια αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ από το σημείο **Β**, και δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα ή τριβή με το σημείο **Ο**, θα εκτελεί μία **παλινδρομική**[1] περιοδική κίνηση ανάμεσα στα δύο ακραία σημεία **Α** και **Γ**. Η κίνηση αυτή ονομάζεται **ταλάντωση.**




**Εικόνα 2-1**
Η διαδρομή ΒΓΒ **δεν** είναι πλήρης κύκλος ταλάντωσης: το σώμα επιστρέφει στο ίδιο σημείο **Β** με αντίθετη ταχύτητα. Η διαδρομή ΒΓΒΑΒ αντιστοιχεί σε έναν **πλήρη κύκλο** ταλάντωσης: Στην αρχή και στο τέλος της διαδρομής το σώμα βρίσκεται στο ίδιο σημείο **Β**, με την ίδια ταχύτητα $\vec{\upsilon}$.

**Σημείωση**
Όταν οι τριβές στο σημείο **Ο** ή/και η αντίσταση του αέρα δεν είναι αμελητέες, το μήκος της διαδρομής ελαττώνεται (φθίνει) σε κάθε κύκλο. Η κίνηση ονομάζεται φθίνουσα ταλάντωση. Εάν αυτή η μεταβολή είναι μικρή, η παλινδρομική κίνηση είναι **κατά προσέγγιση** περιοδική.

[1] Από τις λέξεις πάλιν και δρόμος: κίνηση που εκτελείται σε δύο αντίθετες κατευθύνσεις.

Παραδείγματα ταλαντώσεων στην καθημερινή ζωή εκτελούν:

- Μία μπάλα, που κινείται κατακόρυφα και αναπηδά ελαστικά σε οριζόντιο έδαφος.
- Ο καθαριστήρας του ανεμοθώρακα ενός αυτοκινήτου, όταν λειτουργεί.
- Τα έμβολα του κινητήρα ενός αυτοκινήτου.
- Κτίρια και γέφυρες υπό την επίδραση ισχυρού ανέμου.
- Η στάθμη του νερού της θάλασσας κατά την άμπωτη και την παλίρροια.
- Το εκκρεμές στο ρολόι του τοίχου.
- Ένα παιδί που κάνει κούνια.
- Ένα σώμα στερεωμένο σε οριζόντιο ή κατακόρυφο ελατήριο.
- Οι παλλόμενες χορδές μιας κιθάρας ή ενός βιολιού.
- Οι πυρήνες των ατόμων ενός μορίου, που ταλαντώνονται γύρω από συγκεκριμένες θέσεις.
- Τα άτομα ενός μετάλλου, που ταλαντώνονται γύρω από συγκεκριμένες θέσεις.

Στο παρόν Κεφάλαιο θα μελετήσουμε μια κατηγορία περιοδικών ταλαντώσεων, τις **Απλές Αρμονικές Ταλαντώσεις (ΑΑΤ)**.

**Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:**

**2.2.1.** Μία μαθήτρια διατυπώνει τον συλλογισμό ότι «όλες οι ταλαντώσεις είναι περιοδικές κινήσεις, αλλά μόνο μερικές περιοδικές κινήσεις είναι ταλαντώσεις». Είναι σωστός ο συλλογισμός της; Να εξηγήσετε ποια είναι η διαφορά ανάμεσα σε μία ταλάντωση και σε μία γενική περιοδική κίνηση.

**2.2.2.** Η περιφορά της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι περιοδική κίνηση. Να εξηγήσετε γιατί η κίνηση αυτή δεν αντιστοιχεί σε ταλάντωση.

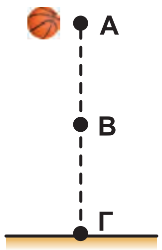
**2.2.3.** Στην **Εικόνα 2-1**, το εκκρεμές φθάνει στα σημεία **Α** και **Γ** με μηδενική ταχύτητα. Ποιες από τις πιο κάτω διαδρομές αντιστοιχούν σε πλήρεις κύκλους ταλάντωσης; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

**(α)** ΑΒΓ, **(β)** ΑΒΓΒΑ, **(γ)** ΓΒΑΒ, **(δ)** ΓΒΑΒΓ

**2.2.4.** Εάν υπάρχουν σημαντικές τριβές στο σημείο ανάρτησης **Ο**, ή/και η αντίσταση του αέρα είναι σημαντική, η κίνηση του εκκρεμούς δεν είναι περιοδική. Να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό.

**2.2.5.** Στο πιο κάτω σχήμα, μία μπάλα αφήνεται από ηρεμία από το σημείο **Α** και αναπηδά ελαστικά στο σημείο **Γ** του οριζόντιου εδάφους. Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα. Να εξηγήσετε ποια(ες) από τις ακόλουθες διαδρομές αντιστοιχεί(ούν) σε πλήρη κύκλο ταλάντωσης:

**(α)** ΒΓΒ, **(β)** ΑΓΑ, **(γ)** ΒΑΒ.

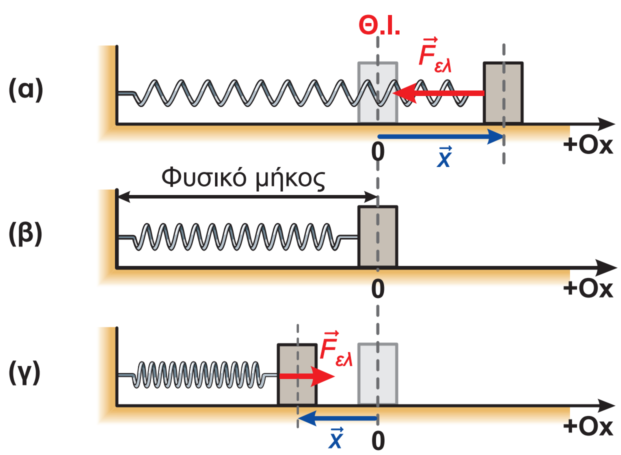



**2.2.6.** Εάν η κρούση της μπάλας στο σημείο **Γ δεν** είναι ελαστική, ή/και η αντίσταση του αέρα είναι σημαντική, η κίνηση της μπάλας είναι περιοδική; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

## 2.3. Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ένα σώμα εκτελεί **Απλή Αρμονική Ταλάντωση (ΑΑΤ)** όταν η **συνισταμένη** δύναμη, που δρα στο σώμα, εξαρτάται με **συγκεκριμένο τρόπο** από τη θέση του σώματος. Θα αναδείξουμε αυτή την εξάρτηση με το παράδειγμα του **οριζόντιου ελατηρίου**.

Το σώμα μάζας *m* της **Εικόνας 2-2** είναι στερεωμένο στην ελεύθερη άκρη ενός αβαρούς οριζόντιου ελατηρίου, και κινείται σε **λείο** οριζόντιο επίπεδο. Η άλλη άκρη του ελατηρίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο τοίχο.




**Εικόνα 2-2**
Σώμα στερεωμένο σε οριζόντιο ελατήριο.

Περιγράφουμε τη θέση του σώματος με τη βοήθεια του οριζόντιου άξονα **Ox**. Αντιστοιχίζουμε την τιμή $x = 0$ στη θέση της ελεύθερης άκρης, όταν το ελατήριο έχει το **φυσικό του μήκος**. Με αυτή την αντιστοιχία, η θέση $x$ ισούται με τη μεταβολή στο μήκος του ελατηρίου: Για θετικές τιμές ($x > 0$) το ελατήριο είναι τεταμένο (τεντωμένο), και για αρνητικές τιμές ($x < 0$) είναι συσπειρωμένο (συμπιεσμένο).

Όπως μάθαμε στην Α΄ Λυκείου, εάν η μεταβολή στο μήκος του ελατηρίου δεν υπερβαίνει κάποια μέγιστη τιμή, η δύναμη ελατηρίου περιγράφεται από τον **Νόμο του Hooke**:

$$\vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -k\vec{x}$$

Το μέγεθος $k$ έχει σταθερή θετική τιμή και ονομάζεται σταθερά ελατηρίου. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ είναι **αντίρροπη** με τη μετατόπιση $\vec{x}$ της ελεύθερης άκρης από τη θέση $x = 0$, στην οποία το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

Στο σώμα της **Εικόνας 2-2** ασκείται επίσης το βάρος του $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το επίπεδο (δεν συμπεριλαμβάνονται στο σχήμα). Επειδή οι δυνάμεις $\vec{B}$ και $\vec{N}$ είναι συνεχώς αντίθετες, η συνισταμένη δύναμη ισούται με τη δύναμη ελατηρίου:

$$\sum\vec{F} = \vec{B} + \vec{N} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} = \vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -k\vec{x}$$

Από τον νόμο του Hooke συμπεραίνουμε τα εξής:

- Η θέση $x = 0$ είναι η θέση ισορροπίας (ΘΙ), στην οποία η συνισταμένη δύναμη μηδενίζεται.
- Για **θετικές** μετατοπίσεις από τη ΘΙ ($x > 0$), το ελατήριο είναι τεταμένο και η συνισταμένη δύναμη έχει **αρνητική** φορά (προς τη ΘΙ).
- Για **αρνητικές** μετατοπίσεις από τη ΘΙ ($x < 0$), το ελατήριο είναι συσπειρωμένο και η συνισταμένη δύναμη έχει **θετική** φορά (προς τη ΘΙ).
- Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης είναι **ανάλογο** με το μέτρο της μετατόπισης: $|\vec{F}_{\varepsilon\lambda}| \propto |\vec{x}|$.

**Συμπέρασμα**
Η θέση $x = 0$ είναι θέση **ευσταθούς ισορροπίας**. Η συνισταμένη δύναμη τείνει **πάντοτε** να **επαναφέρει** το σώμα σε αυτήν (είναι **δύναμη επαναφοράς**).

Εάν μετατοπίσουμε το σώμα σε κάποια θέση $x \neq 0$ και το αφήσουμε ελεύθερο, το σώμα θα αρχίσει να κινείται υπό την επίδραση της συνισταμένης δύναμης $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$. Από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα, προκύπτει ότι η επιτάχυνση του σώματος **μεταβάλλεται** με τη θέση:

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{m}\sum\vec{F} = -\frac{k}{m}\vec{x}$$

Συνεπώς, η κίνηση του σώματος **δεν** είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Υπό την επίδραση της συνισταμένης δύναμης $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$, το σώμα θα αρχίσει να εκτελεί παλινδρομική περιοδική κίνηση γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας $x = 0$. Όταν η συνισταμένη δύναμη είναι δύναμη επαναφοράς και το μέτρο της είναι **ανάλογο** με την απόσταση από τη θέση ισορροπίας, η περιοδική ταλάντωση ονομάζεται **απλή αρμονική ταλάντωση (ΑΑΤ)**.

Συνοψίζουμε:

### Ορισμός Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης

Απλή Αρμονική Ταλάντωση είναι η παλινδρομική περιοδική κίνηση που εκτελεί ένα σώμα, όταν η συνισταμένη δύναμη σε αυτό είναι **ανάλογη** και **αντίρροπη** με τη μετατόπιση του σώματος από τη Θέση Ισορροπίας του:

$$\sum\vec{F} = -D\vec{x}$$

Η **θετική** σταθερά $D$ εκφράζεται σε N/m.

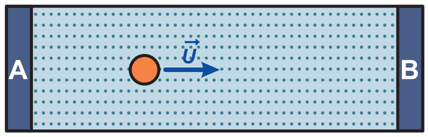
Όταν ένα σώμα ή σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ονομάζεται **αρμονικός ταλαντωτής**.

**Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:**

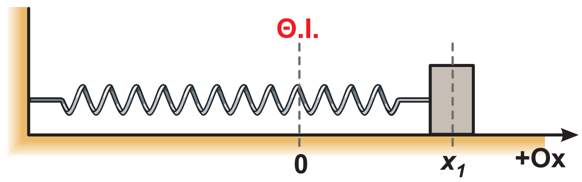
**2.3.1.** Ένας μαθητής διατυπώνει τον εξής συλλογισμό: «Όλες οι ΑΑΤ είναι ταλαντώσεις, αλλά μόνο μερικές ταλαντώσεις είναι ΑΑΤ». Είναι σωστός αυτός ο συλλογισμός; Να εξηγήσετε ποια είναι η διαφορά ανάμεσα σε μία ΑΑΤ και μία γενική ταλάντωση.

**2.3.2.** Να εξετάσετε κατά πόσο η μπάλα του ερωτήματος 2.2.5 εκτελεί ΑΑΤ.

**2.3.3.** Ο δίσκος του πιο κάτω σχήματος κινείται πάνω από μία αεροτράπεζα σε λειτουργία, και ανακλάται ελαστικά στα τοιχώματα Α και Β. Να εξηγήσετε εάν η κίνηση του δίσκου είναι **(α)** περιοδική, **(β)** ταλάντωση, **(γ)** ΑΑΤ.




**2.3.4.** Το σώμα του πιο κάτω σχήματος διέρχεται από τη θέση $x_1 > 0$ τη στιγμή $t_1$ και από τη θέση $x_2 = x_1/2$ μία μεταγενέστερη στιγμή $t_2$.




Ποι(ο)α από τα επόμενα είναι ορθ(ό)ά;

**Α.** Στο χρονικό διάστημα $t_1 \rightarrow t_2$, η μετατόπιση έχει αρνητική αλγεβρική τιμή.

**Β.** Στο χρονικό διάστημα $t_1 \rightarrow t_2$, η μετατόπιση από τη ΘΙ ελαττώνεται συνεχώς.

**Γ.** Τη χρονική στιγμή $t_2$, η μετατόπιση από τη ΘΙ έχει αρνητική αλγεβρική τιμή.

**Δ.** Τη χρονική στιγμή $t_1$, η δύναμη ελατηρίου έχει διπλάσιο μέτρο από ό,τι τη χρονική στιγμή $t_2$.

**Ε.** Η φορά της δύναμης ελατηρίου είναι αρνητική τη χρονική στιγμή $t_1$, και θετική τη χρονική στιγμή $t_2$.

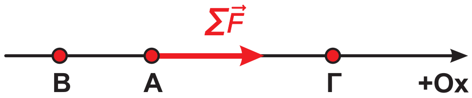
**2.3.5.** Να εξετάσετε ποια(ες) από τις ακόλουθες κινήσεις είναι ΑΑΤ. Να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας:

**Α.** Σώμα συνδεδεμένο σε οριζόντιο ελατήριο κινείται σε τραχιά επιφάνεια.

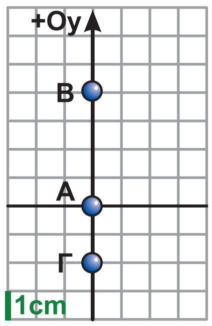
**Β.** Η συνισταμένη δύναμη σε ένα σώμα, και η μετατόπιση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του, συνδέονται με τη σχέση: $\sum \vec{F} = D\vec{x}$, όπου $D$ θετική σταθερά.

**Γ.** Οι αλγεβρικές τιμές της συνισταμένης δύναμης και της μετατόπισης ενός σώματος από τη θέση ισορροπίας του συνδέονται με τη σχέση: $\sum F = -Cx^2$, όπου $C$ θετική σταθερά.

**2.3.6.** Ένα σώμα εκτελεί ΑΑΤ κατά μήκος του οριζόντιου άξονα **Ox**. Στο σημείο **Α**, το διάνυσμα της συνισταμένης δύναμης έχει θετική φορά. Ποιο σημείο θα μπορούσε να αντιστοιχεί στη θέση ισορροπίας, το **Β** ή το **Γ**; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.




**2.3.7.** Το σώμα του διπλανού σχήματος εκτελεί ΑΑΤ κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα **Οy**. Το σημείο **Α** αντιστοιχεί στη θέση ισορροπίας. Να σχεδιάσετε (υπό κλίμακα) τα διανύσματα της συνισταμένης δύναμης και της επιτάχυνσης του σώματος στις θέσεις **Β** και **Γ**. Σε ποιο από τα δύο σημεία, η συνισταμένη δύναμη έχει: **(α)** μεγαλύτερο μέτρο, **(β)** μεγαλύτερη αλγεβρική τιμή;

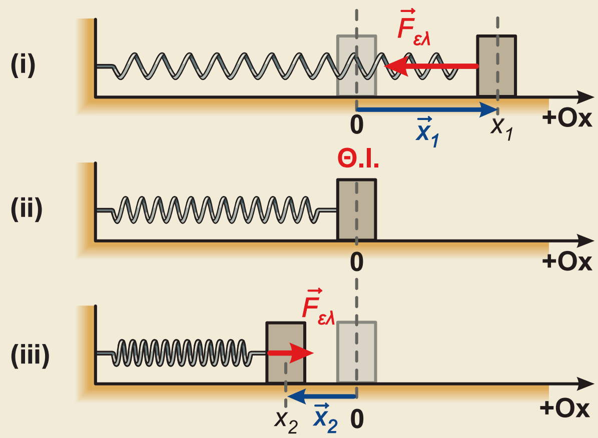



## 2.4. Παραδείγματα Απλών Αρμονικών Ταλαντώσεων

**Παράδειγμα 1**
**Σώμα συνδεδεμένο με Οριζόντιο Ελατήριο**

Η ελεύθερη άκρη ενός οριζόντιου ελατηρίου, που υπακούει στον Νόμο του Hooke, είναι συνδεδεμένη με σώμα μάζας $m = 4{,}00$ kg. Το σώμα κινείται σε οριζόντιο δάπεδο χωρίς τριβές. Εάν το ελατήριο επιμηκυνθεί κατά 30,0 cm, ασκεί στο σώμα δύναμη μέτρου 120,0 N. Επιμηκύνουμε το ελατήριο κατά 10,0 cm, και το αφήνουμε ελεύθερο.

**Θα υπολογίσουμε τη δύναμη ελατηρίου και την επιτάχυνση του σώματος: (i) στην αρχική θέση $x_1$, (ii) στη ΘΙ, και (iii) σε μία θέση $x_2$, στην οποία το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά 5,00 cm.**



Θέτουμε $x = 0$ τη θέση της ελεύθερης άκρης, όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Ορίζουμε ως θετική τη φορά, κατά την οποία το ελατήριο επιμηκύνεται.

**(i)** Η σταθερά ελατηρίου είναι $k = \dfrac{|\vec{F}_{\varepsilon\lambda}|}{|\vec{x}|} = \dfrac{120{,}0\ \text{N}}{0{,}300\ \text{m}} = 4{,}00 \times 10^2\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}}$. Άρα, στη θέση $x_1$ η δύναμη ελατηρίου έχει αλγεβρική τιμή:

$$F_{\varepsilon\lambda} = -kx_1 = -\left(4{,}00 \times 10^2\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\right) \times (0{,}100\ \text{m}) = -40{,}0\ \text{N}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η δύναμη ελατηρίου είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση. Η επιτάχυνση του σώματος είναι ομόρροπη με τη συνισταμένη δύναμη, και έχει αλγεβρική τιμή:

$$\alpha = \frac{F_{\varepsilon\lambda}}{m} = -\frac{40{,}0\ \text{N}}{4{,}00\ \text{kg}} = -10{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

**(ii)** Στη ΘΙ, η δύναμη και η επιτάχυνση μηδενίζονται.

**(iii)** Επειδή το ελατήριο είναι συσπειρωμένο, η θέση της ελεύθερης άκρης του είναι αρνητική: $x_2 = -0{,}050$ m. Άρα, η δύναμη ελατηρίου ισούται με:

$$F_{\varepsilon\lambda} = -\left(4{,}00 \times 10^2\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\right) \times (-0{,}050\ \text{m}) = +20{,}0\ \text{N}$$

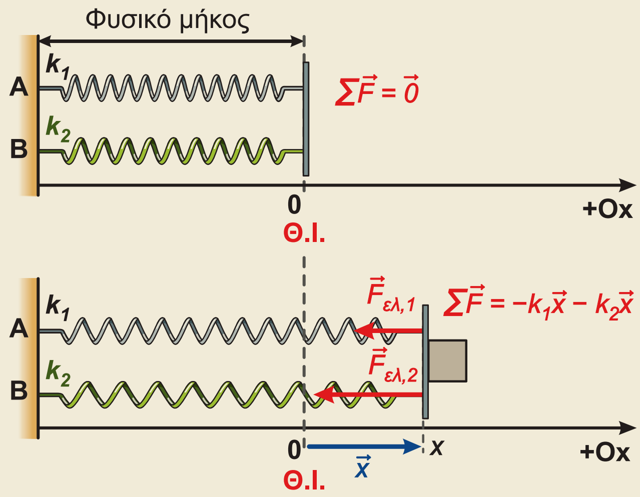
Η επιτάχυνση του σώματος ισούται με $\alpha = \dfrac{20{,}0\ \text{N}}{4{,}00\ \text{kg}} = 5{,}00\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

**Παράδειγμα 2**
**Σώμα συνδεδεμένο παράλληλα σε δύο Οριζόντια Ελατήρια**

Στο σχήμα απεικονίζονται ***σε κάτοψη*** δύο οριζόντια αβαρή ελατήρια **1** και **2**, με το ίδιο μήκος ισορροπίας $L_0$ και σταθερές ελατηρίου $k_1$ και $k_2$.

Οι άκρες **Α** και **Β** των ελατηρίων είναι συνδεδεμένες με ακλόνητο τοίχο. Οι αντίθετες άκρες είναι στερεωμένες σε μία αβαρή κινητή βάση, και μετακινούνται έτσι ώστε τα ελατήρια να παραμένουν ***συνεχώς παράλληλα μεταξύ τους*****. Θα δείξουμε ότι ο συνδυασμός των ελατηρίων 1 και 2 συμπεριφέρεται ως ένα ισοδύναμο ελατήριο, με σταθερά $k$ που είναι συνάρτηση των $k_1$ και $k_2$. Αμελούμε την όποια περιστροφική κίνηση του συστήματος.**

Περιγράφουμε τη θέση της ελεύθερης άκρης των ελατηρίων με τη βοήθεια του οριζόντιου άξονα **Οx. Ορίζουμε** ως σημείο αναφοράς $x = 0$ τη θέση της ελεύθερης άκρης, όταν τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος.




Συνδέουμε στην κινητή βάση έναν μικρό κύβο μάζας $m$. Έστω ότι μετακινούμε τη βάση σε μία νέα θέση $x \neq 0$, και την αφήνουμε ελεύθερη. Από τον νόμο του Hooke συμπεραίνουμε ότι το σύστημα βάσης - κύβου θα δέχεται δυνάμεις $\vec{F}_{\varepsilon\lambda,1} = -k_1\vec{x}$ και $\vec{F}_{\varepsilon\lambda,2} = -k_2\vec{x}$ από τα δύο ελατήρια. Στον κύβο ασκούνται επίσης το βάρος του $\vec{B}$ και μία κάθετη δύναμη $\vec{N} = -\vec{B}$ από την επιφάνεια (δεν συμπεριλαμβάνονται στο σχήμα). Συνεπώς, η συνισταμένη δύναμη στο σύστημα βάσης - κύβου είναι ανάλογη και αντίρροπη της μετατόπισης από τη ΘΙ:

$$\sum\vec{F} = \vec{F}_{\varepsilon\lambda,1} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda,2} + \vec{B} + \vec{N} = \vec{F}_{\varepsilon\lambda,1} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda,2} = -(k_1 + k_2)\vec{x}$$

Η πιο πάνω σχέση ισχύει και αλγεβρικά:

$$\sum F = -(k_1 + k_2)x$$

Άρα, ο συνδυασμός των δύο ελατηρίων **συμπεριφέρεται ως ένα ισοδύναμο ελατήριο με σταθερά** $k = k_1 + k_2$. Ο κύβος θα εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά $D = k_1 + k_2$.

### Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

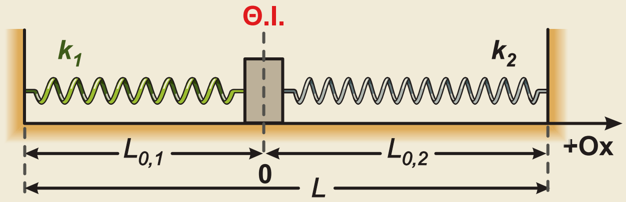
**2.4.1.** Εάν τα παράλληλα ελατήρια έχουν ίσες σταθερές $k_1 = k_2 =$ 50,0 N/m, να βρείτε τη σταθερά του ισοδύναμου ελατηρίου.

**2.4.2.** Μπορείτε να γενικεύσετε το πιο πάνω συμπέρασμα για $N$ **πανομοιότυπα** παράλληλα ελατήρια;

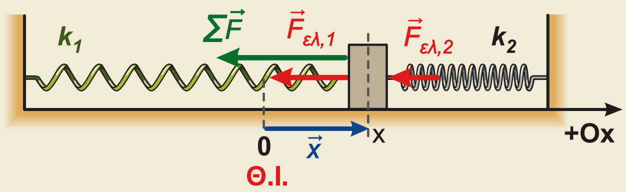
**Παράδειγμα 3**
**Σώμα ανάμεσα σε δύο Οριζόντια Ελατήρια**

Σώμα μάζας $m$ είναι συνδεδεμένο με δύο αβαρή οριζόντια ελατήρια σταθερών $k_1$ και $k_2$, και μπορεί να κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Περιγράφουμε τη θέση του σώματος με τον οριζόντιο άξονα **Ox**.

Η απόσταση $L$ μεταξύ των κατακόρυφων τοίχων είναι ρυθμισμένη, ώστε **και τα δύο** ελατήρια να έχουν το φυσικό τους μήκος, όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0$: $L = L_{0,1} + L_{0,2}$ . Άρα, η θέση $x = 0$ είναι η ΘΙ.




**Ορίζουμε** τη θετική φορά του άξονα **Ox** προς τα δεξιά (όταν τείνεται το ελατήριο 1 και συσπειρώνεται το ελατήριο 2).




Εάν το σώμα μετακινηθεί σε μία θέση $x > 0$, το μήκος του αριστερού ελατηρίου αυξάνεται κατά $x$, και το μήκος του δεξιού ελατηρίου ελαττώνεται κατά $x$. Οι δυνάμεις $\vec{F}_{ελ,1}$ και $\vec{F}_{ελ,2}$ έχουν μέτρα **ανάλογα** με το μέγεθος $x$, **την ίδια κατεύθυνση** (προς τη ΘΙ), και είναι **αντίρροπες** με τη μετατόπιση $\vec{x}$.
Άρα:

$$F_{ελ,1} = -k_1 x \text{ και } F_{ελ,2} = -k_2 x$$

Σε μία θέση $x < 0$, το αριστερό ελατήριο είναι συσπειρωμένο και το δεξί είναι τεταμένο. Οι δυνάμεις έχουν πάλι την ίδια κατεύθυνση (προς τη ΘΙ), και θετικές αλγεβρικές τιμές.

Στο σώμα ασκούνται επίσης το βάρος του $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη από το επίπεδο $\vec{N}$ (δεν περιλαμβάνονται στο σχήμα). Οι δυνάμεις αυτές είναι αντίθετες και το άθροισμά τους μηδενίζεται ($\vec{B} + \vec{N} = \vec{0}$). Η συνισταμένη δύναμη στο σώμα ισούται με

$$\sum\vec{F} = \vec{F}_{ελ,1} + \vec{F}_{ελ,2} + \vec{B} + \vec{N} = \vec{F}_{ελ,1} + \vec{F}_{ελ,2} \Rightarrow \sum F = F_{ελ,1} + F_{ελ,2} = -(k_1 + k_2)x$$

Επειδή η συνισταμένη δύναμη είναι ανάλογη και αντίρροπη της μετατόπισης από τη ΘΙ, το σώμα εκτελεί ΑΑΤ. Η σταθερά της αρμονικής ταλάντωσης ισούται με το άθροισμα των δύο σταθερών ελατηρίου $D = k_1 + k_2$, όπως και στην περίπτωση των ελατηρίων σε παράλληλη σύνδεση.

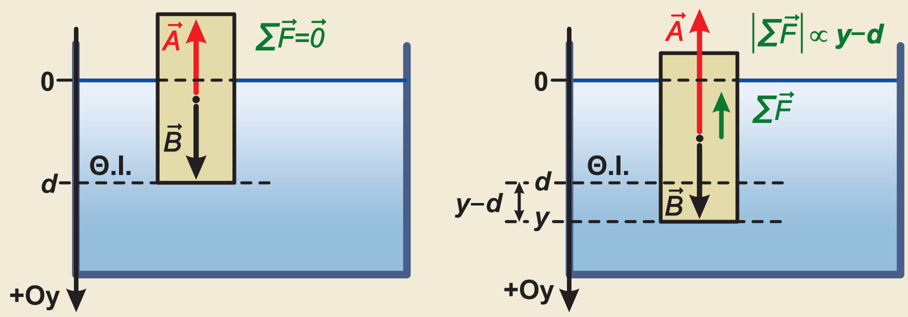
**Παρατήρηση**

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε εάν η απόσταση μεταξύ των κατακόρυφων τοίχων είναι τέτοια, ώστε τα ελατήρια να μην έχουν το φυσικό τους μήκος στη θέση ισορροπίας. Η περίπτωση αυτή θα μελετηθεί στις ασκήσεις.

**Παράδειγμα 4**

**Σώμα που επιπλέει σε Υγρό**

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται ένα ομογενές ξύλινο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο σώμα με εμβαδόν βάσης $S$, συνολικό ύψος $L$ και μάζα $m$, το οποίο είναι μερικώς βυθισμένο σε υγρό πυκνότητας $\rho_\upsilon > \rho_\xi$ και ισορροπεί. Περιγράφουμε τη θέση του σώματος με τη βοήθεια του κατακόρυφου άξονα **Oy**. Θέτουμε τη θέση $y = 0$ στην επιφάνεια του υγρού, και επιλέγουμε ως θετική τη φορά προς τα κάτω.




Στην Α΄ Λυκείου μάθαμε ότι ένα σώμα, που είναι μερικά ή ολικά βυθισμένο σε ένα υγρό, δέχεται μια κατακόρυφη δύναμη **Άνωσης** $\vec{A}$ από το υγρό, με φορά προς τα επάνω και ***μέτρο ίσο με το βάρος του υγρού που εκτοπίζει.*** Άρα, στο σώμα δρα η δύναμη άνωσης $\vec{A}$, και το βάρος του $\vec{B}$. Επειδή το σώμα ισορροπεί, η συνισταμένη δύναμη μηδενίζεται:

$$\sum \vec{F} = \vec{B} + \vec{A} = \vec{0} \Rightarrow mg - \left|\vec{A}\right| = 0 \Rightarrow mg = \left|\vec{A}\right|$$

Έστω ότι η κάτω βάση του σώματος βρίσκεται στη θέση $y = d$, όταν ισορροπεί. Το βυθισμένο τμήμα του σώματος έχει όγκο $V = Sd$. Άρα, το εκτοπιζόμενο υγρό έχει μάζα $m_\upsilon = \rho_\upsilon Sd$ και βάρος $B_\upsilon = m_\upsilon g = \rho_\upsilon Sdg$. Η άνωση έχει μέτρο ίσο με το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού: $\left|\vec{A}\right| = m_\upsilon g = \rho_\upsilon Sdg$.

Συνδυάζοντας με τη σχέση ισορροπίας, βρίσκουμε:

$$\rho_\upsilon Sdg = mg \Rightarrow d = \frac{m}{\rho_\upsilon S} = \frac{\rho_\xi LS}{\rho_\upsilon S} = \frac{\rho_\xi}{\rho_\upsilon} L$$

Επειδή $\rho_\xi < \rho_\upsilon$, συμπεραίνουμε ότι $d < L$: το σώμα ισορροπεί μερικώς βυθισμένο στο υγρό.

Έστω ότι μετατοπίζουμε το σώμα κατακόρυφα, έτσι ώστε η κάτω βάση να βρεθεί στη νέα θέση $y > d$. Θεωρούμε ότι η μεταβολή στο ύψος της στάθμης του υγρού λόγω της κατακόρυφης μετατόπισης του σώματος είναι αμελητέα.

Ο όγκος του βυθισμένου τμήματος αυξάνεται: $V_υ' = Sy > Sd$. Άρα, το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού και το μέτρο της άνωσης επίσης αυξάνονται:

$$\left|\vec{A}\right| = m_υ' g = (\rho_υ V_υ')g = \rho_υ Syg > \rho_υ Sdg = mg$$

Επειδή $\sum F = mg - \left|\vec{A}\right| < 0$, η συνισταμένη δύναμη αποκτά φορά προς τα πάνω και το σώμα αρχίζει να κινείται προς τα πάνω.

Εάν αγνοήσουμε την αντίσταση του υγρού στην κίνηση του σώματος, η συνισταμένη δύναμη, για μία θέση $y$ της κάτω βάσης, ισούται με:

$$\sum F = mg - \left|\vec{A}\right| = mg - \rho_υ Syg = \rho_υ Sdg - \rho_υ Syg = -\rho_υ Sg(y-d) \propto -(y-d)$$

Να παρατηρήσετε ότι η ποσότητα $y - d$ είναι η κατακόρυφη μετατόπιση της κάτω βάσης του σώματος από τη ΘΙ $y = d$. Άρα, η συνισταμένη δύναμη είναι **ανάλογη και αντίρροπη** με την κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος από τη ΘΙ. Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά $D = \rho_υ Sg$.

**Αριθμητική Εφαρμογή**

Έστω ότι το σώμα έχει εμβαδόν διατομής $S = 75{,}0\ \text{cm}^2$ και επιπλέει σε νερό. Η πυκνότητα του νερού ισούται με $\rho_υ = 1{,}00\ \text{g/cm}^3$. Η σταθερά της ταλάντωσης είναι

$$D = \rho_υ Sg = \left(1{,}00\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) \times (75{,}0\ \text{cm}^2) \times \left(9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = \left(75{,}0\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}\right) \times \left(9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) =$$

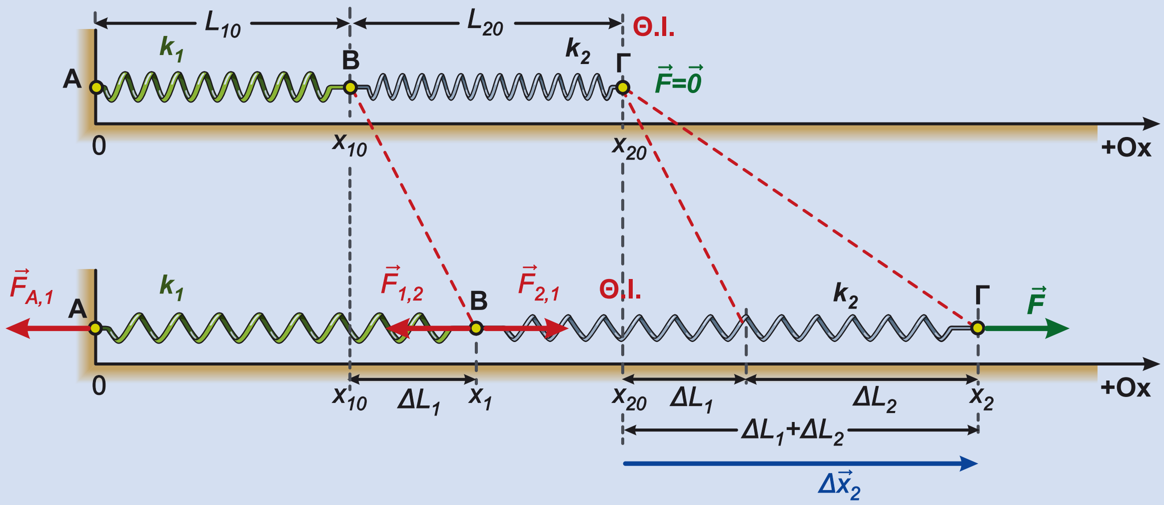
$$\left(75{,}0\ \frac{\text{g}}{\text{cm}} \times \frac{1\ \text{kg}}{10^3\ \text{g}} \times \frac{10^2\ \text{cm}}{1\ \text{m}}\right) \times \left(9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 73{,}6\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

## ΕΝΘΕΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5: ΣΩΜΑ ΣΥΝΔΕΔΕΜΕΝΟ ΣΕ ΣΕΙΡΑ ΜΕ ΔΥΟ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΕΛΑΤΗΡΙΑ

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζονται δύο οριζόντια **αβαρή** ελατήρια **1** και **2**, με φυσικά μήκη $L_{10}$ και $L_{20}$, και σταθερές ελατηρίου $k_1$ και $k_2$. Το άκρο **Α** του ελατηρίου **1** είναι στερεωμένο σε ακλόνητο τοίχο, και το άκρο **Γ** του ελατηρίου **2** είναι ελεύθερο. Τα ελατήρια είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους σε σειρά, στο κοινό άκρο **Β**.

Θα μελετήσουμε την ταλάντωση ενός σώματος, που στερεώνεται στο άκρο Γ. Για τον σκοπό αυτό,

**θα δείξουμε πρώτα ότι ο συνδυασμός των ελατηρίων 1 και 2 συμπεριφέρεται ως ένα ισοδύναμο ελατήριο, με σταθερά $k$ που είναι συνάρτηση των $k_1$ και $k_2$.**




Περιγράφουμε τις θέσεις κατά μήκος των ελατηρίων με τη βοήθεια του οριζόντιου άξονα **Οx**. **Ορίζουμε** ως σημείο αναφοράς $x = 0$ τη θέση του σημείου **Α**. Συμβολίζουμε με $x_1$ τη θέση του κοινού άκρου **Β**, και με $x_2$ τη θέση του σημείου **Γ**.

Αρχικά, τα ελατήρια έχουν τα φυσικά τους μήκη. Το κοινό άκρο **Β** βρίσκεται στη θέση $x_{10} = L_{10}$, και το άκρο **Γ** βρίσκεται στη θέση $x_{20} = L_{10} + L_{20}$. Εάν συνδέσουμε ένα σώμα μάζας $m$ στο άκρο **Γ**, όταν βρίσκεται στη θέση $x_{20}$, θα δρα στο σώμα μηδενική δύναμη ελατηρίου. Η θέση $x_{20}$ είναι η **θέση ισορροπίας** του σώματος.

Μετακινούμε το άκρο **Γ** και το διατηρούμε ακίνητο σε μία νέα θέση $x_2 > x_{20}$, ασκώντας μία δύναμη $\vec{F}$. **Θα εξαγάγουμε μία σχέση ανάμεσα στη δύναμη $\vec{F}$ και στη συνολική μετατόπιση του άκρου Γ, $\Delta x_2 = x_2 - x_{20}$.**

Η εφαρμογή της δύναμης προκαλεί κάποια επιμήκυνση και στο ελατήριο **1**. Έστω ότι το κοινό άκρο **Β** μετατοπίζεται στη θέση $x_1$. Από το σχήμα προκύπτει ότι το νέο μήκος του ελατηρίου **1** ισούται με $L_1 = x_1$. Άρα, το μήκος του ελατηρίου **1** μεταβάλλεται κατά $\Delta L_1 = x_1 - x_{10} = x_1 - L_{10}$.

Ομοίως, το νέο μήκος του ελατηρίου **2** ισούται με $L_2 = x_2 - x_1$. Άρα, το μήκος του ελατηρίου **2** μεταβάλλεται κατά $\Delta L_2 = L_2 - L_{20} = x_2 - x_1 - L_{20}$. Να παρατηρήσετε ότι η συνολική μεταβολή των μηκών των ελατηρίων ισούται με τη μετατόπιση του άκρου **Γ** από τη θέση $x_{20}$:

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = x_2 - (L_{10} + L_{20}) = x_2 - x_{20} = \Delta x_2 \qquad \textbf{(Σχέση 1)}$$

Στο άκρο **Β** του ελατηρίου **2** ασκείται μία δύναμη $\vec{F}_{12}$ από το ελατήριο **1**. Στα άκρα **Α** και **Β** του ελατηρίου **1** ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_{A1}$ (από τον τοίχο) και $\vec{F}_{21}$ (από το ελατήριο **2**). Όλες αυτές οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F} \Rightarrow |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}| \quad \text{(επειδή το ελατήριο } \mathbf{2} \text{ είναι αβαρές),}$$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = \vec{F} \Rightarrow |\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}| \quad \text{(οι } \vec{F}_{12} \text{ και } \vec{F}_{21} \text{ είναι ζεύγος δράσης - αντίδρασης),}$$

$$\vec{F}_{A1} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow |\vec{F}_{A1}| = |\vec{F}_{21}| = |\vec{F}| \quad \text{(επειδή το ελατήριο } \mathbf{1} \text{ είναι αβαρές).}$$

Σύμφωνα με τον νόμο του Hooke, οι δυνάμεις στα άκρα των ελατηρίων **1** και **2** είναι ανάλογες με τις μεταβολές στα μήκη τους:

$$F_{21} = k_1 \Delta L_1 \quad \text{και} \quad F = k_2 \Delta L_2$$

Επειδή $\vec{F}_{21} = \vec{F}$, συμπεραίνουμε:

$$F_{21} = F \Rightarrow k_1 \Delta L_1 = k_2 \Delta L_2 \Rightarrow \Delta L_1 = \frac{k_2}{k_1} \Delta L_2$$

Να παρατηρήσετε ότι τα ελατήρια αποκτούν **διαφορετικές** επιμηκύνσεις, εάν οι σταθερές $k_1$ και $k_2$ δεν είναι ίσες.

Χρησιμοποιώντας τη **σχέση 1**, **συνδέουμε τη συνολική μετατόπιση της άκρης Γ με την μεταβολή $\Delta L_2$:**

$$\Delta x_2 = \Delta L_1 + \Delta L_2 = \frac{k_2}{k_1} \Delta L_2 + \Delta L_2 = \frac{k_1 + k_2}{k_1} \Delta L_2 \Rightarrow \Delta L_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \Delta x_2$$

Αντικαθιστούμε στον νόμο του Hooke για το ελατήριο **2**, και βρίσκουμε:

$$F = k_2 \Delta L_2 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \Delta x_2$$

Η τελευταία σχέση έχει το εξής φυσικό νόημα: Εάν εφαρμόσουμε μία **εξωτερική δύναμη** $\vec{F}$ στο άκρο **Γ**, προκαλούμε **συνολική μετατόπιση** του άκρου που είναι ανάλογη και ομόρροπη με τη δύναμη $\vec{F}$. Η σταθερά αναλογίας είναι ίση με:

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Άρα, ο συνδυασμός των ελατηρίων **1** και **2** συμπεριφέρεται ως ένα **ισοδύναμο** ελατήριο, που υπακούει στον νόμο του Hooke με σταθερά $k$.

Εάν συνδέσουμε στην άκρη **Γ** ένα σώμα μάζας $m$, θα εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά $D = k$.

**Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:**

**2.4.3.** Εάν τα ελατήρια σε σειρά έχουν ίσες σταθερές, $k_1 = k_2 = k$, να βρείτε τη σταθερά του ισοδύναμου ελατηρίου.

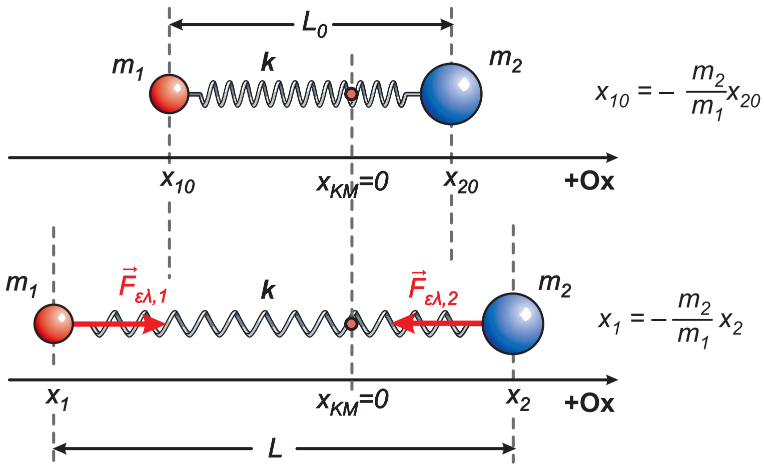
**2.4.4.** Δύο ελατήρια **Α** και **Β** είναι κατασκευασμένα από πανομοιότυπες σπείρες. Το ελατήριο **Β** περιέχει διπλάσιο αριθμό σπειρών από το **Α** και έχει μήκος ισορροπίας $2L_0$, ενώ το ελατήριο **Α** έχει μήκος ισορροπίας $L_0$. **(α)** Να συγκρίνετε τις σταθερές των δύο ελατηρίων. **(β)** Εάν συνδέσουμε τα ελατήρια σε σειρά, ποια θα είναι η σταθερά του ισοδύναμου ελατηρίου;

## ΕΝΘΕΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6: ΔΥΟ ΣΩΜΑΤΑ ΣΥΝΔΕΔΕΜΕΝΑ ΣΤΙΣ ΑΚΡΕΣ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζονται ***σε κάτοψη*** δύο σώματα **1** και **2**, με μάζες $m_1$ και $m_2$, τα οποία είναι στερεωμένα στα άκρα ενός οριζόντιου ελατηρίου αμελητέας μάζας, φυσικού μήκους $L_0$ και σταθεράς $k$. Τα σώματα μπορούν να κινούνται πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο.

**Σημείωση**

Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται συχνά για να περιγράψει τη συμπεριφορά ενός διατομικού μορίου, όπως το $O_2$ ή το HCl. Τα δύο σώματα αντιστοιχούν στα άτομα του μορίου, και το ελατήριο αντιστοιχεί στον χημικό δεσμό μεταξύ των ατόμων.




**Θα μελετήσουμε την κίνηση των σωμάτων εάν μεταβάλουμε το μήκος του ελατηρίου και αφήσουμε τα σώματα να κινηθούν με μηδενικές αρχικές ταχύτητες.**

**Θα θεωρήσουμε το σύστημα σωμάτων - ελατηρίου.** Περιγράφουμε τις θέσεις των δύο σωμάτων με τον οριζόντιο άξονα **Ox**, και θεωρούμε ως θετική την κατεύθυνση από το σώμα **1** στο σώμα **2**. Θέτουμε ως $x = 0$ τη θέση του ΚΜ των σωμάτων.

Οι εξωτερικές δυνάμεις του συστήματος είναι τα βάρη των σωμάτων και οι κάθετες δυνάμεις από το επίπεδο (όλες οι δυνάμεις είναι κατακόρυφες). Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων μηδενίζεται. Άρα, το ΚΜ παραμένει ακίνητο στη θέση $x = 0$.

Αρχικά τα δύο σώματα ηρεμούν στις θέσεις $x_{10}$ και $x_{20}$, και το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος $L_0 = x_{20} - x_{10}$. Οι θέσεις $x_{10}$ και $x_{20}$ συνδέονται με τη σχέση:

$$\vec{x}_{\text{KM}} = \vec{0} \Rightarrow \frac{m_1 \vec{x}_{10} + m_2 \vec{x}_{20}}{m_1 + m_2} = \vec{0} \Rightarrow m_1 x_{10} + m_2 x_{20} = 0 \Rightarrow x_{20} = -\frac{m_1}{m_2} x_{10}$$

Άρα, το φυσικό μήκος μπορεί να γραφεί ως:

$$L_0 = x_{20} - x_{10} = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) x_{20}$$

Έστω ότι δρούμε στα σώματα 1 και 2 με αντίθετες οριζόντιες δυνάμεις $\vec{F}$ και $-\vec{F}$, και τα μετακινούμε στις θέσεις $x_1$ και $x_2$. Οι δυνάμεις $\vec{F}$ και $-\vec{F}$ είναι εξωτερικές και έχουν μηδενική συνισταμένη. Άρα, το ΚΜ παραμένει συνεχώς ακίνητο στη θέση $x = 0$. Οι θέσεις $x_1$ και $x_2$ συνδέονται με τη σχέση:

$$x_2 = -\frac{m_1}{m_2} x_1$$

Η διαφορά θέσεων $L = x_2 - x_1 = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) x_2$ ισούται με το μήκος $L$ του ελατηρίου.

Εάν αφήσουμε τα σώματα ελεύθερα με μηδενικές αρχικές ταχύτητες, το ελατήριο αρχίζει να συσπειρώνεται. Τα σώματα επιταχύνονται υπό την επίδραση των **εσωτερικών** δυνάμεων ελατηρίου $\vec{F}_{\varepsilon\lambda,1}$ και $\vec{F}_{\varepsilon\lambda,2}$. Η συνισταμένη εξωτερική δύναμη είναι ίση με μηδέν, και το ΚΜ παραμένει συνεχώς ακίνητο. Άρα, οι θέσεις των σωμάτων συνδέονται συνεχώς με την ίδια σχέση, $x_2 = -\frac{m_1}{m_2} x_1$.

Η παραμόρφωση του ελατηρίου ισούται με $L - L_0 = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)(x_2 - x_{20})$.

Όταν $L > L_0 \Rightarrow x_2 > x_{20}$, το ελατήριο είναι τεταμένο. Τότε η δύναμη από το ελατήριο στο σώμα 2 έχει φορά προς το σώμα 1 (προς την αρνητική κατεύθυνση), και αλγεβρική τιμή:

$$F_{\varepsilon\lambda,2} = -k(L - L_0) = -k\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)(x_2 - x_{20}) = -k\,\frac{m_1 + m_2}{m_1}(x_2 - x_{20})$$

Η δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\lambda,2}$ είναι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα **2**. Επειδή είναι **ανάλογη και αντίρροπη** με τη μετατόπιση του σώματος **2** από τη ΘΙ του $x_{20}$, το σώμα **2** εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά ταλάντωσης $k\frac{m_1 + m_2}{m_1}$.

Με βάση τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα, το σώμα **2** κινείται με επιτάχυνση:

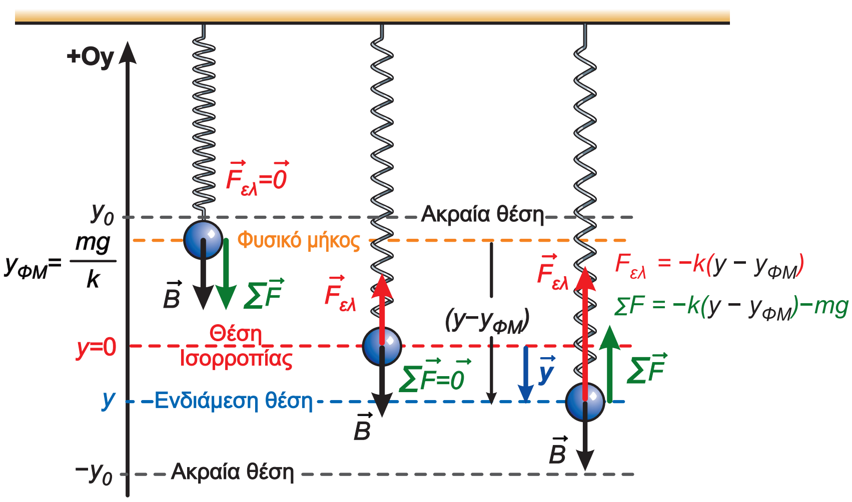
$$\alpha_2 = \frac{F_{\varepsilon\lambda,2}}{m_2} = -k\frac{m_1 + m_2}{m_2 m_1}(x_2 - x_{20})$$

**Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:**

**2.4.5.** Να εξαγάγετε μία σχέση ανάμεσα στις επιταχύνσεις των σωμάτων 1 και 2 του **Παραδείγματος 6**. Με βάση αυτή τη σχέση, να δείξετε ότι το σώμα 1 εκτελεί επίσης ΑΑΤ.

## 2.5. Ένα σώμα στερεωμένο σε Κατακόρυφο Ελατήριο εκτελεί ΑΑΤ

Η **Εικόνα 2-3** απεικονίζει μια σφαίρα μάζας $m$, που είναι προσδεμένη σε αβαρές κατακόρυφο ελατήριο. Περιγράφουμε τη θέση της σφαίρας με τη βοήθεια του κατακόρυφου άξονα **Oy**. Επιλέγουμε την τιμή $y = 0$ στη **θέση ισορροπίας** της σφαίρας και τη **θετική** φορά του **Oy** προς τα πάνω.




**Εικόνα 2-3**
Η τιμή $y = 0$ αντιστοιχεί στη ΘΙ και η θέση $y_{\Phi M} = mg/k$ στο φυσικό μήκος του ελατηρίου. Η συνισταμένη δύναμη $\sum\vec{F} = \vec{B} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ **μηδενίζεται** στη **ΘΙ** $y = 0$. Σε οποιαδήποτε άλλη θέση, η συνισταμένη δύναμη έχει πάντοτε κατεύθυνση προς τη ΘΙ, και είναι ανάλογη με τη μετατόπιση $y$ από τη ΘΙ.

Το ελατήριο έχει το **φυσικό του μήκος**, και η δύναμη ελατηρίου μηδενίζεται, όταν η σφαίρα βρίσκεται στη θέση $y = y_{\Phi M}$. Για $y < y_{\Phi M}$ το ελατήριο είναι τεταμένο, και για $y > y_{\Phi M}$ είναι συσπειρωμένο.

Εάν η σφαίρα βρίσκεται σε κάποια θέση $y$ η μετατόπισή της από τη θέση $y_{\Phi M}$ ισούται με $y - y_{\Phi M}$. Από τον Νόμο του Hooke προκύπτει ότι στη σφαίρα δρα μία δύναμη ελατηρίου

$$F_{\varepsilon\lambda} = -k(y - y_{\Phi M})$$

Να παρατηρήσετε ότι η δύναμη ελατηρίου $F_{\varepsilon\lambda}$:

- Μηδενίζεται για $y = y_{\Phi M}$, όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.
- Είναι αρνητική (έχει φορά προς τα κάτω) για $y > y_{\Phi M}$ , όταν το ελατήριο είναι συσπειρωμένο.
- Είναι θετική (έχει φορά προς τα πάνω) για $y < y_{\Phi M}$ , όταν το ελατήριο είναι τεταμένο.

Εκτός από τη δύναμη ελατηρίου, στη σφαίρα δρα και το βάρος της. Η συνισταμένη δύναμη στη σφαίρα ισούται με:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{B} \Rightarrow \sum F = F_{\varepsilon\lambda} + B = -k(y - y_{\Phi M}) - mg$$

Η συνισταμένη δύναμη μηδενίζεται στη ΘΙ $y = 0$. Θέτοντας $\sum F = 0$ για $y = 0$, υπολογίζουμε τη θέση $y_{\Phi M}$:

$$-k(0 - y_{\Phi M}) - mg = 0 \Rightarrow k y_{\Phi M} = mg \Rightarrow y_{\Phi M} = \frac{mg}{k}$$

**Προσοχή**

Η θέση $y_{\Phi M} = \dfrac{mg}{k}$, στην οποία το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, **δεν** ταυτίζεται με τη θέση ισορροπίας $y = 0$ του σώματος - κατακόρυφου ελατηρίου.

Εάν αντικαταστήσουμε την τιμή $y_{\Phi M} = \dfrac{mg}{k}$ στην έκφραση για τη συνισταμένη δύναμη, βρίσκουμε:

$$\sum F = -k\left(y - \frac{mg}{k}\right) - mg = -ky$$

Επομένως, η **συνισταμένη** δύναμη είναι ανάλογη και αντίρροπη με τη μετατόπιση της σφαίρας από τη ΘΙ. Η σφαίρα εκτελεί ΑΑΤ.

**Συμπεράσματα**

- Ένα σώμα στερεωμένο σε κατακόρυφο ελατήριο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με **δύναμη επαναφοράς** τη συνισταμένη δύναμη $\sum \vec{F} = \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{B}$.
- Η σταθερά της ΑΑΤ είναι ίση με τη σταθερά ελατηρίου: $D = k$.

- Η σταθερά της ΑΑΤ **δεν** εξαρτάται από το βάρος $\vec{B}$ του σώματος.
- Λόγω του βάρους $\vec{B}$ του σώματος, η ΘΙ $y = 0$ **είναι διαφορετική** από τη θέση $y_{ΦΜ} = \dfrac{mg}{k}$, στην οποία το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

**Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:**

Ένα σώμα μάζας $m$ είναι αναρτημένο από ένα αβαρές, κατακόρυφο ελατήριο.

**2.5.1.** Όταν η ελεύθερη άκρη βρίσκεται στη θέση $y_{ΦΜ} = mg/k$ το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Σε εκείνη τη θέση, ποιο από τα επόμενα μεγέθη μηδενίζεται:
**(α)** η δύναμη ελατηρίου, **(β)** το βάρος του σώματος,
**(γ)** η συνισταμένη δύναμη στο σώμα.

**2.5.2.** Όταν η ελεύθερη άκρη βρίσκεται στη θέση ισορροπίας $y = 0$, ποιο από τα επόμενα μεγέθη μηδενίζεται:
**(α)** η δύναμη ελατηρίου, **(β)** το βάρος του σώματος,
**(γ)** η συνισταμένη δύναμη στο σώμα.

**2.5.3.** Εάν αναρτήσουμε ένα σώμα μάζας $2m$ στο **ίδιο** ελατήριο, θα μεταβληθεί:
**(α)** η σταθερά της ταλάντωσης, **(β)** η θέση ισορροπίας.

**Σημείωση**
Θα μελετήσουμε πιο εκτεταμένα το σύστημα σώματος - κατακόρυφου ελατηρίου στην **Ενότητα 2.16**. Θα δείξουμε ότι οι ακραίες θέσεις ταλάντωσης είναι συμμετρικές ως προς τη ΘΙ, και η ταχύτητα του σώματος καθορίζεται από τη θέση του.

**Ερωτήσεις Κατανόησης**
Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

| Α/Α | ΠΡΟΤΑΣΗ | Σωστό / Λάθος |
|---|---|---|
| 1 | Οποιαδήποτε κυκλική κίνηση είναι περιοδική. | |
| 2 | Ένας κύκλος μίας περιοδικής κίνησης ολοκληρώνεται όταν το σώμα επιστρέφει στο ίδιο σημείο. | |

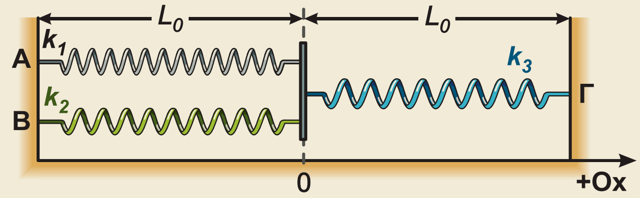
| | | |
|---|---|---|
| 3 | Η σχέση συχνότητας - περιόδου $f = 1/T$ ισχύει μόνο για κυκλικές κινήσεις. | |
| 4 | Κάθε ταλάντωση είναι ευθύγραμμη κίνηση. | |
| 5 | Κάθε ταλάντωση είναι επιταχυνόμενη κίνηση. | |
| 6 | Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι όλες οι επόμενες κινήσεις είναι ταλαντώσεις. Να σημειώσετε σε ποιες περιπτώσεις ο ισχυρισμός είναι σωστός/λανθασμένος. | |
| **α** | Η κίνηση της Σελήνης γύρω από τη Γη. | |
| **β** | Η παλινδρομική κίνηση ενός εκκρεμούς. | |
| **γ** | Η κίνηση του εμβόλου μίας μηχανής αυτοκινήτου. | |
| 7 | Σε μία ΑΑΤ, η συνισταμένη δύναμη: | |
| **α** | Είναι σταθερή. | |
| **β** | Έχει **σταθερή** φορά, προς τη ΘΙ. | |
| **γ** | Είναι ομόρροπη και ανάλογη με τη μετατόπιση από τη ΘΙ. | |
| **δ** | Είναι αντίρροπη και ανάλογη με τη μετατόπιση από τη ΘΙ. | |
| 8 | Εάν η συνισταμένη δύναμη είναι αντίρροπη και ανάλογη με τη μετατόπιση από τη ΘΙ, η κίνηση είναι: | |
| **α** | Κυκλική. | |
| **β** | Ευθύγραμμη, ομαλά επιταχυνόμενη. | |
| **γ** | Απλή Αρμονική Ταλάντωση. | |
| 9 | Μία μαθήτρια ισχυρίζεται ότι τα επόμενα σώματα εκτελούν ΑΑΤ. Να σημειώσετε σε ποιες περιπτώσεις ο ισχυρισμός είναι σωστός/λανθασμένος. | |
| **α** | Ένα σώμα στερεωμένο σε οριζόντιο ελατήριο, χωρίς τριβές. | |
| **β** | Η Γη, καθώς περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο. | |
| **γ** | Μία βάρκα που κινείται κατακόρυφα στην ήρεμη επιφάνεια μίας λίμνης. Να θεωρήσετε ότι το βυθισμένο μέρος της βάρκας είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με σταθερό εμβαδόν διατομής. | |

| | | |
|---|---|---|
| 10 | Η σταθερά $D$ μίας ΑΑΤ μπορεί να εκφρασθεί σε μονάδες $J/m^2$. | |
| 11 | Ένα σώμα είναι συνδεδεμένο σε οριζόντιο ελατήριο και εκτελεί ΑΑΤ σε λεία επιφάνεια. Όταν το ελατήριο συσπειρώνεται, το μέτρο της συνισταμένης δύναμης στο σώμα πάντοτε ελαττώνεται. | |
| 12 | Ένα σώμα είναι συνδεδεμένο σε οριζόντιο ελατήριο και κινείται σε τραχιά επιφάνεια με σταθερή κινητική τριβή. Η συνισταμένη δύναμη είναι ανάλογη και αντίρροπη με τη μετατόπιση από τη θέση $x = 0$, στην οποία το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. | |
| 13 | Δύο ομογενείς ξύλινοι κύλινδροι επιπλέουν στο ίδιο υγρό και εκτελούν ΑΑΤ. Οι σταθερές της ταλάντωσης είναι πάντοτε ίδιες, ανεξάρτητα από τη μάζα τους. | |
| 14 | Ένα σώμα επιπλέει μερικώς βυθισμένο σε υγρό, και εκτελεί ΑΑΤ. Η άνωση από το υγρό είναι η συνισταμένη δύναμη επαναφοράς. | |
| 15 | Σφαίρα είναι αναρτημένη σε κατακόρυφο αβαρές ελατήριο και εκτελεί ΑΑΤ. Η δύναμη ελατηρίου είναι πάντοτε αντίρροπη με τη μετατόπιση της σφαίρας από: | |
| **α** | Τη ΘΙ. | |
| **β** | Τη θέση, στην οποία το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. | |
| 16 | Ένα σώμα κρέμεται από αβαρές κατακόρυφο ελατήριο και ισορροπεί. Εάν αποκολληθεί ένα τμήμα του σώματος, το ύψος της ΘΙ από το έδαφος ελαττώνεται. | |
| 17 | Ένα σώμα κρέμεται από αβαρές κατακόρυφο ελατήριο και ισορροπεί. Εάν η ίδια διάταξη σώματος - ελατηρίου μεταφερθεί στη Σελήνη: | |
| **α** | Η ΘΙ μετατοπίζεται. | |
| **β** | Η σταθερά της ταλάντωσης ελαττώνεται. | |
| **γ** | Κατά την ταλάντωση του σώματος, η συνισταμένη δύναμη δεν μπορεί να μηδενισθεί σε καμία θέση. | |

**Ασκήσεις**

**Προβλήματα με ένα αστεράκι (*) απαιτούν σύνθεση εννοιών. Προβλήματα με δύο αστεράκια (**) απαιτούν χειρισμό σύνθετων μαθηματικών σχέσεων.**

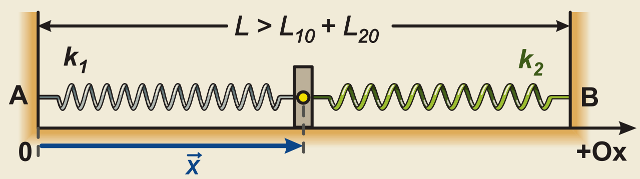
**1** Το πιο κάτω σχήμα δείχνει σε κάτοψη ένα σώμα μικρού πάχους, συνδεδεμένο με τρία ελατήρια. Τα ελατήρια έχουν το ίδιο φυσικό μήκος $L_0$, και σταθερές $k_1$, $k_2$, $k_3$. Η απόσταση μεταξύ των κατακόρυφων τοίχων είναι $2L_0$.




**Α.** Να εξηγήσετε γιατί στη Θέση Ισορροπίας του συστήματος σώματος - ελατηρίων, όλα τα ελατήρια έχουν ταυτόχρονα το φυσικό τους μήκος.

**Β.** Να θέσετε ως σημείο αναφοράς $x = 0$ του άξονα **Ox** τη θέση ισορροπίας. Να υπολογίσετε τη συνισταμένη δύναμη επαναφοράς, όταν το σώμα βρίσκεται σε μία θέση $x \neq 0$.

**2*** Ένα σώμα είναι συνδεδεμένο ανάμεσα στα δύο οριζόντια ελατήρια **1** και **2**, με φυσικά μήκη $L_{10}$, $L_{20}$ και σταθερές ελατηρίου $k_1$, $k_2$. Η απόσταση μεταξύ των κατακόρυφων τοίχων είναι $L > L_{10} + L_{20}$. Το σώμα μπορεί να κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο.




**Α.** Να εξηγήσετε γιατί στη Θέση Ισορροπίας του συστήματος σώματος-ελατηρίων, και τα δύο ελατήρια είναι τεταμένα.

**Β.** Να θεωρήσετε ως σημείο αναφοράς του άξονα **Ox** το σημείο **Α**, και ως θετική τη φορά από το **Α** προς το **Β**. Να αποδείξετε ότι η ΘΙ ικανοποιεί τη σχέση

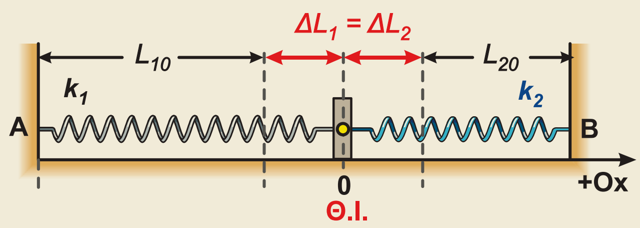
$$x_{\Theta\mathrm{I}} = \frac{k_1 L_{10} + k_2(L - L_{20})}{k_1 + k_2}$$

**Γ.** Να αποδείξετε ότι η συνισταμένη δύναμη σε μία τυχαία θέση $x$ ισούται με

$$\sum F = -(k_1 + k_2)(x - x_{\Theta\mathrm{I}})$$

**3*** Ένας κύβος μάζας $m$ είναι στερεωμένος ανάμεσα σε δύο αβαρή οριζόντια ελατήρια, όπως στο σχήμα, και μπορεί να κινείται πάνω σε μία λεία οριζόντια επιφάνεια. Όταν ο κύβος ισορροπεί, οι επιμηκύνσεις των ελατηρίων συνδέονται με τη σχέση $\Delta L_1 = \Delta L_2$.

**Α.** Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις στον κύβο.




**Β.** Να εξαγάγετε τη σχέση ανάμεσα στις σταθερές $k_1$, $k_2$ των δύο ελατηρίων.

**Γ.** Εάν ο κύβος απομακρυνθεί από τη ΘΙ και αφεθεί ελεύθερος, να δείξετε ότι θα εκτελεί ΑΑΤ.

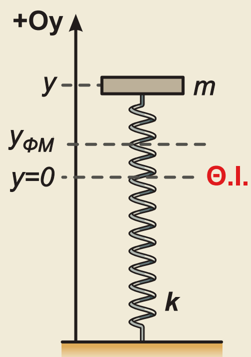
**Δ.** Να εκφράσετε τη σταθερά $D$ της ταλάντωσης σαν συνάρτηση της σταθεράς ελατηρίου $k_1$.

**4** Ένα σώμα είναι ολικά βυθισμένο σε ένα υγρό και ισορροπεί. Είναι δυνατόν εάν μετατοπισθεί κατακόρυφα να εκτελέσει ΑΑΤ;

**5** Ένα σώμα **Α**, μάζας $m$, κρέμεται από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k$ και ισορροπεί. Περιγράφουμε τη θέση του σώματος με τη βοήθεια του κατακόρυφου άξονα **Oy**. Η τιμή $y = 0$ αντιστοιχεί στη ΘΙ του σώματος **Α**, και η θετική φορά ορίζεται προς τα επάνω.

Αντικαθιστούμε το σώμα **Α** με ένα νέο σώμα **Β** μάζας $2m$. Να υπολογίσετε τη ΘΙ του σώματος **Β**.

**6** Ένα σώμα μάζας $m$ είναι συνδεδεμένο με ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k$, όπως στο σχήμα. Μετρούμε τη θέση του σώματος με τη βοήθεια του κατακόρυφου άξονα **Oy**. Θέτουμε ως $y = 0$ τη θέση ισορροπίας του σώματος και θετική τη φορά προς τα επάνω.

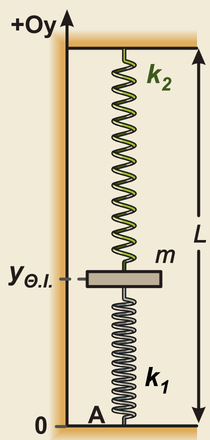



**Α.** Να εξαγάγετε μία έκφραση για τη δύναμη ελατηρίου, όταν το σώμα βρίσκεται σε μία τυχαία θέση $y$.

**Β.** Να προσδιορίσετε τη θέση $y_{ΦΜ}$ του σώματος, όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

**Γ.** Να υπολογίσετε τη συνισταμένη δύναμη επαναφοράς, όταν το σώμα βρίσκεται σε μία τυχαία θέση $y$. Το σώμα εκτελεί ΑΑΤ;

**7**** Ένα σώμα μάζας $m$ είναι συνδεδεμένο με δύο κατακόρυφα ελατήρια με φυσικά μήκη $L_{10}$, $L_{20}$, και σταθερές $k_1$, $k_2$, όπως στο σχήμα. Τα άλλα άκρα των ελατηρίων είναι συνδεδεμένα με ακλόνητους οριζόντιους τοίχους. Μετρούμε τη θέση του σώματος με τη βοήθεια του κατακόρυφου άξονα **Oy**. Θέτουμε ως $y = 0$ τη θέση του σημείου **Α** και θετική τη φορά προς τα επάνω.




**Α.** Στη Θέση Ισορροπίας του συστήματος σώματος - ελατηρίων, το ελατήριο 1 είναι συσπειρωμένο και το 2 είναι τεταμένο. Να δείξετε ότι η ΘΙ ισούται με:

$$y_{\Theta\mathrm{I}} = \frac{k_1 L_{10} + k_2(L - L_{20}) - mg}{k_1 + k_2}$$

**B.** Να δείξετε ότι όταν το σώμα βρίσκεται σε μία τυχαία θέση, η συνισταμένη δύναμη στο σώμα είναι:

$$\sum F = -(k_1 + k_2)(y - y_{\Theta\mathrm{I}})$$

## 2.6. Χαρακτηριστικά Μεγέθη της Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης

Σε μία ΑΑΤ, ο ταλαντωτής κινείται ανάμεσα σε δύο ακραίες θέσεις $\pm x_0$, οι οποίες είναι **συμμετρικές** ως προς τη θέση ισορροπίας. Η μέγιστη μετατόπιση από τη ΘΙ ονομάζεται **πλάτος** της ταλάντωσης. Η ταχύτητα του ταλαντωτή παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη αλγεβρική τιμή $\pm \upsilon_0$ (ανάλογα με την κατεύθυνση της κίνησης), όταν ο ταλαντωτής διέρχεται από τη ΘΙ.

Όπως για κάθε περιοδική κίνηση, ένας **κύκλος ταλάντωσης** ολοκληρώνεται όταν το σώμα επανέλθει για πρώτη φορά στην ίδια θέση με την ίδια ταχύτητα. Η χρονική διάρκεια ενός κύκλου ταλάντωσης είναι ίση με την **περίοδο** $T$. Ο αριθμός κύκλων ταλάντωσης ανά μονάδα χρόνου, $f = 1/T$, είναι η **συχνότητα** της ταλάντωσης. Η **κυκλική συχνότητα** της ταλάντωσης ισούται με $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$.

## 2.7. Διανύσματα Δύναμης Επαναφοράς, Επιτάχυνσης, Ταχύτητας και Μετατόπισης στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Σε αυτή την ενότητα συνοψίζουμε όσα μάθαμε για τα διανύσματα της δύναμης επαναφοράς, επιτάχυνσης, ταχύτητας και μετατόπισης ενός ΑΑΤ, σε διάφορα σημεία της τροχιάς του.

Επιλέγουμε ως σημείο αναφοράς τη ΘΙ του ΑΑΤ. Με αυτή τη θεώρηση, το διάνυσμα θέσης και **το διάνυσμα της μετατόπισης από τη ΘΙ ταυτίζονται**.

- Το βέλος του διανύσματος θέσης $\vec{x}$ (ισοδύναμα της μετατόπισης απο τη ΘΙ) έχει αρχή τη ΘΙ και τέλος το σημείο, στο οποίο βρίσκεται ο ΑΑΤ. Το διάνυσμα θέσης κατευθύνεται πάντοτε μακριά από τη ΘΙ.

- Η συνισταμένη δύναμη επαναφοράς $\sum\vec{F}$ και η θέση του ΑΑΤ συνδέονται με τη σχέση:

$$\sum\vec{F} = -D\vec{x}$$

Άρα, η δύναμη επαναφοράς $\sum\vec{F}$ μηδενίζεται στη ΘΙ. Σε οποιαδήποτε άλλη θέση, η δύναμη επαναφοράς έχει κατεύθυνση **προς** τη ΘΙ. Το μέτρο της $\sum\vec{F}$ μεταβάλλεται ανάλογα με το μέτρο της θέσης $\vec{x}$ του ΑΑΤ.

- Η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του ΑΑΤ συνδέεται με τη συνισταμένη δύναμη επαναφοράς $\sum\vec{F}$ με τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα:

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{m}\sum\vec{F} = -\frac{D}{m}\vec{x}$$

Άρα, η επιτάχυνση μεταβάλλεται παρόμοια με τη δύναμη επαναφοράς:

- Η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ μηδενίζεται στη ΘΙ, και σε οποιαδήποτε άλλη θέση έχει κατεύθυνση **προς** τη ΘΙ. Το μέτρο της $\vec{\alpha}$ μεταβάλλεται ανάλογα με το μέτρο της θέσης $\vec{x}$ του ΑΑΤ. Στις ακραίες θέσεις $\pm x_0$, η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης παίρνει τις ακραίες τιμές $\mp\frac{D}{m}x_0$. Η θετική θέση συνδυάζεται με αρνητική επιτάχυνση και αντιστρόφως, επειδή τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{x}$ είναι πάντοτε **αντίρροπα**.

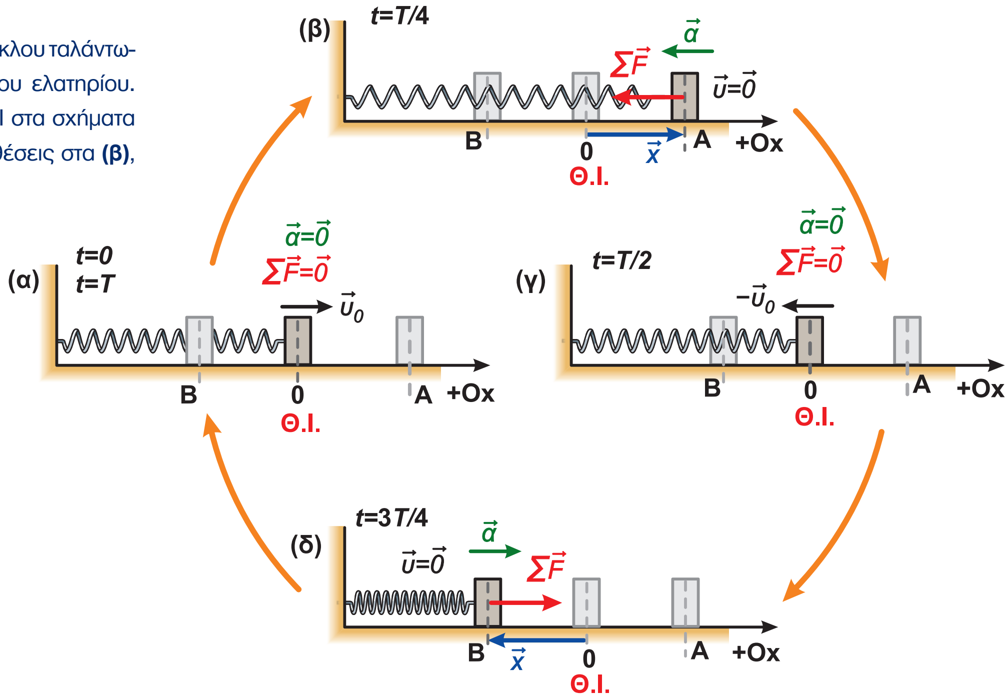
- Όταν ο ΑΑΤ **κινείται προς** τη ΘΙ, η ταχύτητα είναι **ομόρροπη** με την επιτάχυνση και το **μέτρο** της αυξάνεται. Όταν ο ΑΑΤ **απομακρύνεται από** τη ΘΙ, η ταχύτητα είναι **αντίρροπη** με την επιτάχυνση, και το μέτρο της ελαττώνεται. Η ταχύτητα αποκτά μέγιστο μέτρο στη ΘΙ και μηδενίζεται στα ακραία σημεία της τροχιάς.

- Η **αλγεβρική τιμή** της ταχύτητας μειώνεται όταν η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι **αρνητική** (η μετατόπιση από τη ΘΙ είναι θετική): $\Delta\upsilon = \alpha\Delta t < 0$. Ομοίως, η **αλγεβρική τιμή** της ταχύτητας αυξάνεται όταν η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι θετική (η μετατόπιση από τη ΘΙ είναι αρνητική).

Θα χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα το σύστημα σώματος - οριζόντιου ελατηρίου. Στην **Εικόνα 2-4** περιγράφουμε τον πλήρη κύκλο ταλάντωσης $\Theta\mathrm{I} \to \mathrm{A} \to \Theta\mathrm{I} \to \mathrm{B} \to \Theta\mathrm{I}$. Η θετική ακραία θέση αντιστοιχεί στο σημείο **Α** και η αρνητική ακραία θέση στο σημείο **Β**.

**Εικόνα 2-4**

Τέσσερα στιγμιότυπα ενός κύκλου ταλάντωσης του σώματος - οριζόντιου ελατηρίου. Το σώμα διέρχεται από τη ΘΙ στα σχήματα **(α)**, **(γ)** και από τις ακραίες θέσεις στα **(β)**, **(δ)**.




**Σχήμα (α)**

Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το σώμα βρίσκεται στη ΘΙ και κινείται με ταχύτητα $\upsilon_0$ προς τη θετική κατεύθυνση. Η δύναμη ελατηρίου και η επιτάχυνση έχουν μηδενικές τιμές. Το ελατήριο αρχίζει να επιμηκύνεται.

**Σχήμα (β)**

Το σώμα φθάνει στη μέγιστη δυνατή μετατόπιση $x_0 > 0$ με μηδενική ταχύτητα. Η δύναμη ελατηρίου έχει αρνητική κατεύθυνση (προς τη ΘΙ) και η επιτάχυνση αποκτά την πιο αρνητική αλγεβρική τιμή: $\alpha = \dfrac{F_{\varepsilon\lambda}}{m} = -\dfrac{k}{m}x_0$.

**Σχήμα (γ)**

Το σώμα διέρχεται από τη ΘΙ προς την αρνητική κατεύθυνση, με ταχύτητα $-\upsilon_0$. Η δύναμη ελατηρίου και η επιτάχυνση μηδενίζονται. Εξαιτίας της ταχύτητάς του, το σώμα συνεχίζει να κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, συσπειρώνοντας το ελατήριο.

**Σχήμα (δ)**

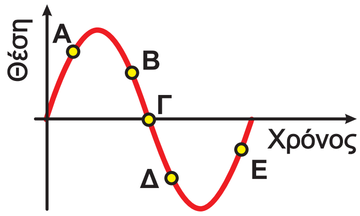
Το σώμα φθάνει στο δεύτερο ακραίο σημείο **Β** ($x = -x_0$), με μηδενική ταχύτητα. Η δύναμη ελατηρίου έχει θετική κατεύθυνση (προς τη ΘΙ). Το σώμα αρχίζει να κινείται προς τη ΘΙ με τη μέγιστη θετική επιτάχυνση $\alpha = \dfrac{k}{m}x_0$.

**Σχήμα (α)**

Τη χρονική στιγμή $t = T$, το σώμα επιστρέφει στη ΘΙ με ταχύτητα $\upsilon_0$. Ο κύκλος ταλάντωσης ολοκληρώνεται.

## Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

**2.7.1.** Το γράφημα θέσης - χρόνου ενός ΑΑΤ απεικονίζεται στο πιο κάτω σχήμα.

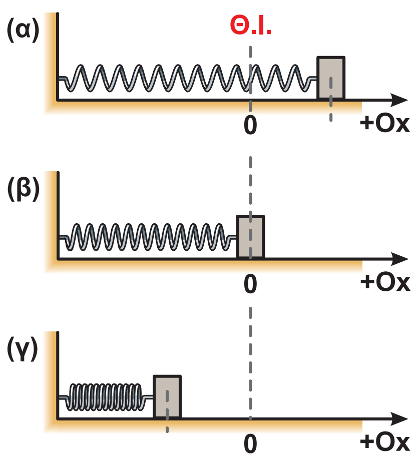



**Α.** Από τη φορά κίνησης του ΑΑΤ, να προσδιορίσετε και να ερμηνεύσετε το πρόσημο της ταχύτητάς του στα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε.

**Β.** Από τη φορά της μετατόπισης του ΑΑΤ ως προς τη ΘΙ, να προσδιορίσετε και να ερμηνεύσετε το πρόσημο της επιτάχυνσής του στα ίδια σημεία.

**Γ.** Σε ποια σημεία αυξάνεται και σε ποια μειώνεται το μέτρο της ταχύτητας;

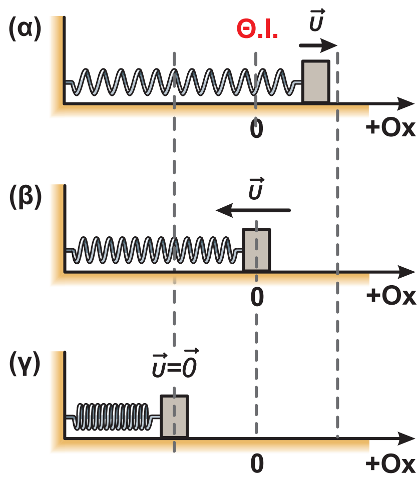
**2.7.2.** Το σώμα των σχημάτων **α-γ** είναι στερεωμένο σε οριζόντιο ελατήριο και εκτελεί ΑΑΤ σε λεία επιφάνεια. Να σχεδιάσετε υπό κλίμακα τα διανύσματα της θέσης (μετατόπισης από τη ΘΙ), της δύναμης επαναφοράς και της επιτάχυνσης του σώματος. Είναι δυνατόν να ζωγραφίσετε και το διάνυσμα της ταχύτητας, χωρίς επιπρόσθετες πληροφορίες;




**2.7.3.** Ποιο(α) από τα επόμενα μεγέθη μηδενίζεται στις ακραίες θέσεις της ΑΑΤ;
**(α)** Η θέση, **(β)** η ταχύτητα, **(γ)** η δύναμη επαναφοράς,
**(δ)** η επιτάχυνση.

**2.7.4.** Ποιο(α) από τα επόμενα μεγέθη μηδενίζεται στη ΘΙ;
**(α)** Η θέση, **(β)** η ταχύτητα, **(γ)** η δύναμη επαναφοράς, **(δ)** η επιτάχυνση.

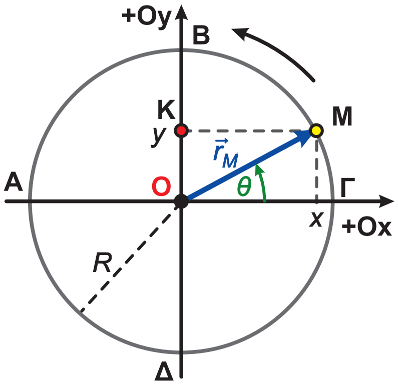
**2.7.5.** Το σώμα των σχημάτων **(α) - (γ)** είναι στερεωμένο σε οριζόντιο ελατήριο και εκτελεί ΑΑΤ σε λείο τραπέζι. Σε ποιό από τα σχήματα η **αλγεβρική τιμή** της ταχύτητας **(i)** αυξάνεται, **(ii)** ελαττώνεται, **(iii)** είναι στιγμιαία σταθερή;




## 2.8. Η Ομαλή Κυκλική Κίνηση αναλύεται σε δύο κάθετες Απλές Αρμονικές Ταλαντώσεις

Το υλικό σημείο **Μ** του επόμενου σχήματος κινείται αριστερόστροφα στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας $R$ με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega$. Θα **αποδείξουμε** ότι η **ομαλή κυκλική κίνηση** του σημείου Μ μπορεί να αναλυθεί σε δύο κάθετες απλές αρμονικές ταλαντώσεις. Από την αντιστοιχία μεταξύ της κυκλικής κίνησης και των ταλαντώσεων, θα εξαγάγουμε τις εξισώσεις θέσης - χρόνου και ταχύτητας - χρόνου της ΑΑΤ.

Θα μελετήσουμε την κίνηση της προβολής του **Μ** στις κάθετες μεταξύ τους διαμέτρους ΒΔ και ΑΓ.




Επιλέγουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων **Ox** και **Oy**, κατά μήκος των ΑΓ και ΒΔ. Στο σύστημα αυτό, το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{\mathrm{M}}$ του σημείου **Μ** έχει συνιστώσες $x$ και $y$, και μέτρο:

$$\left|\vec{r}_{\mathrm{M}}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = R$$

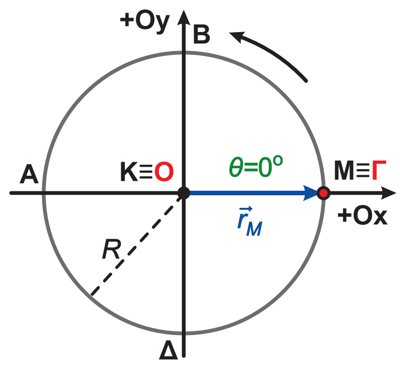
Η θέση του **Μ** περιγράφεται επίσης από τη γωνία $\theta$ ανάμεσα στο διάνυσμα $\vec{r}_{\mathrm{M}}$ και τον άξονα **Οx**.

Οι συνιστώσες $x$ και $y$ συνδέονται με τη γωνία $\theta$ με τις πιο κάτω σχέσεις:

$$x = R\sigma\upsilon\nu\theta\ ,\ y = R\eta\mu\theta$$

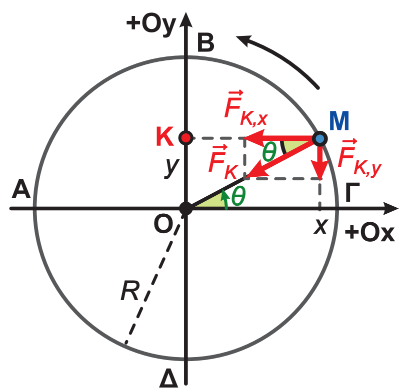
Η συνιστώσα $y$ εκφράζει τη θέση της προβολής **Κ** του σημείου **Μ** στον άξονα **Oy.** Στα επόμενα, εστιάζουμε την προσοχή μας στη συνιστώσα $y$.

Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$, το υλικό σημείο **Μ** έχει γωνία θέσης $\theta = 0^o$, και συμπίπτει με το σημείο **Γ.** Η προβολή **Κ** του σημείου **Μ** συμπίπτει με το σημείο **Ο** του άξονα **Oy**. Σε χρονικό διάστημα μίας περιόδου $T$, το **Μ** διέρχεται διαδοχικά από τα σημεία **Γ**, **Β**, **Α** και **Δ** της περιφέρειας, και επανέρχεται στο **Γ.** Στο **ίδιο χρονικό διάστημα**, η προβολή **Κ** διαγράφει τη διαδρομή ΟΒΟΔΟ πάνω στη διάμετρο ΒΔ.




Στο υλικό σημείο Μ δρα η κεντρομόλος συνισταμένη δύναμη $\vec{F}_K$, η οποία έχει σταθερό μέτρο $|\vec{F}_K| = m\omega^2 R$, ακτινική διεύθυνση και φορά προς το σημείο **Ο.** Σύμφωνα με την Αρχή της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων, η κίνηση της προβολής **Κ** στον άξονα **Oy** καθορίζεται από τη συνιστώσα $\vec{F}_{K,y}$ της $\vec{F}_K$ κατά μήκος του άξονα **Oy.**

Η ανάλυση της δύναμης $\vec{F}_K$ στις συνιστώσες $\vec{F}_{K,x}$ και $\vec{F}_{K,y}$ απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα. Υπολογίζουμε την αλγεβρική τιμή της συνιστώσας $\vec{F}_{K,y}$ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΚ:




$$F_{K,y} = -|\vec{F}_K|\eta\mu\theta = -(m\omega^2 R)\eta\mu\theta = -m\omega^2(R\eta\mu\theta) = -m\omega^2 y$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την έκφραση $y = R\eta\mu\theta$. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι τα μεγέθη $F_{K,y}$ και $\eta\mu\theta$ έχουν αντίθετα πρόσημα.

Για παράδειγμα, το $\eta\mu\theta$ είναι θετικό για γωνίες $0^o < \theta \leq 90^o$, ενώ η συνιστώσα $\vec{F}_{K,y}$ έχει φορά προς την αρνητική κατεύθυνση του **Oy**.

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι η αλγεβρική τιμή $F_{K,y}$ είναι ανάλογη και αντίρροπη με τη μετατόπιση $y$, και μηδενίζεται όταν η προβολή **Κ** συμπίπτει με το σημείο **Ο**, όπου $y = 0$.

**Συμπέρασμα**
Η προβολή **Κ** του σημείου **Μ** στον άξονα **Oy** εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση ανάμεσα σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου, με ΘΙ το κέντρο **Ο** του κύκλου, πλάτος ίσο με την ακτίνα $y_0 = R$ και περίοδο ίση με την περίοδο $T$ της ομαλής κυκλικής κίνησης.

Η σταθερά της ταλάντωσης είναι $D = m\omega^2 = \dfrac{4\pi^2 m}{T^2}$.

Να **παρατηρήσετε** ότι η σταθερά $D$ είναι ανεξάρτητη από το πλάτος $y_0 = R$ της ταλάντωσης.

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι η προβολή του σημείου **Μ** στον άξονα **Οx** εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση κατά μήκος της διαμέτρου **ΑΓ**, με την ίδια περίοδο και πλάτος (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση).

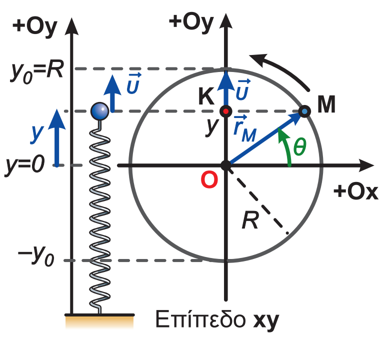
**Συνοψίζουμε**:

- Όταν ένα υλικό σημείο **Μ** εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με περίοδο $T$, οι προβολές του σημείου σε δύο κάθετες διαμέτρους του κύκλου εκτελούν Απλή Αρμονική Ταλάντωση.
- Οι ταλαντώσεις των προβολών του σημείου **Μ** έχουν την **ίδια περίοδο** $T$ με την ομαλή κυκλική κίνηση, και **πλάτος** ίσο με την ακτίνα του κύκλου.
- Η σταθερά $D$ των ταλαντώσεων είναι ανεξάρτητη του πλάτους και αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της περιόδου, για δεδομένη μάζα.

## 2.9. Η Περίοδος της ΑΑΤ είναι ανεξάρτητη από το Πλάτος της Ταλάντωσης

Εάν μελετήσουμε πειραματικά την ΑΑΤ σώματος σε κατακόρυφο ή οριζόντιο ελατήριο, διαπιστώνουμε ότι **η περίοδος της ταλάντωσης δεν εξαρτάται από το πλάτος**. Μπορούμε να εξηγήσουμε γραφικά αυτή την παρατήρηση, χρησιμοποιώντας την προβολή της ομαλής κυκλικής κίνησης σε μία διάμετρο του κύκλου.

Το επόμενο σχήμα απεικονίζει **σε κάτοψη** ένα σώμα μάζας $m$, στερεωμένο σε οριζόντιο ελατήριο. Το σώμα ταλαντώνεται στο οριζόντιο επίπεδο **xy** (το επίπεδο της σελίδας). Σχεδιάζουμε τον άξονα **Oy** κατά μήκος του ελατηρίου, όπως στο σχήμα. Το σώμα βρίσκεται στη θέση $y = 0$ όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

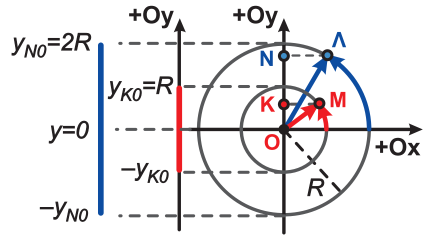



Θεωρούμε ένα υλικό σημείο **Μ**, το οποίο έχει την ίδια μάζα $m$ με το σώμα, και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

Αντιστοιχίζουμε τη θέση του σώματος με την προβολή **Κ** στον άξονα **Oy** του σημείου **Μ**. Από την **Ενότητα 2.8** γνωρίζουμε ότι:

- Το πλάτος της ταλάντωσης ισούται με την ακτίνα του κύκλου.
- Η περίοδος της ταλάντωσης ισούται με την περίοδο της ομαλής κυκλικής κίνησης.
- Η ΘΙ της ταλάντωσης αντιστοιχεί με το κέντρο του κύκλου.

Στο διπλανό σχήμα, το σημείο **Μ** περιστρέφεται με περίοδο $T$ σε κυκλική τροχιά ακτίνας $R$, και η προβολή του Κ εκτελεί ΑΑΤ με περίοδο $T$ και πλάτος $R$. Το σημείο **Λ** περιστρέφεται με την **ίδια** περίοδο $T$, σε κυκλική τροχιά ακτίνας $2R$. Η προβολή **Ν** του σημείου **Λ** εκτελεί ΑΑΤ με περίοδο $T$ και πλάτος $2R$.




**Συμπεραίνουμε**:

Η περίοδος της Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης **δεν** εξαρτάται από το πλάτος της ταλάντωσης.

## 2.10. Υπολογισμός της Περιόδου της ΑΑΤ από τη Σταθερά της ΑΑΤ

Το υλικό σημείο **Μ** εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση υπό τη δράση κεντρομόλου δύναμης με μέτρο:

$$\left|\vec{F}_K\right| = m\omega^2 R$$

Στην **Ενότητα 2.8** αποδείξαμε ότι η συνιστώσα της κεντρομόλου δύναμης στη διεύθυνση **Οy** ισούται με:

$$F_{K,y} = -\left(m\omega^2 R\right)\eta\mu\theta = -m\omega^2\left(R\eta\mu\theta\right) = -m\omega^2 y$$

Εξαιτίας αυτής της μορφής, συμπεράναμε ότι η προβολή του σημείου στη διεύθυνση **Οy** εκτελεί ΑΑΤ, με σταθερά ταλάντωσης $m\omega^2$.

Σε μια γενική ΑΑΤ, η συνισταμένη δύναμη στο σώμα είναι ανάλογη και αντίρροπη με τη μετατόπιση του σώματος από τη ΘΙ:

$$\sum\vec{F} = -D\vec{y} \Rightarrow \sum F = -Dy$$

Αντιστοιχίζοντας τις δύο σταθερές ταλάντωσης $D$ και $m\omega^2$, καταλήγουμε στην εξής σχέση μεταξύ της περιόδου ταλάντωσης και της σταθεράς ΑΑΤ:

## Σχέση ανάμεσα στην Περίοδο και τη Σταθερά της ΑΑΤ

$$D = m\omega^2 = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

## Εφαρμογή στο Οριζόντιο και Κατακόρυφο Ελατήριο

Στην περίπτωση της ταλάντωσης σώματος σε οριζόντιο ή κατακόρυφο ελατήριο, αποδείξαμε στις **Ενότητες 2.4 και 2.5** ότι η σταθερά $D$ είναι ίση με τη σταθερά ελατηρίου: $D = k$. Άρα:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

**Σημείωση**
Η σχέση αυτή ισχύει για **αβαρές** ελατήριο, που ταλαντώνεται χωρίς τριβές.

Να παρατηρήσετε ότι η περίοδος ταλάντωσης σώματος συνδεδεμένου σε οριζόντιο ή κατακόρυφο ελατήριο:

- **Αυξάνεται**, εάν αυξηθεί η **μάζα** του σώματος.
- **Ελαττώνεται**, εάν αυξηθεί η **σταθερά** ελατηρίου.
- **Δεν** εξαρτάται από το πλάτος της ταλάντωσης.
- **Δεν** εξαρτάται από την επιτάχυνση της βαρύτητας.

## Εφαρμογές της Σχέσης για την Περίοδο Ταλάντωσης Σώματος - Ελατηρίου

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση για την περίοδο ταλάντωσης σώματος - ελατηρίου με τους εξής τρόπους:

**1.** Εάν γνωρίζουμε τη σταθερά ελατηρίου $k$ **και** τη μάζα $m$ του σώματος, υπολογίζουμε την περίοδο $T$. Άρα, η πιο πάνω σχέση χρησιμεύει για τη μέτρηση του χρόνου (κάθε κύκλος ταλάντωσης διαρκεί χρονικό διάστημα $\Delta t = T$).

**2.** Εάν γνωρίζουμε τη **σταθερά ελατηρίου**, μπορούμε από την περίοδο ταλάντωσης να προσδιορίσουμε τη μάζα ενός σώματος:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow m = \frac{T^2}{4\pi^2}k$$

(Η σχέση είναι σωστή, εάν η μάζα του ελατηρίου και δυνάμεις τριβών μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες).

**3.** Εάν γνωρίζουμε τη **μάζα** του σώματος, μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά ελατηρίου:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2}{T^2}\,m$$

### Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

**2.10.1.** Ένα σφαιρίδιο μάζας 5,00 g είναι αναρτημένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 8{,}0$ N/m, και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε λείο επίπεδο. Να υπολογίσετε την περίοδο ταλάντωσης του σώματος, εάν απομακρύνουμε το σώμα από την ΘΙ κατά **(α)** 5,00 cm, **(β)** 10,0 cm.

**2.10.2.** Ένας μαθητής διατυπώνει τον εξής συλλογισμό: «*Όταν το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνεται, το σώμα χρειάζεται να διανύσει μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ των ακραίων σημείων ταλάντωσης. Άρα, η περίοδος της ταλάντωσης του ελατηρίου αυξάνεται με το πλάτος*». Είναι σωστός αυτός ο συλλογισμός;

**2.10.3.** Πώς θα μεταβληθεί η συχνότητα ταλάντωσης ενός σώματος συνδεδεμένου σε αβαρές ελατήριο, εάν:

**Α.** Τετραπλασιασθεί η μάζα του σώματος;

**Β.** Τετραπλασιασθεί η σταθερά ελατηρίου;

**Γ.** Μεταφέρουμε το σύστημα σώματος-ελατηρίου σε μία περιοχή του μακρινού διαστήματος, όπου η βαρύτητα είναι αμελητέα;

**Ερωτήσεις Κατανόησης**

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

| Α/Α | ΠΡΟΤΑΣΗ | Σωστό / Λάθος |
|---|---|---|
| 1 | Σε μία ΑΑΤ, η συνισταμένη δύναμη: | |
| **α** | Αποκτά μέγιστο μέτρο στη ΘΙ. | |
| **β** | Έχει πάντοτε κατεύθυνση προς τη ΘΙ (εκτός εάν το σώμα βρίσκεται στη ΘΙ). | |
| **γ** | Έχει πάντοτε την ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα του σώματος. | |

| | | |
|---|---|---|
| **δ** | Μηδενίζεται στις ακραίες θέσεις της κίνησης. | |
| 2 | Σε μία ΑΑΤ, η ταχύτητα του σώματος: | |
| **α** | Μηδενίζεται στις ακραίες θέσεις ταλάντωσης. | |
| **β** | Είναι πάντοτε αντίρροπη από την επιτάχυνση. | |
| **γ** | Είναι πάντοτε ομόρροπη με την επιτάχυνση. | |
| **δ** | Αυξάνεται κατά μέτρο, όταν το σώμα κινείται προς τη ΘΙ. | |
| **ε** | Ελαττώνεται κατά μέτρο, όταν το σώμα απομακρύνεται από τη ΘΙ. | |
| 3 | Στη ΘΙ της ΑΑΤ μηδενίζεται: | |
| **α** | Η ταχύτητα. | |
| **β** | Η επιτάχυνση. | |
| **γ** | Η συνισταμένη δύναμη. | |
| 4 | Στις ακραίες θέσεις της ΑΑΤ μηδενίζεται: | |
| **α** | Η ταχύτητα. | |
| **β** | Η επιτάχυνση. | |
| **γ** | Η συνισταμένη δύναμη. | |
| 5 | Η περίοδος οποιασδήποτε ταλάντωσης δεν εξαρτάται από το πλάτος της. | |
| 6 | Εάν ένα υλικό σημείο εκτελεί κυκλική κίνηση με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, η προβολή του σε μία διάμετρο του κύκλου εκτελεί ΑΑΤ. | |
| 7 | Η ομαλή κυκλική κίνηση ενός υλικού σημείου Μ αναλύεται σε δύο ΑΑΤ, τις οποίες εκτελούν οι προβολές του σημείου σε δύο κάθετες διαμέτρους του κύκλου. | |
| 8 | Όταν το υλικό σημείο Μ ολοκληρώνει μία περιφέρεια κύκλου, η προβολή του σε μία διάμετρο του κύκλου συμπληρώνει μισό κύκλο ταλάντωσης. | |
| 9 | Εάν αυξήσουμε το πλάτος της ταλάντωσης ενός ΑΑΤ, αυξάνεται και η περίοδός του. | |
| 10 | Σε μία ΑΑΤ, εάν η μάζα του ταλαντωτή είναι αμετάβλητη, πρέπει να τετραπλασιασθεί η σταθερά της ταλάντωσης για να διπλασιασθεί η συχνότητα. | |

| | | |
|---|---|---|
| 11 | Σε οποιαδήποτε ΑΑΤ, η σταθερά της ταλάντωσης διπλασιάζεται εάν διπλασιασθεί η μάζα του ταλαντωτή. | |
| 12 | Ένα σώμα είναι αναρτημένο σε οριζόντιο ελατήριο και κινείται σε λείο επίπεδο. Μπορούμε να **αυξήσουμε** την περίοδο της ταλάντωσής του εάν: | |
| **α** | Αυξήσουμε τη μάζα του. | |
| **β** | Χρησιμοποιήσουμε πιο μαλακό ελατήριο (με μικρότερη σταθερά). | |
| **γ** | Συνδέσουμε παράλληλα ένα πανομοιότυπο ελατήριο. | |
| 13 | Ένα σώμα είναι αναρτημένο σε κατακόρυφο ελατήριο. Εάν μεταφέρουμε το σώμα στην επιφάνεια της Σελήνης, όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι μικρότερη, θα μεταβληθεί: | |
| **α** | Η ΘΙ του σώματος. | |
| **β** | Η περίοδος της ταλάντωσης. | |
| 14 | Εάν συνδέσουμε ένα σώμα ξεχωριστά σε δύο οριζόντια αβαρή ελατήρια 1 και 2, εκτελεί ΑΑΤ με κυκλικές συχνότητες $\omega_1$ και $\omega_2$, αντίστοιχα. Εάν συνδέσουμε το σώμα ανάμεσα στα ελατήρια, θα εκτελεί ΑΑΤ με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$. | |

**Ασκήσεις**

**Προβλήματα με αστεράκι (*) απαιτούν σύνθεση εννοιών.**

**1** Ένα σώμα μάζας $m = 0{,}500$ kg είναι συνδεδεμένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 100{,}0$ N/m, και μπορεί να μετακινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο.
Να υπολογίσετε την κυκλική συχνότητα $\omega$ και την περίοδο $T$ της ταλάντωσης του σώματος.

**2** Θέλετε να κατασκευάσετε ένα σύστημα, που να λειτουργεί ως ρολόι με περίοδο ταλάντωσης $T \cong 1{,}0$ s. Έχετε στη διάθεσή σας ένα σώμα μάζας $m = 0{,}100$ kg και ελατήρια με σταθερές $k_1 = 2{,}0$ N/m, $k_2 = 4{,}0$ N/m και $k_3 = 8{,}0$ N/m. Ποιο από τα ελατήρια θα επιλέγατε να συνδέσετε με το σώμα;

**3** Στη Φυσική περιγράφουμε συχνά τους χημικούς δεσμούς ως αβαρή «ελατήρια», που ικανοποιούν τον νόμο του Hooke. Ένα άτομο άνθρακα είναι προσκολλημένο με χημικό δεσμό σε μία μεταλλική επιφάνεια, και ταλαντώνεται με κυκλική συχνότητα $\omega = 10^{14}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Να υπολογίσετε τη σταθερά ελατηρίου του δεσμού άνθρακα - επιφάνειας. Δίδεται ότι η μάζα του ατόμου άνθρακα είναι $m = 2{,}0 \times 10^{-23}$ g.

**Σημείωση**
Προτού λύσετε τις επόμενες ασκήσεις, σας προτείνουμε να συμβουλευθείτε ξανά τις **Ενότητες 2.4 - 2.5**.

**4** Έχετε στη διάθεσή σας ένα κουτί μάζας 0,25 kg και δύο ελατήρια με το ίδιο φυσικό μήκος και με σταθερές $k_1 = 8{,}0$ N/m και $k_2 = 12{,}0$ N/m. Να υπολογίσετε την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης του κουτιού, εάν το συνδέσετε παράλληλα στα ελατήρια, ή ανάμεσα στα ελατήρια.

**5*** Ένας ομογενής ξύλινος κύβος ακμής $L = 0{,}15$ m επιπλέει σε ένα δοχείο με νερό. Πιέζουμε ελαφρά τον κύβο προς τα κάτω, και τον αφήνουμε ελεύθερο. Να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης του κύβου, θεωρώντας την αντίσταση του νερού αμελητέα. Η πυκνότητα του νερού στους $25^o$ C είναι $\rho_\nu = 1{,}00$ g/cm$^3$. Να θεωρήσετε ότι η πυκνότητα του ξύλου είναι $\rho_\xi = 0{,}80$ g/cm$^3$.

**6*** Ένα πλοίο επιπλέει στη θάλασσα. Να προσεγγίσετε το βυθισμένο τμήμα του πλοίου σαν ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, με επιφάνεια διατομής $S$ και ύψος $h$.

**Α.** Να δείξετε ότι η περίοδος της κατακόρυφης ταλάντωσης που εκτελεί το πλοίο ισούται με $T = 2\pi\sqrt{h/g}$.

**Β.** Να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης για $h = 10{,}0$ m.

**7** Το μόριο του οξυγόνου ($O_2$) αποτελείται από δύο άτομα οξυγόνου, που συνδέονται μεταξύ τους με χημικό δεσμό. Σε ένα τυπικό μοντέλο του μορίου $O_2$, θεωρούμε ότι τα δύο άτομα είναι υλικά σημεία, που συνδέονται μεταξύ τους με αβαρές ελατήριο. Η συχνότητα ταλάντωσης των ατόμων οξυγόνου στο μόριο $O_2$ ισούται με $f = 4{,}9 \times 10^{13}$ Hz. Να υπολογίσετε τη σταθερά ελατηρίου του δεσμού. Δίδεται ότι η μάζα του ατόμου του οξυγόνου ισούται με $2{,}66 \times 10^{-23}$ g.

**8** Ένα σημειακό σώμα μάζας $m$ ισορροπεί στερεωμένο στην ελεύθερη άκρη κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k$ και αμελητέας μάζας. Η άλλη άκρη του ελατηρίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο ταβάνι. Θέτουμε ως $y = 0$ τη θέση του σώματος, και θεωρούμε ως θετική τη φορά προς τα επάνω.
Ξαφνικά αποκολλάται από το σώμα ένα τμήμα **Α** μάζας $m/2$. Το υπόλοιπο σώμα (τμήμα **Β**) παραμένει συνδεδεμένο στο ελατήριο.

**Α.** Να προσδιορίσετε τη νέα θέση ισορροπίας του συστήματος, που αποτελείται από το ελατήριο και το τμήμα **Β**.

**Β.** Να περιγράψετε την κίνηση του τμήματος **Β**.

**Γ.** Να προσδιορίσετε τη συχνότητα και το πλάτος της ταλάντωσης.

## 2.11. Σχέση Θέσης - Χρόνου στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

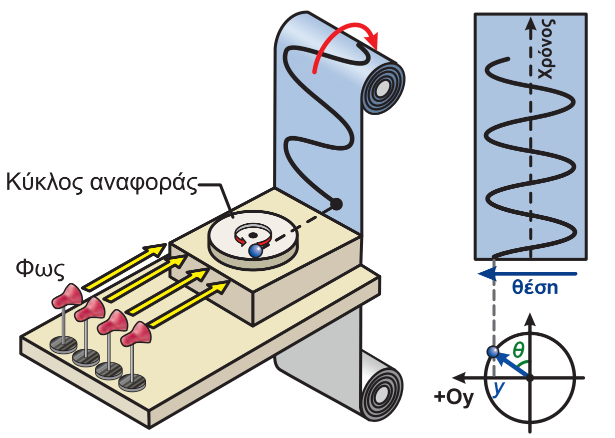
Από τον ορισμό της ΑΑΤ προκύπτει ότι η επιτάχυνση της ΑΑΤ **μεταβάλλεται** με τον χρόνο. Γι' αυτό, η εξίσωση θέσης - χρόνου της ΑΑΤ είναι διαφορετική από τις αντίστοιχες εξισώσεις της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης και της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.

Βασιζόμενοι στις γνώσεις μας για την ομαλή κυκλική κίνηση, θα **αποδείξουμε** ότι η εξίσωση θέσης - χρόνου της ΑΑΤ έχει την ημιτονοειδή μορφή:

$$y = y_0 ημ(\omega t + \theta_0)$$

Το μοντέλο του επόμενου σχήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για εποπτική αναπαράσταση της εξίσωσης θέσης - χρόνου της ΑΑΤ.

Το μοντέλο αποτελείται από μια σφαίρα στερεωμένη σε μία οριζόντια πλατφόρμα. Η πλατφόρμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, και η σφαίρα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Εάν φωτίσουμε τη σφαίρα με μία οριζόντια δέσμη φωτός και παρατηρήσουμε τη σκιά της σε έναν κατακόρυφο τοίχο, θα διαπιστώσουμε ότι εκτελεί **περιοδική παλινδρομική κίνηση**. Στην **Ενότητα 2.8** αποδείξαμε ότι η κίνηση αυτή είναι ΑΑΤ.




Εάν προβάλλουμε τη σκιά σε φιλμ που κινείται κατακόρυφα με σταθερή ταχύτητα, θα διαπιστώσουμε ότι το ίχνος της σκιάς είναι ημιτονοειδής συνάρτηση της μορφής $y = y_0 ημ(\omega t + \theta_0)$. Ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί στον χρόνο, και ο οριζόντιος άξονας **Oy** καταγράφει τη θέση της σκιάς.

Η παρατήρηση αυτή επεξηγείται από τους νόμους της κυκλικής κίνησης, ως εξής:

Η σφαίρα αντιστοιχεί στο σημείο **Μ**, που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, και η σκιά της στην προβολή **Κ** του σημείου σε μία διάμετρο του κύκλου. Ταυτίζουμε τη διεύθυνση, στην οποία κινείται η προβολή **Κ**, με τον άξονα **Oy.** Η θέση $y$ της προβολής **Κ** ισούται με

$$y = y_0 \eta\mu\theta$$

όπου $\theta$ είναι η γωνία θέσης του σημείου **Μ** ως προς τον **Ox** και $y_0 = R$ είναι το πλάτος της ταλάντωσης. Η εξίσωση γωνίας θέσης - χρόνου της ομαλής κυκλικής κίνησης είναι:

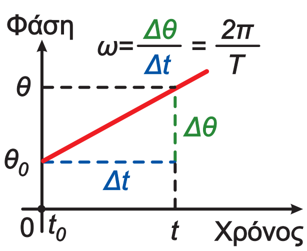
$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

Άρα, η θέση $y$ έχει την ακόλουθη εξάρτηση από τον χρόνο:

$$y = y_0 \eta\mu(\omega t + \theta_0)$$

Η πιο πάνω σχέση ισχύει γενικά για οποιαδήποτε Απλή Αρμονική Ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\omega$ και πλάτος $y_0$.

**Συμπέρασμα**
Η θέση του απλού αρμονικού ταλαντωτή (ως προς τη ΘΙ) είναι **ημιτονοειδής** συνάρτηση του χρόνου.




Το όρισμα του ημιτόνου $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ ονομάζεται **φάση της ταλάντωσης**. Η γραφική παράσταση φάσης - χρόνου είναι ευθεία, με κλίση ίση με την **κυκλική συχνότητα** της ταλάντωσης, $\omega = 2\pi / T$. Η αρχική φάση καθορίζει τη μετατόπιση του σώματος για $t = 0$:

$$y(t = 0) = y_0 \eta\mu\theta_0$$

Για να υπολογίσουμε τη **φάση** ενός ταλαντωτή, ή τη **μεταβολή φάσης** σε κάποιο χρονικό διάστημα, μπορούμε να φανταζόμαστε ένα υλικό σημείο **Μ**, που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Μπορούμε να αντιστοιχίζουμε τον ταλαντωτή με την προβολή **Κ** του σημείου **Μ** σε μία διάμετρο κατά τη διεύθυνση Oy:

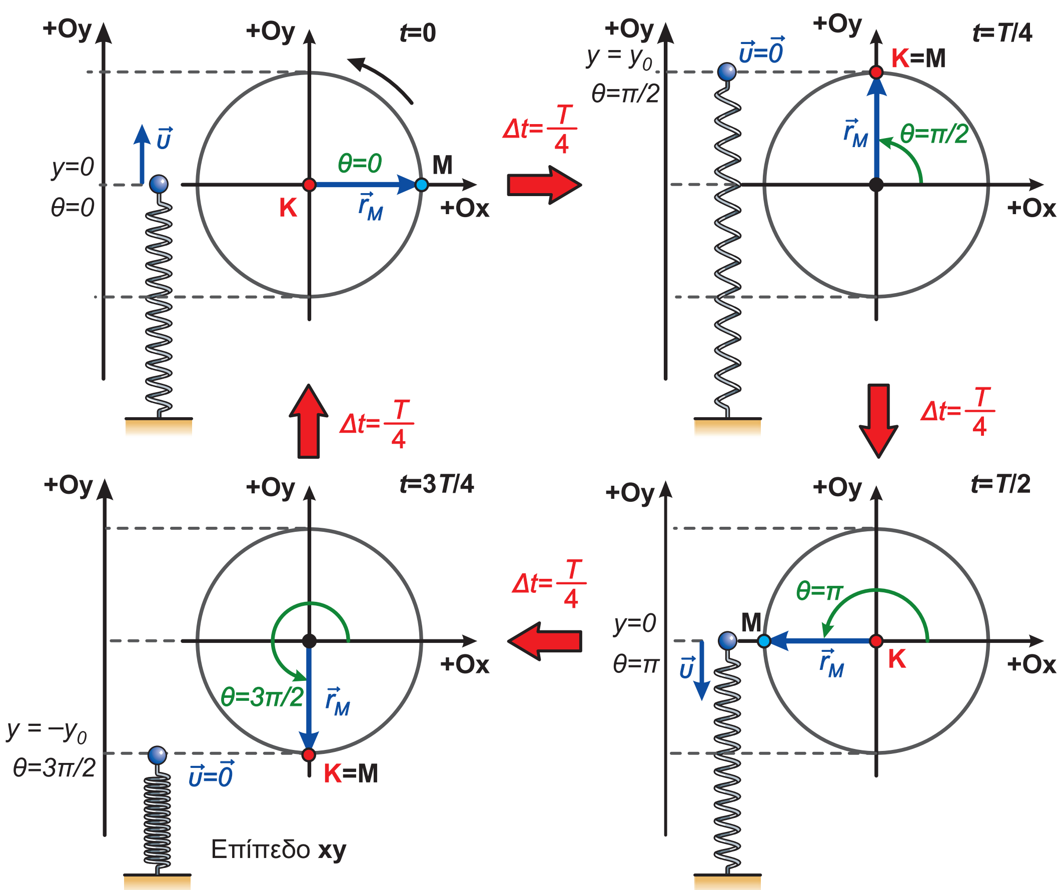
- Η φάση $\theta$ της προβολής **Κ** ισούται με τη γωνία θέσης $\theta$ του σημείου **Μ.**
- Η μεταβολή $\Delta\theta$ στη φάση της προβολής **Κ**, σε ένα χρονικό διάστημα $\Delta t$, ισούται με τη μεταβολή στη γωνία θέσης του σημείου **Μ** στο ίδιο χρονικό διάστημα.

Στην **Εικόνα 2-5** απεικονίζονται στιγμιότυπα ενός υλικού σημείου **Μ**, που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Στην ίδια εικόνα απεικονίζεται η προβολή **Κ** του σημείου **Μ** στον άξονα **Oy**. Η προβολή **Κ** εκτελεί ΑΑΤ πάνω στη διάμετρο του κύκλου. Για να απεικονίζουμε σχηματικά την ΑΑΤ της προβολής **Κ**, σχεδιάζουμε σε κάτοψη ένα σώμα, που συνδέεται με οριζόντιο ελατήριο και εκτελεί ΑΑΤ κατά μήκος του **Oy**. Η θέση του σώματος στον άξονα **Oy** συμπίπτει με τη θέση της προβολής **Κ**.

Σε κάθε στιγμιότυπο, η γωνία θέσης του σημείου **Μ** συμπίπτει με τη φάση ταλάντωσης του σημείου **Κ**.

Ξεκινούμε από το **πάνω αριστερά** σχήμα και πηγαίνουμε δεξιόστροφα, όπως οι δείκτες του ρολογιού. Σε κάθε χρονικό διάστημα $\Delta t = T/4$, το σημείο **Μ** διαγράφει 1/4 της περιφέρειας του κύκλου, και η γωνία θέσης του αυξάνεται κατά $\pi/2$ rad. Η προβολή **Κ** του σημείου **Μ** στον άξονα **Oy** συμπληρώνει 1/4 του κύκλου ταλάντωσης, και η φάση της αυξάνεται κατά $\pi/2$ rad.

**Εικόνα 2-5**
Το σημείο **Μ** εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, και η προβολή **Κ** στον άξονα **Oy** εκτελεί ΑΑΤ. Η γωνία θέσης του σημείου **Μ** ισούται με τη φάση της προβολής **Κ**.

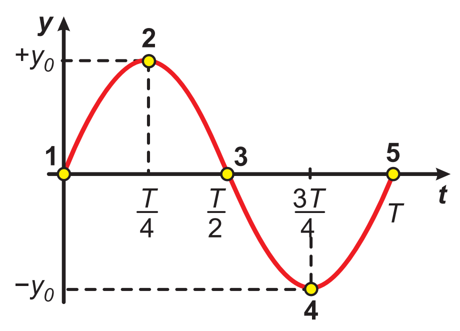


Στην **Εικόνα 2-6** απεικονίζεται η γραφική παράσταση θέσης - χρόνου της ΑΑΤ στον πρώτο κύκλο ταλάντωσης (διάστημα 0 - $T$), **για την περίπτωση που η αρχική φάση** $\theta_0 = 0$. Στον **Πίνακα 2-1** καταγράφονται οι τιμές της φάσης και της θέσης του ταλαντωτή, για διάφορες χρονικές στιγμές στο ίδιο διάστημα 0 - $T$.

Πίνακας 2-1

| **Χρονική Στιγμή** $t$ | **Φάση** $\theta = (2\pi/T)t$ | $\eta\mu\theta$ | **Θέση** $y = y_0 \eta\mu\omega t$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| $T/4$ | $\pi/2$ | 1 | $y_0$ |
| $T/2$ | $\pi$ | 0 | 0 |
| $3T/4$ | $3\pi/2$ | –1 | $-y_0$ |
| $T$ | $2\pi$ | 0 | 0 |

Εικόνα 2-6




Τη στιγμή $t = 0$, ο ταλαντωτής βρίσκεται στη ΘΙ $y = 0$ και κινείται προς τη θετική κατεύθυνση. Σε διαδοχικά διαστήματα $T/4$, η φάση του αυξάνεται κατά $\pi/2$ rad.

Άρα:

- Τη χρονική στιγμή $T/4$, ο ταλαντωτής φθάνει για πρώτη φορά στην ακραία θέση $y = y_0$.
- Τη στιγμή $T/2$ επιστρέφει στη ΘΙ και συνεχίζει να κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση.
- Τη στιγμή $3T/4$ φθάνει στη δεύτερη ακραία θέση $y = -y_0$.
- Τη στιγμή $T$ επανέρχεται στη ΘΙ, συμπληρώνοντας έναν πλήρη κύκλο.

### Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

**2.11.1.** Πώς μεταβάλλεται η φάση ενός ταλαντωτή σε χρονικό διάστημα $T/4$, $T/2$, $3T/4$ και $T$;

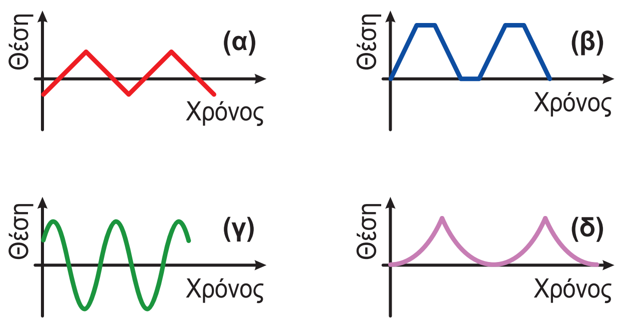
**2.11.2.** Ένας ΑΑΤ έχει αρχική φάση $\theta_0 = \pi/4$ τη χρονική στιγμή $t = 0$.

**Α.** Ποια είναι η αρχική θέση σαν συνάρτηση του πλάτους ταλάντωσης;

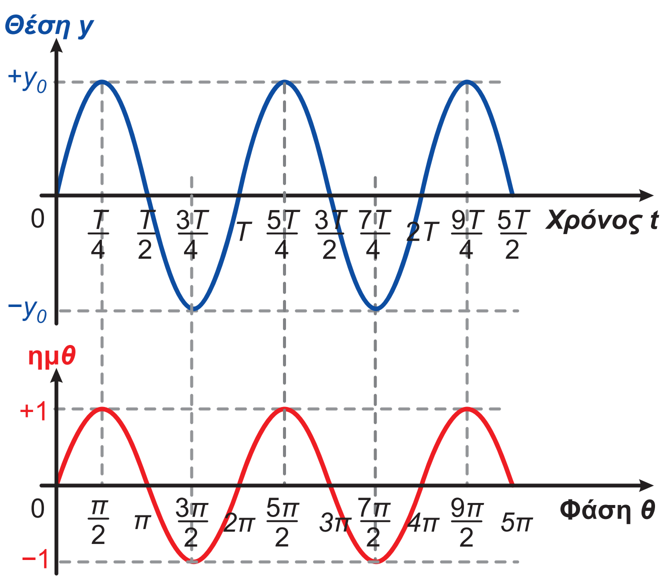
**Β.** Ποια είναι η φάση του ταλαντωτή τις στιγμές $T/4$, $T/2$, $3T/4$ και $T$;

**Γ.** Ποια θα είναι η θέση του ταλαντωτή, σαν συνάρτηση του πλάτους ταλάντωσης $y_0$ τις χρονικές στιγμές $T/4$, $T/2$, $3T/4$ και $T$;

**2.11.3.** Στα πιο κάτω σχήματα απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις διαφόρων περιοδικών κινήσεων. Ποια/ες από αυτές αντιστοιχεί/ούν σε ΑΑΤ;




Στο πιο κάτω σχήμα απεικονίζουμε τη γραφική παράσταση θέσης - χρόνου του ίδιου ταλαντωτή στο μεγαλύτερο χρονικό διάστημα $0 - \frac{5T}{2}$.




**Η αρχική φάση είναι ίση με μηδέν**, και η κίνηση επαναλαμβάνεται σε **ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου**, $\Delta t = nT$, όπου $n = 1, 2, \ldots$ θετικός ακέραιος. Άρα:

- Τις στιγμές $T, 2T, \ldots, nT$, η φάση είναι άρτιο πολλαπλάσιο του $\pi$: ο ταλαντωτής διέρχεται από τη ΘΙ και κινείται προς τη θετική κατεύθυνση.
- Τις στιγμές $T/4 + T = 5T/4, \ldots, T/4 + nT = (1 + 4n)T/4$, ο ταλαντωτής φθάνει στην ακραία θέση $y = y_0$.

- Τις στιγμές $T/2 + T = 3T/2$, ..., $T/2 + nT = (1+ 2n)T/2$, η φάση είναι περιττό πολλαπλάσιο του $\pi$: ο ταλαντωτής διέρχεται από τη ΘΙ και κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση.
- Τις στιγμές $3T/4 + T = 7T/4$, ..., $3T/4 + nT = (3+ 4n)T/4$, ο ταλαντωτής φθάνει στην ακραία θέση $y = -y_0$.

**Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:**

**2.11.4.** Ένας ΑΑΤ έχει **αρχική φάση** $\theta_0 = \pi/6$ τη χρονική στιγμή $t = 0$.

**Α.** Να προσδιορίσετε την αρχική θέση του ταλαντωτή σαν συνάρτηση του πλάτους $y_0$.

**Β.** Να προσδιορίσετε τη φάση του ταλαντωτή, τη θέση του (σαν συνάρτηση του πλάτους $y_0$) και την κατεύθυνση της κίνησής του τις στιγμές:

**(i)** $T$, $2T$ και $3T$.

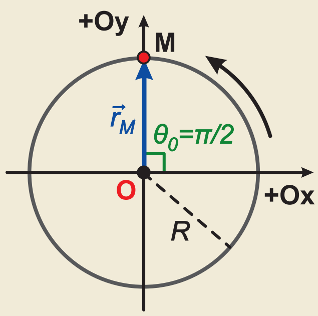
**(ii)** $T/2$, $3T/2$ και $5T/2$.

**(iii)** $T/4$, $5T/4$ και $9T/4$.

**(iv)** $3T/4$ και $7T/4$.

**2.11.5. (α)** Τι απόσταση διανύει ένας ΑΑΤ σε χρονικό διάστημα $\Delta t = T$;

**(β)** Ποια είναι η αντίστοιχη μετατόπιση; Εξαρτώνται οι απαντήσεις σας από τη φορά κίνησης του ταλαντωτή, στην αρχή του χρονικού διαστήματος;



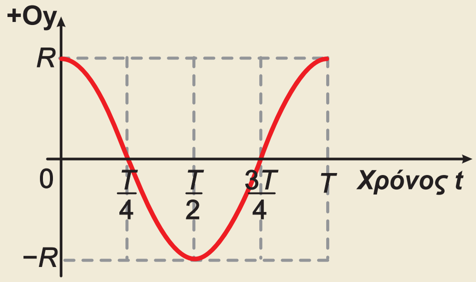

**Παράδειγμα 1**

Ένα υλικό σημείο **Μ** κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega > 0$ σε κυκλική τροχιά ακτίνας $R$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το σημείο έχει συντεταγμένες $x = 0$ και $y = R$. **Θα προσδιορίσουμε την εξίσωση θέσης - χρόνου της προβολής του σημείου Μ στον άξονα Oy.**

Η αρχική γωνία θέσης του του σημείου **Μ** είναι ίση με $\theta_0 = \pi/2$. Συνεπώς, η προβολή του **Μ** στον άξονα **Oy** εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, με κυκλική συχνότητα $\omega$, πλάτος $R$ και αρχική φάση $\theta_0 = \pi/2$. Η εξίσωση θέσης - χρόνου της προβολής είναι

$$y = R\eta\mu(\omega t + \theta_0) = R\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2}) = R\sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της θέσης - χρόνου για έναν πλήρη κύκλο ταλάντωσης.

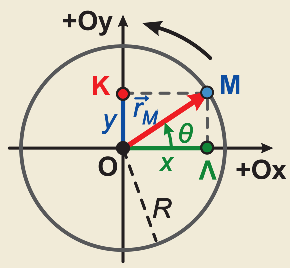



Τις στιγμές $t = T/4$ και $t = 3T/4$, η προβολή διέρχεται από τη ΘΙ και κινείται προς την αρνητική και τη θετική κατεύθυνση, αντίστοιχα. Τη στιγμή $t = T/2$ βρίσκεται στην αρνητική ακραία θέση και σε χρόνο μίας περιόδου, επανέρχεται στη θετική ακραία θέση.

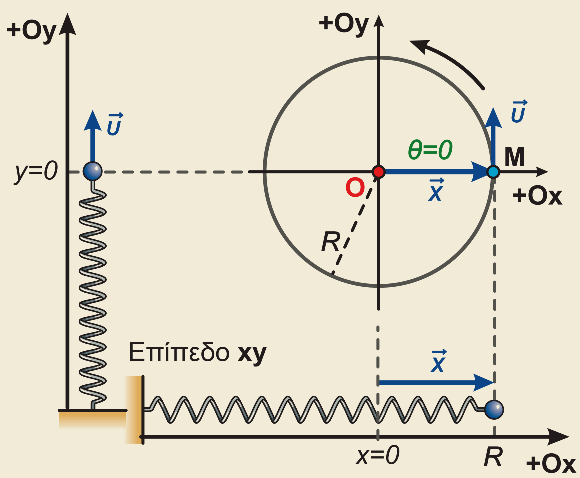
**Παράδειγμα 2**

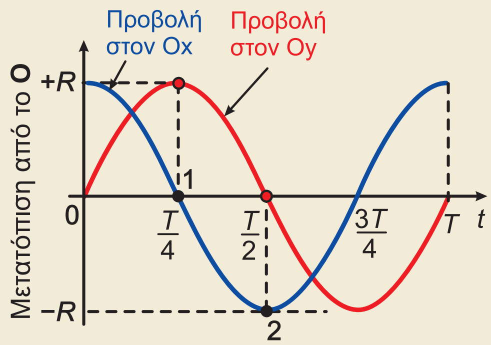
Η προβολή **Λ** του υλικού σημείου **Μ** στον άξονα **Ox** εκτελεί επίσης ΑΑΤ. Η θέση $x$ της προβολής συνδέεται με τη γωνία θέσης $\theta$ με τη σχέση $x = R\sigma\upsilon\nu\theta$. Από την εξίσωση γωνίας θέσης - χρόνου, προκύπτει:

$$x = R\sigma\upsilon\nu(\omega t + \theta_0) = R\eta\mu(\omega t + \theta_0 + \frac{\pi}{2})$$




Παρατηρούμε ότι η ταλάντωση της προβολής στον άξονα **Ox** έχει μεγαλύτερη **φάση** κατά $\pi/2$ από την ταλάντωση της προβολής στον άξονα **Oy**.



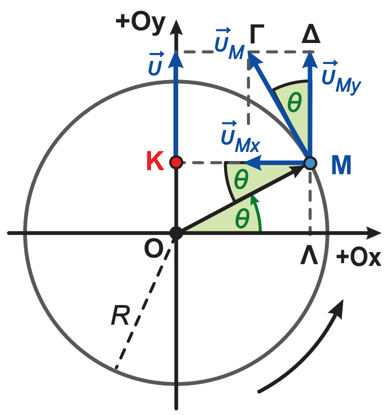

Στην πιο πάνω εικόνα σχεδιάζουμε τις δύο προβολές για αρχική φάση $\theta_0 = 0$.

Στο αριστερό σχήμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο $t = 0$: Η προβολή του **Μ** στον **Oy** συμπίπτει με το **O**, και κινείται προς τη θετική κατεύθυνση του **Oy**. Η προβολή του **Μ** στον **Ox** βρίσκεται στην ακραία θέση $x = R$ και είναι ακίνητη.

Στο δεξί σχήμα απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις θέσης - χρόνου των προβολών στο διάστημα 0 - $T$.

## 2.12. Σχέση Ταχύτητας - Χρόνου στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Με βάση την ομαλή κυκλική κίνηση, σε αυτή την ενότητα θα προσδιορίσουμε τη σχέση ταχύτητας - χρόνου στην απλή αρμονική ταλάντωση.




Το σημείο **Μ** του διπλανού σχήματος εκτελεί αριστερόστροφη ομαλή κυκλική κίνηση, με γωνιακή ταχύτητα $\omega$. Αναλύουμε το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{\rm M}$ σε συνιστώσες $\vec{\upsilon}_{{\rm M}x}$ και $\vec{\upsilon}_{{\rm M}y}$, στο σύστημα αξόνων **Ox** και **Oy**. Η συνιστώσα $\vec{\upsilon}_{{\rm M}y}$ **ισούται με την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ της προβολής Κ** πάνω στον **Oy**.

Η γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\rm M}$ του σημείου **Μ** εφάπτεται συνεχώς στην κυκλική τροχιά, και είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΜ. Ομοίως, η συνιστώσα $\vec{\upsilon}_{{\rm M}y}$ είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΜ. Συνεπώς, οι γωνίες $\rm O\hat{M}K$ και $\Gamma\hat{\rm M}\Delta$ έχουν κάθετες πλευρές, μία προς μία, και είναι ίσες μεταξύ τους. Από το τρίγωνο ΓΜΔ συμπεραίνουμε ότι η συνιστώσα $\vec{\upsilon}_{{\rm M}y}$ έχει αλγεβρική τιμή:

$$\upsilon_{{\rm M}y} = \left|\vec{\upsilon}_{\rm M}\right| \sigma\upsilon\nu\theta = \omega R \sigma\upsilon\nu\theta$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση γωνίας θέσης - χρόνου, $\theta = \theta_0 + \omega t$, φθάνουμε στην τελική σχέση:

$$\upsilon_{{\rm M}y} = \omega R \sigma\upsilon\nu(\theta_0 + \omega t)$$

Το μέγεθος $\omega R = \omega y_0$ είναι η μέγιστη τιμή της ταχύτητας $\upsilon_{{\rm M}y}$, όπου $y_0 = R$ είναι το πλάτος της ταλάντωσης.

Η συνιστώσα $\vec{\upsilon}_{{\rm M}y}$ ισούται με την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ της προβολής **Κ** πάνω στον Οy. Άρα, η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ ικανοποιεί την ίδια σχέση:

$$\upsilon = \omega y_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \theta_0)$$

Από την τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\varphi = \eta\mu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, για οποιαδήποτε γωνία $\varphi$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε την ταχύτητα της προβολής **Κ** σαν **συνάρτηση ημιτόνου**:

$$\upsilon = \omega y_0 \eta\mu\left(\omega t + \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Το συμπέρασμα αυτό γενικεύεται σε οποιαδήποτε απλή αρμονική ταλάντωση, με κυκλική συχνότητα $\omega$, πλάτος $y_0$ και αρχική φάση $\theta_0$.

## Σχέση Ταχύτητας - Χρόνου του Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή

$$y = y_0 \eta\mu(\omega t + \theta_0) \Rightarrow \upsilon = (\omega y_0)\eta\mu\left(\omega t + \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

**ή, ισοδύναμα:**

$$y = y_0 \eta\mu\theta \Rightarrow \upsilon = \omega y_0\, \eta\mu\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \omega y_0\, \sigma\upsilon\nu\theta$$

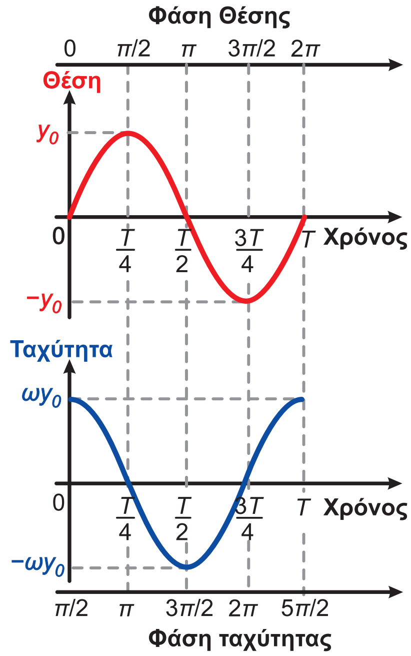
**Να παρατηρήσετε** ότι:

- Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας ισούται με το γινόμενο της κυκλικής συχνότητας επί το πλάτος της ταλάντωσης:

$$\upsilon_0 = \omega y_0$$

- Η φάση της ταχύτητας είναι **μεγαλύτερη** από τη φάση της θέσης κατά $\frac{\pi}{2}$.

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις θέσης - χρόνου και ταχύτητας - χρόνου, για αρχική φάση της θέσης $\theta_0 = 0^o$. Με βάση τη **διαφορά φάσης** θέσης - ταχύτητας $\pi/2$, προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:




- Όταν ο ταλαντωτής διέρχεται από τη ΘΙ $y = 0$ προς τη θετική κατεύθυνση, η ταχύτητα παίρνει τη **μέγιστη θετική** τιμή $\upsilon_0 = \omega y_0$.

- Τη στιγμή που ο ταλαντωτής φθάνει στη **μέγιστη θετική** θέση $y_0$, η ταχύτητά του μηδενίζεται.

- Όταν διέρχεται από τη ΘΙ και κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, η ταχύτητα παίρνει την **ελάχιστη αρνητική** τιμή $-\omega y_0$.

- Τη στιγμή που φθάνει στην **ελάχιστη αρνητική** θέση $-y_0$, η ταχύτητα μηδενίζεται.

**Παράδειγμα 1**

Μία σφαίρα είναι στερεωμένη στην ελεύθερη άκρη ενός οριζόντιου ελατηρίου. Η σφαίρα εκτελεί ΑΑΤ κατά μήκος του άξονα **Oy** γύρω από τη θέση ισορροπίας $y = 0$, με κυκλική συχνότητα $\omega$ και πλάτος $y_0$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η σφαίρα βρίσκεται στη θέση $y_0/2$ και έχει θετική ταχύτητα. **Θα προσδιορίσουμε (i) τις εξισώσεις θέσης - χρόνου και ταχύτητας - χρόνου της σφαίρας, (ii) την ταχύτητα της σφαίρας τη στιγμή $t = 0$.**

**(i)** Τη χρονική στιγμή $t = 0$, η μετατόπιση και η ταχύτητα της σφαίρας υπολογίζονται σαν συναρτήσεις της αρχικής φάσης $\theta_0$ από τις σχέσεις:

$$y(0) = y_0 \eta\mu\theta_0\,,\ \upsilon(0) = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta_0$$

όπου $\upsilon_0 = \omega y_0$ η μέγιστη τιμή της ταχύτητας.

Εάν η αρχική μετατόπιση της σφαίρας είναι ίση με $y_0/2$, προκύπτει η ακόλουθη τριγωνομετρική εξίσωση:

$$\frac{y_0}{2} = y_0 \eta\mu\theta_0 \Rightarrow \eta\mu\theta_0 = \frac{1}{2}$$

Η τελευταία εξίσωση ικανοποιείται στο διάστημα $(0,2\pi)$ από τις φάσεις $\theta_0 = \pi/6 = 30^o$ και $\theta_0 = 5\pi/6 = 150^o$. Η τιμή $\theta_0 = 5\pi/6$ απορρίπτεται επειδή αντιστοιχεί σε αρνητική αρχική ταχύτητα: $\sigma\upsilon\nu(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2 \Rightarrow \upsilon(0) = -\left(\sqrt{3}/2\right)\upsilon_0$. Άρα, η αρχική φάση του σώματος ισούται με $\theta_0 = \pi/6$. Καταλήγουμε στις εξισώσεις θέσης - χρόνου και ταχύτητας - χρόνου:

$$y = y_0 \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right),\ \upsilon = \omega y_0 \sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

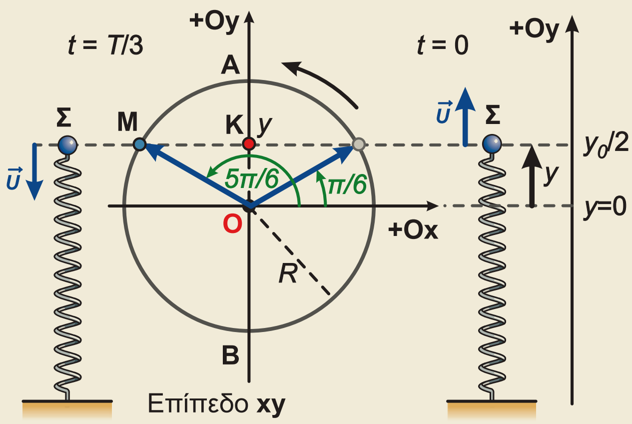
**Να προσέξετε** ότι η γνώση της θέσης σε μία χρονική στιγμή **δεν** επαρκεί για τον προσδιορισμό της αρχικής φάσης: Χρειάζεται να γνωρίζουμε **και** την κατεύθυνση της κίνησης, ή την ταχύτητα την ίδια στιγμή.

**(ii)** Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητα της σφαίρας ισούται με

$$\upsilon(0) = \omega y_0 \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega y_0$$

**Παράδειγμα 2**

Χρησιμοποιώντας την αντιστοιχία της ΑΑΤ με την προβολή της ομαλής κυκλικής κίνησης στον άξονα **Oy**, να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή, στην οποία η σφαίρα του **Παραδείγματος 1** επιστρέφει για ***πρώτη φορά*** στην αρχική της θέση. Με ποια ταχύτητα κινείται εκείνη τη στιγμή;




Στο πιο πάνω σχήμα απεικονίζεται **σε κάτοψη** η ταλάντωση της σφαίρας **Σ** και η αντίστοιχη κυκλική κίνηση του σημείου **Μ**. Η θέση της σφαίρας περιγράφεται με τη βοήθεια του άξονα **Oy**. Η τιμή $y = 0$ αντιστοιχεί στη ΘΙ της σφαίρας. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η σφαίρα βρίσκεται στη θέση $y_0/2$ και κινείται με θετική ταχύτητα $\upsilon > 0$. Το σημείο **Μ** έχει αρχική γωνία θέσης $\theta = \theta_0 = \pi/6$, ίση με την αρχική φάση του ταλαντωτή. Η προβολή **Κ** του σημείου **Μ** εκτελεί ΑΑΤ στη διάμετρο ΑΒ του κύκλου, με αρχική φάση $\theta_0 = \pi/6$.

Όταν η σφαίρα επιστρέψει στην ίδια θέση για πρώτη φορά, η φάση της ισούται με $\theta_0 = 5\pi/6$ και η μεταβολή φάσης είναι $\theta - \theta_0 = 4\pi/6 = 2\pi/3$. Ομοίως, η γωνία θέσης του υλικού σημείου **Μ** αυξάνεται κατά $2\pi/3$. Το απαιτούμενο χρονικό διάστημα γι΄ αυτή την αύξηση είναι ίσο με $\Delta t = T/3$.

Εκείνη τη στιγμή, η σφαίρα κινείται με ταχύτητα:

$$\upsilon = \omega y_0 \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} = -\omega y_0 \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = -\upsilon(0)$$

**Να παρατηρήσετε** ότι η σφαίρα έχει **αντίθετη** ταχύτητα, σε σχέση με την στιγμή $t = 0$. Ανάμεσα στις στιγμές $t = 0$ και $t = T/3$ δεν ολοκληρώνεται ένας κύκλος ταλάντωσης.

**Παράδειγμα 3**

Ένα σώμα εκτελεί ΑΑΤ γύρω από τη θέση ισορροπίας $y = 0$, με κυκλική συχνότητα $\omega$ και πλάτος $y_0$. Τη χρονική στιγμή $t_1$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $y_1$, και κινείται με ταχύτητα $\upsilon_1$. **Να προσδιορίσετε τη θέση και την ταχύτητα του σώματος μετά από χρονικό διάστημα: α) $T/4$ και β) $T/2$.**

**(α)** Τη χρονική στιγμή $t_1$, η φάση του σώματος ισούται με $\theta_1 = \omega t_1 + \theta_0$. Με βάση τις εξισώσεις θέσης - χρόνου και ταχύτητας - χρόνου της ΑΑΤ, ισχύει

$$y_1 = y_0 \eta\mu\theta_1 \,,\ \upsilon_1 = \omega y_0 \sigma\upsilon\nu\theta_1$$

Μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = T/4$, η φάση της ταλάντωσης μεταβάλλεται κατά $\Delta\theta = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$. Η θέση του σώματος γίνεται:

$$y = y_0 \eta\mu\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) = y_0 \sigma\upsilon\nu\theta_1 = y_0 \frac{\upsilon_1}{\omega y_0} = \frac{\upsilon_1}{\omega}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\varphi$.

Η ταχύτητα του σώματος γίνεται:

$$\upsilon = \omega y_0 \sigma\upsilon\nu\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\omega y_0 \eta\mu\theta_1 = -\omega y_1$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sigma\upsilon\nu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\eta\mu\varphi$.

**(β)** Μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = T/2$, η μεταβολή φάσης είναι $\Delta\theta = \pi$. Άρα, η θέση γίνεται:

$$y = y_0 \eta\mu(\theta_1 + \pi) = -y_0 \eta\mu\theta_1 = -y_1$$

και η ταχύτητα γίνεται:

$$\upsilon = \omega y_0 \sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \pi) = -\omega y_0 \sigma\upsilon\nu\theta_1 = -\upsilon_1$$

**Να παρατηρήσετε** ότι μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = T/2$, η θέση και ταχύτητα έχουν το ίδιο μέτρο αλλά αντίθετη κατεύθυνση.

## 2.13. Σχέση Επιτάχυνσης - Χρόνου στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Από τον ορισμό της ΑΑΤ, μπορούμε να εξαγάγουμε τη σχέση επιτάχυνσης - χρόνου της ΑΑΤ:

$$\alpha = -\frac{Dy}{m} = -\omega^2 y = -\omega^2 y_0 \eta\mu(\omega t + \theta_0) = -\alpha_0 \eta\mu(\omega t + \theta_0)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $D = m\omega^2$. Η ποσότητα $\alpha_0 = \omega^2 y_0$ είναι η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης του ταλαντωτή.

Από την τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι $\eta\mu(\varphi + \pi) = -\eta\mu\varphi$, για οποιαδήποτε γωνία $\varphi$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε την επιτάχυνση στη μορφή:

$$\alpha = \alpha_0 \eta\mu(\omega t + \theta_0 + \pi)$$

## Σχέση Επιτάχυνσης – Χρόνου του Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή

$$y = y_0 \eta\mu(\omega t + \theta_0) \Rightarrow \alpha = (\omega^2 y_0)\eta\mu(\omega t + \theta_0 + \pi)$$

**ή, ισοδύναμα:**

$$y = y_0 \eta\mu\theta \Rightarrow \alpha = \omega^2 y_0\, \eta\mu(\theta + \pi)$$

**Να παρατηρήσετε** ότι:

- Η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης ισούται με το γινόμενο του τετραγώνου της κυκλικής συχνότητας επί το πλάτος της ταλάντωσης:

  $$\alpha_0 = \omega^2 y_0$$

  **Προσοχή**

  Η επιτάχυνση δηλώνεται σε $m/s^2$. Στη χρήση της πιο πάνω σχέσης αγνοούμε τη μονάδα rad της γωνιακής ταχύτητας.

- Η φάση της επιτάχυνσης είναι **μεγαλύτερη** από τη φάση της θέσης κατά $\pi$.

- Η μέγιστη επιτάχυνση και η μέγιστη ταχύτητα της ΑΑΤ συνδέονται με τη σχέση:

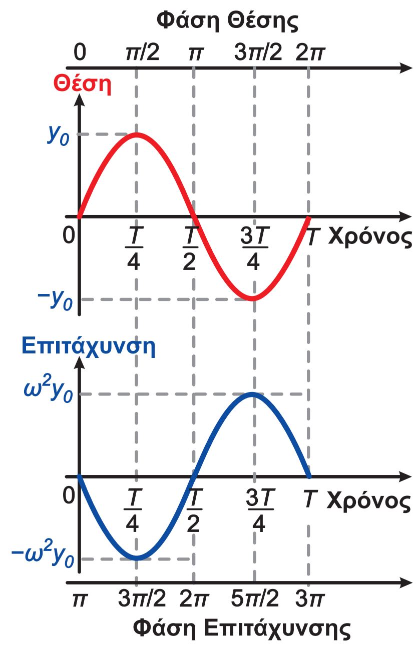
$$\alpha_0 = \omega(\omega y_0) = \omega \upsilon_0$$

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις **θέσης - χρόνου** και **επιτάχυνσης - χρόνου**. Η αρχική φάση της θέσης είναι $\theta_0 = 0$, και της επιτάχυνσης είναι $\theta_0 + \pi = \pi$. Με βάση τις πιο πάνω παρατηρήσεις, προκύπτουν τα ακόλουθα **συμπεράσματα**:

- Όταν ο ταλαντωτής διέρχεται από τη ΘΙ, η επιτάχυνσή του μηδενίζεται.

- Τη στιγμή που φθάνει στη **μέγιστη θετική** θέση, η επιτάχυνση παίρνει την **ελάχιστη αρνητική** τιμή $\alpha_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = -\omega^2 y_0$.

- Τη στιγμή που φθάνει στην **ελάχιστη αρνητική** θέση $-y_0$, η επιτάχυνση παίρνει τη **μέγιστη θετική** τιμή $\alpha_{\mu\varepsilon\gamma} = \omega^2 y_0$.



**Παράδειγμα 1**

Ένα σώμα εκτελεί ΑΑΤ με κυκλική συχνότητα $\omega$ και πλάτος $y_0$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το σώμα ξεκινά από τη ΘΙ με ταχύτητα $\upsilon_0$, και κινείται προς τη **θετική** κατεύθυνση. Θα προσδιορίσουμε: **(α)** τη μέση (διανυσματική) ταχύτητα και τη μέση επιτάχυνση του σώματος στο χρονικό διάστημα 0 - $T/4$, και **(β)** τη μέση αριθμητική ταχύτητα κατά τη διάρκεια ενός κύκλου ταλάντωσης.

**(α)** Τη χρονική στιγμή $t = T/4$ το σώμα φθάνει στη θετική ακραία θέση με μηδενική ταχύτητα. Η μέση διανυσματική ταχύτητα του σώματος έχει αλγεβρική τιμή:

$$\upsilon_\mu = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_0 - 0}{T/4} = \frac{y_0}{\pi/2\omega} = \frac{2\omega y_0}{\pi} = \frac{2\upsilon_0}{\pi} > 0$$

Το διάνυσμα $\vec{\upsilon}_\mu$ βλέπει προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα **Oy**.

Η μέση επιτάχυνση του σώματος έχει αλγεβρική τιμή:

$$\alpha_\mu = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{0 - \upsilon_0}{T/4} = -\frac{\omega y_0}{\pi/(2\omega)} = -\frac{2\omega^2 y_0}{\pi} = -\frac{2\alpha_{\mu\varepsilon\gamma}}{\pi} < 0$$

Το διάνυσμα $\vec{\alpha}_\mu$ βλέπει προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα **Oy**.

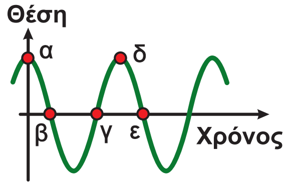
**(β)** Σε έναν κύκλο ταλάντωσης το σώμα διαγράφει διαδρομή συνολικού μήκους $4y_0$. Επομένως η μέση αριθμητική ταχύτητα του σώματος ισούται με

$$\upsilon_{\mu\alpha} = \frac{4y_0}{T} = \frac{2\omega y_0}{\pi} = \frac{2}{\pi}\upsilon_0$$

**Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:**

**2.13.1.** Ένα σώμα εκτελεί ΑΑΤ. Είναι δυνατόν το σώμα να έχει ταυτόχρονα:
**(α)** μηδενική ταχύτητα και μη μηδενική επιτάχυνση; **(β)** μηδενική ταχύτητα και μηδενική επιτάχυνση; **(γ)** θετική ταχύτητα και αρνητική επιτάχυνση; **(δ)** αρνητική ταχύτητα και αρνητική επιτάχυνση;

**2.13.2.** Το πιο κάτω σχήμα απεικονίζει το γράφημα θέσης-χρόνου ενός ΑΑΤ.
Τι πρόσημο έχει η ταχύτητα και η επιτάχυνση στα σημεία α - ε;



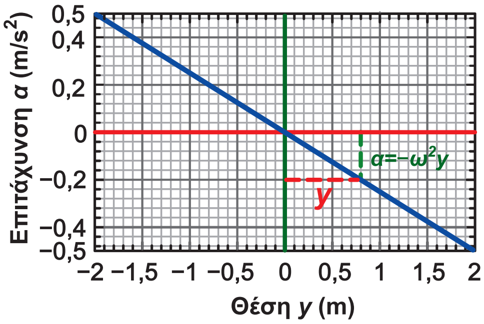
## 2.14. Γραφικές Παραστάσεις Επιτάχυνσης - Θέσης και Ταχύτητας - Θέσης στην ΑΑΤ

### Σχέση Επιτάχυνσης - Θέσης

Στην ΑΑΤ, η επιτάχυνση είναι ανάλογη και αντίρροπη της μετατόπισης:

$$\alpha = -\omega^2 y$$

Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η γραφική παράσταση επιτάχυνσης - θέσης είναι ευθεία. Η κλίση της ευθείας είναι **αρνητική**, και ισούται με το αντίθετο τετράγωνο της κυκλικής συχνότητας της ταλάντωσης.




Από την ευθεία επιτάχυνσης - θέσης ενός ΑΑΤ, υπολογίζουμε την κυκλική συχνότητα ως εξής: Επιλέγουμε δύο σημεία $(y_1, \alpha_1)$ και $(y_2, \alpha_2)$ της ευθείας, και υπολογίζουμε την κλίση $\lambda = (\alpha_2 - \alpha_1)/(y_2 - y_1)$. Η κυκλική συχνότητα ισούται με $\omega = \sqrt{-\lambda}$.

**Προσοχή**

Το αποτέλεσμα αντιστοιχεί σε rad/s.

**Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:**

**2.14.1.** Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα του ΑΑΤ, από το πιο πάνω διάγραμμα επιτάχυνσης - θέσης.

### Σχέση Ταχύτητας - Θέσης

Από τις σχέσεις θέσης - χρόνου και ταχύτητας - χρόνου της ΑΑΤ, μπορούμε να εκφράσουμε την ταχύτητα σαν συνάρτηση της θέσης:

$$y = y_0 \eta\mu\theta \Rightarrow \frac{y}{y_0} = \eta\mu\theta \Rightarrow \frac{y^2}{y_0^2} = \eta\mu^2\theta$$

$$\upsilon = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \frac{\upsilon}{\upsilon_0} = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{\upsilon_0^2} = \sigma\upsilon\nu^2\theta$$

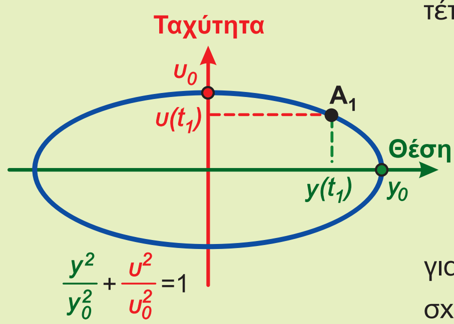
Προσθέτουμε τις πιο πάνω εξισώσεις κατά μέλη, και χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$:

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{y_0^2} + \frac{\upsilon^2}{\upsilon_0^2} = 1$$

Η τελευταία εξίσωση είναι της μορφής

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

και περιγράφει έλλειψη με άξονες τη θέση $y$ και την ταχύτητα $\upsilon$ του ΑΑΤ, και ημιάξονες $\alpha = y_0$, $\beta = \upsilon_0 = \omega y_0$.



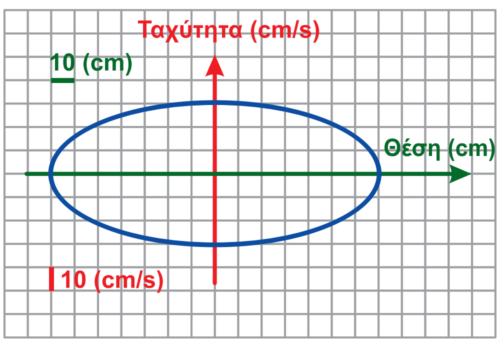

Η γραφική παράσταση ταχύτητας - θέσης του ΑΑΤ έχει την εξής ερμηνεία: Τη χρονική στιγμή $t_1$, ο ταλαντωτής βρίσκεται στη θέση $y(t_1)$ και έχει ταχύτητα $\upsilon(t_1)$. Οι συντεταγμένες $\big(y(t_1),\ \upsilon(t_1)\big)$ ορίζουν ένα σημείο $A_1$ στο σύστημα αξόνων $y - \upsilon$. Εάν σχεδιάσουμε πολλά τέτοια σημεία

$$A_1 = \big(y(t_1),\ \upsilon(t_1)\big),\ A_2 = \big(y(t_2),\ \upsilon(t_2)\big),\ldots,\ A_K = \big(y(t_k),\ \upsilon(t_k)\big),\ldots$$

για διαφορετικές χρονικές στιγμές $t_1$, $t_2$,..., $t_k$,... και τα ενώσουμε, σχηματίζεται η έλλειψη της πιο πάνω εξίσωσης.

**Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:**

**2.14.2.** Να προσδιορίσετε το πλάτος, τη μέγιστη ταχύτητα και την κυκλική συχνότητα του ΑΑΤ, που περιγράφεται από το πιο κάτω διάγραμμα ταχύτητας - θέσης.



**Ερωτήσεις Κατανόησης**

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

| Α/Α | ΠΡΟΤΑΣΗ | Σωστό / Λάθος |
|---|---|---|
| 1 | Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ένας ΑΑΤ διέρχεται από τη ΘΙ και κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση. Η αρχική φάση είναι: | |
| **α** | 0. | |
| **β** | $\pi/2$. | |
| **γ** | $\pi$. | |
| 2 | Ένα σώμα εκτελεί ΑΑΤ με πλάτος $y_0$ και κυκλική συχνότητα $\omega$. Εάν γνωρίζουμε την αρχική φάση της ταλάντωσης, μπορούμε να προσδιορίσουμε την αρχική θέση του σώματος. | |
| 3 | Ένα σώμα εκτελεί ΑΑΤ με πλάτος $y_0$ και κυκλική συχνότητα $\omega$. Εάν γνωρίζουμε την αρχική θέση του σώματος, μπορούμε να προσδιορίσουμε την αρχική φάση της ταλάντωσης. | |
| 4 | Σε μία ΑΑΤ, η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν την ίδια φάση. | |
| Για να απαντήσετε τις **Ερωτήσεις 5 και 6**, μπορείτε να φαντασθείτε ότι ο ΑΑΤ είναι η προβολή στον άξονα **Oy** ενός σημείου **Μ**, που εκτελεί αριστερόστροφη ομαλή κυκλική κίνηση. | | |
| 5 | Ένα σώμα εκτελεί ΑΑΤ με πλάτος $y_0$, κυκλική συχνότητα $\omega$ και αρχική φάση $3\pi/2$. Ποιο(α) από τα επόμενα ισχύει, τη χρονική στιγμή $t = 0$; | |
| **α** | Ο ταλαντωτής βρίσκεται στη θέση $y = -y_0$. | |
| **β** | Η ταχύτητα του ταλαντωτή είναι ίση με μηδέν. | |
| **γ** | Η επιτάχυνση του ταλαντωτή είναι ίση με μηδέν. | |
| **δ** | Η επιτάχυνση του ταλαντωτή είναι ίση με $-\omega^2 y_0$. | |
| 6 | Ένα σώμα εκτελεί ΑΑΤ με πλάτος $y_0$, κυκλική συχνότητα $\omega$ και αρχική φάση $\pi$. Ποιο(α) από τα επόμενα ισχύει, τη χρονική στιγμή $t = 0$; | |
| **α** | Ο ταλαντωτής διέρχεται από τη ΘΙ με αρνητική ταχύτητα. | |
| **β** | Ο ταλαντωτής διέρχεται από τη ΘΙ με μηδενική ταχύτητα. | |
| **γ** | Η επιτάχυνση του ταλαντωτή μηδενίζεται. | |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | Όταν η θέση του ταλαντωτή έχει φάση $\pi/4$, η ταχύτητα έχει φάση: | |
| **α** | $\pi/4$. | |
| **β** | $\pi/2$. | |
| **γ** | $3\pi/4$. | |
| 8 | Ένα σώμα εκτελεί ΑΑΤ. Όταν η θέση έχει φάση $\pi/2$, η επιτάχυνση έχει φάση: | |
| **α** | $\pi$. | |
| **β** | $3\pi/2$. | |
| 9 | Ένα σώμα εκτελεί ΑΑΤ. Ποιο(α) από τα επόμενα ισχύει: | |
| **α** | Μετά από χρονικό διάστημα $T/4$ η φάση της ταχύτητας μεταβάλλεται κατά $\pi$. | |
| **β** | Μετά από χρονικό διάστημα $T/4$ η φάση της επιτάχυνσης μεταβάλλεται κατά $\pi/2$. | |
| 10 | Σε μία ΑΑΤ, το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται όταν η ταχύτητα είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση από τη ΘΙ. | |
| 11 | Σε μία ΑΑΤ, μεγιστοποιείται η επιτάχυνση όταν ελαχιστοποιείται η θέση. | |
| 12 | Ένα σώμα εκτελεί ΑΑΤ με πλάτος $y_0$ και κυκλική συχνότητα $\omega$. Ποιό από τα επόμενα ισχύει: | |
| **α** | Η μέγιστη ταχύτητα είναι $\omega^2 y_0$. | |
| **β** | Η μέγιστη επιτάχυνση είναι $\omega^2 y_0$. | |
| 13 | Σε μία ΑΑΤ, η μέγιστη ταχύτητα διπλασιάζεται όταν διπλασιάζεται: | |
| **α** | Η περίοδος. | |
| **β** | Το πλάτος. | |
| 14 | Σε μία ΑΑΤ, η μέση διανυσματική ταχύτητα σε διάστημα $T/4$ είναι ανεξάρτητη από το πλάτος της ταλάντωσης. | |

## Ασκήσεις

**1** Ένα σώμα εκτελεί ΑΑΤ. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και κινείται προς τη θετική κατεύθυνση. Μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = 2{,}0$ s, το σώμα επανέρχεται στη θέση ισορροπίας για τρίτη φορά, κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση. Το πλάτος της ταλάντωσης ισούται με $x_0 = 3{,}0$ cm.

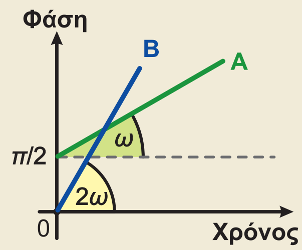
**Α.** Να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης.

**Β.** Να γράψετε την εξίσωση θέσης - χρόνου της ταλάντωσης.

**2** Ένα σώμα **Α** εκτελεί ΑΑΤ με πλάτος $x_0 = 0{,}50$ m, περίοδο $T = 3{,}0$ s και αρχική φάση $\theta_0 = \pi/2$. Ένας δεύτερος ταλαντωτής **Β** κινείται με πλάτος $2x_0$, περίοδο $2T$ και αρχική φάση $\pi$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο διάγραμμα τη γραφική παράσταση θέσης - χρόνου των δύο ταλαντωτών, για το διάστημα 0 - $2T$.

**3** Το διπλανό σχήμα απεικονίζει τις γραφικές παραστάσεις φάσης - χρόνου δύο ταλαντωτών **Α** και **Β**. Οι ταλαντωτές έχουν το ίδιο πλάτος.

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις θέσης - χρόνου των δύο ταλαντωτών, στο ίδιο διάγραμμα για το διάστημα 0 - $2T$.




**4** Η εξίσωση θέσης - χρόνου ενός ΑΑΤ είναι $x = 0{,}2\eta\mu(\pi t + \pi/2)$. Η θέση υπολογίζεται σε m και ο χρόνος σε s.

**Α.** Να προσδιορίσετε:
**(α)** Το πλάτος, **(β)** την κυκλική συχνότητα, **(γ)** την περίοδο και **(δ)** την αρχική φάση της ταλάντωσης.

**Β.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση θέσης - χρόνου του ταλαντωτή στο χρονικό διάστημα 0 - $2T$.

**5** Ένας ΑΑΤ ταλαντώνεται με κυκλική συχνότητα $\omega$. Χρησιμοποιώντας την ***αναλογία της ΑΑΤ με την ομαλή κυκλική κίνηση***, να προσδιορίσετε τα χρονικά διαστήματα, στα οποία η φάση του ταλαντωτή μεταβάλλεται κατά **(α)** $\pi/4$, **(β)** $\pi/2$, **(γ)** $5\pi/4$ και **(δ)** $7\pi/4$. Να εκφράσετε αυτά τα διαστήματα σαν συνάρτηση της περιόδου του ταλαντωτή.

**6** Η εξίσωση θέσης - χρόνου ενός ΑΑΤ είναι $x = x_0\eta\mu(\omega t + \pi/4)$.

**Α.** Να προσδιορίσετε την αρχική φάση του ταλαντωτή. Προς ποια κατεύθυνση κινείται ο ταλαντωτής τη στιγμή $t = 0$;

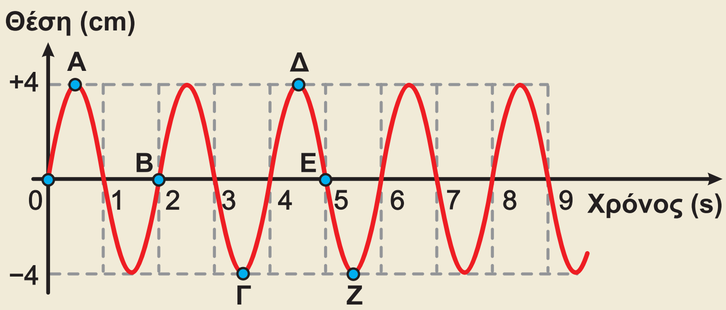
**Β.** Να προσδιορίσετε τη φάση του ταλαντωτή, όταν διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση $x = x_0\sqrt{2}/2$ και κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση. Σε ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;

**7** Ένα σώμα προσδεδεμένο σε οριζόντιο ελατήριο εκτελεί ΑΑΤ με περίοδο $T = 0{,}50$ s και πλάτος $x_0 = 0{,}20$ m. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = +0{,}10$ m και κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση.

**Α.** Να γράψετε την εξίσωση θέσης - χρόνου του σώματος.

**Β.** Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή, στην οποία το σώμα: **(α)** διέρχεται για πρώτη φορά από τη ΘΙ, **(β)** φθάνει για πρώτη φορά στη θέση $x = -0{,}10$ m.

**8** Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση θέσης - χρόνου μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης.




**Α.** Να προσδιορίσετε το πλάτος, την αρχική φάση και την κυκλική συχνότητα.

**Β.** Να γράψετε την εξίσωση θέσης - χρόνου.

**Γ.** Να προσδιορίσετε τις φάσεις στα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ.

**Δ.** Να περιγράψετε την κίνηση του ΑΑΤ στα σημεία Α - Ζ (πού βρίσκεται, και προς ποια κατεύθυνση κινείται).

**Ε.** Να υπολογίσετε τη θέση του ταλαντωτή, όταν η φάση του γίνει ίση με $\dfrac{23\pi}{2}$ rad.

**ΣΤ.** Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της ταχύτητας του ταλαντωτή.

**9** Η εξίσωση θέσης - χρόνου ενός ΑΑΤ είναι $y = y_0 \eta\mu(\omega t + \pi)$ όπου $y_0 = 0{,}2$ m και $\omega = 2\pi$ rad $s^{-1}$

**Α.** Να υπολογίσετε την περίοδο, τη συχνότητα και την αρχική φάση της ταλάντωσης.

**Β.** Να γράψετε τις εξισώσεις της ταχύτητας - χρόνου και της επιτάχυνσης - χρόνου.

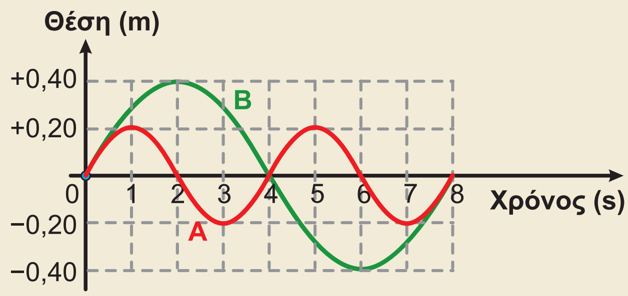
**Γ.** Να υπολογίσετε τη μέγιστη ταχύτητα και τη μέγιστη επιτάχυνση της ταλάντωσης.

**Δ.** Να **σχεδιάσετε** τις γραφικές παραστάσεις θέσης - χρόνου, ταχύτητας - χρόνου και επιτάχυνσης - χρόνου.

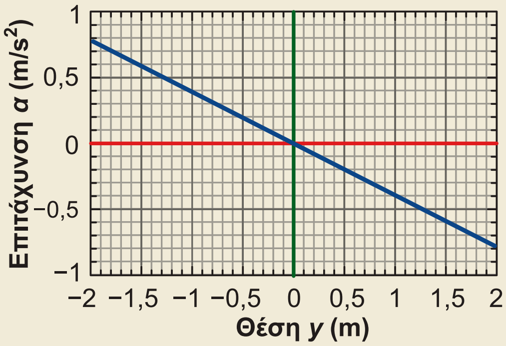
**10** Το επόμενο σχήμα απεικονίζει τις γραφικές παραστάσεις θέσης - χρόνου για δύο ΑΑΤ **Α** και **Β**.

**Α.** Σε ποιες χρονικές στιγμές $t > 0$ μηδενίζεται για **πρώτη** φορά **(i)** η ταχύτητα και **(ii)** η επιτάχυνση των δύο ταλαντωτών;

**Β.** Να υπολογίσετε τον λόγο $a_{A0}/a_{B0}$ των μεγίστων επιταχύνσεων των δύο ΑΑΤ.




**11** Το επόμενο σχήμα απεικονίζει τη γραφική παράσταση επιτάχυνσης - θέσης ενός σώματος, που εκτελεί ΑΑΤ.



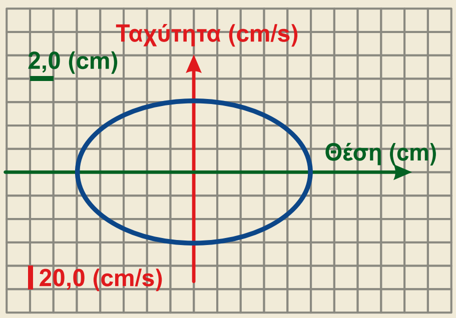

Να υπολογίσετε:

**(α)** την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης.

**(β)** το πλάτος της ταλάντωσης.

**(γ)** το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας του σώματος.

**12** Το επόμενο σχήμα απεικονίζει τη γραφική παράσταση ταχύτητας - θέσης ενός σώματος, που εκτελεί ΑΑΤ.




**Α.** Να προσδιορίσετε το πλάτος της ταλάντωσης και το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας. Να υπολογίσετε την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης.

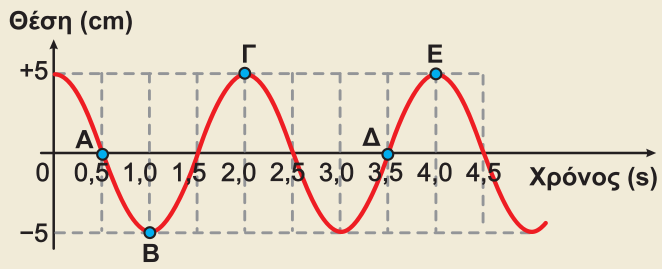
**Β.** Να **σχεδιάσετε** το αντίστοιχο διάγραμμα επιτάχυνσης - θέσης.

### Συνδυασμός Εξισώσεων

**13** Ένα σώμα εκτελεί ΑΑΤ με πλάτος $x_0$ = 0,50 m και κυκλική συχνότητα $\pi/2$ rad/s. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x_0\sqrt{3}/2$ και κινείται προς τη θετική κατεύθυνση. Να γράψετε τις εξισώσεις ταχύτητας - χρόνου και επιτάχυνσης - χρόνου του σώματος.

**14** Η εξίσωση ταχύτητας - χρόνου μίας ΑΑΤ είναι $\upsilon = 4{,}0\sigma\upsilon\nu(3{,}14t)$ (σε cm/s). Να προσδιορίσετε το πλάτος της ταλάντωσης και να γράψετε τις εξισώσεις θέσης - χρόνου και επιτάχυνσης - χρόνου της ίδιας ΑΑΤ.

**15** Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση θέσης - χρόνου μιας ΑΑΤ.




**Α.** Να προσδιορίσετε το πλάτος, την αρχική φάση και την κυκλική συχνότητα.

**Β.** Να γράψετε την εξίσωση θέσης - χρόνου.

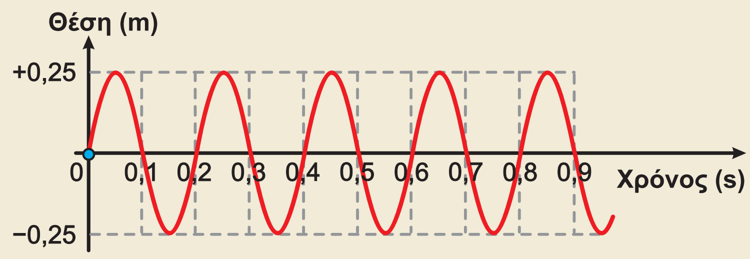
**Γ.** Να υπολογίσετε τις φάσεις στα σημεία Α, Β, Γ, Δ, και Ε.

**Δ.** Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της ταχύτητας.

**Ε.** Να γράψετε την εξίσωση ταχύτητας - χρόνου.

**ΣΤ.** Να υπολογίσετε τη θέση του ταλαντωτή, όταν η φάση του γίνει ίση με $\frac{21\pi}{4}$.

**16** Το επόμενο σχήμα απεικονίζει τη γραφική παράσταση θέσης - χρόνου μίας ΑΑΤ.

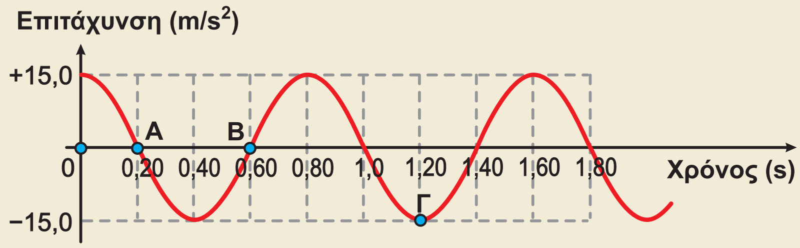



**Α.** Να προσδιορίσετε το πλάτος και την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης.

**Β.** Να υπολογίσετε τη μέγιστη ταχύτητα και τη μέγιστη επιτάχυνση του ταλαντωτή.

**Γ.** Να **σχεδιάσετε** σε βαθμολογημένους άξονες τις γραφικές παραστάσεις ταχύτητας - χρόνου και επιτάχυνσης - χρόνου του ταλαντωτή.

**17** Ένα σώμα αναρτημένο σε οριζόντιο ελατήριο εκτελεί ΑΑΤ. Το επόμενο σχήμα απεικονίζει τη γραφική παράσταση επιτάχυνσης - χρόνου του σώματος.




**Α.** Να προσδιορίσετε την περίοδο και την κυκλική συχνότητα της κίνησης, και να γράψετε την εξίσωση επιτάχυνσης-χρόνου.

**Β.** Από το σχήμα της γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε τη θέση του σώματος στην αρχή των χρόνων, και όταν το σώμα διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

**Γ.** Να γράψετε τις εξισώσεις θέσης - χρόνου και ταχύτητας-χρόνου.

**Δ.** Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος, εάν κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση με επιτάχυνση $-7{,}5\ m/s^2$.

**Ε.** Να αναφέρετε πώς θα μεταβληθεί η συχνότητα ταλάντωσης του σώματος, εάν διπλασιασθεί:

**(i)** το πλάτος της ταλάντωσης.

**(ii)** η μάζα του σώματος.

**(iii)** η σταθερά ελατηρίου.

## Συσχέτιση Εννοιών των Ενοτήτων 2.1 - 2.14

**2.1.** Περιοδικές Κινήσεις

↓

**2.2.** Ταλαντώσεις

↓

**2.3.** Κριτήριο Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης (ΑΑΤ): $\sum \vec{F} = -D\vec{x}$

↓

**2.6.** Χαρακτηριστικά Μεγέθη της ΑΑΤ

**2.7.** Διανύσματα της ΑΑΤ: $\sum \vec{F}, \vec{\alpha}, \vec{x}, \vec{\upsilon}$

**2.4. - 2.5. Παραδείγματα της ΑΑΤ:**
Σώμα σε οριζόντιο ή κατακόρυφο ελατήριο,
Σώμα συνδεδεμένο σε παράλληλα ελατήρια,
Σώμα που επιπλέει μερικώς βυθισμένο σε υγρό.

**2.8.** Συσχέτιση Ομαλής Κυκλικής Κίνησης - ΑΑΤ

↓

**2.9. - 2.10.** Περίοδος Τ.
Σχέση περιόδου Τ - Σταθεράς D
της ΑΑΤ

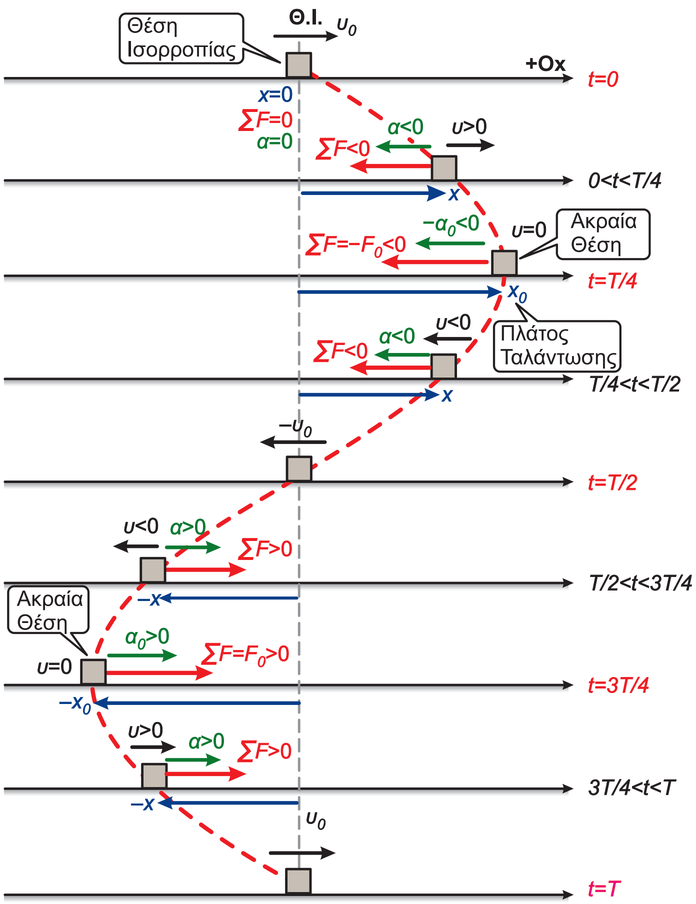
**2.12.** Σχέση Ταχύτητας - Χρόνου

**2.11.** Σχέση Θέσης - Χρόνου

**2.13.** Επιτάχυνσης - Χρόνου

**2.14.** Σχέση Ταχύτητας - Θέσης
Γραφικές Παραστάσεις
Ταχύτητας - Θέσης
Επιτάχυνσης - Θέσης

## Αλγεβρικές Τιμές Διανυσμάτων της Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης




## Χαρακτηριστικά Μεγέθη της Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης

| Μέγεθος | Εξίσωση |
|---|---|
| Περίοδος | $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ |
| Κυκλική Συχνότητα | $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}}$ |
| Φάση | $\theta = \omega t + \theta_0$ |
| Θέση | $y = y_0 \eta\mu\theta$ |
| Ταχύτητα | $\upsilon = (\omega y_0)\sigma\upsilon\nu\theta = (\omega y_0)\eta\mu\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ |
| Επιτάχυνση | $\alpha = -\omega^2 y = \omega^2 y_0 \eta\mu(\theta + \pi)$ |
| Περίοδος Οριζόντιου/Κατακόρυφου Ελατηρίου | $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ |
| Περίοδος Απλού Εκκρεμούς | $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ |

## Απαντήσεις Ελέγχου Κατανόησης Εννοιών

**2.1.1.** Ναι. Περίοδος = 365 ημέρες, συχνότητα = 0,00274 (ημέρες)$^{-1}$.

**2.1.2.** Ναι: Μετά από συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, η βαλίτσα διέρχεται από το ίδιο σημείο με την ίδια ταχύτητα (αυτή του ιμάντα).

**2.1.3.** Όχι: Ο αθλητής επαναλαμβάνει (κατά προσέγγιση) την ίδια κυκλική διαδρομή, αλλά όχι με την ίδια ταχύτητα.

**2.1.4.** Ναι. Για παράδειγμα, μία σφαίρα αναρτημένη σε τεντωμένο σχοινί, που διαγράφει κατακόρυφο κύκλο, εκτελεί μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση. Εάν δεν υπάρχουν απώλειες λόγω τριβών και αντίστασης του αέρα, η μηχανική ενέργεια του συστήματος σφαίρας - Γης διατηρείται. Άρα, σε ένα συγκεκριμένο ύψος η σφαίρα έχει συγκεκριμένο μέτρο ταχύτητας.

**2.2.1.** Ναι. Οι ταλαντώσεις είναι **παλινδρομικές** περιοδικές κινήσεις. Όμως, μία γενική περιοδική κίνηση (π.χ. η ομαλή κυκλική κίνηση) δεν χρειάζεται να είναι παλινδρομική.

**2.2.2.** Δεν είναι παλινδρομική.

**2.2.3.** Οι διαδρομές ΑΒΓ και ΓΒΑΒ δεν είναι πλήρεις κύκλοι: το εκκρεμές ξεκινά και καταλήγει σε διαφορετικό σημείο. Οι ΑΒΓΒΑ και ΓΒΑΒΓ είναι πλήρεις κύκλοι: το εκκρεμές ξεκινά και καταλήγει στο ίδιο σημείο με την ίδια ταχύτητα. Αμέσως μετά, το εκκρεμές επαναλαμβάνει ακριβώς την ίδια κίνηση.

**2.2.4.** Λόγω των τριβών ή/και της αντίστασης του αέρα, το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται, άρα η κίνηση δεν επαναλαμβάνεται.

**2.2.5.** Επειδή η αναπήδηση είναι ελαστική και η αντίσταση του αέρα αμελητέα, η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Άρα η μπάλα έχει το ίδιο μέτρο ταχύτητας στο ίδιο ύψος. Η διαδρομή ΑΓΑ είναι ένας πλήρης κύκλος ταλάντωσης. Οι διαδρομές ΒΓΒ και ΒΑΒ δεν είναι, επειδή η μπάλα ξεκινά και επιστρέφει στο ίδιο σημείο Β με διαφορετικές (αντίθετες μεταξύ τους) ταχύτητες.

**2.2.6.** Όχι, επειδή το μέγιστο ύψος της κίνησης μειώνεται.

**2.3.1.** Ναι. Η ΑΑΤ είναι ειδική περίπτωση ταλαντωτικής κίνησης, στην οποία η συνισταμένη δύναμη είναι ανάλογη και αντίρροπη με τη μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας.

**2.3.2.** Όχι. Στη μπάλα ασκείται συνεχώς η σταθερή δύναμη του βάρους της, και (κατά τη διάρκεια της πρόσκρουσης στο έδαφος) μία μεταβαλλόμενη δύναμη από το έδαφος. Η συνισταμένη δύναμη δεν ικανοποιεί το κριτήριο της ΑΑΤ.

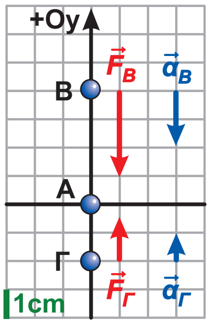
**2.3.3.** Η κίνηση είναι παλινδρομική περιοδική, δηλαδή ταλαντωτική. Στον δίσκο ασκείται το βάρος του, μία αντίθετη δύναμη από τον αέρα, και μία δύναμη από τα τοιχώματα (κατά τη διάρκεια της πρόσκρουσης). Η συνισταμένη δύναμη δεν ικανοποιεί το κριτήριο της ΑΑΤ.

**2.3.4.** **Α.** Σωστό: $\Delta x = x_1/2 - x_1 = -x_1/2 < 0$. **Β.** Λάθος (δεν γνωρίζουμε την ακριβή κίνηση). **Γ.** Λάθος: $\Delta x = x_1/2 - 0 = x_1/2 > 0$. **Δ.** Σωστό. **Ε.** Λάθος (αρνητική και τις δύο στιγμές).

**2.3.5.** **Α.** Όχι. Η κινητική τριβή είναι συνεχώς αντίθετη με την κίνηση, και το πλάτος της παλινδρομικής κίνησης ελαττώνεται. **Β.** Όχι, η δύναμη είναι ομόρροπη με την μετατόπιση από τη ΘΙ $x = 0$. **Γ.** Όχι. Η δύναμη δεν είναι ανάλογη με την μετατόπιση από τη ΘΙ.

**2.3.6.** Η συνισταμένη δύναμη πρέπει να κατευθύνεται προς τη ΘΙ. Άρα, το σημείο Γ είναι η ΘΙ.

**2.3.7.** Το διάγραμμα φαίνεται στο επόμενο σχήμα.




Το διάνυσμα δύναμης στο σημείο Β σχεδιάζεται με διπλάσιο μέτρο από ό,τι στο σημείο Γ. Το ιδιο ισχύει για τα διανύσματα επιτάχυνσης.

Τα διανύσματα κατευθύνονται προς τη ΘΙ. Τα μήκη των διανυσμάτων δύναμης και επιτάχυνσης δεν σχετίζονται μεταξύ τους, επειδή εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες.

Η δύναμη έχει μεγαλύτερο μέτρο στο σημείο Β και μεγαλύτερη αλγεβρική τιμή στο σημείο Γ.

**2.4.1.** $k = k_1 + k_2 = 1{,}00 \times 10^2$ N/m.

**2.4.2.** $k = Nk_1 = N \times (50{,}0 \text{ N/m})$.

**2.4.3.** $k_{\text{ισοδ}} = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \dfrac{k^2}{2k} = \dfrac{k}{2}$ .

**2.4.4.** Το ελατήριο Β είναι κατά προσέγγιση ισοδύναμο με δύο ελατήρια Α σε σειρά. Εάν το ελατήριο Α έχει σταθερά $k_{\text{A}} = k$, το Β έχει σταθερά $k_{\text{B}} = k/2$. Εάν συνδέσουμε τα ελατήρια σε σειρά, η ισοδύναμη σταθερά θα είναι

$$k_{\text{ισοδ}} = \frac{k_{\text{A}} k_{\text{B}}}{k_{\text{A}} + k_{\text{B}}} = \frac{k \times (k/2)}{k + (k/2)} = \frac{k}{3} .$$

**2.4.5.** Από την εξίσωση του ΚΜ: $\vec{\alpha}_{\mathrm{KM}} = \vec{0} \Rightarrow \dfrac{m_1\vec{\alpha}_1 + m_2\vec{\alpha}_2}{m_1 + m_2} = \vec{0} \Rightarrow m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\dfrac{m_2}{m_1}\alpha_2$.

Επειδή $x_2 - x_{20} = -\dfrac{m_1}{m_2}(x_1 - x_{10}) \Rightarrow (x_1 - x_{10}) = -\dfrac{m_2}{m_1}(x_2 - x_{20})$, η επιτάχυνση του 1 γίνεται:

$$\alpha_1 = -\frac{m_2}{m_1}\alpha_2 = -k\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\left(-\frac{m_2}{m_1}(x_2 - x_{20})\right) = -k\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}(x_1 - x_{10}).$$

Άρα, η επιτάχυνση είναι ανάλογη και αντίρροπη με τη μετατόπιση απο τη ΘΙ, και το 1 εκτελεί ΑΑΤ.

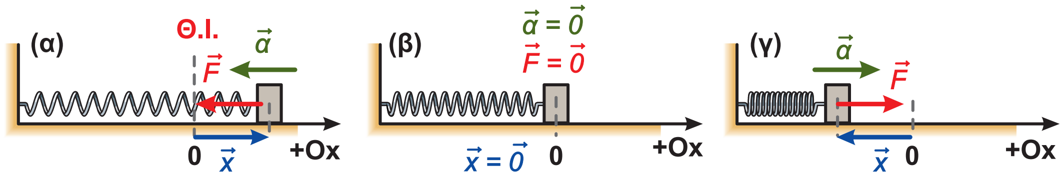
**2.5.1.** Η δύναμη ελατηρίου.

**2.5.2.** Η συνισταμένη δύναμη στο σώμα.

**2.5.3.** Η σταθερά της ταλάντωσης δεν εξαρτάται από τη μάζα του σώματος. Η θέση ισορροπίας θα μεταβληθεί: Επειδή το σώμα έχει διπλάσιο βάρος, η συνισταμένη δύναμη μηδενίζεται όταν η δύναμη ελατηρίου διπλασιασθεί. Άρα, το ελατήριο επιμηκύνεται (η νέα ΘΙ χαμηλώνει).

**2.7.1.** **(Α)** Από Α προς Ε: +, –, –, –, + . **(Β)** –, –, 0, +, + . **(Γ)** Στα Β και Ε αυξάνεται (το σώμα κινείται προς τη ΘΙ). Στα Α και Δ μειώνεται (το σώμα απομακρύνεται από τη ΘΙ). Στο Γ μένει (στιγμιαία) σταθερό.

**2.7.2.**




Όχι γιατί δεν γνωρίζουμε τη φορά της κίνησης του σώματος.

**2.7.3.** Η ταχύτητα.

**2.7.4.** Η δύναμη επαναφοράς, η επιτάχυνση και η θέση (εάν η ΘΙ είναι το σημείο αναφοράς, ως προς το οποίο μετράμε τις θέσεις).

**2.7.5.** Στο **(α)** μειώνεται (το σώμα απομακρύνεται από τη ΘΙ με αρνητική επιτάχυνση, οπότε $\Delta\upsilon = \alpha\Delta t < 0$). Στο **(β)** παραμένει στιγμιαία σταθερή (το σώμα διέρχεται από τη ΘΙ, και έχει μηδενική στιγμιαία επιτάχυνση). Στο **(γ)** αυξάνεται (το σώμα κινείται προς τη ΘΙ με θετική επιτάχυνση).

**2.10.1.** Η περίοδος δεν εξαρτάται από το πλάτος (εάν δεν έχουμε παραμορφώσει υπερβολικά το ελατήριο, και ο νόμος του Hooke ισχύει). Άρα:

$$T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi\sqrt{(5{,}00 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg}) / (8{,}00\ \mathrm{N/m})} = 0{,}157\ \mathrm{s}.$$

**2.10.2.** Όταν αυξάνεται το πλάτος, αυξάνεται το μέτρο της δύναμης επαναφοράς και το μέτρο της επιτάχυνσης. Τελικά, στην ΑΑΤ η περίοδος είναι ανεξάρτητη του πλάτους.

**2.10.3.** **Α.** Υποδιπλασιάζεται. **Β.** Διπλασιάζεται. **Γ.** Δεν επηρεάζεται.

---

**2.11.1.** Το αντίστοιχο σημείο Μ, που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, διαγράφει γωνία $\theta = 2\pi$ σε χρονικό διάστημα $T$. Άρα, στα χρονικά διαστήματα $T/4$, $T/2$, $3T/4$ και $T$, οι γωνίες που διαγράφει είναι $2\pi/4 = \pi/2$, $2\pi/2 = \pi$, $3\pi/2$, $2\pi$. Ο ταλαντωτής έχει την ίδια μεταβολή φάσης.

**2.11.2.** **Α.** $y = y_0 \eta\mu \dfrac{\pi}{4} = y_0 \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **Β.** Σε κάθε διαδοχικό χρονικό διάστημα $T/4$, η φάση αυξάνεται κατά $\pi/2$.

**Γ.** $y\left(\dfrac{T}{4}\right) = y_0 \eta\mu\left(\dfrac{2\pi}{T}\dfrac{T}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right) = y_0 \eta\mu \dfrac{3\pi}{4} = y_0 \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y\left(\dfrac{T}{2}\right) = y_0 \eta\mu \dfrac{5\pi}{4} = -y_0 \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$y\left(\dfrac{3T}{4}\right) = y_0 \eta\mu \dfrac{7\pi}{4} = -y_0 \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y(T) = y_0 \eta\mu \dfrac{9\pi}{4} = y_0 \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**2.11.3.** Μόνο η (γ).

**2.11.4.** **Α.** $y = y_0 \eta\mu \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{y_0}{2}$. Ο ταλαντωτής κινείται προς τη θετική κατεύθυνση. **Β.** Σε χρονικό διάστημα μίας περιόδου, η φάση αυξάνεται κατά $2\pi$, σε χρονικό διάστημα $T/2$ κατά $(2\pi)/2 = \pi$, και σε χρονικό διάστημα $T/4$ κατά $(2\pi)/4 = \pi/2$. Άρα:

**(i)** $\theta(0) = \dfrac{\pi}{6}$, $\theta(T) = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{13\pi}{6}$, $\theta(2T) = \dfrac{13\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{25\pi}{6}$, $\theta(3T) = \dfrac{25\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{37\pi}{6}$.

Τη στιγμή $t = 0$, ό ταλαντωτής κινείται προς τη θετική κατεύθυνση. Μετά από παρέλευση κάθε περιόδου, ο ταλαντωτής συμπληρώνει έναν κύκλο και κινείται πάλι προς τη θετική κατεύθυνση.

**(ii)** $\theta(\dfrac{T}{2}) = \dfrac{\pi}{6} + \pi = \dfrac{7\pi}{6}$, $\theta(\dfrac{3T}{2}) = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{19\pi}{6}$, $\theta(\dfrac{5T}{2}) = \dfrac{19\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{31\pi}{6}$. Τη στιγμή $t = \dfrac{T}{2}$ ό ταλαντωτής κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση. Μετά από παρέλευση κάθε περιόδου, ο ταλαντωτής συμπληρώνει έναν κύκλο και κινείται πάλι προς την αρνητική κατεύθυνση.

**(iii)** $\theta(\dfrac{T}{4}) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{4\pi}{6}$, $\theta(\dfrac{5T}{4}) = \dfrac{4\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{16\pi}{6}$, $\theta(\dfrac{9T}{4}) = \dfrac{16\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{28\pi}{6}$, Αρνητική κατεύθυνση.

**(iv)** $\theta(\dfrac{3T}{4}) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{10\pi}{6}$, $\theta(\dfrac{7T}{4}) = \dfrac{10\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{22\pi}{6}$, Θετική κατεύθυνση.

**2.11.5.** **(α)** Απόσταση $= 4y_0$, όπου $y_0$ είναι το πλάτος της ΑΑΤ. **(β)** Διανυσματική μετατόπιση $\Delta y = 0$. Τα αποτελέσματα δεν εξαρτώνται από τη φορά της κίνησης.

**2.13.1.** **(α)** Ναι, **(β)** Όχι, **(γ)** Ναι, **(δ)** Ναι.

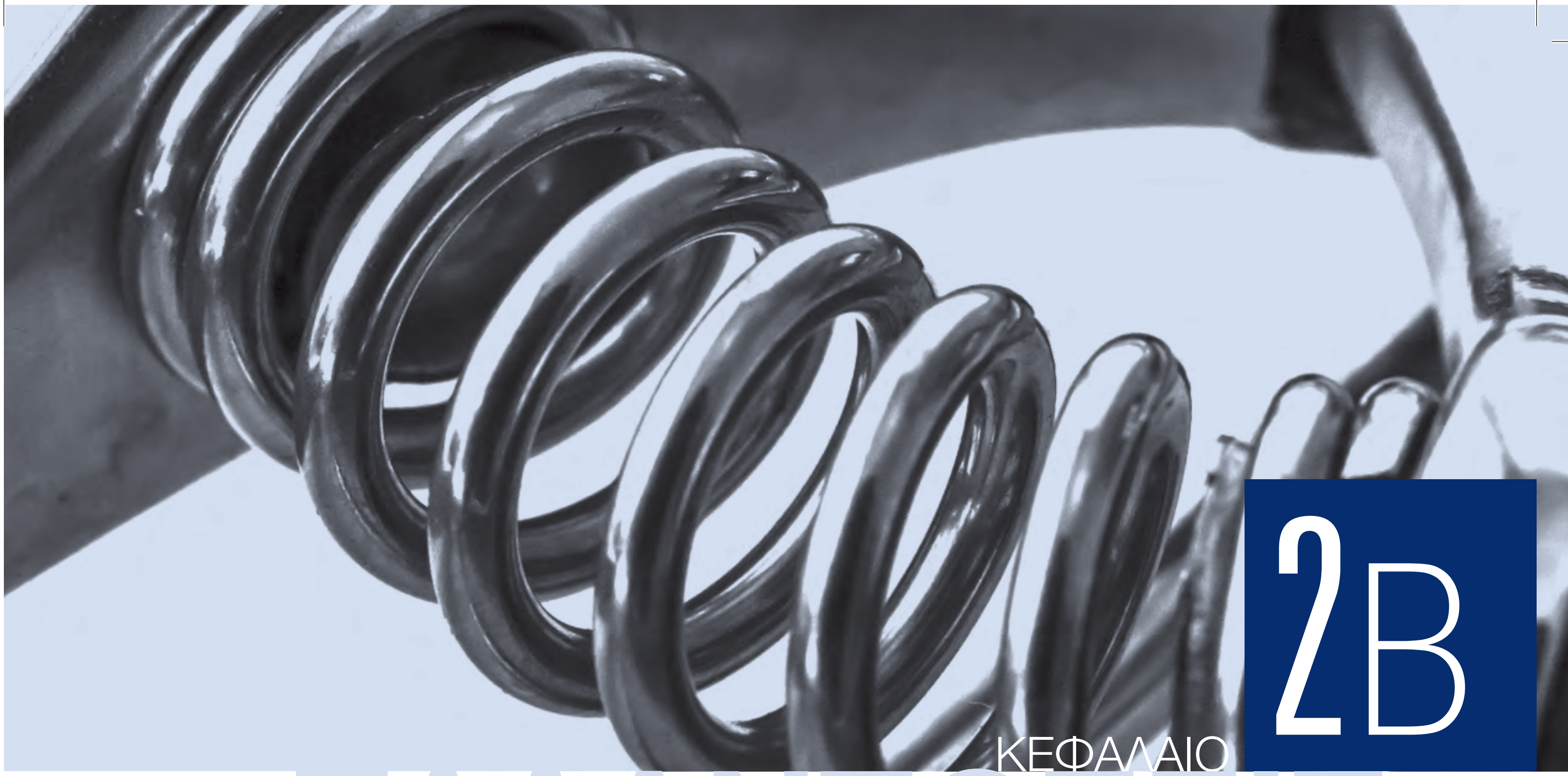
**2.13.2.** Ταχύτητα: 0, –, +, 0, – . Επιτάχυνση: –, 0, 0, –, 0.

**2.14.1.** Από το σχήμα προκύπτει ότι για $y = 2{,}0$ m, η επιτάχυνση $\alpha = -0{,}50$ m/s$^2$. Άρα

$$\omega = \sqrt{-\frac{\alpha}{y}} = \sqrt{-\frac{-0{,}50\ \mathrm{m/s^2}}{2{,}0\ \mathrm{m}}} = 0{,}50\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\,.$$

**2.14.2.** Πλάτος $y_0 = 70{,}0$ cm, μέγιστη ταχύτητα $\upsilon_0 = 30{,}0$ cm/s,

κυκλική συχνότητα $\omega = \dfrac{\upsilon_0}{y_0} = \dfrac{30{,}0\ \mathrm{cm/s}}{70{,}0\ \mathrm{cm}} = 0{,}430\ \dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ .



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2Β

# ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

## Ενότητες 2.15. - 2.21.

**Στις Ενότητες 2.15. - 2.21. του Κεφαλαίου 2Β:**

- **Συζητούμε** τις ενεργειακές μετατροπές στο οριζόντιο ελατήριο.
- Από τη **Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας** σώματος - οριζόντιου ελατηρίου:
  - **Αποδεικνύουμε** ότι οι ακραίες θέσεις ταλάντωσης είναι συμμετρικές ως προς τη ΘΙ.
  - **Υπολογίζουμε** την ταχύτητα του ταλαντωτή σαν συνάρτηση της θέσης του.
- **Συζητούμε** τις ενεργειακές μετατροπές στο κατακόρυφο ελατήριο.
- Από τη **Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας** σώματος - κατακόρυφου ελατηρίου:
  - **Αποδεικνύουμε** ότι οι ακραίες θέσεις ταλάντωσης είναι συμμετρικές ως προς τη ΘΙ.
  - **Εκφράζουμε** τις ακραίες θέσεις ταλάντωσης σαν συνάρτηση της Μηχανικής Ενέργειας.
- **Μελετούμε** το **απλό (μαθηματικό) εκκρεμές**:
  - **Αποδεικνύουμε** ότι εκτελεί ΑΑΤ για μικρές απομακρύνσεις από τη ΘΙ.
  - **Υπολογίζουμε** την περίοδο ταλάντωσης.
  - **Εξηγούμε** πώς χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας.
- **Συζητούμε** την επίδραση της τριβής/αντίστασης του περιβάλλοντος μέσου στο πλάτος και τη συχνότητα των ταλαντώσεων.
- **Ορίζουμε** τις **εξαναγκασμένες** ταλαντώσεις, και συζητούμε το φαινόμενο του συντονισμού.

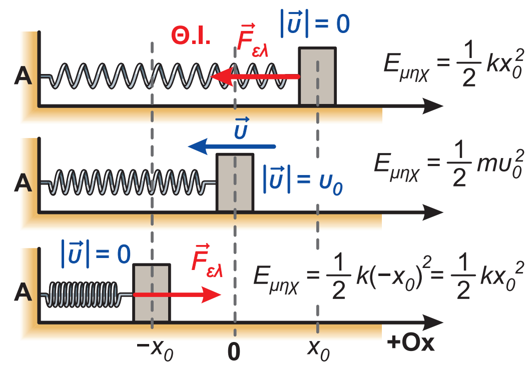
# 2.15. Ενεργειακές Μετατροπές στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση - Εφαρμογή στο Οριζόντιο Ελατήριο

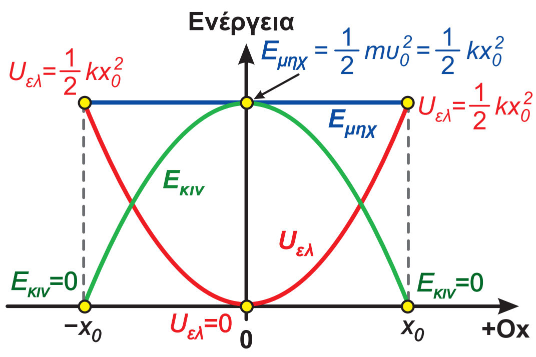
Σ' αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε τις ενεργειακές μετατροπές που παρουσιάζονται σε μια ΑΑΤ. Θα αξιοποιήσουμε το παράδειγμα σώματος συνδεδεμένου σε οριζόντιο ελατήριο, που εκτελεί ΑΑΤ.

Από τη **Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας** του συστήματος σώματος - οριζόντιου ελατηρίου, θα εξαγάγουμε βασικά χαρακτηριστικά της ΑΑΤ ενός σώματος συνδεδεμένου σε οριζόντιο ελατήριο. Ανασκόπηση του Έργου Δύναμης Ελατηρίου και της Μηχανικής Ενέργειας του συστήματος σώματος - οριζόντιου ελατηρίου γίνεται στο τέλος της Ενότητας.

## Α. Οι ακραίες θέσεις της Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης είναι συμμετρικές ως προς τη ΘΙ

Η **Εικόνα 2-7** απεικονίζει ένα σώμα, το οποίο είναι συνδεδεμένο σε αβαρές οριζόντιο ελατήριο και μπορεί να κινείται σε **λείο** οριζόντιο τραπέζι. Στο σώμα δρουν το βάρος του $\vec{B}$, μία κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το τραπέζι ($\vec{N} = -\vec{B}$), και η δύναμη ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$. Η συνισταμένη δύναμη είναι η δύναμη ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$.




**Εικόνα 2-7**
**Πάνω σχήμα:** Η Μηχανική ενέργεια σώματος σε οριζόντιο ελατήριο, όταν διέρχεται από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης $\pm x_0$ και από τη θέση ισορροπίας $x = 0$. **Κάτω σχήμα:** Γραφική παράσταση της Κινητικής Ενέργειας, Δυναμικής Ενέργειας και Μηχανικής Ενέργειας του σώματος-οριζόντιου ελατηρίου, σαν συνάρτηση της θέσης.

Εάν απομακρύνουμε το σώμα μέχρι μία θέση $x_0 > 0$ και το κρατήσουμε ακίνητο, το σύστημα σώματος - ελατηρίου αποκτά Μηχανική Ενέργεια:

$$E_{\mu\eta\chi}(x_0) = U_{\varepsilon\lambda}(x_0) = \frac{1}{2}kx_0^2$$

Εάν αφήσουμε το σώμα ελεύθερο από τη θέση $x_0$ με **μηδενική ταχύτητα**, θα κινηθεί προς τη ΘΙ $x = 0$ με αυξανόμενη ταχύτητα, εξαιτίας της δύναμης επαναφοράς $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$. Το σώμα θα φθάσει στη ΘΙ με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0$, και θα συνεχίσει να κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση. Λόγω της δύναμης επαναφοράς $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$, το μέτρο της ταχύτητας του σώματος θα αρχίσει να ελαττώνεται, και θα μηδενισθεί σε μία ακραία θέση $x_1 < 0$. Στη θέση $x_1$, το σύστημα έχει Μηχανική Ενέργεια:

$$E_{\mu\eta\chi}(x_1) = \frac{1}{2}kx_1^2$$

Από τη Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας, υπολογίζουμε την ακραία θέση $x_1$:

$$E_{\mu\eta\chi}(x = x_1) = E_{\mu\eta\chi}(x = x_0) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 \;\Rightarrow x_1 = \pm x_0$$

Επειδή η αλγεβρική τιμή $x_1$ είναι αρνητική, επιλέγουμε την αρνητική ρίζα:

$$x_1 = -x_0$$

**Συμπεράσματα**

- Στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση, οι ακραίες θέσεις της ταλάντωσης είναι συμμετρικές ως προς τη θέση ισορροπίας: $|x_1| = |x_0|$.
- Από τη Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας, συμπεραίνουμε ότι η Μηχανική Ενέργεια σώματος - οριζόντιου ελατηρίου είναι **ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους** της ταλάντωσης.

$$E_{\mu\eta\chi} = E_{\mu\eta\chi}(x_0) = \frac{1}{2}kx_0^2 \propto x_0^2$$

### Β. Η Ταχύτητα του Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή καθορίζεται από τη Θέση του

Σε μία ενδιάμεση θέση $x$, η ταχύτητα του σώματος έχει αλγεβρική τιμή $\upsilon$, και η Μηχανική Ενέργεια του συστήματος σώματος - οριζόντιου ελατηρίου είναι:

$$E_{\mu\eta\chi}(x) = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Από τη Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας, υπολογίζουμε την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος σαν συνάρτηση της θέσης:

$$E_{\mu\eta\chi}(x) = E_{\mu\eta\chi}(x_0) \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{k}{m}(x_0^2 - x^2) \Rightarrow$$

$$\upsilon = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{(x_0^2 - x^2)} = \pm\omega\sqrt{(x_0^2 - x^2)}$$

όπου αντικαταστήσαμε την κυκλική συχνότητα του ταλαντωτή, $\omega = \sqrt{k/m}$.

Να παρατηρήσετε ότι οι ακραίες τιμές της ταχύτητας είναι **συμμετρικές** μεταξύ τους:

$$\upsilon = \pm\omega\sqrt{(x_0^2 - x^2)} \Rightarrow \begin{cases} \upsilon_{\mu\varepsilon\gamma} = \omega x_0 = \upsilon_0 \\ \upsilon_{\varepsilon\lambda} = -\omega x_0 = -\upsilon_0 \end{cases}$$

**Συμπεράσματα**

- **Η ταχύτητα του σώματος καθορίζεται από τη θέση του.** Σε μία συγκεκριμένη θέση $x$, η ταχύτητα είναι

  $$\upsilon = \pm\omega\sqrt{(x_0^2 - x^2)}$$

  Η ταχύτητα του σώματος είναι θετική εάν κινείται προς τη θετική κατεύθυνση, και αρνητική εάν κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση. Η σχέση αυτή ισχύει γενικά για οποιαδήποτε ΑΑΤ.

- Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας μεταβάλλεται ανάμεσα στις συμμετρικές ακραίες τιμές $\pm\omega x_0$. Ο ταλαντωτής κινείται με τη μέγιστη ή ελάχιστη ταχύτητα (ανάλογα με την κατεύθυνση της κίνησης), όταν διέρχεται από τη ΘΙ.

- Η Μηχανική Ενέργεια του σώματος - οριζόντιου ελατηρίου είναι **ανάλογη με το τετράγωνο της μέγιστης ταχύτητας**:

  $$E_{\mu\eta\chi}(x) = E_{\mu\eta\chi}(0) = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \propto \upsilon_0^2$$

Η προηγούμενη σχέση μεταξύ ταχύτητας - θέσης, γράφεται και στη μορφή:

$$\upsilon = \pm\omega\sqrt{(x_0^2 - x^2)} \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{\omega^2} = x_0^2 - x^2 \Rightarrow x^2 + \frac{\upsilon^2}{\omega^2} = x_0^2 \Rightarrow \frac{x^2}{x_0^2} + \frac{\upsilon^2}{\upsilon_0^2} = 1$$

Στην ίδια σχέση ταχύτητας - θέσης, που περιγράφει **έλλειψη**, είχαμε καταλήξει στην **Ενότητα 2.14**.

## Γ. Εξάρτηση της Δυναμικής και της Κινητικής Ενέργειας από τον χρόνο

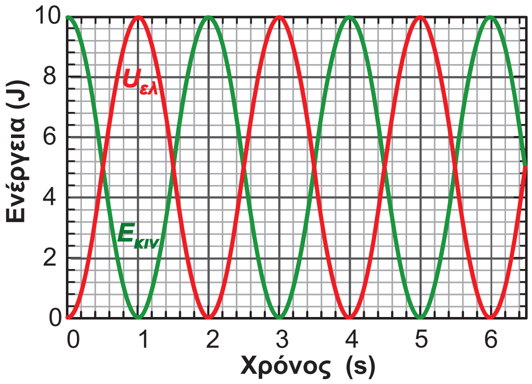
Από τις εξισώσεις θέσης-χρόνου και ταχύτητας-χρόνου της ΑΑΤ συμπεραίνουμε ότι η δυναμική ενέργεια και η κινητική ενέργεια του σώματος - οριζόντιου ελατηρίου εξαρτώνται από το χρόνο σύμφωνα με τις πιο κάτω σχέσεις:

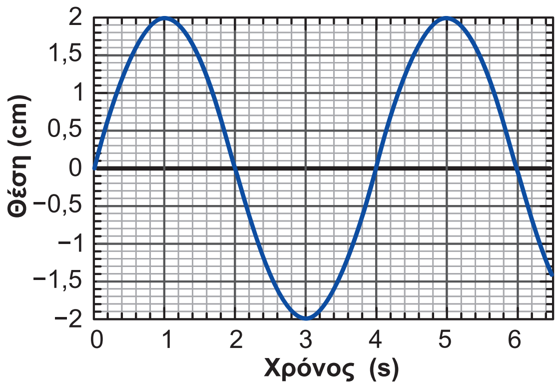
$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\Big(x_0\eta\mu(\omega t + \theta_0)\Big)^2 = E_{\mu\eta\chi}\eta\mu^2(\omega t + \theta_0)$$

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\Big(\upsilon_0\sigma\upsilon\nu(\omega t + \theta_0)\Big)^2 = E_{\mu\eta\chi}\sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \theta_0)$$

όπου θέσαμε $E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$.

Οι γραφικές παραστάσεις των ενεργειών απεικονίζονται σαν συναρτήσεις του χρόνου στο αριστερό σχήμα. Η αντίστοιχη γραφική παράσταση θέσης - χρόνου του σώματος απεικονίζεται στο δεξιό σχήμα.




Να παρατηρήσετε ότι:

- Η Δυναμική και η Κινητική Ενέργεια είναι πάντοτε θετικές.
- Το άθροισμα των δύο ενεργειών είναι πάντα σταθερό:

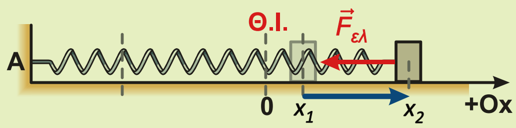
$$U_{\varepsilon\lambda} + E_{\kappa\iota\nu} = E_{\mu\eta\chi}\Big[\eta\mu^2(\omega t + \theta_0) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \theta_0)\Big] = E_{\mu\eta\chi}$$

- Η Δυναμική και η Κινητική ενέργεια επαναλαμβάνονται μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = T/2$, όπου $T$ είναι η περίοδος της ταλάντωσης.

## Ανασκόπηση Έργου Δύναμης Ελατηρίου και Μηχανικής Ενέργειας Σώματος - Οριζόντιου Ελατηρίου

### Α. Έργο Δύναμης Ελατηρίου

Το σώμα του πιο κάτω σχήματος είναι συνδεδεμένο με οριζόντιο, αβαρές ελατήριο. Όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0$.



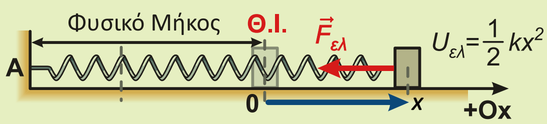

Έστω ότι το σώμα μετακινείται από μία αρχική θέση $x_1$ σε μία τελική θέση $x_2$. Στην Α΄ Λυκείου μάθαμε ότι το **έργο** της δύναμης ελατηρίου ισούται με:

**Έργο Δύναμης Ελατηρίου για Μετακίνηση του Σώματος από αρχική θέση $x_1$ σε τελική θέση $x_2$:**

$$W_{x_1 \to x_2} = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

Επειδή το έργο ***εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση του σώματος***, η δύναμη ελατηρίου είναι **διατηρητική.**

### Β. Δυναμική Ενέργεια Συστήματος Σώματος - Ελατηρίου




Η **Δυναμική Ενέργεια** του συστήματος σώματος - ελατηρίου ορίζεται από τη σχέση:

**Δυναμική Ενέργεια Συστήματος Σώματος - Ελατηρίου, όταν το μήκος του ελατηρίου διαφέρει κατά $x$ από το φυσικό του μήκος:**

$$U_{ελ}(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Το έργο της δύναμης ελατηρίου ισούται με την **αρνητική** μεταβολή στη δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος - ελατηρίου:

$$W_{x_1 \to x_2} = -\frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = -\left[U_{ελ}(x_2) - U_{ελ}(x_1)\right] = -\Delta U_{ελ}$$

### Γ. Μηχανική Ενέργεια Συστήματος Σώματος - Οριζόντιου Ελατηρίου

Για οριζόντιο, αβαρές ελατήριο, ορίζουμε ως **Μηχανική Ενέργεια** του συστήματος σώματος - ελατηρίου το άθροισμα της κιντικής ενέργειας του σώματος και της δυναμικής ενέργειας σώματος – ελατηρίου:

**Μηχανική Ενέργεια Συστήματος Σώματος - Οριζόντιου Ελατηρίου:**

$$E_{\mu\eta\chi} = E_{\kappa\iota\nu} + U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

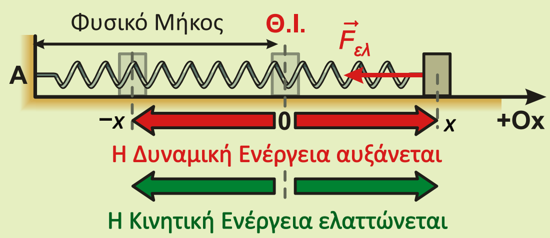
Από το Θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας, γνωρίζουμε ότι η μεταβολή στην Κινητική Ενέργεια του σώματος ισούται με το έργο της συνισταμένης δύναμης:

$$W_{\Sigma\vec{F}} = E_{\kappa\iota\nu}^{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi}$$

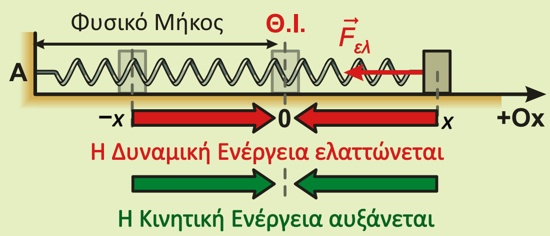
Εάν το έργο της συνισταμένης δύναμης ισούται με το έργο της δύναμης ελατηρίου, $W_{\Sigma\vec{F}} = W_{\vec{F}_{\varepsilon\lambda}}$, η Μηχανική Ενέργεια του συστήματος σώματος - ελατηρίου **διατηρείται**:

$$W_{\vec{F}_{\varepsilon\lambda}} = E_{\kappa\iota\nu}^{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi} \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda}^{\alpha\rho\chi} - U_{\varepsilon\lambda}^{\tau\varepsilon\lambda} = E_{\kappa\iota\nu}^{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi} \Rightarrow E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi} + U_{\varepsilon\lambda}^{\alpha\rho\chi} = E_{\kappa\iota\nu}^{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\varepsilon\lambda}^{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow E_{\mu\eta\chi}^{\tau\varepsilon\lambda} = E_{\mu\eta\chi}^{\alpha\rho\chi}$$

Όταν το σώμα απομακρύνεται από τη ΘΙ, η δύναμη ελατηρίου είναι ***αντίρροπη*** με τη μετατόπιση και **καταναλώνει** έργο. Κιντική Ενέργεια μετατρέπεται σε Δυναμική Ενέργεια σώματος - ελατηρίου. Η Κιντική Ενέργεια ελαττώνεται, και η Δυναμική Ενέργεια σώματος - ελατηρίου αυξάνεται: $\Delta E_{\kappa\iota\nu} = -\Delta U_{\varepsilon\lambda} < 0$.



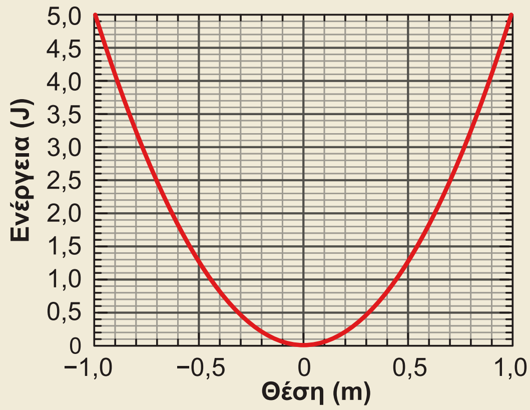

Αντίθετα, όταν το σώμα κινείται προς τη ΘΙ, η δύναμη ελατηρίου είναι ***ομόρροπη*** με τη μετατόπιση και **παράγει** έργο. Δυναμική Ενέργεια του συστήματος σώματος - ελατηρίου μετατρέπεται σε Κινητική Ενέργεια του σώματος. Η Κινητική Ενέργεια αυξάνεται, και η Δυναμική Ενέργεια ελαττώνεται: $\Delta E_{\kappa\iota\nu} = -\Delta U_{\varepsilon\lambda} > 0$.




**Παράδειγμα 1**

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση θέσης - Δυναμικής Ενέργειας για ένα σύστημα σώματος - οριζόντιου ελατηρίου.

**Α. Από τη γραφική παράσταση, να προσδιορίσετε τη σταθερά ελατηρίου.**




Η Δυναμική Ενέργεια είναι:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx^2$$

Λύνουμε την πιο πάνω σχέση ως προς τη σταθερά ελατηρίου:

$$k = \frac{2U_{\varepsilon\lambda}}{x^2}$$

Για $x = 1{,}00$ m, η Δυναμική Ενέργεια ισούται με 5,00 J. Άρα:

$$k = \frac{2U_{\varepsilon\lambda}}{x^2} = \frac{2 \times (5{,}00\ \text{J})}{(1{,}00\ \text{m})^2} = 10{,}0\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

**Β. Το σώμα ακινητεί στη ΘΙ, και του δίδεται μία αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = +3{,}0$ m/s, με κατεύθυνση προς τα δεξιά. Ποιό είναι το πλάτος της ταλάντωσης, που θα εκτελέσει; Η μάζα του σώματος είναι $m = 0{,}100$ kg.**

Στη θέση $x = 0$, η Δυναμική Ενέργεια είναι $U_{\varepsilon\lambda} = 0$ J, και η Μηχανική Ενέργεια ισούται με την Κινητική:

$$E_{\mu\eta\chi}(0) = E_{\kappa\iota\nu}(0) = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$$

Έστω ότι η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται στη θέση $x_0 > 0$. Σε εκείνη τη θέση, η Μηχανική Ενέργεια ισούται με τη Δυναμική:

$$E_{\mu\eta\chi}(x_0) = U_{\varepsilon\lambda}(x_0) = \frac{1}{2}kx_0^2$$

Από τη διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας συμπεραίνουμε:

$$E_{\mu\eta\chi}(x_0) = E_{\mu\eta\chi}(0) \Rightarrow \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \Rightarrow x_0 = \upsilon_0\sqrt{\frac{m}{k}} =$$

$$\left(3{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \times \sqrt{\frac{0{,}100\ \text{kg}}{10{,}0\ \text{N/m}}} = \left(3{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \times (0{,}100\ \text{s}) = 0{,}30\ \text{m}$$

**Γ. Το σώμα αφήνεται από ηρεμία από τη θέση $x_0 = 0{,}40$ m. Ποια είναι η ταχύτητά του, όταν διέρχεται από τις θέσεις (α) $x = 0{,}00$ m και (β) $x = -0{,}30$ m; (γ) Σε ποια θέση θα μηδενισθεί η ταχύτητα του σώματος για πρώτη φορά;**

Από τη Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας, συμπεραίνουμε:

**(α)**

$$E_{\mu\eta\chi}(0) = E_{\mu\eta\chi}(x_0) \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2(0) = \frac{1}{2}kx_0^2 \Rightarrow \upsilon(0) = \pm x_0\sqrt{\frac{k}{m}} =$$

$$\pm(0{,}40\ \text{m})\times\sqrt{\frac{10{,}0\ \text{N/m}}{0{,}100\ \text{kg}}} = \pm(0{,}40\ \text{m})\times(10{,}0\ \text{s}^{-1}) = \pm 4{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**(β)**

$$E_{\mu\eta\chi}(x) = E_{\mu\eta\chi}(x_0) \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{x_0^2 - x^2} =$$

$$\pm(10{,}0\ \text{s}^{-1})\times\sqrt{(0{,}40\ \text{m})^2 - (-0{,}30\ \text{m})^2} = \pm 2{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**(γ)** Το σώμα θα φθάσει μέχρι τη συμμετρική θέση $x = -0{,}40$ m.

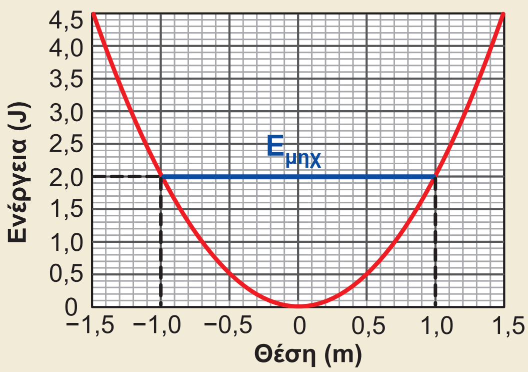
**Παράδειγμα 2**

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση θέσης - Δυναμικής Ενέργειας για ένα σύστημα σώματος - οριζόντιου ελατηρίου.

**Α. Εάν η συνολική Μηχανική Ενέργεια του συστήματος είναι $E_{\mu\eta\chi} = 2{,}0$ J, να προσδιορίσετε το πλάτος της ταλάντωσης, (α) γραφικά, (β) από τη σχέση της Μηχανικής Ενέργειας.**

**(α) Γραφικός προσδιορισμός**

Φέρουμε την οριζόντια ευθεία $y = E_{\mu\eta\chi} = 2{,}0$ J, και προσδιορίζουμε τα σημεία στα οποία τέμνει την καμπύλη της Δυναμικής Ενέργειας. Οι τετμημένες αυτών των σημείων είναι οι ακραίες θέσεις της ταλάντωσης, $\pm x_0 = \pm 1{,}0$ m.



**(β) Από τη σχέση της Δυναμικής Ενέργειας**

Η σταθερά ελατηρίου συνδέεται με τη Δυναμική Ενέργεια με τη σχέση $k = 2U_{ελ}/x^2$. Παρατηρούμε ότι για $x = 1{,}5$ m, η Δυναμική Ενέργεια ισούται με 4,5 J.

Άρα:

$$k = \frac{2U_{ελ}}{x^2} = \frac{2 \times (4{,}5\ \text{J})}{(1{,}5\ \text{m})^2} = 4{,}0\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Η Μηχανική Ενέργεια είναι ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους της ταλάντωσης. Άρα:

$$E_{μηχ} = \frac{1}{2}kx_0^2 \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{2E_{μηχ}}{k}} = \sqrt{\frac{2 \times (2{,}0\ \text{J})}{4{,}0\ \text{N/m}}} = 1{,}0\ \text{m}$$

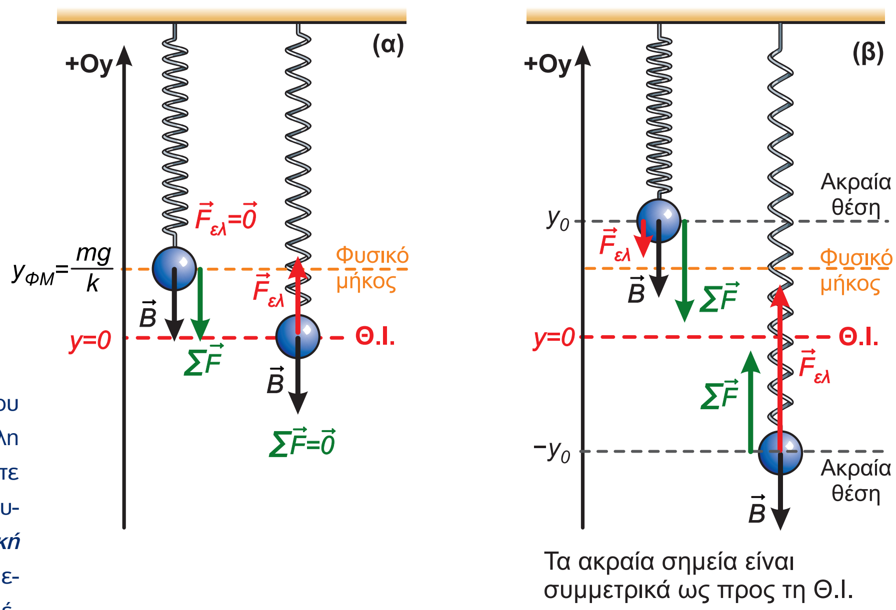
**Β. Να προσδιορίσετε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος, όταν διέρχεται από τη ΘΙ. Η μάζα του σώματος είναι $m = 0{,}010$ kg.**

Στη θέση $x = 0$, η Δυναμική Ενέργεια μηδενίζεται, και η Μηχανική Ενέργεια ισούται με την Κινητική:

$$E_{κιν} = E_{μηχ} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = E_{μηχ} \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\frac{2E_{μηχ}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times (2{,}0\ \text{J})}{0{,}010\ \text{kg}}} = 2{,}0 \times 10^1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

## 2.16. Ενεργειακές Μετατροπές στο Σύστημα Σώματος - Κατακόρυφου Ελατηρίου

Η **Εικόνα 2-8** απεικονίζει μια σφαίρα μάζας $m$, που είναι προσδεμένη σε αβαρές κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k$.




**Εικόνα 2-8**
**(α)** Η τιμή $y = 0$ αντιστοιχεί στη ΘΙ, όπου $\sum\vec{F} = \vec{B} + \vec{F}_{ελ} = \vec{0}$. Σε οποιαδήποτε άλλη θέση, η συνισταμένη δύναμη έχει πάντοτε κατεύθυνση προς τη ΘΙ. **(β)** Εάν αφήσουμε τη σφαίρα από μία θέση $y_0$ με ***μηδενική αρχική ταχύτητα***, θα εκτελεί ΑΑΤ ανάμεσα στις ακραίες θέσεις $y_0$ και $-y_0$. Το μέτρο της ταχύτητας γίνεται μέγιστο στη ΘΙ.

Όπως δείξαμε στην **Ενότητα 2.5**, η σφαίρα εκτελεί ΑΑΤ με δύναμη επαναφοράς $\sum\vec{F} = \vec{F}_{ελ} + \vec{B}$ και σταθερά ΑΑΤ $D = k$. Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την ΑΑΤ του σώματος σε κατακόρυφο ελατήριο, χρησιμοποιώντας ενεργειακές μεθόδους.

## Δυναμική Ενέργεια Σώματος - Κατακόρυφου Ελατηρίου

Στο **οριζόντιο** ελατήριο, η δύναμη ελατηρίου και η αντίστοιχη Δυναμική Ενέργεια σώματος - ελατηρίου δίνονται από τις σχέσεις.

$$F_{ελ} = -kx, \quad U_{ελ}(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

όπου $x$ είναι η απομάκρυνση της ελεύθερης άκρης του ελατηρίου από τη θέση $x = 0$, στην οποία το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

Στο **κατακόρυφο ελατήριο**, η δύναμη ελατηρίου ισούται με

$$F_{ελ} = -k\left(y - \frac{mg}{k}\right) = -k(y - y_{ΦΜ})$$

Κατ' αναλογία με το οριζόντιο ελατήριο, η Δυναμική Ενέργεια σώματος - κατακόρυφου ελατηρίου δίνεται από τη σχέση:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}k\left(y - \frac{mg}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}k(y - y_{ΦΜ})^2$$

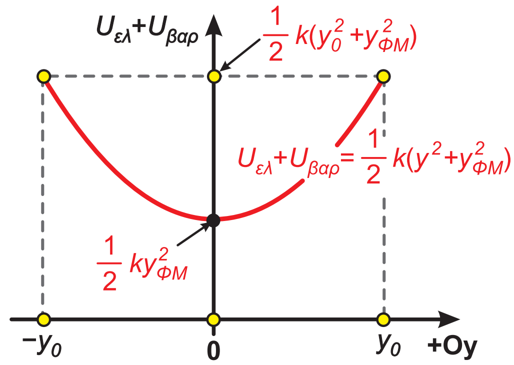
Να παρατηρήσετε ότι η Δυναμική Ενέργεια σώματος - κατακόρυφου ελατηρίου παίρνει την ελάχιστη τιμή $U_{ελ} = 0$ όταν η ελεύθερη άκρη (και το σώμα) βρίσκεται στη θέση $y_{ΦΜ} = mg/k$, όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Σε οποιαδήποτε άλλη θέση, η Δυναμική Ενέργεια Ελατηρίου είναι **θετική**.

## Συνολική Δυναμική Ενέργεια Σώματος - Κατακόρυφου Ελατηρίου - Γης

Θεωρούμε ως **μηδέν** της Δυναμικής Ενέργειας Βαρύτητας τη θέση ισορροπίας $y = 0$. Η **συνολική Δυναμική Ενέργεια** του συστήματος σώματος - κατακόρυφου ελατηρίου - Γης ισούται με το άθροισμα των Δυναμικών Ενεργειών ελατηρίου και Βαρύτητας:

$$U_{ελ} + U_{βαρ} = \frac{1}{2}k\left(y - \frac{mg}{k}\right)^2 + mgy = \frac{1}{2}ky^2 - mgy + \frac{(mg)^2}{2k} + mgy =$$

$$\frac{1}{2}ky^2 + \frac{(mg)^2}{2k} = \frac{1}{2}k(y^2 + y_{ΦΜ}^2)$$




Να παρατηρήσετε ότι η συνολική Δυναμική Ενέργεια παίρνει την ελάχιστη τιμή

$$\frac{(mg)^2}{2k}=\frac{1}{2}ky^2_{\Phi\mathrm{M}}$$

στη ΘΙ $y=0$.

Η γραφική παράσταση θέσης - συνολικής Δυναμικής Ενέργειας είναι παραβολή, όπως φαίνεται στο πιο πάνω σχήμα.

### Μηχανική Ενέργεια Σώματος - Κατακόρυφου Ελατηρίου - Γης

Το ελατήριο θεωρείται αβαρές και δεν έχει Κινητική Ενέργεια. Άρα, η συνολική **Μηχανική Ενέργεια** του συστήματος σώματος - ελατηρίου - Γης ισούται με το άθροισμα της Κινητικής Ενέργειας του σώματος και της συνολικής Δυναμικής Ενέργειας:

**Μηχανική Ενέργεια = Κινητική Ενέργεια + Δυναμική Ενέργεια Ελατηρίου + Δυναμική Ενέργεια Βαρύτητας**

$$E_{\mu\eta\chi}=E_{\kappa\iota\nu}+U_{\varepsilon\lambda}+U_{\beta\alpha\rho}=\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}ky^2+\frac{(mg)^2}{2k}=\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}k(y^2+y^2_{\Phi\mathrm{M}})$$

### Η Μηχανική Ενέργεια Σώματος - Κατακόρυφου Ελατηρίου - Γης διατηρείται

Θεωρούμε αμελητέες τις τριβές του ελατηρίου και την αντίσταση του αέρα. Σύμφωνα με το θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας, το άθροισμα των έργων του βάρους και της δύναμης ελατηρίου ισούται με τη μεταβολή στην Κινητική Ενέργεια:

$$W_{βαρ} + W_{ελ} = ΔE_{κιν}$$

Ταυτόχρονα, το έργο του βάρους ισούται με την αρνητική μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής Ενέργειας:

$$W_{βαρ} = -ΔU_{βαρ}$$

Ομοίως, το έργο δύναμης ελατηρίου ισούται με την αρνητική μεταβολή της δυναμικής Ενέργειας ελατηρίου:

$$W_{ελ} = -ΔU_{ελ}$$

Άρα:

$$W_{βαρ} + W_{ελ} = ΔE_{κιν} \Rightarrow -ΔU_{βαρ} - ΔU_{ελ} = ΔE_{κιν} \Rightarrow$$

$$ΔE_{κιν} + ΔU_{βαρ} + ΔU_{ελ} = 0 \Rightarrow ΔE_{μηχ} = 0$$

**Συμπέρασμα**
Κατά την κίνηση σώματος συνδεδεμένου με κατακόρυφο ελατήριο, η συνολική Μηχανική Ενέργεια του συστήματος σώματος - ελατηρίου - Γης διατηρείται:

$$E_{μηχ} = \frac{1}{2}mυ^2 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{(mg)^2}{2k} = \frac{1}{2}mυ^2 + \frac{1}{2}k(y^2 + y_{ΦΜ}^2) = \text{σταθερή}$$

## Μελέτη των Ακραίων Θέσεων Ταλάντωσης στο Κατακόρυφο Ελατήριο

Έστω ότι συσπειρώνουμε το ελατήριο, κινώντας τη σφαίρα προς τα επάνω μέχρι τη θέση $y_0 > 0$, όπως στην **Εικόνα 2-8(β)**. Σε εκείνη τη θέση, η Μηχανική Ενέργεια είναι:

$$E_{μηχ} = \frac{1}{2}k(y_0^2 + y_{ΦΜ}^2)$$

Αφήνουμε τη σφαίρα με μηδενική ταχύτητα από εκείνη τη θέση. Η σφαίρα θα κινηθεί προς τη Γη υπό την επίδραση του βάρους της και της δύναμης ελατηρίου. Το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται μέχρι τη ΘΙ $y = 0$, και κατόπιν ελαττώνεται μέχρι να μηδενισθεί στο κατώτατο σημείο της τροχιάς $y_1 < 0$. Σε εκείνο το σημείο, η Μηχανική Ενέργεια γίνεται:

$$E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2}k(y_1^2 + y_{\Phi M}^2)$$

Από τη διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας, βρίσκουμε:

$$\frac{1}{2}k(y_0^2 + y_{\Phi M}^2) = \frac{1}{2}k(y_1^2 + y_{\Phi M}^2) \Rightarrow y_0^2 = y_1^2 \Rightarrow y_1 = \pm y_0$$

Η ζητούμενη λύση είναι η $y_1 = -y_0$.

**Συμπέρασμα**

Ένα σώμα σε κατακόρυφο ελατήριο ταλαντώνεται γύρω από **συμμετρικές** ως προς τη ΘΙ ακραίες θέσεις.

**Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:**

Ένα σώμα μάζας $m$ είναι αναρτημένο από ένα αβαρές, κατακόρυφο ελατήριο. Θεωρούμε ως μηδέν της Βαρυτικής Δυναμικής Ενέργειας το ύψος $y = 0$, στο οποίο βρίσκεται η ελεύθερη άκρη όταν το σύστημα ισορροπεί.

**2.16.1.** Σε ποια θέση μηδενίζεται η Δυναμική Ενέργεια σώματος - ελατηρίου:
**(α)** Στη θέση ισορροπίας $y = 0$, **(β)** Στη θέση $y_{\Phi M} = +mg/k$, όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, **(γ)** Στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης.

**2.16.2.** Σε ποια θέση μηδενίζεται η Κινητική Ενέργεια του σώματος:
**(α)** Στη θέση ισορροπίας $y = 0$, **(β)** Στη θέση $y_{\Phi M} = +mg/k$, όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, **(γ)** Στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης.

**2.16.3.** Σε ποια θέση ελαχιστοποιείται η συνολική Δυναμική Ενέργεια σώματος - ελατηρίου - Γης:
**(α)** Στη θέση ισορροπίας $y = 0$, **(β)** Στη θέση $y_{\Phi M} = +mg/k$, όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, **(γ)** Στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης.

**2.16.4.** Να υπολογίσετε τη συνολική Δυναμική Ενέργεια, όταν η ελεύθερη άκρη του ελατηρίου βρίσκεται στη θέση $y_{\Phi M} = +mg/k$.

## Σχέση μεταξύ των ακραίων Θέσεων Ταλάντωσης και της Μηχανικής Ενέργειας

Από τα πιο πάνω προκύπτει ότι οι ακραίες θέσεις της ταλάντωσης ενός σώματος σε κατακόρυφο ελατήριο εκφράζονται σαν συνάρτηση της συνολικής Μηχανικής Ενέργειας:

$$E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2}ky_0^2 + \frac{(mg)^2}{2k} \Rightarrow y_0 = \pm\sqrt{\frac{2E_{\mu\eta\chi}}{k} - \left(\frac{mg}{k}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{2E_{\mu\eta\chi}}{k} - y_{\Phi M}^2}$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι **η συνολική Μηχανική Ενέργεια του συστήματος καθορίζει ποιες θα είναι οι ακραίες θέσεις ταλάντωσης**.

Ειδικότερα, εάν $E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2}ky_{\Phi M}^2 = \frac{(mg)^2}{2k}$, οι ακραίες θέσεις ταυτίζονται με τη ΘΙ $y = 0$: το σώμα παραμένει ακίνητο στη ΘΙ.

**Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:**

Ένα σώμα μάζας $m$ είναι αναρτημένο από ένα αβαρές, κατακόρυφο ελατήριο. Θεωρούμε ως μηδέν της Βαρυτικής Δυναμικής Ενέργειας το ύψος $y = 0$, στο οποίο βρίσκεται η ελεύθερη άκρη όταν το σύστημα ισορροπεί.

**2.16.5.** Ισορροπούμε προσεκτικά το σώμα, έτσι ώστε να βρίσκεται στη ΘΙ με μηδενική ταχύτητα. Ποια θα είναι η Μηχανική Ενέργεια; Τι κίνηση θα κάνει το σώμα;

**2.16.6.** Πώς μπορούμε να θέσουμε το σώμα σε ΑΑΤ, έτσι ώστε η ανώτατη ακραία θέση ταλάντωσης **(α)** να βρίσκεται χαμηλότερα από τη θέση $y_{\Phi M}$; **(β)** να συμπίπτει με τη θέση $y_{\Phi M}$;

**2.16.7.** Εάν αφήσουμε το σώμα από ηρεμία από τη θέση $y = -2\,y_{\Phi M}$, ποια θα είναι η ανώτατη ακραία θέση ταλάντωσης;

**Παράδειγμα 1**

Ένα σώμα μάζας 0,100 kg είναι στερεωμένο σε αβαρές κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 10{,}0\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$. Να θεωρήσετε ότι η θέση $y = 0$ αντιστοιχεί στη ΘΙ του συστήματος σώματος - ελατηρίου, και ότι στη θέση αυτή μηδενίζεται η Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια.

**Α. Να υπολογίσετε τη θέση της ελεύθερης άκρης του ελατηρίου, όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.**

Θεωρώντας θετική τη φορά του άξονα **Oy** προς τα πάνω, η ζητούμενη θέση ισούται με:

$$y_{ΦΜ} = +\frac{mg}{k} = +\frac{(0{,}100\ \text{kg}) \times (9{,}81\ \text{m/s}^2)}{10{,}0\ \text{N/m}} = +\,9{,}81\ \text{cm}$$

**Β. Έστω ότι το σώμα αφήνεται από τη θέση $y_0$ = 15,0 cm με μηδενική ταχύτητα. Να υπολογίσετε τις ακραίες θέσεις, ανάμεσα στις οποίες θα ταλαντώνεται το σώμα. Να υπολογίσετε τη Μηχανική Ενέργεια.**

Στη θέση $y_0$ το σώμα έχει μηδενική Κινητική Ενέργεια, και Μηχανική Ενέργεια

$$E_{μηχ} = U_{βαρ} + U_{ελ} = \frac{1}{2}ky_0^2 + \frac{1}{2}ky_{ΦΜ}^2$$

Όταν επιστρέψει στην ίδια θέση $y_0$, το σώμα θα έχει την ίδια συνολική Δυναμική Ενέργεια. Από τη Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας, συμπεραίνουμε ότι το σώμα θα έχει μηδενική Κινητική Ενέργεια. Άρα, η μία ακραία θέση ταλάντωσης είναι η θέση $y_0$.

Επειδή οι ακραίες θέσεις είναι συμμετρικές ως προς τη ΘΙ, η δεύτερη ακραία θέση είναι:

$$y_1 = -y_0 = -15{,}0\ \text{cm}$$

Η Μηχανική Ενέργεια του σώματος είναι:

$$E_{μηχ} = \frac{1}{2}k(y_0^2 + y_{ΦΜ}^2) = \frac{1}{2} \times \left(10{,}0\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\right) \times \left[(0{,}150\ \text{m})^2 + (0{,}0981\ \text{m})^2\right] = 0{,}161\ \text{J}$$

**Γ. Εάν το σώμα έχει συνολική Μηχανική Ενέργεια $E_{μηχ}$ = 0,100 J, να προσδιορίσετε τις ακραίες θέσεις ταλάντωσης.**

Οι ακραίες θέσεις εκφράζονται σαν συνάρτηση της Μηχανικής Ενέργειας:

$$y_0 = \pm\sqrt{\frac{2E_{μηχ}}{k} - \left(\frac{mg}{k}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{2E_{μηχ}}{k} - y_{ΦΜ}^2}$$

Αντικαθιστούμε και βρίσκουμε τις ζητούμενες ακραίες θέσεις ταλάντωσης:

$$y_0 = \pm\sqrt{\frac{2 \times (0{,}100\ \text{J})}{10{,}0\ \text{N/m}} - (0{,}0981\ \text{m})^2} = \pm 0{,}102\ \text{m} = \pm 10{,}2\ \text{cm}$$

**Δ. Ποια τιμή Μηχανικής Ενέργειας πρέπει να προσδώσουμε στο σώμα, ώστε να έχει ακραία θέση ταλάντωσης $y_0$ = +12,0 cm;**

$$E_{μηχ} = \frac{1}{2}k(y_0^2 + y_{ΦΜ}^2) = \frac{1}{2} \times \left(10{,}0\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\right) \times \left[(0{,}120\ \text{m})^2 + (0{,}0981\ \text{m})^2\right] = 0{,}120\ \text{J}$$

**Ε.** **Εάν σε μια θέση η συνολική Δυναμική Ενέργεια είναι 0,080 J και η Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια ισούται με τη Δυναμική Ενέργεια Ελατηρίου, να βρείτε τη θέση αυτή.**

$$U_{\beta\alpha\rho} + U_{\varepsilon\lambda} = 0{,}080\text{ J} \Rightarrow 2U_{\beta\alpha\rho} = 0{,}080\text{ J} \Rightarrow 2mgy = 0{,}080\text{ J} \Rightarrow y = \frac{0{,}080\text{ J}}{2mg} =$$

$$\frac{0{,}080\text{ J}}{2(0{,}100\text{ kg}) \times (9{,}81\text{ m/s}^2)} = 4{,}1 \times 10^{-2}\text{ m} = 4{,}1\text{ cm}$$

### Μετατροπές Μορφών Ενέργειας στο Κατακόρυφο Ελατήριο

Για να μελετήσουμε τις μετατροπές μεταξύ μορφών ενέργειας, χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους κανόνες:

### Κανόνας Μετατροπών Κινητικής Ενέργειας

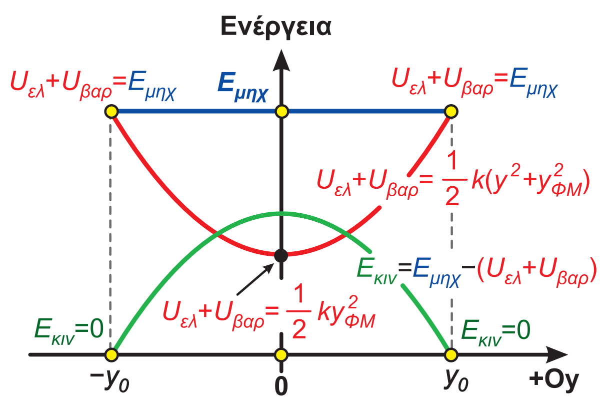
Η Κινητική Ενέργεια μετατρέπεται **σε** άλλη(ες) μορφή(ές) ενέργειας όταν **ελαττώνεται.** Αντιστρόφως, όταν η Κινητική Ενέργεια **αυξάνεται**, άλλες μορφές ενέργειας μετατρέπονται σε Κινητική.

### Μετατροπές μεταξύ της Συνολικής Δυναμικής Ενέργειας και της Κινητικής Ενέργειας

Όπως αποδείξαμε προηγουμένως, η γραφική παράσταση θέσης - **συνολικής** Δυναμικής Ενέργειας του συστήματος σώματος - κατακόρυφου ελατηρίου - Γης είναι παραβολή, με ελάχιστη τιμή στη ΘΙ $y = 0$:

$$U_{\varepsilon\lambda} + U_{\beta\alpha\rho} = \frac{1}{2}ky^2 + \frac{(mg)^2}{2k} = \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}ky^2_{\Phi M}$$

Οι γραφικές παραστάσεις της συνολικής Δυναμικής Ενέργειας και της Κινητικής Ενέργειας απεικονίζονται στο σχήμα σαν συνάρτηση της μετατόπισης από τη ΘΙ.



Η συνολική Δυναμική Ενέργεια γίνεται **ελάχιστη στη ΘΙ**, όπου μεγιστοποιείται η Κινητική Ενέργεια (και το μέτρο της ταχύτητας του σώματος), και μέγιστη στις ακραίες θέσεις, όπου μηδενίζεται η Κινητική Ενέργεια.

Από τη Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας προκύπτει ότι η Κινητική Ενέργεια είναι αντεστραμμένη παραβολή, με μέγιστη τιμή στη ΘΙ $y=0$:

$$E_{\kappa\iota\nu} = E_{\mu\eta\chi} - (U_{\varepsilon\lambda} + U_{\beta\alpha\rho}) = E_{\mu\eta\chi} - \frac{1}{2}ky^2_{\Phi M} - \frac{1}{2}ky^2$$

## Σχέση Ταχύτητας - Θέσης στο Κατακόρυφο Ελατήριο

Χρησιμοποιώντας τη Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας, υπολογίζουμε την ταχύτητα του σώματος σε μία θέση $y$:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = E_{\mu\eta\chi} - \frac{1}{2}k(y^2_{\Phi M} + y^2) \Rightarrow \upsilon = \pm\sqrt{\frac{2E_{\mu\eta\chi}}{m} - \frac{k}{m}(y^2_{\Phi M} + y^2)}$$

Τα δύο πρόσημα αντιστοιχούν στις δύο δυνατές κατευθύνσεις κίνησης. Να παρατηρήσετε ότι σε μία συγκεκριμένη θέση $y$, η ταχύτητα του σώματος έχει συγκεκριμένο μέτρο, που εξαρτάται από τη Μηχανική του Ενέργεια. Το σώμα έχει τη μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα στη ΘΙ:

$$|\upsilon|_{\mu\varepsilon\gamma} = \sqrt{\frac{2E_{\mu\eta\chi}}{m} - \frac{k}{m}y^2_{\Phi M}}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση της Μηχανικής Ενέργειας

$$E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2}k(y_0^2 + y^2_{\Phi M})$$

γράφουμε την ταχύτητα σαν συνάρτηση της θέσης και του πλάτους της ταλάντωσης:

$$\upsilon = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(y_0^2 + y^2_{\Phi M}) - \frac{k}{m}(y^2_{\Phi M} + y^2)} =$$

$$\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{(y_0^2 - y^2)} = \pm\,\omega\sqrt{(y_0^2 - y^2)}$$

Δηλαδή, παίρνουμε την ίδια σχέση που ισχύει στο οριζόντιο ελατήριο (**Ενότητα 2.15**).

### Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

Ένα σώμα μάζας $m$ είναι αναρτημένο από ένα αβαρές, κατακόρυφο ελατήριο. Θεωρούμε ως μηδέν της Βαρυτικής Δυναμικής Ενέργειας τη ΘΙ $y = 0$. Το σώμα ταλαντώνεται ανάμεσα σε δύο ακραίες θέσεις $y_0 > 0$ και $-y_0$.

**2.16.8.** Πώς μεταβάλλεται η συνολική Δυναμική Ενέργεια $U_{ελ} + U_{βαρ}$ κατά την **προσέγγιση** του σώματος **προς** τη ΘΙ $y = 0$ (αυξάνεται/ελαττώνεται); Τι συμπεραίνετε για την μετατροπή της συνολικής Δυναμικής Ενέργειας $U_{ελ} + U_{βαρ}$ από/σε Κινητική Ενέργεια;

**2.16.9.** Πώς μεταβάλλεται η συνολική Δυναμική Ενέργεια $U_{ελ} + U_{βαρ}$ κατά την **απομάκρυνση** του σώματος **από** τη ΘΙ $y = 0$ (αυξάνεται/ελαττώνεται); Τι συμπεραίνετε για τη μετατροπή της συνολικής Δυναμικής Ενέργειας $U_{ελ} + U_{βαρ}$ από/σε Κινητική Ενέργεια;

**2.16.10.** Πώς μεταβάλλεται η Μηχανική Ενέργεια κατά την ταλάντωση του σώματος;

**Ερωτήσεις Κατανόησης**

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

| Α/Α | ΠΡΟΤΑΣΗ | Σωστό / Λάθος |
|---|---|---|
| 1 | Ένα σώμα είναι στερεωμένο σε αβαρές **οριζόντιο** ελατήριο, και ταλαντώνεται σε λείο έδαφος. Ποιο(α) από τα επόμενα ισχύει(ουν); | |
| **α** | Η Δυναμική Ενέργεια σώματος - ελατηρίου αυξάνεται όταν το σώμα απομακρύνεται από τη ΘΙ. | |
| **β** | Η Κινητική Ενέργεια του σώματος αυξάνεται όταν το σώμα απομακρύνεται από τη ΘΙ. | |
| **γ** | Η Μηχανική Ενέργεια γίνεται μέγιστη στις ακραίες θέσεις ταλάντωσης. | |
| **δ** | Οι ακραίες θέσεις ταλάντωσης είναι συμμετρικές ως προς τη ΘΙ. | |
| **ε** | Όταν το σώμα διέρχεται από μία συγκεκριμένη θέση $x$, η ταχύτητά του έχει πάντα το ίδιο μέτρο. | |
| 2 | Ένα σώμα είναι στερεωμένο σε αβαρές **κατακόρυφο** ελατήριο και εκτελεί ΑΑΤ. Ποιο(α) από τα επόμενα ισχύει(ουν); | |

| | | |
|---|---|---|
| **α** | Οι ακραίες θέσεις ταλάντωσης είναι συμμετρικές ως προς τη θέση της ελεύθερης άκρης, όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. | |
| **β** | Η Δυναμική Ενέργεια σώματος-ελατηρίου μηδενίζεται στη θέση της ελεύθερης άκρης, όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. | |
| **γ** | Η Μηχανική Ενέργεια διατηρείται. | |
| **δ** | Η Κινητική Ενέργεια γίνεται μέγιστη στις ακραίες θέσεις ταλάντωσης. | |
| **ε** | Η συνολική Δυναμική Ενέργεια γίνεται μέγιστη στις ακραίες θέσεις ταλάντωσης. | |
| **στ** | Η Κινητική Ενέργεια γίνεται μέγιστη στη ΘΙ. | |

## Ασκήσεις

**Σώμα συνδεδεμένο σε Οριζόντιο Αβαρές Ελατήριο.**

Στις ασκήσεις 1-2, το φυσικό μήκος του ελατηρίου βρίσκεται στη θέση $x = 0$.

**1** Ένα σώμα μάζας $m = 0{,}400$ kg είναι στερεωμένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 40{,}0$ N/m και κινείται σε λείο οριζόντιο τραπέζι.

**Α.** Να **σχεδιάσετε** τη γραφική παράσταση της Δυναμικής Ενέργειας σώματος-ελατηρίου σαν συνάρτηση της θέσης, για την περιοχή θέσεων $-0{,}20$ m $\leq x \leq 0{,}20$ m.

**Β.** Απομακρύνουμε το σώμα μέχρι τη θέση $x = -0{,}15$ m και το αφήνουμε ελεύθερο με μηδενική ταχύτητα. Να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος, όταν διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας.

**Γ.** Να υπολογίσετε τη θέση, στην οποία θα μηδενισθεί η ταχύτητα του σώματος για πρώτη φορά.

**Δ.** Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στη θέση $x = +0{,}10$ m.

**2** Θεωρείστε το σύστημα σώματος-ελατηρίου της **άσκησης 1**.

**Α.** Το σώμα ηρεμεί στη θέση ισορροπίας. Τι αρχική ταχύτητα πρέπει να του δώσουμε, για να εκτελεί ταλάντωση με πλάτος 20,0 cm;

**Β.** Να **σχεδιάσετε** τη γραφική παράσταση Κινητικής Ενέργειας - θέσης του σώματος, εάν το σώμα έχει την αρχική ταχύτητα του ερωτήματος **Α.**

**Γ.** Εάν το σύστημα έχει Μηχανική Ενέργεια 0,6 J, να προσδιορίσετε τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης **(α)** γραφικά, **(β)** από τη σχέση της Δυναμικής Ενέργειας.

**Σώμα συνδεδεμένο σε Κατακόρυφο Αβαρές Ελατήριο.**

Στις επόμενες ασκήσεις, η θέση ισορροπίας του σώματος - κατακόρυφου ελατηρίου και το μηδέν της Βαρυτικής Δυναμικής Ενέργειας αντιστοιχούν στη θέση $y = 0$, και η θετική φορά του κατακόρυφου άξονα **Oy** είναι προς τα επάνω.

**3** Ένα σώμα μάζας 2,00 kg είναι συνδεδεμένο με αβαρές κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 200{,}0\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

**A.** Να υπολογίσετε τη θέση $y_{\Phi M}$ της ελεύθερης άκρης, όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

**B.** Έστω ότι το σώμα αφήνεται από τη θέση $y_{\Phi M}$ με μηδενική ταχύτητα. Να υπολογίσετε τις ακραίες θέσεις $y_1$ και $y_2 < y_1$, ανάμεσα στις οποίες θα ταλαντώνεται το σώμα.

**4** Ένα σώμα μάζας 0,20 kg είναι συνδεδεμένο με αβαρές κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 40{,}0\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

**A.** Να υπολογίσετε τη θέση $y_{\Phi M}$ της ελεύθερης άκρης, όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

**B.** Να υπολογίσετε την ελάχιστη Μηχανική Ενέργεια που πρέπει να έχει το σύστημα σώματος - ελατηρίου - Γης, για να ταλαντώνεται το σώμα.

**Γ.** Έστω ότι το σώμα αφήνεται από τη θέση $y = 10{,}0$ cm με μηδενική ταχύτητα. Να υπολογίσετε τις ακραίες θέσεις $\pm y_0$, ανάμεσα στις οποίες θα ταλαντώνεται το σώμα, και τη Μηχανική του Ενέργεια. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στη θέση $y_0/2$.

**Δ.** Εάν η Μηχανική Ενέργεια είναι $E_{\mu\eta\chi} = 0{,}200$ J, να προσδιορίσετε τις ακραίες θέσεις ταλάντωσης $\pm y_0$. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στη θέση $y_0/3$.

**E.** Ποια τιμή Μηχανικής Ενέργειας πρέπει να προσδώσουμε στο σύστημα, ώστε μία ακραία θέση ταλάντωσης να είναι η $y = +8{,}00$ cm;

**5** Ένα σώμα μάζας $m$ είναι συνδεδεμένο με αβαρές κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k$ και εκτελεί ΑΑΤ. Το σώμα διέρχεται από τη θέση $y$ τη χρονική στιγμή $t_1$, και από τη θέση $-y$ μία μεταγενέστερη χρονική στιγμή $t_2$. Να αποδείξετε ότι το έργο της δύναμης του βάρους είναι αντίθετο από το έργο της δύναμης ελατηρίου. (Μην θεωρήσετε ότι οι θέσεις $\pm y$ είναι οι ακραίες θέσεις ταλάντωσης).

**6** Ένα σώμα μάζας $m$ είναι προσδεδεμένο σε αβαρές κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k$ και εκτελεί ΑΑΤ. Η Μηχανική Ενέργεια του συστήματος σώματος - ελατηρίου - Γης είναι $E_{\mu\eta\chi}$. Να δείξετε ότι εάν $y_0 > y_{\Phi M}$, η Κινητική Ενέργεια του σώματος είναι ίση με τη Συνολική Δυναμική Ενέργεια στις θέσεις

$$y = \pm\sqrt{\frac{E_{\mu\eta\chi}}{k} - y_{\Phi M}^2}$$

**7** Σφαίρα μάζας $m$ είναι στερεωμένη σε αβαρές κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k$. Αφήνουμε τη σφαίρα να κινηθεί με μηδενική αρχική ταχύτητα από τη θέση $y = 2y_{\Phi M}$.

**Α.** Να προσδιορίσετε τις ακραίες θέσεις ταλάντωσης της σφαίρας και τη μέγιστη τιμή της ταχύτητάς της.

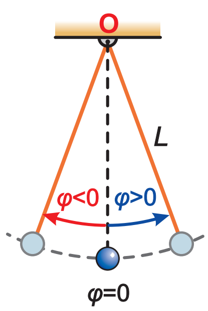
**Β.** Να προσδιορίσετε το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας στη θέση $y = y_{ΦΜ}$.

**Γ.** Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης του βάρους και της δύναμης ελατηρίου για τις μετατοπίσεις $2y_{ΦΜ} \rightarrow y_{ΦΜ}$ και $y_{ΦΜ} \rightarrow 0$.

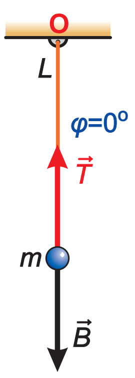
## 2.17. Το Απλό (Μαθηματικό) Εκκρεμές

Το επόμενο σχήμα απεικονίζει μία διάταξη που αποτελείται από ένα **σημειακό** σώμα μάζας $m$ στερεωμένο στην ελεύθερη άκρη σχοινιού μήκους $L$ και αμελητέας μάζας. Το άλλο άκρο του σχοινιού είναι στερεωμένο στο σημείο **Ο** ενός ακλόνητου τοίχου. Η διάταξη αυτή ονομάζεται απλό ή μαθηματικό εκκρεμές.

Εάν απομακρύνουμε το απλό εκκρεμές από την κατακόρυφη διεύθυνση και το αφήσουμε ελεύθερο, θα εκτελεί παλινδρομική κίνηση. Σε αυτή την ενότητα θα αποδείξουμε ότι για μικρές απομακρύνσεις από την κατακόρυφη διεύθυνση, η κίνηση του εκκρεμούς είναι ΑΑΤ.




Όταν το σχοινί είναι τεντωμένο, το σώμα διαγράφει κυκλικό τόξο με κέντρο το **Ο** και ακτίνα $L$. Όπως στην κυκλική κίνηση, προσδιορίζουμε τη θέση του σώματος με βάση τη γωνία $\varphi$ ανάμεσα στο σχοινί και την κατακόρυφη διεύθυνση. Όταν το σχοινί είναι κατακόρυφο, η γωνία $\varphi = 0^o$. Θα θεωρούμε ότι η γωνία $\varphi$ παίρνει **θετικές** τιμές για **αριστερόστροφες** μετατοπίσεις, και **αρνητικές** τιμές για **δεξιόστροφες** μετατοπίσεις από την κατακόρυφη διεύθυνση.




Όταν το σώμα είναι ακίνητο και το σχοινί είναι τεντωμένο και κατακόρυφο ($\varphi = 0^o$), η τάση $\vec{T}$ του σχοινιού είναι αντίθετη με το βάρος $\vec{B}$ του σώματος και η συνισταμένη δύναμη μηδενίζεται: $\sum\vec{F} = \vec{B} + \vec{T} = \vec{0}$.

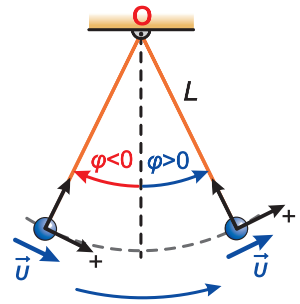
**Συμπέρασμα:** η θέση $\varphi = 0^o$ είναι η ΘΙ του σώματος.

Για να μελετήσουμε την κίνηση όταν το σχοινί δεν είναι κατακόρυφο, θα αναλύσουμε τις δυνάμεις $\vec{T}$ και $\vec{B}$ σε ακτινικές και επιτρόχιες συνιστώσες. **Ορίζουμε** ότι:

**(i)** η θετική φορά του **ακτινικού** άξονα είναι προς το σημείο **Ο**.

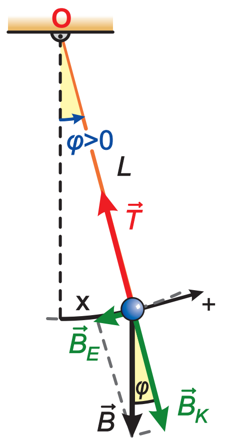
**(ii)** η θετική φορά του **επιτρόχιου** άξονα είναι προς την κατεύθυνση που έχει η ταχύτητα, όταν το σώμα κινείται **αριστερόστρο-**

**φα**: Εάν το σώμα βρίσκεται σε γωνία $\varphi > 0$, η θετική φορά του επιτρόχιου άξονα είναι **αντίθετα** από τη ΘΙ. Εάν βρίσκεται σε γωνία $\varphi < 0$, η θετική φορά είναι **προς** τη ΘΙ.



Αριστερόστροφη κίνηση

Στο διπλανό σχήμα έχουμε απομακρύνει το εκκρεμές κατά γωνία $\varphi > 0$ από την κατακόρυφο. Η τάση $\vec{T}$ έχει ακτινική διεύθυνση, και φορά προς το κέντρο **O** του κυκλικού τόξου. Το βάρος $\vec{B}$ είναι κατακόρυφο και αναλύεται σε ακτινική συνιστώσα $\vec{B}_K$ και επιτρόχιο συνιστώσα $\vec{B}_E$. Η συνισταμένη δύναμη κατά την ακτινική διεύθυνση, $\left(\sum \vec{F}\right)_K = \vec{B}_K + \vec{T}$, επενεργεί ως κεντρομόλος και επιτρέπει στο σώμα να διαγράφει το κυκλικό τόξο. Η επιτρόχιος συνιστώσα $\left(\sum \vec{F}\right)_E = \vec{B}_E$ μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας του σώματος.




Με βάση τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι η κίνηση του σώματος πάνω στο κυκλικό τόξο είναι **μεταβαλλόμενη.** Θα δείξουμε ότι η επιτρόχιος συνιστώσα $\vec{B}_E$ δρα ως **δύναμη επαναφοράς**.

Η επιτρόχιος συνιστώσα του βάρους έχει μέτρο $\left|\vec{B}_E\right| = mg\eta\mu\varphi$ και φορά προς την αρνητική κατεύθυνση του επιτρόχιου άξονα. Άρα, η αλγεβρική τιμή $B_E$ είναι αρνητική: $B_E = -mg\eta\mu\varphi$.

**Συμπέρασμα**
Η συνιστώσα $\vec{B}_E$ ενεργεί ως **δύναμη επαναφοράς** του εκκρεμούς, προς τη θέση **ευσταθούς** ισορροπίας $\varphi = 0^o$.

Εάν η γωνία θέσης $\varphi$ παίρνει μικρές τιμές $\left(|\varphi| \leq \sim 15^o\right)$, το $\eta\mu\varphi$ είναι περίπου ίσο αριθμητικά με τη γωνία $\varphi$ (εκφρασμένη σε ακτίνια): $\eta\mu\varphi \cong \varphi$. Ενδεικτικές τιμές περιλαμβάνονται στον διπλανό πίνακα.

| $\varphi$ ($^o$) | $\eta\mu\varphi$ | $\varphi$ (rad) |
|---|---|---|
| 5 | 0,087 | 0,087 |
| 10 | 0,174 | 0,175 |
| 15 | 0,259 | 0,262 |
| 20 | 0,342 | 0,349 |
| 25 | 0,500 | 0,524 |

Για **μικρές τιμές της γωνίας** $\varphi$, η επιτρόχιος συνιστώσα του βάρους γράφεται:

$$B_E \cong -mg\varphi = -\frac{mg}{L}(L\varphi) = -\frac{mg}{L}x$$

όπου $x = L\varphi$ είναι το κυκλικό τόξο με άκρα τη ΘΙ και το σώμα. Για μικρές απομακρύνσεις από τη ΘΙ, το τόξο $x$ μπορεί να προσεγγισθεί σαν ευθύγραμμο τμήμα εφαπτομενικό της τροχιάς, και η συνιστώσα $B_E$ είναι αντίρροπη και ανάλογη με το τόξο $x$.

**Να παρατηρήσετε** ότι το τόξο $x$ **έχει πρόσημο**: Όπως και η γωνία $\varphi$, το τόξο θεωρείται θετικό για $\varphi > 0$, και αρνητικό για $\varphi < 0$. Στη θέση ισορροπίας $\varphi = 0$, το τόξο $x = 0$.

**Συμπέρασμα**

Για μικρές απομακρύνσεις από τη ΘΙ, το σώμα του απλού εκκρεμούς εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά

$$D = \frac{mg}{L}$$

**ΕΝΘΕΤΗ ΣΗΜΕΙΩΣΗ**

Για μικρές απομακρύνσεις από τη ΘΙ, το τόξο $x$ της τροχιάς του σώματος μπορεί να προσεγγισθεί από ευθύγραμμο τμήμα, και η διεύθυνση της ταχύτητας παραμένει (σχεδόν) αμετάβλητη. Άρα, η κεντρομόλος επιτάχυνση μπορεί να αμεληθεί. Η συνισταμένη δύναμη ισούται με τη δύναμη επαναφοράς:

$$\vec{B}_K + \vec{T} \cong \vec{0} \Rightarrow \sum\vec{F} \cong \vec{B}_E = -\frac{mg}{L}\vec{x}$$

**ΕΝΘΕΤΗ ΣΗΜΕΙΩΣΗ**

Το σώμα του απλού εκκρεμούς εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από έναν οριζόντιο άξονα, που διέρχεται από το σημείο **Ο**. Οι **εξωτερικές** δυνάμεις στο σώμα είναι το βάρος του $\vec{B}$ και η τάση $\vec{T}$ του σχοινιού. Επειδή η τάση $\vec{T}$ είναι ακτινική, η ροπή της ως προς το σημείο **Ο** είναι συνεχώς ίση με μηδέν:

$$M_{\vec{T}} = 0$$

Άρα, η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίση με τη ροπή του βάρους:

$$M_{\sum\vec{F}} = M_{\vec{B}} = -\left|\vec{B}\right| L\eta\mu\varphi$$

Για μικρές τιμές της γωνιακής μετατόπισης $\varphi$ από τη ΘΙ του εκκρεμούς, $\varphi = 0^o$, ισχύει:

$$\eta\mu\varphi \cong \varphi \Rightarrow M_{\sum\vec{F}} = M_{\vec{B}} \cong -mgL\varphi$$

δηλαδή, **η ροπή της συνισταμένης δύναμης** είναι συνεχώς **ανάλογη** και **αντίθετη** με τη γωνιακή μετατόπιση $\varphi$. Όταν ικανοποιείται αυτή η συνθήκη, το σώμα εκτελεί **περιστροφική αρμονική ταλάντωση**.

## 2.18. Περίοδος Ταλάντωσης του απλού Εκκρεμούς

Εάν αντικαταστήσουμε στη σχέση της περιόδου τη σταθερά $D = \frac{mg}{L}$ της ΑΑΤ του απλού εκκρεμούς, βρίσκουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Να παρατηρήσετε ότι η περίοδος $T$ του απλού εκκρεμούς:

- **Δεν** εξαρτάται από τη μάζα του σώματος.
- **Δεν** εξαρτάται από το πλάτος της ταλάντωσης (για ταλαντώσεις με μικρή απομάκρυνση από τη ΘΙ, που συμπεριφέρονται ως ΑΑΤ).
- **Αυξάνεται** με το μήκος του σχοινιού $L$.
- **Ελαττώνεται** με την επιτάχυνση της βαρύτητας $g$.

Στον **Πίνακα 2** συγκρίνουμε την περίοδο ΑΑΤ του Απλού Εκκρεμούς και του σώματος σε οριζόντιο ή κατακόρυφο ελατήριο.

| Σύστημα | Περίοδος | Εξάρτηση από: | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Μάζα ***m*** | Επιτάχυνση της βαρύτητας ***g*** | Σταθερά Ελατηρίου ***k*** | Μήκος εκκρεμούς ***L*** |
| Ελατήριο | $T_{\varepsilon\lambda} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ | Ναι | Όχι | Ναι | Όχι |
| Εκκρεμές | $T_{\varepsilon\kappa\kappa} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ | Όχι | Ναι | Όχι | Ναι |

**Πίνακας 2**
Σύγκριση των Περιόδων ΑΑΤ του Μαθηματικού Εκκρεμούς και ενός Σώματος στερεωμένου σε αβαρές Οριζόντιο ή Κατακόρυφο Ελατήριο.

Να παρατηρήσετε ότι η ταλάντωση του ελατηρίου **δεν** επηρεάζεται από την επιτάχυνση της βαρύτητας, αλλά εξαρτάται από τη μάζα του σώματος. Άρα:

- Ένα σώμα αναρτημένο σε ελατήριο στο μακρινό διάστημα, όπου η βαρύτητα είναι αμελητέα, ταλαντώνεται με την ίδια περίοδο, όπως στη Γη.
- Ένα εκκρεμές στο μακρινό διάστημα δεν ταλαντώνεται.
- Εάν αυξήσουμε τη μάζα του σώματος, που αναρτάται σε ελατήριο, αυξάνεται η περίοδος της ΑΑΤ. Εάν αυξήσουμε τη μάζα

του σώματος στο μαθηματικό εκκρεμές, δεν επηρεάζεται η περίοδος της ΑΑΤ.

**Παράδειγμα 1**

Να υπολογίσετε την περίοδο ενός απλού εκκρεμούς στην επιφάνεια της Γης, όταν το μήκος του σχοινιού είναι $L = 1{,}00$ m. Θεωρείστε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9{,}81$ m/s$^2$.

Από τη σχέση της περιόδου, βρίσκουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}00\ \mathrm{m}}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}} = 2\pi\frac{1{,}00}{3{,}13}\ \mathrm{s} = 2{,}01\ \mathrm{s}$$

Άρα, ένα εκκρεμές με νήμα μήκους 1 m έχει περίοδο περίπου 2 s.

**Παράδειγμα 2**

Ποια θα ήταν η περίοδος του ίδιου εκκρεμούς στην επιφάνεια της Σελήνης; Δίδεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Σελήνης ισούται με $g = 1{,}62$ m/s$^2$.

Από τη σχέση της περιόδου, βρίσκουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}00\ \mathrm{m}}{1{,}62\ \mathrm{m/s^2}}} = 2\pi\frac{1{,}00}{1{,}27}\ \mathrm{s} = 4{,}93\ \mathrm{s}$$

### Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

**2.18.1.** Πώς θα μπορούσατε να μετρήσετε τις διαστάσεις ενός δωματίου, εάν είχατε στη διάθεσή σας μόνο ένα χρονόμετρο ακριβείας, τα κορδόνια των παπουτσιών σας, και ένα μικρό σφαιρίδιο;

**2.18.2.** Πού είναι μεγαλύτερη η περίοδος ενός απλού εκκρεμούς, στον Ισημερινό ή στους πόλους;

**2.18.3.** Πώς μεταβάλλεται η περίοδος ενός εκκρεμούς, εάν το μεταφέρουμε από την επιφάνεια της θάλασσας στην κορυφή ενός βουνού;

**2.18.4.** Εάν θέλουμε να αυξήσουμε την περίοδο ενός εκκρεμούς, πρέπει να μεγαλώσουμε ή να μικρύνουμε το μήκος του νήματος;

**2.18.5.** Ένα εκκρεμές, που λειτουργεί ως ρολόι, καθυστερεί. Πρέπει να ελαττώσουμε ή να αυξήσουμε το μήκος του;

**2.18.6.** Ένας μαθητής διατυπώνει τον εξής συλλογισμό: «*Η μάζα είναι μέτρο της αδράνειας ενός σώματος. Άρα, εάν απομακρύνω ένα εκκρεμές από την κατακόρυφο και το αφήσω ελεύθερο, θα επιταχύνεται λιγότερο, όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα του. Συνεπώς, η περίοδος του εκκρεμούς πρέπει να αυξάνεται με τη μάζα*». Είναι σωστός αυτός ο συλλογισμός;

**2.18.7.** Δύο απλά εκκρεμή **Α** και **Β** αποτελούνται από μικρά σφαιρίδια μαζών $m_A$ = 25,0 g και $m_B$ = 125,0 g, συνδεδεμένα με αβαρή νήματα ίσου μήκους. Να συγκρίνετε την περίοδο ταλάντωσης των εκκρεμών.

**2.18.8.** Αφήνουμε το ίδιο εκκρεμές διαδοχικά από αρχικές γωνίες απομάκρυνσης $\varphi = 5^o$ και $\varphi = 10^o$. Να συγκρίνετε τις περιόδους των δύο ταλαντώσεων, που θα εκτελέσει το εκκρεμές.

**2.18.9.** Θεωρείστε δύο πανομοιότυπα εκκρεμή **Α** και **Β**. Το εκκρεμές **Α** αφήνεται από γωνία $\varphi = 5^o$ με μηδενική ταχύτητα. Το εκκρεμές **Β** ξεκινά από τη θέση ισορροπίας με κάποια αρχική ταχύτητα, και φθάνει σε μέγιστη γωνία $\varphi = 3^o$. Να συγκρίνετε τις περιόδους των δύο ταλαντώσεων.

## 2.19. Μέτρηση της Επιτάχυνσης της Βαρύτητας από την Περίοδο Ταλάντωσης του Απλού Εκκρεμούς

Από τη σχέση υπολογισμού της περιόδου του απλού εκκρεμούς, μπορούμε να εκφράσουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας σαν συνάρτηση της περιόδου:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{L}{g} \Rightarrow g = 4\pi^2\frac{L}{T^2}$$

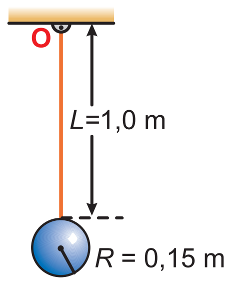
Η τελευταία σχέση δείχνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας $g$, εάν προσδιορίσουμε την περίοδο ενός απλού εκκρεμούς σαν συνάρτηση του μήκους $L$ του νήματος.

**Σημείωση**
Εάν το σωματίδιο **δεν** είναι σημειακό, το μήκος $L$, που εισέρχεται στον τύπο της περιόδου, ισούται με την απόσταση του ΚΜ του σωματιδίου από το σημείο περιστροφής του εκκρεμούς.

### Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

**2.19.1.** Στην Α΄ Λυκείου είχατε μάθει ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας μπορεί να μετρηθεί με πειράματα ελεύθερης πτώσης σωμάτων. Ποια είναι κατά τη γνώμη σας καλύτερη μέθοδος, η ελεύθερη πτώση ή το εκκρεμές, και γιατί; Να υποθέσετε ότι χρησιμοποιείτε το ίδιο χρονόμετρο.

**2.19.2.** Μία μαθήτρια εκτιμά ότι η περίοδος του εκκρεμούς του διπλανού σχήματος είναι $T = 2{,}0$ s. Όταν μετρά την περίοδο, βρίσκει ότι η πραγματική τιμή είναι μεγαλύτερη κατά ~ 8%. Γιατί;




**2.19.3.** Ο καθηγητής της Φυσικής σας δίνει οδηγίες για να μετρήσετε την επιτάχυνση της βαρύτητας με τη βοήθεια εκκρεμούς. Σύμφωνα με μία από τις οδηγίες, θα μετρήσετε τη συνολική χρονική διάρκεια $t_{ολ}$ **10** πλήρων κύκλων ταλάντωσης, και θα εκτιμήστε την περίοδο από τη σχέση $T = t_{ολ}/10$. Γιατί;

**2.19.4.** Ένας μαθητής προτείνει ως **εναλλακτικό** πείραμα για τον προσδιορισμό της επιτάχυνσης της βαρύτητας, να μετρήσετε την **περίοδο** ταλάντωσης ενός σώματος συνδεδεμένου με κατακόρυφο ελατήριο. Συμφωνείτε με την πρότασή του; Πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα κατακόρυφο ελατήριο για τη μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας;

### Ασκήσεις

Σε όλες τις επόμενες ασκήσεις, το εκκρεμές είναι απλό (μαθηματικό) και εκτελεί ΑΑΤ.

1. Ένα εκκρεμές έχει μήκος $L = 2{,}00$ m. Να υπολογίσετε την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης του εκκρεμούς στην επιφάνεια της Γης. Θεωρείστε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι 9,81 m/s$^2$.

2. Να υπολογίσετε την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης του πιο πάνω εκκρεμούς, εάν μεταφερθεί στην επιφάνεια της Σελήνης, όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας ισούται με 1,62 m/s$^2$.

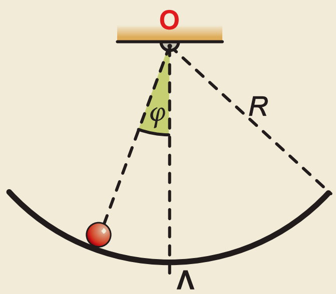
**3** Θέλετε να μετρήσετε την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια του Άρη. Έχετε στη διάθεσή σας ένα λεπτό σχοινί μήκους $L = 1{,}00$ m, ένα μικρό σφαιρίδιο και ένα χρονόμετρο. Η περίοδος ταλάντωσης του εκκρεμούς που κατασκευάζετε ισούται με $T = 3{,}26$ s. Ποια η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια του Άρη;

**4** Η ακτίνα της Γης ισούται με 6370 km και η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης ισούται με 9,81 m/s$^2$.

**Α.** Να υπολογίσετε την επιτάχυνση της βαρύτητας σε απόσταση 6775 km από τη κέντρο της Γης. Θυμίζουμε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ανάλογη με το αντίστροφο τετράγωνο της απόστασης από το κέντρο της Γης.

**Β.** Σε αυτή τη μέση απόσταση περιφέρεται ο Διεθνής Διαστημικός Σταθμός (ΔΔΣ). Πώς θα συμπεριφέρεται ένα εκκρεμές, που τοποθετείται στο εσωτερικό του ΔΔΣ και ακολουθεί την κίνησή του; Γιατί;

**5** Μία σφαίρα κινείται σε λεία κυκλική επιφάνεια ακτίνας $R$, όπως στο διπλανό σχήμα.

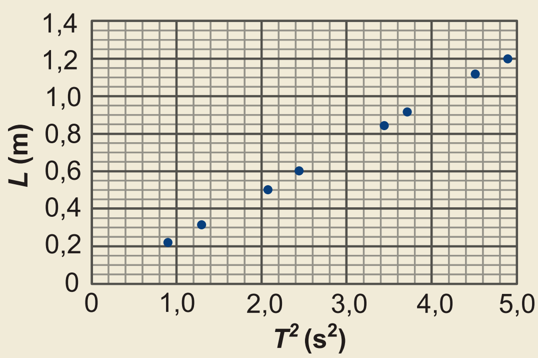



**Α.** Να προσδιορίσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα.

**Β.** Να αναλύσετε τις δυνάμεις σε κατάλληλους άξονες, και να αποδείξετε ότι η συνισταμένη δύναμη ικανοποιεί τη συνθήκη της ΑΑΤ, για μικρές γωνιακές απομακρύνσεις $\varphi$ της σφαίρας από την κατακόρυφη διεύθυνση **ΟΛ**.

**Γ.** Να υπολογίσετε την περίοδο της ΑΑΤ της σφαίρας, θεωρώντας ότι η σφαίρα είναι σημειακή.

**6** Το πιο κάτω γράφημα απεικονίζει τη γραφική παράσταση του μήκους $L$ ενός μαθηματικού εκκρεμούς σαν συνάρτηση του τετραγώνου της περιόδου $T^2$.




Αφού χαράξετε την ευθεία που περνά από τα σημεία της γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε:

**(α)** την επιτάχυνση της βαρύτητας.

**(β)** το μήκος που θα είχε ένα εκκρεμές με περίοδο $T = 3{,}00$ s.

**Σημείωση**: Να δώσετε τις απαντήσεις σας με τον σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων.

7 Ένα σώμα **Α**, μάζας *m*, αφήνεται να πέσει ελεύθερα με μηδενική ταχύτητα, σε ύψος *L* από το έδαφος. Ένα άλλο σημειακό σώμα **Β**, διπλάσιας μάζας, είναι συνδεδεμένο με νήμα μήκους *L* και εκτελεί ΑΑΤ. Να συγκρίνετε τον χρόνο πτήσης του σώματος **Α** με την περίοδο ταλάντωσης του σώματος **Β**, θεωρώντας αμελητέα την αντίσταση του αέρα.

## 2.20. Φθίνουσες Ταλαντώσεις

Στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση, οι τριβές και η αντίσταση του περιβάλλοντος μέσου θεωρούνται αμελητέες, και η Μηχανική Ενέργεια του ταλαντωτή διατηρείται.

Στην πραγματικότητα, ένα κινούμενο σώμα υπόκειται σε δυνάμεις τριβής ή αντίστασης από το περιβάλλον μέσο. Οι δυνάμεις αυτές είναι συνεχώς αντίθετες από τη φορά της κίνησης και **καταναλώνουν έργο**.

Όταν ένα σώμα εκτελεί παλινδρομική κίνηση υπό την επίδραση τέτοιων δυνάμεων, η Μηχανική Ενέργεια του σώματος μειώνεται και το πλάτος της κίνησης ελαττώνεται (φθίνει). Ονομάζουμε αυτή την κίνηση **φθίνουσα ταλάντωση**. Εάν η μεταβολή του πλάτους είναι μικρή, η κίνηση παραμένει κατά προσέγγιση περιοδική. Η πλειονότητα των ταλαντώσεων, που παρατηρούμε στην καθημερινή μας ζωή, είναι φθίνουσες:

- Ένα σώμα αναρτημένο σε ελατήριο ταλαντώνεται με συνεχώς μικρότερο πλάτος, μέχρις ότου να ακινητοποιηθεί.
- Μια κούνια που ταλαντώνεται, σταματά μετά από κάποιο χρονικό διάστημα.
- Μία μπάλα που κινείται κατακόρυφα και αναπηδά σε οριζόντιο έδαφος, ακινητοποιείται μετά από μερικά χτυπήματα.
- Ένας αθλητής του bungee jumping ταλαντώνεται μετά την πτώση του, και προοδευτικά ακινητοποιείται.

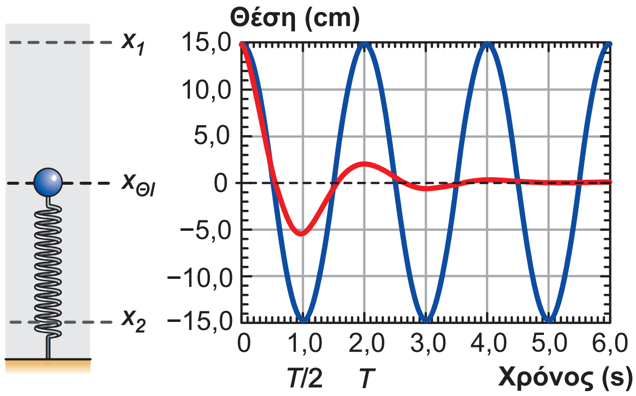
Θα ασχοληθούμε με κινήσεις, στις οποίες η αντίσταση του περιβάλλοντος μέσου[1] είναι ανάλογη και αντίρροπη με την ταχύτητα του σώματος:

$$\vec{f}_{\alpha} = -b\vec{\upsilon}$$

[1] Θυμίζουμε από την Α΄ Λυκείου, ότι η αντίσταση του περιβάλλοντος μέσου ονομάζεται **οπισθέλκουσα** δύναμη.

Στην τελευταία σχέση, το μέγεθος $\vec{v}$ είναι η ταχύτητα του σώματος. Η παράμετρος $b$ είναι μία θετική σταθερά, που εξαρτάται από το περιβάλλον μέσο και το μέγεθος του σώματος. Τέτοιες δυνάμεις ασκούνται σε ένα σώμα, που κινείται στο εσωτερικό του αέρα ή ενός υγρού.

Η **μπλε** καμπύλη της **Εικόνας 2-11** απεικονίζει τη γραφική παράσταση θέσης - χρόνου, για ένα σώμα, που είναι συνδεδεμένο με οριζόντιο ελατήριο, και ταλαντώνεται χωρίς αντίσταση από τον αέρα ($b = 0$), ή άλλες τριβές.




**Εικόνα 2-11**
Η **μπλε** καμπύλη απεικονίζει τη γραφική παράσταση θέσης - χρόνου της ΑΑΤ ενός οριζόντιου ελατηρίου χωρίς τριβές ή αντίσταση του αέρα. Η **κόκκινη** καμπύλη απεικονίζει τη γραφική παράσταση θέσης – χρόνου της φθίνουσας ταλάντωσης, που εκτελεί το ίδιο σύστημα, εάν υπάρχει μικρή αντίσταση από τον αέρα. Η φθίνουσα ταλάντωση γίνεται γύρω από τη μέση θέση $x = 0$, με πλάτος που ελαττώνεται με τον χρόνο. Και οι δύο ταλαντώσεις έχουν αρχική φάση $\theta_0 = \pi/2$.

Στη θέση ισορροπίας $x_{ΘΙ} = 0{,}0$ cm, η δύναμη ελατηρίου είναι μηδενική. Το σώμα ταλαντώνεται μεταξύ των ακραίων θέσεων $x = \pm 15{,}0$ cm, με σταθερό πλάτος 15,0 cm και περίοδο $T = 2{,}0$ s.

Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι ίση με $\theta_0 = \pi/2$. Άρα, τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα ξεκινά από τη μέγιστη θέση $x_1 = +15{,}0$ cm, και τη χρονική στιγμή $t = T/4 = 0{,}5$ s διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας.

Η **κόκκινη** καμπύλη της **Εικόνας 2-11** απεικονίζει τη γραφική παράσταση θέσης-χρόνου για το ίδιο σύστημα σώματος - ελατηρίου, εάν ληφθεί υπόψη η οπισθέλκουσα αντίσταση του αέρα, $\vec{f}_\alpha = -b\vec{v}$. Σε αυτή την περίπτωση, η συνισταμένη δυναμη στο σώμα ισούται με:

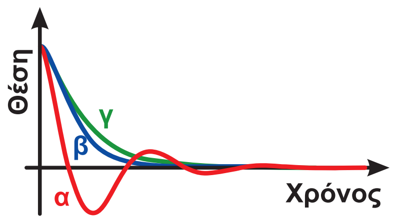
$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{f}_\alpha = -k\vec{x} - b\vec{v}$$

Να παρατηρήσετε ότι η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη με την ταχύτητα του σώματος. Σε αυτή την περίπτωση, η κίνηση είναι **παλινδρομική**, δηλαδή το σώμα κινείται μπρος-πίσω για κάποιο χρονικό διάστημα. Σύμφωνα με τον ορισμό που έχουμε δώσει, η κίνηση **δεν** είναι απλή αρμονική ταλάντωση, επειδή η συνισταμένη δύναμη δεν είναι ανάλογη με την μετατόπιση από τη ΘΙ.

Εξαιτίας της οπισθέλκουσας αντίστασης του αέρα, το αρχικό πλάτος της παλινδρομικής κίνησης (15,0 cm) φθίνει συνεχώς με τον χρόνο.

Όπως φαίνεται από την κόκκινη καμπύλη, τη χρονική στιγμή $t \cong 2{,}0$ s το σώμα φθάνει στη μέγιστη θέση $x \cong +2{,}0$ cm, σε απόσταση $\cong 2{,}0$ cm από τη μέση θέση $x = 0$. Μετά από τη χρονική στιγμή $t \cong 4{,}0$ s, η θέση του σώματος είναι προσεγγιστικά ίση με μηδέν.

Το επόμενο σχήμα συγκρίνει την κίνηση του σώματος, για διαφορετικές τιμές της σταθεράς $b$ της οπισθέλκουσας δύναμης $\vec{f}_\alpha = -b\vec{\upsilon}$.

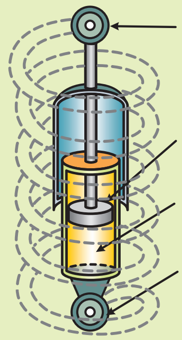



- Εάν η σταθερά $b$ είναι **μικρότερη** από μία συγκεκριμένη κρίσιμη τιμή $b_{\kappa\rho}$, όπως συμβαίνει π.χ. για κίνηση στον αέρα, το σώμα εκτελεί παλινδρομική κίνηση, όπως περιγράψαμε προηγουμένως (**καμπύλη α**). Η απόσβεση λέγεται **υποκρίσιμη**. Γενικά η συχνότητα $f$ της φθίνουσας ταλάντωσης (αριθμός κύκλων ανά μονάδα χρόνου) διαφέρει από τη χαρακτηριστική συχνότητα $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$ του ταλαντωτή στην απουσία τριβών ή αντίστασης του περιβάλλοντος μέσου. Εάν όμως η σταθερά $b$ είναι αρκετά μικρή ($b << m f_0$), η συχνότητα $f$ είναι περίπου ίση με τη χαρακτηριστική συχνότητα $f_0$.
- Εάν η σταθερά $b$ είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή, το σώμα **δεν** εκτελεί παλινδρομική κίνηση, αλλά επιστρέφει στη θέση $x = 0$ και σταματά (**καμπύλη γ**). Η απόσβεση λέγεται **υπερκρίσιμη**.
- Εάν η σταθερά $b$ είναι ακριβώς ίση με την κρίσιμη τιμή, το σώμα πάλι δεν ακολουθεί παλινδρομική κίνηση, αλλά επιστρέφει στη θέση $x = 0$ στον συντομότερο δυνατό χρόνο (**καμπύλη β**). Η απόσβεση λέγεται **κρίσιμη**.

Κρίσιμη ή υπερκρίσιμη απόσβεση λαμβάνει χώρα κατά την ταλάντωση ενός σώματος στο εσωτερικό ενός παχύρρευστου υγρού. Για να σταματά η κίνηση στο μικρότερο χρονικό διάστημα, η σταθερά πρέπει να ρυθμισθεί έτσι ώστε η απόσβεση να είναι κρίσιμη. Τέτοιες διατάξεις χρησιμοποιούνται για την απόσβεση της κίνησης μίας πόρτας, την απορρόφηση κραδασμών στα αυτοκίνητα και την προστασία σπιτιών από τους σεισμούς.

Πολλές αποσβεστικές διατάξεις λειτουργούν με κρίσιμη απόσβεση, αλλά μετά από επανειλημμένη χρήση παύουν να ανταποκρίνονται στις αρχικές προδιαγραφές τους, και προκαλούν υποκρίσιμη απόσβεση. Για παράδειγμα, ο μηχανισμός που σταματά μία πόρτα είναι ρυθμισμένος έτσι ώστε η πόρτα να ακινητοποιείται μόλις κλείσει. Όταν ο μηχανισμός αρχίσει να λειτουργεί με υποκρίσιμη απόσβεση, η ταχύτητα της πόρτας ελαττώνεται με πιο αργό ρυθμό, και η πόρτα χτυπά πριν προλάβει να σταματήσει.

Οι αναρτήσεις των αυτοκινήτων περιέχουν κατάλληλες διατάξεις, οι οποίες απορροφούν τους κραδασμούς, που προκαλούνται από το ανώμαλο οδόστρωμα. Για να γίνεται γρήγορη απόσβεση αυτών των κραδασμών, μέρος των διατάξεων κινείται με ελαφρώς υποκρίσιμη απόσβεση στο εσωτερικό κατάλληλου υγρού.[2]




**Ερωτήσεις Κατανόησης**

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

| Α/Α | ΠΡΟΤΑΣΗ | Σωστό / Λάθος |
|---|---|---|
| 1 | Ένα εκκρεμές, που ταλαντώνεται στο εσωτερικό ενός υγρού, εκτελεί ΑΑΤ όταν: | |
| **α** | Η αντίσταση του υγρού είναι αμελητέα. | |
| **β** | Πάντοτε. | |
| 2 | Μία φθίνουσα ταλάντωση είναι περιοδική κίνηση. | |
| 3 | Σε μία φθίνουσα ταλάντωση: | |
| **α** | Το πλάτος ελαττώνεται συνεχώς. | |
| **β** | Η Μηχανική Ενέργεια ελαττώνεται συνεχώς. | |
| 4 | Μία σφαίρα είναι συνδεδεμένη σε κατακόρυφο ελατήριο, και ταλαντώνεται στο εσωτερικό ενός ρευστού. Η οπισθέλκουσα δύναμη από το ρευστό: | |
| **α** | Είναι ανάλογη με τη μετατόπιση της σφαίρας από τη θέση ισορροπίας. | |

[2] Η υπερκρίσιμη απόσβεση απαιτεί περισσότερο χρόνο και συντελεί σε οδήγηση με λιγότερη άνεση και ασφάλεια. Ιδεατή απόσβεση είναι η κρίσιμη, που συμβαίνει στον ελάχιστο δυνατό χρόνο. Όμως, η απόσβεση εξαρτάται από τη συνολική μάζα $m$ αυτοκινήτου - επιβατών. Εάν η απόσβεση είναι κρίσιμη για έναν μέσο αριθμό επιβατών, ενδέχεται να γίνει υπερκρίσιμη όταν στο αυτοκίνητο επιβαίνει μόνο ο οδηγός, επειδή η συνολική μάζα ελαττώνεται. Εάν η απόσβεση ρυθμισθεί να είναι ελαφρώς υποκρίσιμη για μία μέση μάζα αυτοκινήτου-επιβατών, δεν γίνεται υπερκρίσιμη για μικρότερες μάζες.

| | | |
|---|---|---|
| **β** | Είναι συνεχώς ομόρροπη με τη δύναμη ελατηρίου. | |
| **γ** | Είναι συνεχώς αντίρροπη με τη δύναμη ελατηρίου. | |
| **δ** | Αυξάνεται κατά μέτρο, όταν η σφαίρα απομακρύνεται από τη ΘΙ. | |
| **ε** | Αυξάνεται κατά μέτρο, όταν η σφαίρα πλησιάζει στη ΘΙ. | |
| **στ** | Έχει συνεχώς αρνητικό έργο. | |

**Ασκήσεις**

**1** Το πλάτος μιας υποκρίσιμης φθίνουσας ταλάντωσης, σώματος σε οριζόντιο ελατήριο, ελαττώνεται κατά 5% σε κάθε ταλάντωση.

**Α.** Ποια είναι η αντίστοιχη μείωση της Μηχανικής Ενέργειας του συστήματος του ταλαντωτή;

**Β.** Να υπολογίσετε το συνολικό έργο της οπισθέλκουσας δύναμης όταν η Μηχανική Ενέργεια του ταλαντωτή μειώνεται στο 1% της αρχικής.

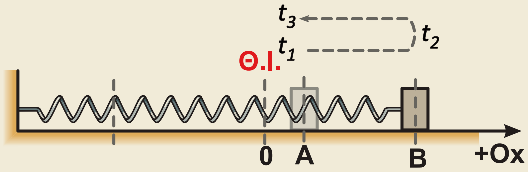
**2** Το σώμα της **Εικόνας 2-11**, ξεκινά από τη μέγιστη θέση 15,0 cm και μετά από 1,0 s φθάνει στην ελάχιστη θέση –5,0 cm. Η σταθερά του ελατηρίου είναι 60,0 N/m. Να υπολογίσετε:

**Α.** Τη μείωση της Μηχανικής Ενέργειας του συστήματος σώματος - ελατηρίου.

**Β.** Το μέτρο της μέσης οπισθέλκουσας δύναμης, που ασκείται από τον αέρα στη σφαίρα κατά το χρονικό διάστημα 0 s - 1 s.

**3** Ένα σώμα είναι συνδεδεμένο με κατακόρυφο ελατήριο και βρίσκεται στο εσωτερικό ενός παχύρρευστου υγρού. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0$. Να περιγράψετε την κίνηση του σώματος μέχρι να σταματήσει.

**4** Ένα σώμα είναι στερεωμένο σε οριζόντιο ελατήριο και εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση σε τραχιά οριζόντια επιφάνεια.




Τη στιγμή $t_1$ το σώμα βρίσκεται στο σημείο **Α**, και κινείται προς τη θετική ακραία θέση **Β**, όπου φθάνει τη στιγμή $t_2$. Τη στιγμή $t_3$ το σώμα επιστρέφει στο σημείο **Α**. Ποιο χρονικό διάστημα είναι μεγαλύτερο, το $\Delta t(A \rightarrow B) = t_2 - t_1$ ή το $\Delta t(B \rightarrow A) = t_3 - t_2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

## 2.21. Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

Όταν η συνισταμένη δύναμη, που δρα σε ένα σώμα, είναι ανάλογη και αντίρροπη με τη μετατόπιση του σώματος από τη θέση ισορροπίας, το σώμα εκτελεί **ελεύθερη** ΑΑΤ. Εάν η επίδραση των τριβών και της αντίστασης του περιβάλλοντος μέσου είναι αμελητέα, το σώμα ταλαντώνεται με σταθερό πλάτος και συχνότητα

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$$

**Η σταθερά** $D$ εξαρτάται από τις προδιαγραφές του ταλαντωτή. Για παράδειγμα, στο σύστημα σώματος-ελατηρίου καθορίζεται από τη σταθερά ελατηρίου, και στο εκκρεμές από το μήκος του εκκρεμούς και τη μάζα του σώματος. Άρα, κάθε ΑΑΤ ταλαντώνεται με μία **χαρακτηριστική** συχνότητα $f_0$, όταν οι τριβές και η αντίσταση του περιβάλλοντος μέσου είναι αμελητέες.

Σε πολλές περιπτώσεις, στον ταλαντωτή δρα και μία επιπρόσθετη δύναμη, η οποία δεν είναι ανάλογη και αντίρροπη με τη μετατόπιση. Για παράδειγμα:

- Μία κούνια ταλαντώνεται μπρος-πίσω. Κάθε φορά που μας πλησιάζει, της δίνουμε μία σύντομη ώθηση με τα χέρια μας.
- Ένα σώμα είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο ελατήριο. Κρατάμε την άλλη άκρη του ελατηρίου, και την μετακινούμε πάνω-κάτω με το χέρι μας.
- Ένα απλό εκκρεμές αποτελείται από ένα σφαιρίδιο στερεωμένο σε ένα αβαρές νήμα. Κρατάμε την άλλη άκρη του νήματος με το χέρι μας, και την μετακινούμε δεξιά-αριστερά.
- Ένα αυτοκίνητο μετακινείται σε ανώμαλο οδόστρωμα. Η δύναμη από το έδαφος εξαναγκάζει σε ταλάντωση τα ελατήρια, στα οποία είναι στερεωμένο το σώμα του αυτοκινήτου.
- Τα τοιχώματα ενός κρυστάλλινου ποτηριού ταλαντώνονται υπό την επίδραση ενός ήχου.
- Μία γέφυρα ταλαντώνεται υπό την επίδραση του ανέμου.

Η κίνηση που εκτελεί ο ταλαντωτής σε αυτές τις περιπτώσεις ονομάζεται **εξαναγκασμένη**.

Θα θεωρήσουμε την περίπτωση, στην οποία η επιπρόσθετη δύναμη μεταβάλλεται περιοδικά με τον χρόνο, μέσω της σχέσης:

$$\vec{F}(t) = \vec{F}_0\,\eta\mu(2\pi f t) = \vec{F}_0\,\eta\mu(\omega t)$$

όπου $f$ είναι η συχνότητα και $\omega = 2\pi f$ είναι η κυκλική συχνότητα της εξωτερικής δύναμης. Να παρατηρήσετε ότι:

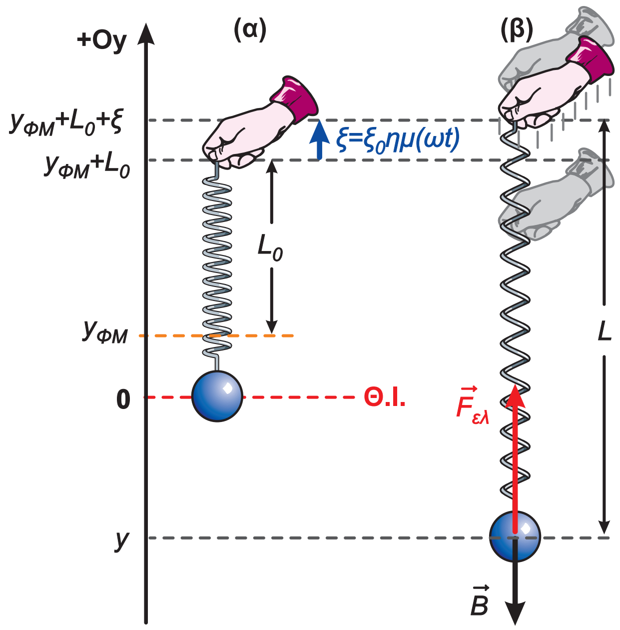
- Η αλγεβρική τιμή της δύναμης **δεν** είναι σταθερή, αλλά μεταβάλλεται μεταξύ των τιμών $-F_0$ και $+F_0$.
- Η συχνότητα $f$ ***είναι χαρακτηριστικό*** της δύναμης, και **δεν** σχετίζεται με τη συχνότητα ταλάντωσης $f_0$ του ΑΑΤ.

Η εξωτερική δύναμη **μεταβάλλει γενικά το πλάτος και τη συχνότητα** της ταλάντωσης. Όταν η δύναμη έχει τη χρονική εξάρτηση της πιο πάνω σχέσης, αποδεικνύεται ότι:

**1.** Το σώμα ταλαντώνεται **με τη συχνότητα $f$ της εξωτερικής δύναμης**, και όχι με την χαρακτηριστική του συχνότητα $f_0$.

**2.** Το πλάτος της ταλάντωσης μεγαλώνει καθώς η συχνότητα $f$ της εξωτερικής δύναμης πλησιάζει τη χαρακτηριστική συχνότητα $f_0$ του ΑΑΤ.

Το σώμα της **Εικόνας 2-12** έχει μάζα $m$ και είναι αναρτημένο από κατακόρυφο ελατήριο φυσικού μήκους $L_0$ και σταθεράς $k$. Κρατούμε το δεύτερο άκρο του ελατηρίου με το χέρι μας.




**Εικόνα 2-12**
**(α)** Σώμα αναρτημένο σε κατακόρυφο ελατήριο. Κρατάμε το άλλο άκρο του ελατηρίου με το χέρι μας. **(β)** Εάν αρχίσουμε να κινούμε το χέρι μας πάνω - κάτω, θέτουμε το σύστημα σώματος - ελατηρίου σε **εξαναγκασμένη** ταλάντωση.

**Προτεινόμενη Δραστηριότητα για το Σπίτι ή την Τάξη**

1. Να αναρτήσετε ένα μικρό σώμα γνωστής μάζας $m$ σε ένα ελατήριο γνωστής σταθεράς $k$. Από την έκφραση $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$, να υπολογίσετε τη **χαρακτηριστική περίοδο** του σώματος - ελατηρίου. Η αντίστοιχη χαρακτηριστική συχνότητα είναι

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

2. Να κρατήσετε με το χέρι σας την άλλη άκρη του ελατηρίου όπως στην **Εικόνα 2-12(α)**, με το ελατήριο και το σώμα να ισορροπούν ακίνητα.

3. **Όριο μηδενικής εξωτερικής συχνότητας** $f \cong 0$. Να αρχίσετε να κινείτε ***πάρα πολύ αργά*** το χέρι σας πάνω - κάτω, γύρω από την αρχική θέση της πάνω άκρης του ελατηρίου. Η κίνηση του χεριού σας θα περιγράφεται προσεγγιστικά από τη σχέση $\xi = \xi_0\,\eta\mu(2\pi f t) = \xi_0\,\eta\mu(\omega t)$, όπου $\xi_0$ είναι το πλάτος της κίνησης και $\omega = 2\pi f$ είναι η κυκλική συχνότητα της παλινδρομικής κίνησης του χεριού σας. Τι παρατηρείτε; Ποιο είναι το πλάτος ταλάντωσης του σώματος;

4. **Όριο τεράστιας εξωτερικής συχνότητας** $f >> f_0$. Να αρχίσετε να κινείτε ***πάρα πολύ γρήγορα*** το χέρι σας πάνω - κάτω, γύρω από την αρχική θέση της πάνω άκρης του ελατηρίου. Τι παρατηρείτε; Ποιο είναι το πλάτος ταλάντωσης του σώματος;

5. **Συντονισμός** $f \cong f_0$. Να κινήσετε τώρα το χέρι σας πάνω - κάτω γύρω από την αρχική θέση της πάνω άκρης του ελατηρίου, με περίοδο ταλάντωσης $T \cong T_0$. Να φροντίσετε ώστε το πλάτος $\xi_0$ της ταλάντωσης του χεριού σας να είναι μικρό (της τάξης του εκατοστού του μέτρου). Τι παρατηρείτε; Πώς συγκρίνεται το πλάτος ταλάντωσης του σώματος με το πλάτος $\xi_0$ της κίνησης του χεριού σας;

Αρχικά, το χέρι μας είναι ακίνητο (**σχήμα (α)**) και το ελατήριο με το σώμα ισορροπούν. Ορίζουμε ως $y = 0$ τη ΘΙ του σώματος - κατακόρυφου ελατηρίου και $y = y_{\Phi M}$ τη θέση της ελεύθερης άκρης όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος $L_0$. Το χέρι μας βρίσκεται στην αρχική θέση $y_{\Phi M} + L_0$.

Έστω ότι αρχίζουμε να κινούμε το χέρι μας περιοδικά πάνω-κάτω γύρω από τη θέση $y_{\Phi M} + L_0$, με πλάτος $\xi_0$ και συχνότητα $f$. Σε μία χρονική στιγμή, η μετατόπιση του χεριού μας από την αρχική του θέση είναι:

$$\xi = \xi_0\,\eta\mu(2\pi f t) = \xi_0\,\eta\mu(\omega t)$$

Όπως εξηγούμε στο **Ένθετο 1**, η κίνηση του χεριού μας δημιουργεί μία εξωτερική δύναμη στο σώμα, η οποία μεταβάλλεται με τη μορφή $F = F_0\,\eta\mu(\omega t)$.

Διαισθητικά, μπορούμε να προβλέψουμε τα εξής:

- Εάν η συχνότητα ταλάντωσης του χεριού μας είναι πάρα πολύ μικρή ($f \cong 0$), το ελατήριο και το σώμα θα ακολουθούν απλώς την κίνηση του χεριού μας. Άρα, το σώμα θα ταλαντώνεται με το πλάτος της ταλάντωσης του χεριού μας, $A = \xi_0$.
- Εάν η συχνότητα ταλάντωσης του χεριού μας είναι πολύ μεγάλη ($f >>> f_0$), το ελατήριο δεν προλαβαίνει να ακολουθήσει την κίνηση του χεριού. Το σώμα διατηρείται στη ΘΙ του, και έχει μηδενικό πλάτος ταλάντωσης, $A = 0$.

Εάν η συχνότητα $f$ του χεριού μας είναι συγκρίσιμη με την χαρακτηριστική συχνότητα $f_0$ του ταλαντωτή, είναι δύσκολο να προβλέψουμε τι θα συμβεί. Εκτελώντας αυτή την κίνηση, διαπιστώνουμε ότι η σφαίρα ταλαντώνεται με αυξανόμενο πλάτος. Για $f = f_0$, το πλάτος ταλάντωσης της σφαίρας γίνεται πολύ μεγαλύτερο από το πλάτος ταλάντωσης $\xi_0$ του χεριού μας. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **συντονισμός**.

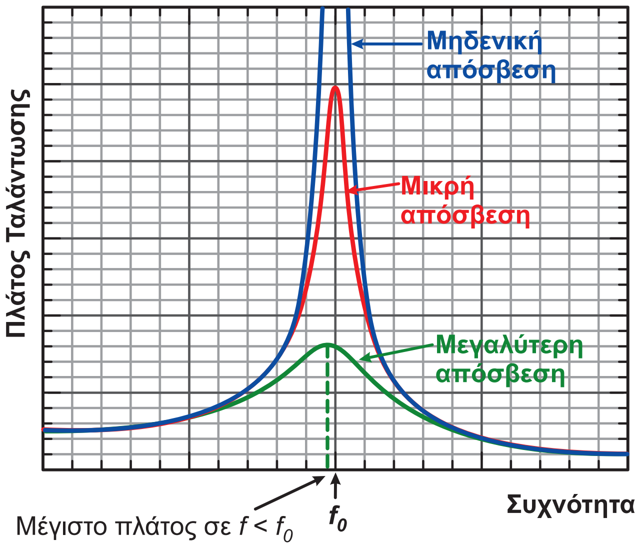
Εάν οι δυνάμεις τριβής και αντίστασης του περιβάλλοντος μέσου είναι αμελητέες, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης γίνεται άπειρο στη συχνότητα συντονισμού $f = f_0$. Στην πραγματικότητα, οι επιδράσεις των τριβών ή/και της αντίστασης του περιβάλλοντος μέσου έχουν δύο συνέπειες:

**Α.** Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης γίνεται μέγιστο σε συχνότητα ελάχιστα μικρότερη από την χαρακτηριστική συχνότητα του ΑΑΤ: $f <\approx f_0$.

**Β.** Το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης δεν γίνεται άπειρο.

Στην **Εικόνα 2-13** απεικονίζεται η γραφική παράσταση του πλάτους της εξαναγκασμένης ταλάντωσης σαν συνάρτηση της συχνότητας $f$, για ένα σώμα.

Η **μπλε** καμπύλη περιγράφει τον συντονισμό χωρίς απόσβεση. Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης απειρίζεται για $f = f_0$. Όταν υπάρχει απόσβεση, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι πεπερασμένο, και παρατηρείται σε ελαφρά μικρότερες τιμές της συχνότητας, $f < f_0$ (**κόκκινη** και **πράσινη** καμπύλη). Όσο μεγαλύτερη είναι η απόσβεση, τόσο μικρότερη είναι η αύξηση του πλάτους της εξαναγκασμένης ταλάντωσης.

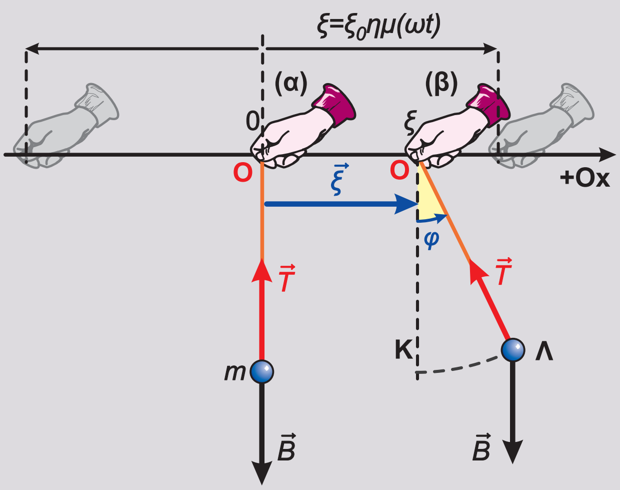



**Εικόνα 2-13**
Γραφική παράσταση του πλάτους της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, σαν συνάρτηση της συχνότητας της εξωτερικής δύναμης.
**Μπλε** καμπύλη. Συντονισμός **χωρίς** απόσβεση: το πλάτος απειρίζεται για $f = f_0$.
**Κόκκινη** και **πράσινη** καμπύλη. Καθώς μεγαλώνει η απόσβεση, το μέγιστο πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης ελαττώνεται, και μετατοπίζεται (ελάχιστα) σε συχνότητες $f < f_0$.

**Προτεινόμενη Δραστηριότητα για το Σπίτι ή την Τάξη**

**1.** Να κατασκευάσετε ένα απλό μαθηματικό εκκρεμές, χρησιμοποιώντας ένα μικρό μεταλλικό σφαιρίδιο και ένα νήμα μήκους $L$. Από την έκφραση $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$, να προσδιορίσετε την **χαρακτηριστική περίοδο** του εκκρεμούς. Η αντίστοιχη χαρακτηριστική συχνότητα είναι

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$




**Εικόνα 2-14**
**(α)** Σώμα αναρτημένο σε αβαρές νήμα (εκκρεμές). Κρατάμε το άλλο άκρο του νήματος με το χέρι μας. **(β)** Εάν αρχίσουμε να κινούμε το χέρι μας αριστερά - δεξιά θέτουμε το εκκρεμές σε **εξαναγκασμένη** ταλάντωση.

**2.** Να κρατήσετε με το χέρι σας την άλλη άκρη του νήματος, με το εκκρεμές να ισορροπεί ακίνητο σε κατακόρυφη στάση, όπως στην **Εικόνα 2-14(α)**.

**3.** **Όριο μηδενικής εξωτερικής συχνότητας** $f \cong 0$. Να αρχίσετε να κινείτε ***πάρα πολύ αργά*** το χέρι σας δεξιά - αριστερά σε οριζόντια διεύθυνση, γύρω από την αρχική θέση της πάνω άκρης του νήματος (**σχήμα (β)**). Η κίνηση του χεριού σας θα περιγράφεται προσεγγιστικά από τη σχέση $\xi = \xi_0 \eta\mu(\omega t)$, όπου $\xi_0$ είναι το πλάτος της κίνησης του χεριού σας, και $\omega = 2\pi f$ είναι η κυκλική συχνότητα της κίνησης. Να φροντίσετε ώστε το πλάτος $\xi_0$ να είναι μικρό, ίσο με ≅ 1 cm. Τι παρατηρείτε; Ακολουθεί το εκκρεμές την κίνηση του χεριού σας; Ποιο είναι το πλάτος ταλάντωσης του εκκρεμούς;

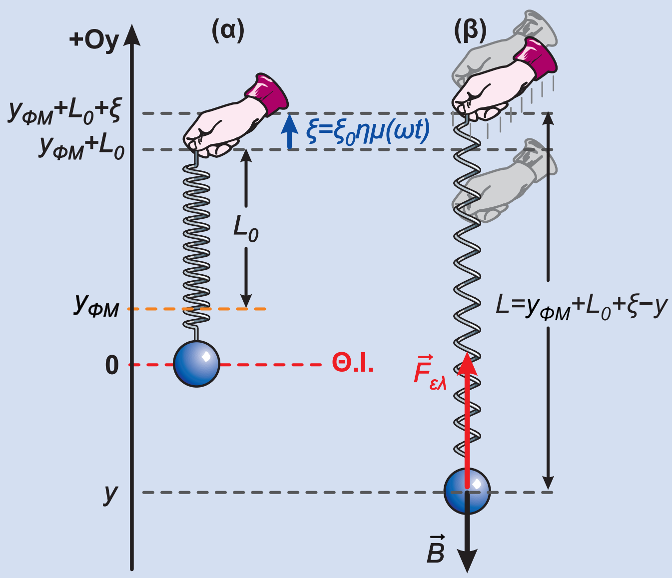
4. **Όριο τεράστιας εξωτερικής συχνότητας** $f >> f_0$. Να αρχίσετε να κινείτε ***πάρα πολύ γρήγορα*** το χέρι σας δεξιά - αριστερά σε οριζόντια διεύθυνση, γύρω από την αρχική θέση της πάνω άκρης του νήματος. Τι παρατηρείτε; Ποιο είναι το πλάτος ταλάντωσης του εκκρεμούς;

5. **Συντονισμός** $f \cong f_0$. Να κινήσετε τώρα το χέρι σας δεξιά - αριστερά σε οριζόντια διεύθυνση γύρω από την αρχική θέση της πάνω άκρης του νήματος, με περίοδο ταλάντωσης $T \cong T_0$. Να φροντίσετε ώστε το πλάτος $\xi_0$ της ταλάντωσης του χεριού σας να είναι μικρό (της τάξης του cm). Τι παρατηρείτε; Πώς συγκρίνεται το πλάτος ταλάντωσης του εκκρεμούς με το πλάτος $\xi_0$ της κίνησης του χεριού σας;

Στο **Ένθετο 2** εξηγούμε ότι η κίνηση του χεριού μας προκαλεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με μία επιπρόσθετη δύναμη της μορφής $F_0\,\eta\mu(\omega t)$.

## ΕΝΘΕΤΟ 1. ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ ΣΤΟ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟ ΕΛΑΤΗΡΙΟ

Το σώμα του **σχήματος (α)** έχει μάζα $m$ και είναι αναρτημένο από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k$. Κρατούμε το δεύτερο άκρο του ελατηρίου με το χέρι μας.




$$F_{ελ} = k\Delta L = k\,[(y_{ΦΜ}+L_0 + \xi - y) - L_0] = k(y_{ΦΜ}+\xi - y)$$

$$\sum F = F_{ελ} + B = k\,(y_{ΦΜ}+\xi - y) - mg = k(y_{ΦΜ}+\xi - y) - ky_{ΦΜ} = -ky + k\xi$$

Μετρούμε τη θέση του σώματος με τον κατακόρυφο άξονα **Oy**, που έχει θετική φορά προς τα επάνω. Η τιμή $y = 0$ αντιστοιχεί στη θέση του σώματος όταν ισορροπεί. Η τιμή $y_{ΦΜ} = \frac{mg}{k}$ αντιστοιχεί στη θέση του σώματος, όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος $L_0$. Η επάνω άκρη του ελατηρίου (και το χέρι) βρίσκονται στη θέση $y_{ΦΜ} + L_0$.

Αρχικά το χέρι μας είναι ακίνητο στη θέση $y_{ΦΜ} + L_0$, και το σώμα βρίσκεται στη θέση $y = 0$. Αρχίζουμε να κινούμε το χέρι μας περιοδικά πάνω-κάτω, με πλάτος $\xi_0$ και συχνότητα $f$ (**σχήμα (β)**). Σε μία χρονική στιγμή, η μετατόπιση του χεριού μας από την αρχική του θέση είναι:

$$\xi = \xi_0\, ημ(2\pi f t) = \xi_0\, ημ(\omega t)$$

Την ίδια χρονική στιγμή, το σώμα βρίσκεται στη θέση $y$. Από το σχήμα προκύπτει ότι η συνολική μεταβολή στο μήκος του ελατηρίου είναι: $\Delta L = y_{ΦΜ} + \xi - y$. Η δύναμη ελατηρίου στο σώμα ισούται με

$$F_{ελ} = k\Delta L = k(y_{ΦΜ} + \xi - y)$$

Να παρατηρήσετε ότι η πιο πάνω έκφραση έχει το σωστό πρόσημο: για $\Delta L > 0$ το ελατήριο είναι τεταμένο και η δύναμη $F_{ελ}$ είναι θετική (βλέπει προς τα πάνω).

Η συνισταμένη δύναμη στο σώμα ισούται με:

$$\sum F = F_{ελ} + B = k(y_{ΦΜ} + \xi - y) - mg = ky_{ΦΜ} + k\xi - ky - ky_{ΦΜ} = -ky + \underbrace{k\xi_0\, ημ(\omega t)}_{= F_0\, ημ(\omega t)}$$

Ο όρος $-ky$ είναι η δύναμη επαναφοράς του κατακόρυφου ελατηρίου, όταν η ταλάντωση είναι ελεύθερη. Ο τελευταίος όρος είναι η εξωτερική δύναμη της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, λόγω της κίνησης του χεριού μας.

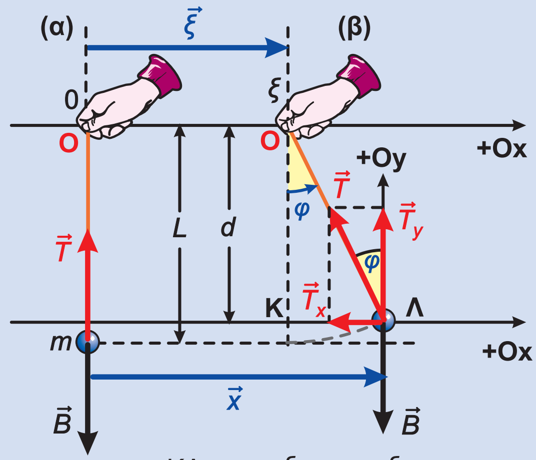
## ΕΝΘΕΤΟ 2. ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ ΣΤΟ ΑΠΛΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ

Το σώμα του **σχήματος (α)** είναι αναρτημένο από αβαρές νήμα μήκους $L$. Κρατούμε το δεύτερο άκρο του νήματος με το χέρι μας. Μετρούμε την **οριζόντια** θέση του σώματος με τον οριζόντιο άξονα **Ox**, που έχει θετική φορά προς τα δεξιά.

Αρχικά, το χέρι μας βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και το εκκρεμές είναι ακίνητο και κατακόρυφο (**σχήμα (α)**).

Αρχίζουμε να κινούμε το χέρι μας περιοδικά δεξιά-αριστερά γύρω από τη θέση $x = 0$, με πλάτος $\xi_0$ και συχνότητα $f$. Σε μία χρονική στιγμή $t$, το χέρι μας βρίσκεται στην οριζόντια θέση:

$$\xi = \xi_0\, ημ(2\pi f t) = \xi_0\, ημ(\omega t)$$




$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΟΚ}} = \frac{x-\xi}{d} \cong \frac{x-\xi}{L}$$

Την ίδια χρονική στιγμή $t$, το εκκρεμές δεν είναι κατακόρυφο. Το σώμα βρίσκεται στην οριζόντια θέση $x$, και το νήμα σχηματίζει γωνία $\varphi$ με την κατακόρυφο (**σχήμα (β)**).

Στο σώμα ασκείται το βάρος του $\vec{B}$ και η τάση $\vec{T}$ του σχοινιού. Αναλύουμε αυτές τις δυνάμεις ως προς το σύστημα του οριζόντιου άξονα **Ox** και του κατακόρυφου άξονα **Oy**.

Για μικρές τιμές της γωνίας $\varphi$, το σώμα κινείται σχεδόν σε οριζόντια διεύθυνση. Άρα, η **y**-συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης είναι περίπου ίση με μηδέν:

$$\sum F_y \cong 0 \Rightarrow T_y - mg \cong 0 \Rightarrow T_y \cong mg$$

Η **x**-συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης είναι:

$$\sum F_x = T_x = -T_y\,\varepsilon\varphi\varphi = -mg\varepsilon\varphi\varphi$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η συνιστώσα $\vec{T}_x$ κατευθύνεται προς την αρνητική κατεύθυνση του **Ox**, όταν $\varphi > 0$.

Από το **σχήμα (β)** προκύπτει ότι η γωνία $\varphi$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\mathrm{ΚΛ}}{\mathrm{ΟΚ}} = \frac{x-\xi}{d}$$

Για μικρές τιμές της γωνίας $\varphi$, η απόσταση $\mathrm{ΟΚ} = d \cong L$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε:

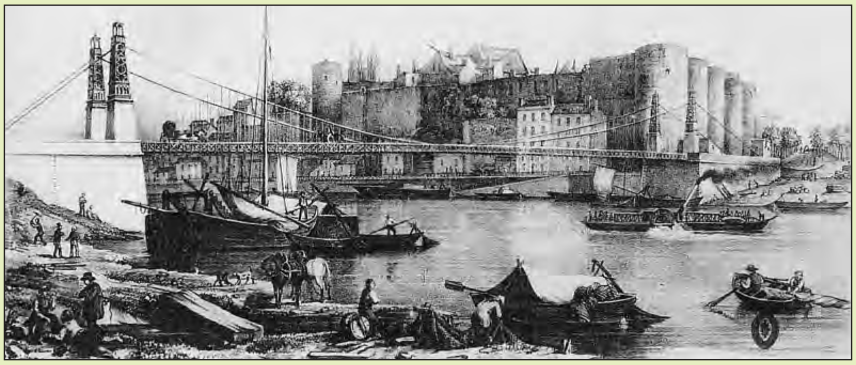
$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{x-\xi}{d} = \frac{x-\xi_0\eta\mu(\omega t)}{L}$$

Αντικαθιστούμε στην έκφραση για την συνιστώσα $\sum F_x$, και βρίσκουμε:

$$\sum F_x = -mg\varepsilon\varphi\varphi = -\frac{mg}{L}x + \left(\frac{mg}{L}\xi_0\right)\eta\mu(\omega t)$$

Ο προτελευταίος όρος είναι η δύναμη επαναφοράς του εκκρεμούς, όταν η ταλάντωση είναι ελεύθερη. Ο τελευταίος όρος είναι η εξωτερική δύναμη της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, λόγω της κίνησης του χεριού μας.

Το 1850 στην πόλη Angers της Γαλλίας, ένα στρατιωτικό τάγμα, παρήλαυνε πάνω από μια γέφυρα. Ο συγχρονισμένος βηματισμός των στρατιωτών, οδήγησε στο φαινόμενο του συντονισμού, με αποτέλεσμα η γέφυρα να καταρρεύσει και να σκοτωθούν 200 στρατιώτες. Περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να βρείτε στην ιστοσελίδα της Wikipedia.



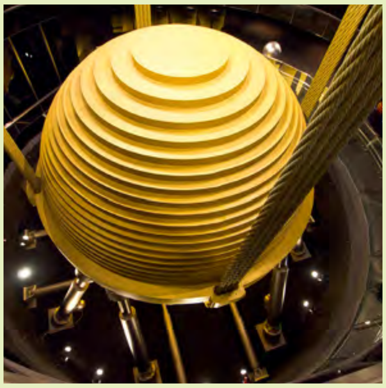
Ένα φημισμένο παράδειγμα καταστροφής οικοδομήματος λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι η κατάρρευση της γέφυρας Tahoma Narrows στην πολιτεία Washington των ΗΠΑ τον Νοέμβριο του 1940, λίγους μόνο μήνες μετά τα εγκαίνιά της.

Μπορείτε να δείτε την ταλάντωση και την κατάρρευση της γέφυρας στην ταινία:

***https://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs***

Διάφορες κατασκευές όπως στάδια, γέφυρες, πολυκατοικίες και ουρανοξύστες, σχεδιάζονται έτσι ώστε να μπορούν να εκτελούν με ασφάλεια ελεύθερες ταλαντώσεις μικρού πλάτους με τη χαρακτηριστική τους συχνότητα $f_0$. Εάν αυτές οι κατασκευές εκτελέσουν εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, υπάρχει κίνδυνος το πλάτος των ταλαντώσεων να αυξηθεί υπερβολικά λόγω φαινομένων συντονισμού. Για να αποφευχθεί η αύξηση του πλάτους στην περίπτωση συντονισμού, τοποθετούνται στις κατασκευές κατάλληλα συστήματα απόσβεσης.

Ο ουρανοξύστης Taipei-101 στην Ταιβάν έχει ύψος 509,2 m, και είναι ένα από τα υψηλότερα κτήρια του κόσμου.
Για να επιτυγχάνεται γρήγορη απόσβεση των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων από τους ισχυρούς ανέμους, ο ουρανοξύστης είναι εξοπλισμένος με ένα τεράστιο ατσάλινο εκκρεμές βάρους 660 τόννων.



**Πηγή:**
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Taipei_101_Tuned_Mass_Damper_2010.jpg
**Πηγή:**
https://en.wikipedia.org/wiki/Taipei_101

Πολλές εφαρμογές **χρησιμοποιούν** το φαινόμενο του συντονισμού. Για παράδειγμα, στα έγχορδα μουσικά όργανα, όπως η κιθάρα, το σώμα και η ακουστική κοιλότητα (αντηχείο) συντονίζονται με την ταλάντωση των χορδών. Ο συντονισμός ενισχύει την ένταση του ήχου σε συγκεκριμένες συχνότητες, και συνεισφέρει στον τελικό ήχο, που παράγεται από το όργανο.

**Ερωτήσεις Κατανόησης**

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

| Α/Α | ΠΡΟΤΑΣΗ | Σωστό / Λάθος |
|---|---|---|
| 1 | Ένα εκκρεμές εκτελεί ΑΑΤ με απόσβεση. Η χαρακτηριστική κυκλική συχνότητα του εκκρεμούς είναι $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. Εάν στο εκκρεμές δρα μια επιπρόσθετη περιοδική δύναμη της μορφής $F(t) = F_0\, \eta\mu(3\omega_0 t)$: | |
| **α** | Το εκκρεμές συνεχίζει να ταλαντώνεται με τη χαρακτηριστική του κυκλική συχνότητα $\omega_0$. | |
| **β** | Το εκκρεμές ταλαντώνεται με κυκλική συχνότητα $3\omega_0$. | |
| **γ** | Το πλάτος της ταλάντωσης παραμένει σταθερό. | |
| **δ** | Το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνεται απεριόριστα. | |
| 2 | Ποια από τα πιο κάτω φαινόμενα αντιστοιχεί σε συντονισμό: | |
| **α** | Ένα σώμα ταλαντώνεται σε κατακόρυφο ελατήριο. | |
| **β** | Ένα παιδί, που κάνει κούνια, αυξάνει το πλάτος της κίνησής του με κατάλληλες κινήσεις των ποδιών του και των χεριών του. | |
| **γ** | Ένα σώμα στερεωμένο σε οριζόντιο ελατήριο ταλαντώνεται πάνω σε μία ανώμαλη επιφάνεια. | |
| **δ** | Ένα πλυντήριο εμφανίζει έντονους κραδασμούς κατά τη διάρκεια του στιψίματος των ρούχων, όταν το τύμπανο περιστρέφεται με μία ορισμένη συχνότητα. | |
| **ε** | Τα τζάμια ενός σπιτιού ταλαντώνονται έντονα, όταν περνά από τον δρόμο ένα αυτοκίνητο. | |

## Χαρακτηριστικά Μεγέθη της Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης

| Μέγεθος | Εξίσωση |
|---|---|
| Περίοδος Απλού Εκκρεμούς | $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ |

| | |
|---|---|
| Περίοδος Οριζόντιου/Κατακόρυφου Ελατηρίου | $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ |
| Κυκλική Συχνότητα Οριζόντιου/Κατακόρυφου Ελατηρίου | $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ |
| **Οριζόντιο Ελατήριο** | |
| Θέση Ισορροπίας (ορισμός) | $x = 0$ |
| Θέση της ελεύθερης άκρης ελατηρίου, όταν έχει το φυσικό του μήκος | $x = 0$ |
| Δύναμη Ελατηρίου (για ΘΙ $x = 0$) | $F_{\varepsilon\lambda} = -kx$ |
| Δυναμική Ενέργεια Σώματος - Οριζόντιου Ελατηρίου (για ΘΙ $x = 0$) | $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx^2$ |
| Σχέση Ταχύτητας - Θέσης | $\upsilon = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{(x_0^2 - x^2)} = \pm\,\omega\sqrt{(x_0^2 - x^2)}$ |
| **Κατακόρυφο Ελατήριο** | |
| Θέση Ισορροπίας (ορισμός). | $y = 0$ |
| Θέση της ελεύθερης άκρης ελατηρίου, όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος (για ΘΙ $y = 0$) | $y_{\Phi M} = \frac{mg}{k}$ |
| Δύναμη Ελατηρίου (για ΘΙ $y = 0$) | $F_{\varepsilon\lambda} = -k(y - y_{\Phi M})$ |
| Δυναμική Ενέργεια Σώματος - Κατακόρυφου Ελατηρίου (ΘΙ $y = 0$) | $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(y - y_{\Phi M})^2$ |
| Συνολική Δυναμική Ενέργεια Σώματος - Κατακόρυφου Ελατηρίου - Γης (για $U_{\beta\alpha\rho} = mgy$) | $U_{\beta\alpha\rho} + U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(y^2 + y_{\Phi M}^2)$ |
| Μηχανική Ενέργεια Σώματος - Κατακόρυφου Ελατηρίου - Γης | $E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}k(y^2 + y_{\Phi M}^2)$ |
| Σχέση ακραίων Θέσεων Ταλάντωσης - Μηχανικής Ενέργειας | $y_0 = \pm\sqrt{\frac{2E_{\mu\eta\chi}}{m} - y_{\Phi M}^2}$ |
| Σχέση Ταχύτητας - Θέσης | $\upsilon = \pm\sqrt{\frac{2E_{\mu\eta\chi}}{m} - \frac{k}{m}(y^2 + y_{\Phi M}^2)}$ |

## Απαντήσεις Ελέγχου Κατανόησης Εννοιών

**2.16.1.** Στη θέση $y = y_{\Phi M} = +mg/k$, όπου βρίσκεται η ελεύθερη άκρη όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

**2.16.2.** Στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης.

**2.16.3.** Στη θέση ισορροπίας $y = 0$.

**2.16.4.** $U_{\beta\alpha\rho} + U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(y_{\Phi M}^2 + y_{\Phi M}^2) = k y_{\Phi M}^2 = \frac{(mg)^2}{k}$.

**2.16.5.** Η Μηχανική Ενέργεια θα είναι

$$E_{\mu\eta\chi} = U_{\varepsilon\lambda} + U_{\beta\alpha\rho} = \frac{1}{2}k(0 + y_{\Phi M}^2) = \frac{1}{2}k y_{\Phi M}^2 = \frac{(mg)^2}{2k}.$$

Αφού το σώμα βρίσκεται με μηδενική ταχύτητα στη ΘΙ (όπου η συνισταμένη δύναμη και η επιτάχυνση μηδενίζονται), θα παραμείνει ακίνητο στη ΘΙ.

**2.16.6.** Αφήνουμε το σώμα από ηρεμία από μία θέση **(α)** $-y_{\Phi M} < y < y_{\Phi M}$, (β) τη θέση $y = y_{\Phi M}$.

**2.16.7.** Η ανώτατη ακραία θέση θα ισούται με $+2y_{\Phi M}$.

**2.16.8.** Η Κινητική Ενέργεια αυξάνεται και η συνολική Δυναμική Ενέργεια ελαττώνεται (αποκτά ελάχιστη τιμή στη ΘΙ). Δυναμική Ενέργεια μετατρέπεται σε Κινητική.

**2.16.9.** Η Κινητική Ενέργεια ελαττώνεται και η συνολική Δυναμική Ενέργεια αυξάνεται. Κινητική Ενέργεια μετατρέπεται σε Δυναμική.

**2.16.10.** Η Μηχανική Ενέργεια παραμένει σταθερή (εάν οι τριβές και η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέες).

**2.18.1.** Θα κατασκεύαζα ένα εκκρεμές, και θα μετρούσα την περίοδό του με το χρονόμετρο. Από τον τύπο της περιόδου, θα προσδιόριζα το μήκος του νήματος του εκκρεμούς. Κατόπιν, θα χρησιμοποιούσα το νήμα για να μετρήσω τις διαστάσεις του δωματίου.

**2.18.2.** Στον Ισημερινό είναι ελάχιστα μικρότερη η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας, οπότε είναι ελάχιστα μεγαλύτερη η περίοδος.

**2.18.3.** Η επιτάχυνση της βαρύτητας ελαττώνεται, οπότε η περίοδος αυξάνεται.

**2.18.4.** Πρέπει να μεγαλώσουμε το μήκος του νήματος.

**2.18.5.** Αφού καθυστερεί, έχει μεγαλύτερη περίοδο από την επιθυμητή. Για να ελαττώσουμε την περίοδο πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του νήματος.

**2.18.6.** Σύμφωνα με τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα, η επιτάχυνση είναι αντιστρόφως ανάλογη με τη μάζα, εάν η δύναμη είναι **σταθερή**: $\alpha = F/m \propto 1/m$. Η δύναμη επαναφοράς στο σώμα του εκκρεμούς (η εφαπτομενική συνιστώσα του βάρους) είναι **ανάλογη με τη μάζα** του σώματος. Άρα, ένα σώμα μεγαλύτερης μάζας υπόκειται σε μεγαλύτερη δύναμη επαναφοράς. Από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα, προκύπτει ότι η εφαπτομενική επιτάχυνση του σώματος είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του: $\alpha_E = B_E/m = -mg\varphi/m = -g\varphi$. Γι΄ αυτό, η περίοδος του εκκρεμούς **δεν** εξαρτάται από τη μάζα του σώματος.

**2.18.7.** Τα εκκρεμή έχουν την ίδια περίοδο (δεν εξαρτάται από τη μάζα).

**2.18.8.** Η περίοδος της ΑΑΤ δεν εξαρτάται από το πλάτος της ταλάντωσης. Αφού οι αρχικές γωνίες είναι μικρές, το εκκρεμές εκτελεί ΑΑΤ και η περίοδος δεν εξαρτάται από την αρχική γωνία.

**2.18.9.** Τα εκκρεμή θα έχουν την ίδια περίοδο. Ισχύει η ίδια εξήγηση με την προηγούμενη ερώτηση.

---

**2.19.1.** Η επιτάχυνση της ελεύθερης πτώσης είναι μεγάλη και η διάρκεια της κίνησης είναι μικρή. Γι’ αυτό, τα πειράματα ελεύθερης πτώσης απαιτούν τον προσδιορισμό του χρόνου πτώσης με μεγάλη ακρίβεια.

**2.19.2.** Θα πρέπει στον τύπο της περιόδου η μαθήτρια να λάβει υπόψη της ότι το συνολικό μήκος του εκκρεμούς είναι $L + R$ (ίσο με την απόσταση ανάμεσα στο σημείο περιστροφής **Ο** και στο σημείο εφαρμογής του βάρους του σώματος).

**2.19.3.** Με αυτό τον τρόπο ελαττώνεται το σφάλμα στον προσδιορισμό της περιόδου.

**2.19.4.** Η περίοδος ταλάντωσης σώματος σε κατακόρυφο ελατήριο δεν εξαρτάται από την επιτάχυνση της βαρύτητας. Η επιτάχυνση της βαρύτητας $g$ μπορεί να προσδιορισθεί από την επιμήκυνση του ελατηρίου, $\Delta L = \frac{mg}{k} = y_{\Phi M} - 0$. Εάν η σταθερά ελατηρίου $k$ δεν είναι γνωστή, μπορούμε να την προσδιορίσουμε από την περίοδο ταλάντωσης: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$. Κατόπιν, προσδιορίζουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας:

$$g = k\frac{\Delta L}{m} = \frac{4\pi^2 m}{T^2}\frac{\Delta L}{m} = \frac{4\pi^2}{T^2}\Delta L$$