ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

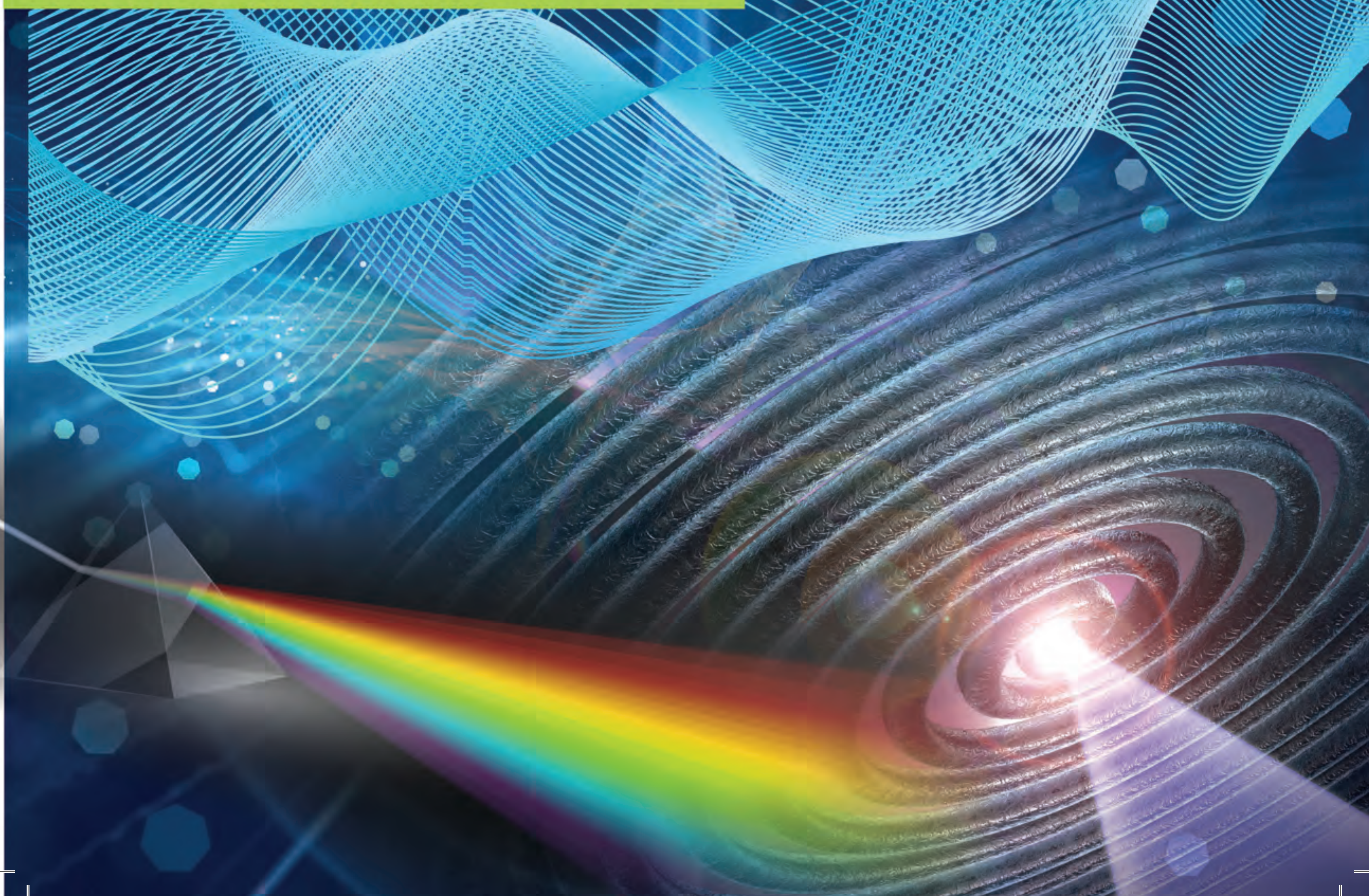
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ | ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΦΥΣΙΚΗ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1



ΦΥΣΙΚΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Συγγραφή: **Γεώργιος Αρχοντής**, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Φώτιος Πτωχός, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Νικόλαος Τούμπας, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Ζαχαρίας Ζαχαρία, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Μιχάλης Ιωάννου, Φυσικός, Εκπαιδευτικός Μέσης Εκπαίδευσης
Ιωάννης Καρμιώτης, Φυσικός, Εκπαιδευτικός Μέσης Εκπαίδευσης
Σάββας Πολυδωρίδης, Φυσικός, Εκπαιδευτικός Μέσης Εκπαίδευσης
Δημήτριος Φιλίππου, Φυσικός, Βοηθός Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης
Παναγιώτης Ελευθερίου, Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης Φυσικής
Γιαννάκης Χατζηκωστής, Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης Φυσικής

Επιμέλεια σχημάτων: **Αντώνης Τσάκωνας**, Φυσικός, Εκπαιδευτικός Μέσης Εκπαίδευσης

Σχεδιασμός έκδοσης: Έλενα Ηλιάδου, Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων
Επιμέλεια έκδοσης: Μαρίνα Άστρα-Ιωάννου, Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων
Συντονισμός έκδοσης: Χρίστος Παρπούνας, Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων

Α΄ Έκδοση 2019
Εκτύπωση: Printco Cassoulides Ltd

ISBN: 978-9963-54-208-6

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η διασφάλιση της ποιότητας ζωής στον αιώνα που διανύουμε, βασίζεται ολοένα και περισσότερο στην επιστημονική και τεχνολογική πρόοδο. Η απόκτηση εκπαίδευσης και δεξιοτήτων στην επιστήμη είναι απαραίτητη για την επίτευξη βιώσιμης ανάπτυξης και εδραίωσης της πραγματικής δημοκρατίας.

Με ιδιαίτερη χαρά προλογίζω την έκδοση του βιβλίου «Φυσική Γ΄ Λυκείου». Το βιβλίο αυτό γράφτηκε με τη σκέψη ότι εσείς, οι σημερινοί μαθητές και οι αυριανοί πολίτες, θα πρέπει να δομήσετε ένα συνεκτικό σώμα γνώσεων, να αναπτύξετε τις αναγκαίες δεξιότητες και ικανότητες για συμμετοχή σε μια κοινωνία ενεργών και κριτικά σκεπτόμενων ανθρώπων και να διαμορφώσετε θετικές στάσεις και συμπεριφορές έναντι της επιστήμης. Γι’ αυτό τον λόγο σε αυτό το βιβλίο τα θέματα της Φυσικής συνδέονται με την καθημερινή ζωή, τη φύση και την εξέλιξη της επιστήμης.

Επιθυμώ να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους πανεπιστημιακούς Γεώργιο Αρχοντή, Ζαχαρία Ζαχαρία, Φώτιο Πτωχό, Νικόλαο Τούμπα, στους εκπαιδευτικούς Μιχάλη Ιωάννου, Ιωάννη Καρμιώτη, Σάββα Πολυδωρίδη και Δημήτριο Φιλίππου, και στους Επιθεωρητές Φυσικής Παναγιώτη Ελευθερίου και Γιαννάκη Χατζηκωστή, που ασχολήθηκαν με τη συγγραφή του βιβλίου.

Τέλος, ευχαριστώ την Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων που είχε την ευθύνη για την έκδοση του βιβλίου αυτού.

Δρ Κυπριανός Λούης
Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

ΛΙΓΑ ΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΝΕΟ ΒΙΒΛΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Αγαπητοί και αγαπητές μαθήτριες και μαθητές,

Σας καλωσορίζουμε στη νέα σχολική χρονιά, και σας ευχόμαστε, με αφετηρία αυτό το βιβλίο, να κάνετε ένα συναρπαστικό ταξίδι στον θαυμαστό κόσμο της Φυσικής.

Από τα βάθη της αρχαιότητας, οι άνθρωποι προσπαθούν να ερμηνεύσουν τα φαινόμενα του φυσικού κόσμου. Τον 6ο αιώνα π.Χ. οι αρχαίοι Έλληνες φυσικοί φιλόσοφοι της Ιωνίας βασίσθηκαν σε λογικά επιχειρήματα και διατύπωσαν τις πρώτες θεωρίες για την αρχή των όντων. Η σύγχρονη επιστημονική μεθοδολογία θεμελιώθηκε τον 17ο αιώνα από τον Γαλιλαίο (Galileo Galilei) και θέτει ως προϋπόθεση τη διεξαγωγή και ερμηνεία κατάλληλα σχεδιασμένων πειραμάτων. Σε συνδυασμό με την πειραματική μεθοδολογία, ο Γαλιλαίος τόνιζε ότι για την ερμηνεία των νόμων της Φύσης είναι απαραίτητη η χρήση των μαθηματικών ("το βιβλίο της Φύσης είναι γραμμένο με μαθηματικούς χαρακτήρες"). Τον ίδιο αιώνα, ο Ισαάκ Νεύτωνας διατύπωσε τους νόμους της κίνησης και τον νόμο της παγκόσμιας έλξης, στο φημισμένο έργο του *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

Οι σύγχρονες Φυσικές θεωρίες και πειράματα μελετούν και ερμηνεύουν σε μεγάλο βαθμό φαινόμενα που παρατηρούνται τόσο σε υποατομική, όσο και σε αστρονομική κλίμακα, από τη συμπεριφορά των στοιχειωδών σωματιδίων μέχρι τη δημιουργία αστέρων και την εξέλιξη του Σύμπαντος.

Σε συνδυασμό με την κατανόηση της συμπεριφοράς του Φυσικού κόσμου, η Φυσική έχει αναρίθμητες **πρακτικές εφαρμογές**. Η λειτουργία των συσκευών που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή ζωή για την παραγωγή φωτός, την παραγωγή και χρήση ηλεκτρικής ενέργειας, την απορρόφηση ηλιακής ενέργειας, την κίνηση, την επικοινωνία και την ψυχαγωγία, βασίζεται σε φυσικές αρχές.

Στα μέσα του 20ου αιώνα, ο φημισμένος Αυστριακός Φυσικός Erwin Schroedinger, διατύπωσε στο βιβλίο του "*What is Life*" την άποψη ότι η Φυσική μπορεί να συνεισφέρει και στην κατανόηση των φαινομένων που παρατηρούνται σε ζωντανούς οργανισμούς (**έμβια** ύλη). Η

αλματώδης ανάπτυξη όλων των Φυσικών Επιστημών, ιδιαίτερα από τις αρχές του εικοστού αιώνα, καθιστά δυνατή τη μελέτη και την ερμηνεία της συμπεριφοράς της έμβιας ύλης με μία **διεπιστημονική προσέγγιση**, στην οποία συνδυάζονται μέθοδοι από πολλές επιστημονικές περιοχές (Φυσική, Χημεία, Βιολογία, κλάδοι Μηχανικής). Πειραματικές συσκευές που βασίζονται σε φυσικές αρχές, όπως το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο, το μικροσκόπιο φθορισμού, το μικροσκόπιο ατομικής δύναμης και το σύγχροτρο προσφέρουν λεπτομερείς εικόνες της δομής του κυττάρου και των βιολογικών μορίων. Οι εικόνες αυτές, μαζί με θεωρητικά φυσικά μοντέλα για τη δομή και τις δυνάμεις μεταξύ μορίων, χρησιμοποιούνται στο στοχευμένο σχεδιασμό φαρμάκων. Ταυτόχρονα, η Φυσική συνεισφέρει ουσιαστικά σε πολλές διαγνωστικές και θεραπευτικές τεχνικές της σύγχρονης Ιατρικής, όπως η χρήση υπερήχων, ο πυρηνικός μαγνητικός συντονισμός (MRI), η τομογραφία ποζιτρονίου-ηλεκτρονίου (PET scan), η ακτινοβόληση καρκινικών όγκων.

Οι αλματώδεις εξελίξεις που περιγράψαμε υποδεικνύουν ότι η Φυσική είναι ένας εξαιρετικά υποσχόμενος τομέας απασχόλησης για τους νέους ανθρώπους, που θα συνεισφέρουν στην πρόοδο της ανθρωπότητας, παίρνοντας τη σκυτάλη από τους παλαιότερους.

Το βιβλίο που έχετε στα χέρια σας αποτελεί ένα περιεκτικό και πλήρες κείμενο αναφοράς, που συμβαδίζει πιστά με το Αναλυτικό Πρόγραμμα.

Κάθε κεφάλαιο περιλαμβάνει:

- Αρχική σύνοψη των διδακτικών στόχων,
- Ανάπτυξη της αντίστοιχης θεωρίας με συνδυασμό αναπαραστάσεων (κείμενο και εικόνες, διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις, πίνακες).
- Ερωτήσεις ελέγχου κατανόησης εννοιών
- Πολυάριθμα λυμένα παραδείγματα
- Τελικές ερωτήσεις ανακεφαλαίωσης και κατανόησης
- Άλυτες ασκήσεις.

Η **σύνοψη των διδακτικών στόχων** συνιστά έναν οδηγό για το τι πρέπει να γνωρίζετε με την ολοκλήρωση της μελέτης του κεφαλαίου. Οι συνοδευτικές αναπαραστάσεις (εικόνες, διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις, πίνακες) επεξηγούν πτυχές της θεωρίας και πρέπει να μελετώνται σε συνδυασμό με το γραπτό κείμενο.

Η **μελέτη των λυμένων παραδειγμάτων** είναι **απαραίτητη** προϋπόθεση για την κατανόηση της θεωρίας και πρέπει να προηγείται της επίλυσης των άλυτων ασκήσεων στο τέλος του βιβλίου. Ο στόχος των παραδειγμάτων είναι διπλός: **(1)** παρουσιάζουν τη μεθοδολογία επί-

λυσης μίας κατηγορίας προβλημάτων. **(2)** αναδεικνύουν λεπτομερώς τον τρόπο γραφής και τον χειρισμό μαθηματικών συμβόλων, εξισώσεων και μονάδων μέτρησης, που υιοθετείται στη διεθνή πρακτική.

Οι **ερωτήσεις ελέγχου κατανόησης** αναφέρονται σε επιλεγμένα σημεία του κειμένου, και αποσκοπούν στον έλεγχο της κατανόησης βασικών εννοιών. Εάν διαπιστώνετε έλλειψη κατανόησης, πρέπει να αφιερώνετε επιπλέον χρόνο πριν προχωρήσετε στα επόμενα σημεία του κειμένου.

Οι **τελικές ερωτήσεις κατανόησης** ελέγχουν την κατανόηση του συνολικού περιεχομένου του κεφαλαίου, και βοηθούν στην ανακεφαλαίωση. Σε περίπτωση που εντοπίζετε δυσκολίες, πρέπει να μελετήσετε ξανά το σχετικό περιεχόμενο και τα συνοδευτικά παραδείγματα.

Η **επίλυση προβλημάτων** είναι **απαραίτητο και αναντικατάστατο στοιχείο** της εκπαίδευσης στη Φυσική. Τόσο η Πειραματική, όσο και η Θεωρητική Φυσική έχουν σημαντική ποσοτική συνιστώσα. Μαζί με την ανάπτυξη ικανοτήτων διερεύνησης και διατύπωσης συμπερασμάτων, είναι απαραίτητη και η σταδιακή ωρίμανση σας στην ποσοτική επεξεργασία δεδομένων. Γι΄ αυτό το λόγο έχουμε συμπεριλάβει στο βιβλίο πολυάριθμα λυμένα παραδείγματα και ασκήσεις κλιμακούμενης δυσκολίας. Επίσης, είναι σημαντικό να γνωρίζετε ότι φροντίσαμε ώστε το κείμενο να βασίζεται στις ήδη αποκτηθείσες γνώσεις Μαθηματικών σας, χωρίς να τις υπερβαίνει.

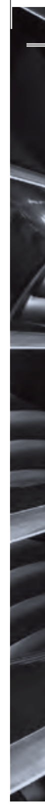
Για να επιτύχετε το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα, σας εισηγούμαστε όπως μελετάτε πρώτα το επιστημονικό περιεχόμενο μίας ενότητας, τα αντίστοιχα λυμένα παραδείγματα και τις ερωτήσεις ελέγχου κατανόησης εννοιών, πριν προχωρήσετε στο επόμενο μέρος. Στο τέλος, ασχοληθείτε με την επίλυση των άλυτων ασκήσεων. Οι άλυτες ασκήσεις βασίζονται στη θεωρία και τα λυμένα παραδείγματα. **Μην** προσπαθείτε να λύσετε τις ασκήσεις πριν συμβουλευτείτε το κείμενο, γιατί θα δυσκολευτείτε πολύ περισσότερο.

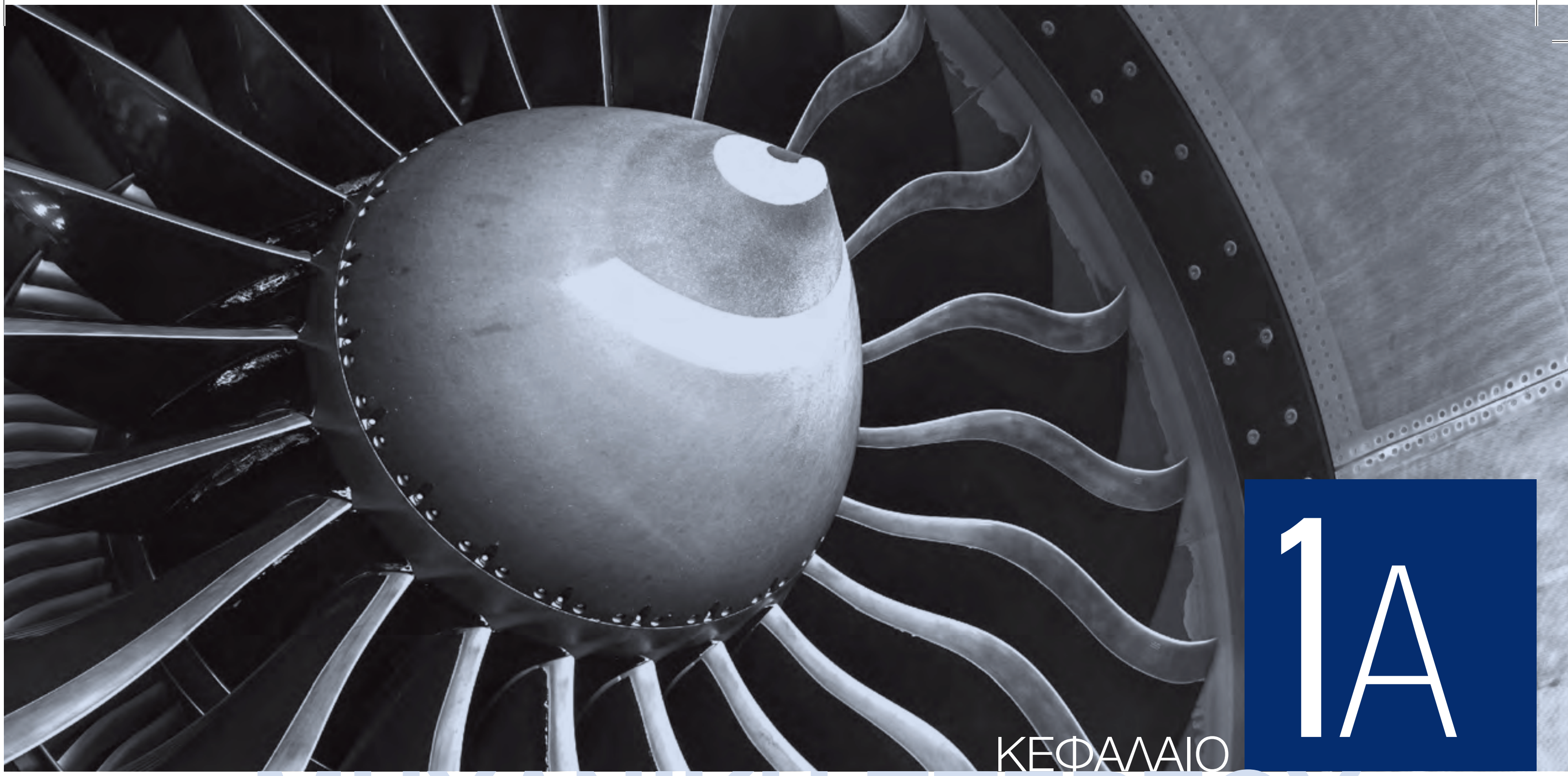
Το βιβλίο αποτελεί οδηγό μελέτης, αλλά το βασικό και αναντικατάστατο σημείο αναφοράς είναι ο/η εκπαιδευτικός σας. Πρέπει να δίνετε εξαιρετική προσοχή στις διαλέξεις, να συμμετέχετε ενεργά, και να συμβουλεύεστε εγκαίρως τον/την εκπαιδευτικό σας για σημεία στα οποία εντοπίζετε έλλειψη κατανόησης.

Ευχόμαστε να βρείτε το βιβλίο χρήσιμο, και σας ευχόμαστε **Καλή Νέα Σχολική Χρονιά**.

Η Συγγραφική Ομάδα

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ





ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1Α

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

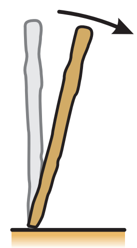
Ενότητες 1.1. - 1.10.

Στις Ενότητες 1.1. - 1.10. του Κεφαλαίου 1Α:

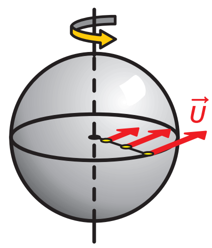
- **Διαφοροποιούμε** ανάμεσα στις έννοιες υλικού σημείου και σώματος.
- **Ορίζουμε** το στερεό σώμα.
- **Περιγράφουμε** τα διάφορα είδη κίνησης: μεταφορική, περιστροφική και σύνθετη.
- **Ορίζουμε** το φυσικό μέγεθος της **ροπής δύναμης** ως προς σημείο.
- **Ορίζουμε** το ζεύγος δυνάμεων και υπολογίζουμε τη ροπή του.
- **Διατυπώνουμε** τον Πρώτο Νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση.
- **Αναφέρουμε** τις συνθήκες ισορροπίας στερεού σώματος.
- **Εφαρμόζουμε** τις συνθήκες ισορροπίας σε παραδείγματα στατικής ισορροπίας.

Τα δύο προηγούμενα χρόνια μελετήσαμε προβλήματα **ισορροπίας** και **κίνησης** σωμάτων σε μία και δύο διαστάσεις, χρησιμοποιώντας τους Νόμους του Νεύτωνα και τις έννοιες του Έργου και της Ενέργειας. Ασχοληθήκαμε με περιπτώσεις, στις οποίες τα διάφορα σώματα μπορούσαν να αναπαρασταθούν ως **υλικά σημεία**.

Σε πολλά προβλήματα ισορροπίας και κίνησης, ***η προσέγγιση υλικού σημείου δεν είναι ορθή***, και οι **διαστάσεις** του σώματος πρέπει να ληφθούν υπόψη. Ας θεωρήσουμε τα επόμενα παραδείγματα:

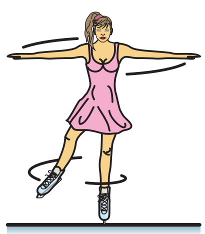


Μία ράβδος ανατρέπεται, όταν πάψει να βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση.



Τα σημεία μίας περιστρεφόμενης σφαίρας κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες.

Ένα τιμόνι αρχίζει να περιστρέφεται, όταν δρουν αντίθετες δυνάμεις σε αντιδιαμετρικά σημεία του.



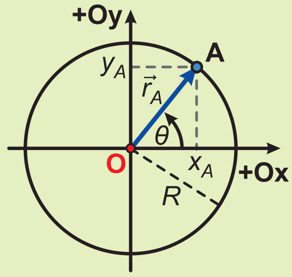
Μία παγοδρόμος ελαττώνει την ταχύτητα περιστροφής της, εκτείνοντας τα χέρια της.

Για να μελετήσουμε προβλήματα ισορροπίας και κίνησης όπως τα παραπάνω, πρέπει να χωρίσουμε τα σώματα σε στοιχειώδη τμήματα (υλικά σημεία) και να εφαρμόσουμε ξεχωριστά τους Νόμους του Νεύτωνα στα διάφορα τμήματα.

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με περιστροφικές κινήσεις, στις οποίες τα **στοιχειώδη τμήματα** ενός σώματος διαγράφουν κυκλικές τροχιές. Θα δείξουμε ότι η περιγραφή των περιστροφικών κινήσεων διευκολύνεται με την εισαγωγή νέων φυσικών μεγεθών, όπως η **Ροπή Δύναμης**, η **Στροφορμή** και η **Ροπή Αδράνειας**. Στο ακόλουθο Ένθετο ανακαλούμε βασικές έννοιες της κυκλικής κίνησης.

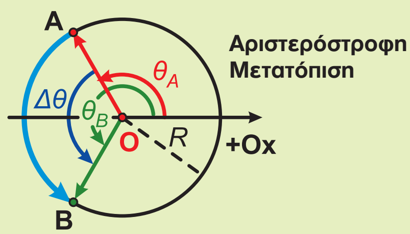
Ανάκληση Εννοιών από την Κυκλική Κίνηση

- Η **θέση** ενός σημείου **Α** στον κύκλο περιγράφεται από τη **γωνία θέσης** θ, που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_A$ του σημείου με έναν άξονα (μία συγκεκριμένη διάμετρο του κύκλου). Η γωνία θ μετράται σε ακτίνια (rad).

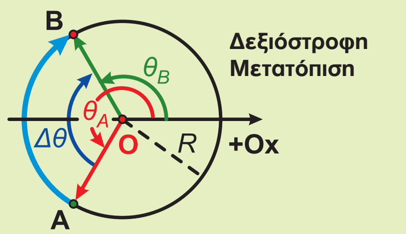


- Η κίνηση πάνω στον κύκλο **κατά τη φορά των δεικτών** του ρολογιού ονομάζεται **δεξιόστροφη**. Η κίνηση **αντίθετα από τη φορά των δεικτών** του ρολογιού ονομάζεται **αριστερόστροφη**.

- Η μεταβολή στη γωνία θέσης, κατά τη μετακίνηση από ένα αρχικό σημείο **Α** σε ένα τελικό σημείο **Β**, ονομάζεται **γωνιακή μετατόπιση**: $\Delta\theta = \theta_B - \theta_A$. Η γωνιακή μετατόπιση είναι **θετική** για **αριστερόστροφη**, και **αρνητική** για **δεξιόστροφη** κίνηση.

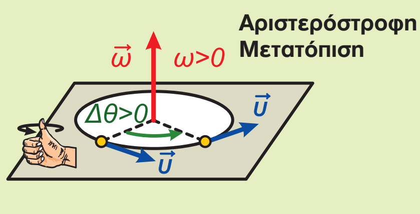


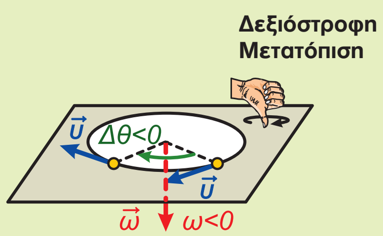
$\Delta\theta = \theta_B - \theta_A > 0$



$\Delta\theta = \theta_B - \theta_A < 0$

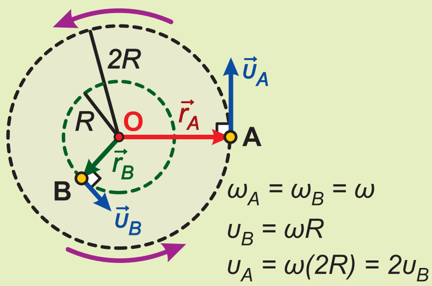
- Το διανυσματικό μέγεθος της **γωνιακής ταχύτητας** $\vec{\omega}$ εκφράζει τη γωνιακή μετατόπιση του σώματος στον κύκλο, ανά μονάδα χρόνου: $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ (για Δt πολύ μικρό), με μονάδα μέτρησης rad/s. Έχει διεύθυνση **κάθετη στο επίπεδο** της κυκλικής τροχιάς και φορά που καθορίζεται με τον κανόνα της **δεξιάς παλάμης**.





Κανόνας της **δεξιάς παλάμης**. Λυγίζουμε τα δάχτυλα, εκτός του αντίχειρα, κατά τη φορά της γωνιακής μετατόπισης. Ο τεντωμένος αντίχειρας υποδεικνύει τη ζητούμενη κατεύθυνση.

Όπως η γωνιακή μετατόπιση, έτσι και η γωνιακή ταχύτητα είναι **θετική** για **αριστερόστροφη**, και **αρνητική** για **δεξιόστροφη** κίνηση.



Τα σημεία **Α** και **Β** κινούνται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα $ω$. Η γραμμική ταχύτητα κάθε σημείου είναι εφαπτομενική στην τροχιά. Επειδή $R_A = 2R_B = 2R$, το **Α** κινείται με διπλάσια κατά μέτρο γραμμική ταχύτητα από το **Β**.

- Η **γραμμική ταχύτητα** $\vec{υ}$ εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της θέσης του σώματος. Η γραμμική ταχύτητα ενός σώματος σε κυκλική τροχιά είναι εφαπτομενική στην τροχιά, και έχει μέτρο $υ = |\vec{ω}|R$.

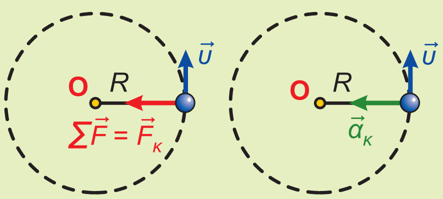
  Δύο σώματα, που κινούνται με την **ίδια** γωνιακή ταχύτητα σε τροχιές **διαφορετικών** ακτίνων, έχουν **διαφορετικές** κατά μέτρο γραμμικές ταχύτητες.

- Η κυκλική κίνηση ονομάζεται **ομαλή**, όταν τα μέτρα της γραμμικής και της γωνιακής ταχύτητας του σώματος **δεν** μεταβάλλονται με τον χρόνο. Ένα σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, διαγράφει **ίσα τόξα κύκλου σε ίσα χρονικά διαστήματα**.

- Η **συχνότητα** f της ομαλής κυκλικής κίνησης είναι ο αριθμός κύκλων, που διαγράφει το σώμα ***στη μονάδα του χρόνου***:

$$f = \frac{\text{Αριθμός Κύκλων}}{\text{Αντίστοιχο Χρονικό Διάστημα}}$$

  Η συχνότητα εκφράζεται σε Hertz ($1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$), ή σε **στροφές-ανά-λεπτό** (rotations-per-minute ή **rpm**).



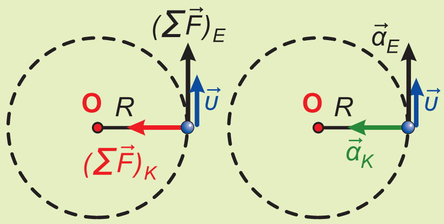
- Για να εκτελεί **ομαλή κυκλική κίνηση** ένα σώμα, πρέπει να ασκείται σε αυτό μία συνισταμένη **κεντρομόλος δύναμη** $\vec{F}_K$, με μέτρο $|\vec{F}_K| = m\dfrac{υ^2}{R} = mω^2R$. Η δύναμη $\vec{F}_K$ έχει διεύθυνση κατά μήκος της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς, και φορά προς το κέντρο του κύκλου.

- Ένα σώμα, που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, κινείται με **κεντρομόλο επιτάχυνση** $\vec{α}_K$. Το διάνυσμα $\vec{α}_K$ είναι ομόρροπο με την κεντρομόλο δύναμη και έχει μέτρο:

$$|\vec{α}_K| = \frac{|\vec{F}_K|}{m} = ω^2R = \frac{υ^2}{R}$$

- Όταν το σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά, αλλά τα μέτρα της γραμμικής και της γωνιακής ταχύτητας του σώματος **μεταβάλλονται με τον χρόνο**, η κυκλική κίνηση ονομάζεται **μεταβαλλόμενη**.

- Για να εκτελεί μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση ένα σώμα, πρέπει να δρα σε αυτό μία συνισταμένη δύναμη κατά την **εφαπτομενική (επιτρόχιο)** διεύθυνση:



$$\left(\sum\vec{F}(t)\right)_{E}\neq\vec{0}\Leftrightarrow\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}\neq 0$$

Η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του σώματος έχει μη μηδενική κεντρομόλο $\vec{\alpha}_K$ **και** επιτρόχιο συνιστώσα $\vec{\alpha}_E$, που εξαρτώνται γενικά από τον χρόνο. Τα μέτρα των δύο συνιστωσών είναι

$$\left|\vec{\alpha}_K(t)\right|=\frac{\upsilon^2}{R}=\omega^2 R \quad \text{και} \quad \left|\vec{\alpha}_E(t)\right|=\left|\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}\right|$$

- Στην μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση, μεταβάλλεται και η γωνιακή ταχύτητα του σώματος: $\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}\neq 0\Rightarrow\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\neq 0$. Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας, ονομάζεται **γωνιακή επιτάχυνση** $\vec{\alpha}_\gamma(t)$:

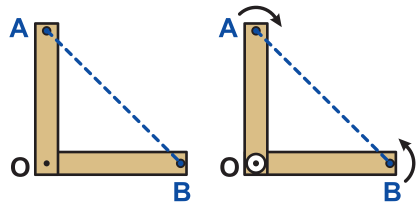
$$\vec{\alpha}_\gamma(t)=\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t},\ \Delta t \text{ πολύ μικρό χρονικό διάστημα γύρω από τη στιγμή } t.$$

Η γωνιακή επιτάχυνση εκφράζεται σε rad/s^2.

1.1. Η Έννοια του Στερεού Σώματος

Θα ονομάζουμε **στερεό** (άκαμπτο[1]) ένα σώμα, εάν οι αποστάσεις μεταξύ οποιωνδήποτε στοιχειωδών τμημάτων του σώματος είναι **αμετάβλητες**.

[1] Με τον όρο «στερεό σώμα» αποδίδεται στα ελληνικά τόσο ένα σώμα σε στερεά κατάσταση (δηλαδή όχι υγρό ή αέριο), όσο και ένα άκαμπτο σώμα. Ο ορισμός «στερεό σώμα» της Ενότητας **1.1** αναφέρεται σε σώματα, που είναι σε στερεά κατάσταση και ταυτόχρονα είναι άκαμπτα. Στα αγγλικά χρησιμοποιείται ο όρος «solid» για σώμα σε στερεά κατάσταση, και «rigid body» για το άκαμπτο σώμα.



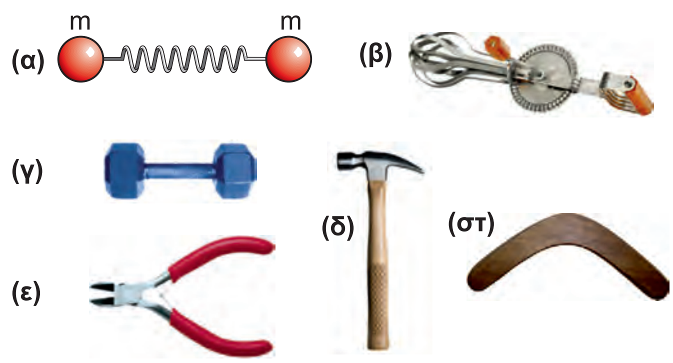
Το σώμα του διπλανού σχήματος αποτελείται από δύο σανίδες, που ενώνονται στο σημείο **O**. Στο αριστερό σχήμα, οι δύο σανίδες είναι καρφωμένες μεταξύ τους στο σημείο **O**, και η απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων **A** και **B** του σώματος παραμένει σταθερή. Το σώμα είναι **στερεό.** Στο δεξί σχήμα, οι σανίδες μπορούν να περιστρέφονται γύρω από την άρθρωση **O**, και η απόσταση **AB** μεταβάλλεται. Το σώμα **δεν** είναι στερεό.

Παραδείγματα **στερεών** σωμάτων είναι ένα άκαμπτο ξύλινο ραβδί, ένας συμπαγής τροχός, μία ξύλινη σφαίρα ή ένας σιδερένιος κύλινδρος. Παραδείγματα **μη στερεών** σωμάτων είναι μία ελαστική ταινία, ένα σχοινί, ένα ελατήριο, ένας άνθρωπος.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

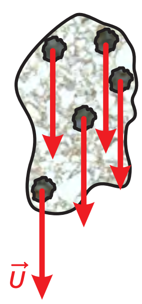
1.1.1. Ποια από τα σώματα των επόμενων σχημάτων είναι στερεά; Να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας.

(α) Δύο σφαίρες συνδεδεμένες με ελατήριο, **(β)** αυγοδάρτης, **(γ)** βαράκια, **(δ)** σφυρί, **(ε)** κόφτης, **(στ)** μπούμερανγκ.



1.1.2. Να εξηγήσετε κατά πόσο ένας άνθρωπος, που περπατά με σταθερή ταχύτητα σε ευθεία γραμμή, αποτελεί στερεό σώμα.

1.2. Μεταφορική και Περιστροφική Κίνηση



Μεταφορική Κίνηση

Ένα σώμα εκτελεί **μεταφορική κίνηση** όταν όλα τα στοιχειώδη μέρη του κινούνται με **ίσες** ταχύτητες, κατά μέτρο και κατεύθυνση.

Ένας βράχος, που αφήνεται από ηρεμία και πέφτει ελεύθερα, εκτελεί μεταφορική κίνηση.

Σημείωση

Στη Β΄ Λυκείου ορίσαμε ως **Κέντρο Μάζας (ΚΜ)** ενός μη σημειακού σώματος (ή συστήματος σωμάτων), το σημείο με διάνυσμα θέσης

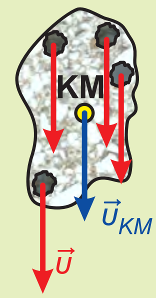
$$\vec{r}_{\mathrm{KM}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + \cdots + m_{\mathrm{N}}\vec{r}_{\mathrm{N}}}{m_1 + \cdots + m_{\mathrm{N}}}$$

Η ταχύτητα του **ΚΜ** υπολογίζεται από τη σχέση

$$\vec{v}_{\mathrm{KM}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + \cdots + m_{\mathrm{N}}\vec{v}_{\mathrm{N}}}{m_1 + \cdots + m_{\mathrm{N}}}$$

Όταν ένα σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση, το **ΚΜ** του σώματος έχει την ίδια ταχύτητα με όλα τα στοιχειώδη μέρη του:

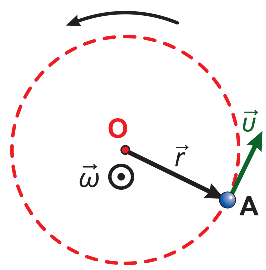
$$\vec{v}_{\mathrm{KM}} = \frac{m_1\vec{v} + \cdots + m_{\mathrm{N}}\vec{v}}{m_1 + \cdots + m_{\mathrm{N}}} = \vec{v}$$



Περιστροφική Κίνηση Υλικού Σημείου

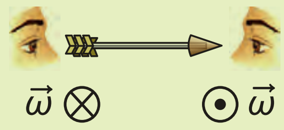
Ένα **υλικό σημείο** εκτελεί περιστροφική κίνηση ως προς κάποιο σημείο **Ο** του χώρου, όταν το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου $\vec{r}$ (με αρχή το **Ο**) αλλάζει διεύθυνση.

Παράδειγμα περιστροφικής κίνησης είναι η κυκλική κίνηση του σωματιδίου **Α**, με κέντρο το σημείο **Ο.** Το επίπεδο της τροχιάς ταυτίζεται με τη σελίδα. Η **κάθετη ευθεία** στο επίπεδο της τροχιάς, που διέρχεται από το κέντρο Ο, ορίζει έναν **άξονα περιστροφής**. Η γωνιακή ταχύτητα του σωματιδίου είναι παράλληλη με τον άξονα περιστροφής και έχει φορά *προς τον αναγνώστη*. Η κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας απεικονίζεται στο πιο πάνω σχήμα με το σύμβολο ⊙.

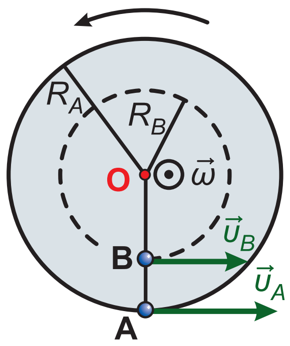


Σημείωση

Θα απεικονίζουμε ένα διάνυσμα **κάθετο** στο επίπεδο της σελίδας με το σύμβολο ⊙, εάν έχει φορά *προς τον αναγνώστη*, και με το σύμβολο ⊗, εάν έχει φορά *προς τη σελίδα*.



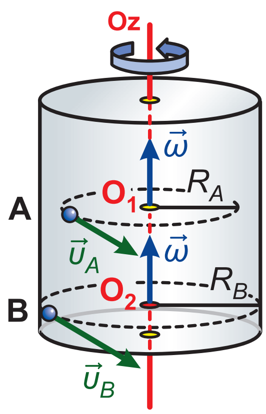
Περιστροφική Κίνηση Στερεού Σώματος



Στο επόμενο σχήμα, το κέντρο **Ο** του **επίπεδου** δίσκου παραμένει ακίνητο, και τα υπόλοιπα σημεία του δίσκου διαγράφουν κυκλικές τροχιές με κοινό κέντρο το σημείο **Ο**. Η **κάθετη ευθεία** στο επίπεδο των τροχιών, που διέρχεται από το κέντρο **Ο**, ορίζει έναν **άξονα περιστροφής**, ως προς τον οποίο περιστρέφεται ο δίσκος.

Εάν ο δίσκος είναι στερεό σώμα, όλα τα σημεία του έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Η γραμμική ταχύτητα των σημείων του δίσκου μεταβάλλεται όμως, ανάλογα με την απόστασή τους από το κέντρο του δίσκου. Για παράδειγμα, τα σημεία **Α** και **Β** διαγράφουν τροχιές ακτίνων R_A και R_B και έχουν γραμμικές ταχύτητες με μέτρα $\upsilon_A = \omega R_A$ και $\upsilon_B = \omega R_B$.

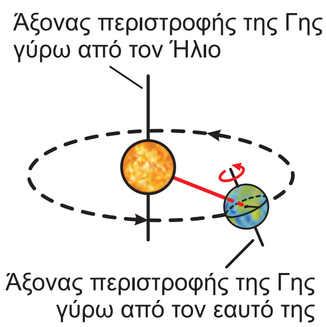
Στο παράδειγμα του επίπεδου δίσκου, οι τροχιές όλων των σημείων ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και έχουν το ίδιο κέντρο **Ο**. Εάν το περιστρεφόμενο σώμα είναι τρισδιάστατο, τα σημεία του διαγράφουν τροχιές γύρω από **διαφορετικά** κέντρα.



Το διπλανό σχήμα απεικονίζει έναν περιστρεφόμενο κύλινδρο. Τα σημεία **Α** και **Β** διαγράφουν τροχιές με κέντρα τα σημεία **O_1** και **O_2**. Τα κέντρα των τροχιών βρίσκονται πάνω στην ευθεία **Oz**, η οποία τέμνει κάθετα τα επίπεδα των τροχιών. Η ευθεία **Oz** ορίζει έναν **άξονα περιστροφής**, γύρω από τον οποίο περιστρέφεται ο κύλινδρος.

Τα σημεία του κυλίνδρου έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας κάθε σημείου είναι ανάλογο με την απόστασή του από τον άξονα περιστροφής. Τα σημεία πάνω στον άξονα περιστροφής παραμένουν ακίνητα.

Σύνθετη Κίνηση



Ένα σώμα εκτελεί **σύνθετη** κίνηση όταν το σώμα περιστρέφεται ως προς έναν άξονα και ο άξονας αυτός μετακινείται στο χώρο, ή όταν το σώμα περιστρέφεται και μετακινείται ταυτόχρονα κατά μήκος του άξονα περιστροφής του[2].

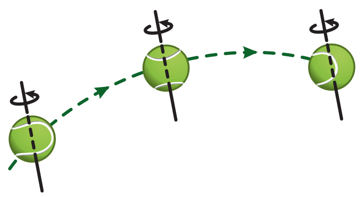
---

[2] Αποδεικνύεται ότι οποιαδήποτε κίνηση ενός **στερεού** σώματος μπορεί να αναλυθεί γενικά σε ένα **άθροισμα** δύο κινήσεων: (i) μίας **μεταφορικής** κίνησης του ΚΜ του σώματος, και (ii) μίας **περιστροφικής** κίνησης του σώματος ως προς έναν άξονα, που διέρχεται από το ΚΜ του.

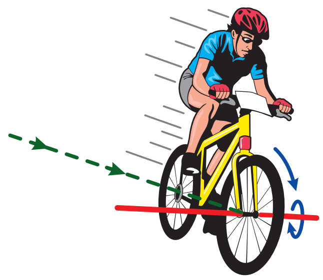
Η Γη εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από τον Βόρειο και Νότιο γεωγραφικό της πόλο. Τα σημεία της Γης στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τον Βόρειο και Νότιο πόλο της παραμένουν ακίνητα. Τα υπόλοιπα σημεία διαγράφουν κυκλικές τροχιές κάθετες στον άξονα περιστροφής, με κέντρα πάνω στον άξονα.

Ταυτόχρονα, ο άξονας περιστροφής της Γης περιφέρεται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον Ήλιο.

Μία μπάλα του τένις περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα, που διέρχεται από το κέντρο μάζας της. Ταυτόχρονα, το κέντρο μάζας της μπάλας διαγράφει παραβολική τροχιά.



Ο τροχός ενός κινούμενου ποδηλάτου περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Ταυτόχρονα, το κέντρο μάζας του τροχού μετακινείται στον χώρο.



Μια σφαίρα που εξέρχεται από την ευθύγραμμη κάννη ενός όπλου περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα παράλληλο με την κάννη. Ταυτόχρονα, η σφαίρα εκτελεί μεταφορική κίνηση κατά μήκος του άξονα.

Σημείωση
Σε αυτό το Κεφάλαιο δεν θα ασχοληθούμε με σύνθετες κινήσεις. Θα μελετήσουμε μόνο **περιστροφικές** κινήσεις **στερεών** σωμάτων ως προς έναν **σταθερό** άξονα περιστροφής.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

1.2.1. Να κατατάξετε τα επόμενα παραδείγματα κινήσεων σε **μεταφορικές** και **περιστροφικές**. Στην περίπτωση περιστροφικών κινήσεων, να καθορίσετε το σημείο ή τον άξονα περιστροφής.

(α) Ένας κύβος, που ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο.
(β) Μία χιονοσανίδα (snowboard), που κατεβαίνει σε μία κυκλική χιονοδρομική πίστα.
(γ) Μία πόρτα δωματίου, που ανοίγει.
(δ) Ένα κατακόρυφο εκκρεμές, που ταλαντώνεται.
(ε) Μία κινούμενη τραμπάλα.
(στ) Μία χάντρα, που είναι περασμένη σε ένα κυκλικό σύρμα και γλιστρά στο σύρμα.
(ζ) Ένα σώμα, που ταλαντώνεται στο άκρο ενός οριζόντιου ελατηρίου.
(η) Τα κινούμενα φτερά ενός ανεμόμυλου.
(θ) Ένα ψαλίδι, που ανοιγοκλείνει.

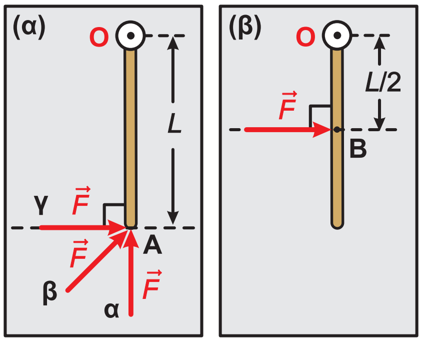
1.2.2. Να αναλύσετε τις πιο κάτω σύνθετες κινήσεις σε μεταφορικές και περιστροφικές.

(α) Η κίνηση του περιστρεφόμενου έλικα ενός ιπτάμενου ελικόπτερου.

(β) Η κίνηση του κυλίνδρου ενός κινούμενου οδοστρωτήρα.

(γ) Η κίνηση μίας μπάλας ποδοσφαίρου, την οποία ρίχνει ο τερματοφύλακας με φάλτσο.

1.3. Ροπή Δύναμης ως προς Σημείο



Εικόνα 1-1
(α) Μία δύναμη σταθερού μέτρου δεν περιστρέφει το ραβδί όταν δρα κατά την παράλληλη διεύθυνση **α**, και το περιστρέφει ευκολότερα όταν δρα κατά την κάθετη διεύθυνση **γ**.
(β) Η ίδια δύναμη περιστρέφει πιο δύσκολα το ραβδί, όταν δρα σε μικρότερη απόσταση από το σημείο περιστροφής **O**.

Η **Εικόνα 1-1** απεικονίζει σε κάτοψη ένα άκαμπτο ραβδί μήκους L, το οποίο εφάπτεται σε ένα λείο οριζόντιο τραπέζι (παράλληλο με το επίπεδο της σελίδας). Το ραβδί μπορεί να περιστρέφεται πάνω στο τραπέζι γύρω από το άκρο του **O**. O άξονας περιστροφής διέρχεται από το **O** και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας.

Αρχικά το ραβδί είναι ακίνητο.

I. Στο σχήμα **(α)** εφαρμόζουμε στην άκρη **A** του ραβδιού μία δύναμη σταθερού μέτρου $|\vec{F}|$ σε διάφορες διευθύνσεις, για το ίδιο μικρό χρονικό διάστημα Δt:

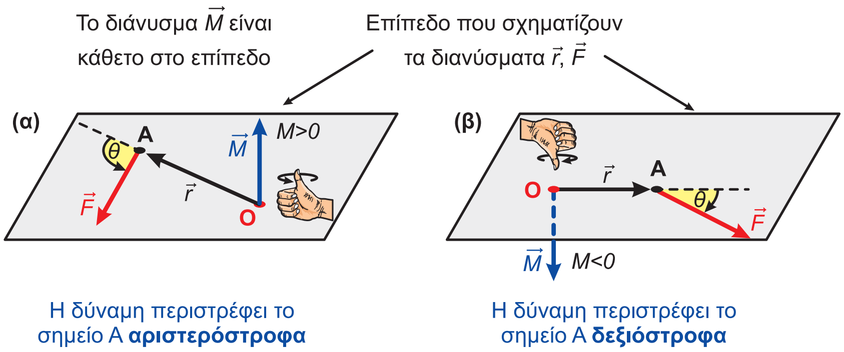
- Εάν η δύναμη δρα **παράλληλα** στο ραβδί (διεύθυνση **α**), το ραβδί **παραμένει ακίνητο**.
- Εάν η δύναμη **δεν** είναι παράλληλη στο ραβδί (διεύθυνση **β**), αρχίζει να το περιστρέφει.
- Εάν η δύναμη δρα **κάθετα** στο ραβδί (διεύθυνση **γ**), προκαλεί τη μεγαλύτερη μεταβολή στη γωνιακή ταχύτητα του ραβδιού.

Συμπέρασμα
Το αποτέλεσμα της δύναμης εξαρτάται από τη **γωνία** ανάμεσα στη διεύθυνση της δύναμης και το ραβδί.

II. Στο σχήμα **(β)**, μία δύναμη μέτρου $|\vec{F}|$ δρα κάθετα στο ραβδί για το ίδιο χρονικό διάστημα Δt, σε απόσταση $L/2$ από το σημείο περιστροφής **O**. Η δύναμη προσδίδει **μικρότερη** γωνιακή ταχύτητα στο ραβδί, σε σύγκριση με την δύναμη της Εικόνας **1-1(α)** (διεύθυνση **γ**).

Συμπέρασμα
Το αποτέλεσμα της δύναμης εξαρτάται από την **απόσταση** ανάμεσα στο σημείο εφαρμογής της δύναμης και στο σημείο περιστροφής.

Για να περιγράψουμε ποσοτικά αυτές τις παρατηρήσεις, ορίζουμε ένα νέο φυσικό μέγεθος, τη **ροπή δύναμης ως προς σημείο**.



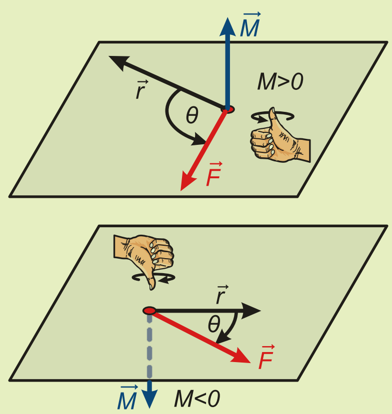
Εικόνα 1-2
Ροπή δύναμης ως προς σημείο **Ο** του χώρου.

Ροπή Δύναμης ως προς Σημείο Ο

Η Εικόνα **1-2(α)** απεικονίζει ένα υλικό σημείο **Α**, στο οποίο ασκείται μία δύναμη $\vec{F}$. **Ορίζουμε** ως ροπή $\vec{M}$ της δύναμης $\vec{F}$, ***ως προς το σημείο*** **Ο**, το εξής **διανυσματικό** μέγεθος:

- Η **διεύθυνση** της ροπής είναι κάθετη στο **επίπεδο** που ορίζουν το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ του σημείου **Α** ως προς το **Ο**, και το διάνυσμα $\vec{F}$.

- Η **φορά** της ροπής προσδιορίζεται με τον κανόνα της **δεξιάς παλάμης**, ως ακολούθως:
  (i) Σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{r}$ και $\vec{F}$ με κοινή αρχή.
  (ii) Σχεδιάζουμε ένα τόξο από το $\vec{r}$ στο $\vec{F}$ (υπάρχουν δύο τέτοια τόξα - διαλέγουμε το μικρότερο).
  (iii) Ακουμπάμε τη **δεξιά** μας παλάμη πάνω στο επίπεδο. Λυγίζουμε τα δάκτυλα κατά τη φορά του τόξου, και ο τεντωμένος αντίχειρας δείχνει τη φορά της ροπής.



- Το **μέτρο** της ροπής ισούται με το γινόμενο

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right|\eta\mu\theta$$

όπου $0 \le \theta \le 180^o$ είναι η γωνία μεταξύ των $\vec{r}$ και $\vec{F}$.

Στο διεθνές σύστημα SI, η ροπή εκφράζεται σε μονάδες N m.

- Θεωρούμε ότι η ροπή έχει **θετική αλγεβρική τιμή** $M > 0$, όταν η δύναμη $\vec{F}$ περιστρέφει το σημείο **Α** **αριστερόστροφα** (αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού, όπως στο σχήμα **1-2(α)**).

- Αντίστοιχα, θεωρούμε ότι η ροπή έχει **αρνητική αλγεβρική τιμή** $M < 0$, όταν η δύναμη $\vec{F}$ περιστρέφει το σημείο **Α** **δεξιόστροφα** (με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, όπως στο σχήμα **1-2(β)**).

Προσοχή

Η Ροπή, το Έργο και οι διάφορες μορφές Ενέργειας έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης, N m. Όμως:

- Το Έργο και η Ενέργεια είναι **μονόμετρα** μεγέθη, ενώ η Ροπή είναι **διανυσματικό** μέγεθος.
- Το Έργο και η Ενέργεια εκφράζονται σε Joule (1 J = 1 N m). Η Ροπή εκφράζεται πάντοτε σε N m και ποτέ σε Joule.

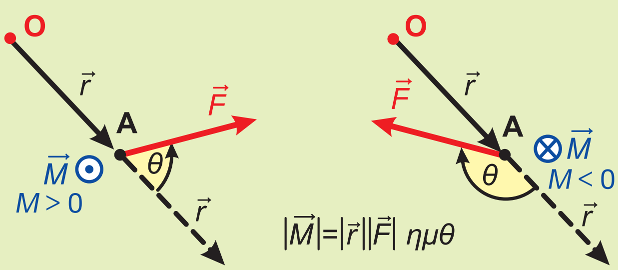
Υπολογισμός της Ροπής

Υπολογίζουμε την αλγεβρική τιμή της ροπής με μία από τις ακόλουθες τρεις **ισοδύναμες** μεθόδους:

Μέθοδοι Υπολογισμού της Ροπής Δύναμης ως προς Σημείο Ο

1η Μέθοδος

- Σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{r}$ και $\vec{F}$ με **κοινή αρχή** και προσδιορίζουμε τη γωνία θ ανάμεσα στις διευθύνσεις τους. Υπάρχουν δύο γωνίες - διαλέγουμε τη μικρότερη ($0 \le \theta \le 180^o$).

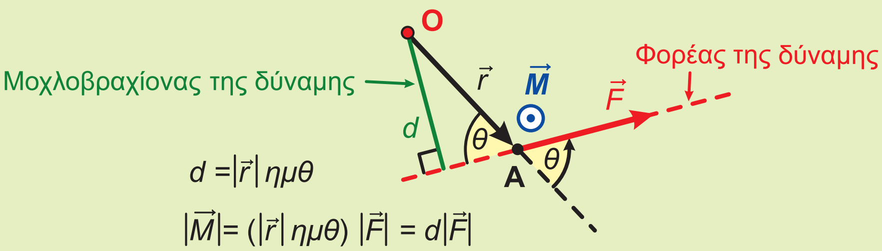


- Υπολογίζουμε το μέτρο της ροπής από τη σχέση $|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}|\eta\mu\theta$.

- Η διεύθυνση της ροπής είναι κάθετη στο επίπεδο των $\vec{r}$ και $\vec{F}$. Εάν η δύναμη $\vec{F}$ στρέφει το σημείο εφαρμογής της **Α** αριστερόστροφα ως προς το **Ο**, η ροπή έχει θετική αλγεβρική τιμή ($M > 0$). Στην αντίθετη περίπτωση, έχει αρνητική αλγεβρική τιμή.

2η Μέθοδος

- Προσδιορίζουμε την απόσταση d του σημείου **O** από τον φορέα της δύναμης. Η απόσταση d ονομάζεται **μοχλοβραχίονας** της δύναμης.



$d = |\vec{r}|\,\eta\mu\theta$

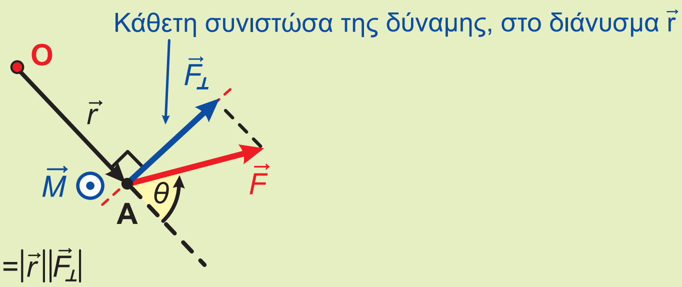
$|\vec{M}| = (|\vec{r}|\,\eta\mu\theta)\,|\vec{F}| = d|\vec{F}|$

- Υπολογίζουμε το μέτρο της ροπής από τη σχέση $|\vec{M}| = d|\vec{F}|$.

- Προσδιορίζουμε το πρόσημο της αλγεβρικής τιμής της ροπής όπως στην 1η μέθοδο.

3η Μέθοδος

- Προσδιορίζουμε το μέτρο $|\vec{F}_{\perp}|$ της κάθετης συνιστώσας της δύναμης στο διάνυσμα $\vec{r}$.



$|\vec{F}_{\perp}| = |\vec{F}|\,\eta\mu\theta$

$|\vec{M}| = |\vec{r}|\,(|\vec{F}|\eta\mu\theta) = |\vec{r}||\vec{F}_{\perp}|$

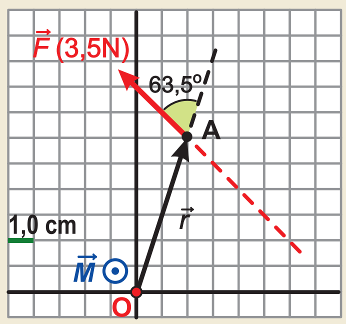
- Υπολογίζουμε το μέτρο της ροπής από τη σχέση $|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}_{\perp}|$.

- Προσδιορίζουμε το πρόσημο της αλγεβρικής τιμής της ροπής όπως στην 1η μέθοδο.

Συνοψίζουμε: $|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}|\eta\mu\theta = d|\vec{F}| = |\vec{r}||\vec{F}_{\perp}|$.

Παράδειγμα 1

Η δύναμη $\vec{F}$ του επόμενου σχήματος εφαρμόζεται στο σημείο **A**. **Θα υπολογίσουμε τη ροπή της δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο O.**



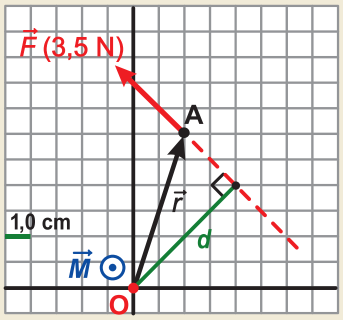
1η Μέθοδος

Από το σχήμα προκύπτει ότι το μέτρο του διανύσματος θέσης είναι:

$$|\vec{r}| = \sqrt{(2{,}0\text{ cm})^2 + (6{,}0\text{ cm})^2} = 6{,}3\text{ cm}$$

Η δύναμη $\vec{F}$ τείνει να στρέψει το σημείο εφαρμογής της **Α αριστερόστροφα** ως προς το **Ο.** Άρα:

$$M = +|\vec{r}||\vec{F}|\eta\mu 63{,}5^o = +(6{,}3\text{ cm}) \times (3{,}5\text{ N}) \times 0{,}89 = +0{,}20\text{ Nm}$$



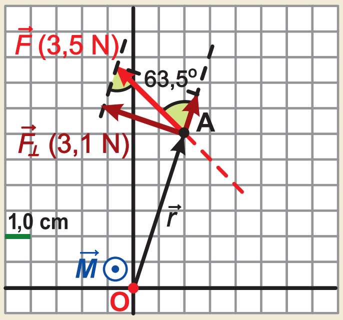
2η Μέθοδος

Φέρουμε την κάθετη ευθεία από το σημείο **Ο** προς τον φορέα της $\vec{F}$. Από το σχήμα προκύπτει ότι η κάθετη απόσταση d ισούται με:

$$d = \sqrt{(4{,}0\text{ cm})^2 + (4{,}0\text{ cm})^2} = 5{,}6\text{ cm}$$

Άρα:

$$M = +d|\vec{F}| = +(5{,}6\text{ cm}) \times (3{,}5\text{ N}) = +0{,}20\text{ Nm}$$



3η Μέθοδος

Αναλύουμε τη δύναμη $\vec{F}$ σε συνιστώσες κάθετα και παράλληλα στο διάνυσμα θέσης $\vec{r}$. Η κάθετη συνιστώσα $\vec{F}_\perp$ έχει μέτρο:

$$|\vec{F}_\perp| = |\vec{F}|\eta\mu 63{,}5^o = (3{,}5\text{ N}) \times 0{,}89 = +3{,}1\text{ N}$$

(Αυτό προκύπτει και **γραφικά**, από το μήκος του διανύσματος $\vec{F}_\perp$). Άρα:

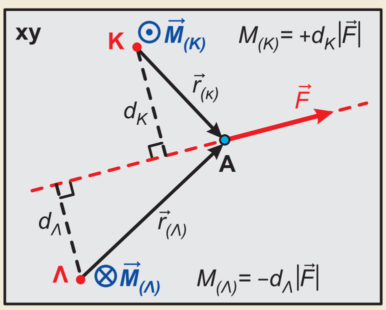
$$M = +|\vec{r}||\vec{F}_\perp| = +(6{,}3\text{ cm}) \times (3{,}1\text{ N}) = +0{,}20\text{ Nm}$$

Παρατηρήσεις

1. Η ροπή της ίδιας δύναμης είναι γενικά διαφορετική ως προς διαφορετικά σημεία του χώρου.

Παράδειγμα 2

Στο σημείο **Α** του επιπέδου **xy** δρα η δύναμη $\vec{F}$. Θεωρούμε δύο σημεία **Κ** και **Λ** του επιπέδου.

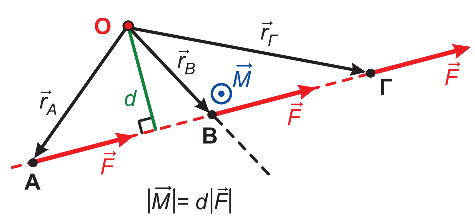


Η δύναμη $\vec{F}$ στρέφει **αριστερόστροφα** το σημείο εφαρμογής της **Α** ως προς το **Κ.** Η απόσταση του φορέα της $\vec{F}$ από το **Κ** ισούται με d_K. Άρα, η ροπή της $\vec{F}$ ως προς το **Κ** έχει αλγεβρική τιμή $M_{(K)} = +d_K|\vec{F}|$, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο **xy** και φορά προς τον αναγνώστη.

Η ίδια δύναμη $\vec{F}$ στρέφει **δεξιόστροφα** το σημείο εφαρμογής της ως προς το σημείο **Λ.** Η απόσταση του φορέα της $\vec{F}$ από το **Λ** ισούται με d_Λ. Άρα, η ροπή της $\vec{F}$ ως προς το **Λ** έχει αλγεβρική τιμή $M_{(\Lambda)} = -d_\Lambda|\vec{F}|$, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο xy, και φορά προς τη σελίδα.

2. Όταν το σημείο εφαρμογής μίας δύναμης μετακινείται πάνω στον φορέα της, η ροπή της δύναμης **παραμένει σταθερή**.

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται μία δύναμη $\vec{F}$, η οποία εφαρμόζεται στο σημείο **Α**. Ο μοχλοβραχίονας της δύναμης ως προς το σημείο **Ο** ισούται με d. Εάν η ίδια δύναμη $\vec{F}$ εφαρμοσθεί σε διαφορετικά σημεία **Β** ή **Γ** ***του φορέα της***, ο μοχλοβραχίονας d δεν μεταβάλλεται.



Η ροπή της δύναμης ως προς το **Ο** παραμένει σταθερή, με αλγεβρική τιμή $M = +d|\vec{F}|$.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

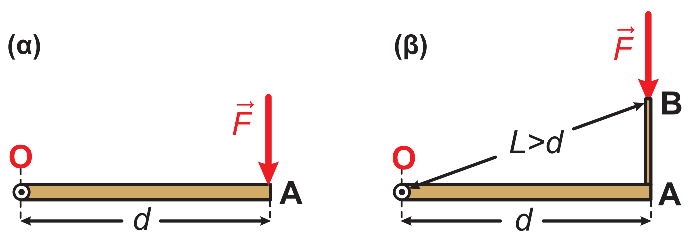
1.3.1. Με ποιον(ους) από τους ακόλουθους τρόπους μπορούμε να αυξήσουμε το μέτρο της ροπής μίας δύναμης ως προς κάποιο σημείο **Ο**;

Α. Εάν αυξήσουμε τον μοχλοβραχίονα της δύναμης.

Β. Εάν αυξήσουμε το μέτρο της δύναμης.

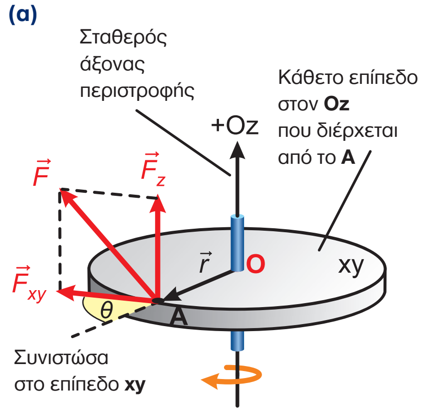
Γ. Εάν προσανατολίσουμε τη δύναμη έτσι ώστε ο φορέας της να διέρχεται από το **Ο**.

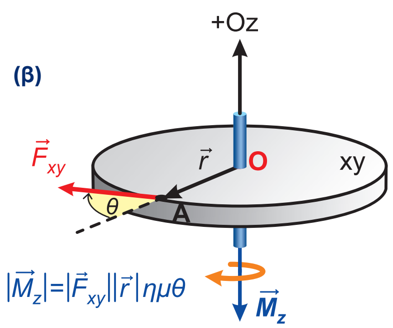
1.3.2. Στο σχήμα **(α)**, ένας μαθητής προσπαθεί να περιστρέψει μία πόρτα γύρω από το σημείο **Ο**, ασκώντας κάθετα σε αυτήν μία δύναμη $\vec{F}$ στο σημείο **Α**.
Ένας συμμαθητής του τοποθετεί κάθετα στην πόρτα το στήριγμα **ΑΒ**, και ασκεί την ίδια δύναμη $\vec{F}$ στο σημείο **Β** (σχήμα **(β)**). Ποιος από τους δύο ανοίγει ευκολότερα την πόρτα;



1.4. Υπολογισμός της Ροπής Δύναμης κατά μήκος του Άξονα Περιστροφής ενός Σώματος

Εικόνα 1-3
Ο κύλινδρος περιστρέφεται ως προς **σταθερό** άξονα περιστροφής **Oz.** **(α)** Η συνιστώσα $\vec{F}_z$ (παράλληλη στον **Oz**) **δεν** στρέφει τον κύλινδρο. Μόνο η συνιστώσα $\vec{F}_{xy}$, (πάνω στο επίπεδο **xy**, κάθετο στον **Oz**), στρέφει τον κύλινδρο. **(β)** Η ροπή της $\vec{F}$ κατά μήκος του **Oz** ισούται με τη ροπή της $\vec{F}_{xy}$ ως προς το σημείο O.





Κατά την περιστροφή ενός σώματος γύρω από **ακλόνητο άξονα** υπό την επίδραση δυνάμεων, αγνοούμε τις δυνάμεις που είναι **παράλληλες** στον άξονα.

Η **Εικόνα 1-3(α)** απεικονίζει έναν στερεό κύλινδρο, ο οποίος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον **σταθερό** κατακόρυφο άξονα περιστροφής **Oz**. Στο σημείο **A** του κυλίνδρου δρα η δύναμη $\vec{F}$.

1. Η συνιστώσα $\vec{F}_z$ είναι παράλληλη με τον άξονα **Oz** και τείνει να τον περιστρέψει. Επειδή ο **Oz** είναι ***ακλόνητος***, την ***αγνοούμε.***

2. Η συνιστώσα $\vec{F}_{xy}$ ανήκει στο επίπεδο **xy**, το οποίο τέμνει κάθετα τον άξονα **Oz** στο σημείο **O**. Η $\vec{F}_{xy}$ τείνει να περιστρέψει τον κύλινδρο ως προς τον άξονα **Oz.**

3. Η ροπή της δύναμης $\vec{F}$ κατά μήκος του άξονα **Oz** ισούται με τη **ροπή της $\vec{F}_{xy}$ ως προς το σημείο O** (**σχήμα (β)**):

$$M_z = -\left|\vec{F}_{xy}\right|\left|\vec{r}\right| \eta\mu\theta$$

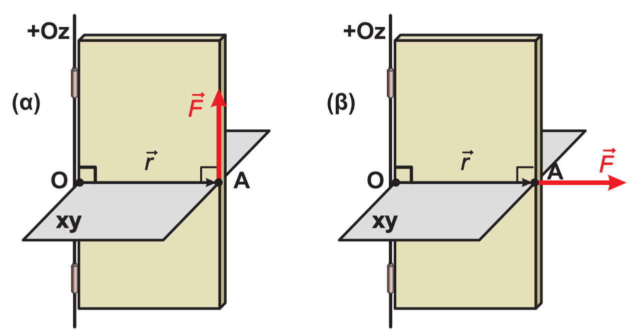
όπου $\left|\vec{r}\right|$ είναι η απόσταση του σημείου **A** από τον **Oz**. Το πρόσημο της αλγεβρικής τιμής M_z υπολογίζεται από τον κανόνα της δεξιάς παλάμης.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

1.4.1. Στα σχήματα **(α)** και **(β)**, η πόρτα μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα **Oz.**

Στο σημείο **A** της πόρτας εφαρμόζεται η δύναμη $\vec{F}$.

Ποιά είναι η συνιστώσα $\vec{M}_z$ της ροπής της $\vec{F}$ κατά μήκος του **Oz**; Η δύναμη $\vec{F}$ μπορεί να περιστρέψει την πόρτα;



Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

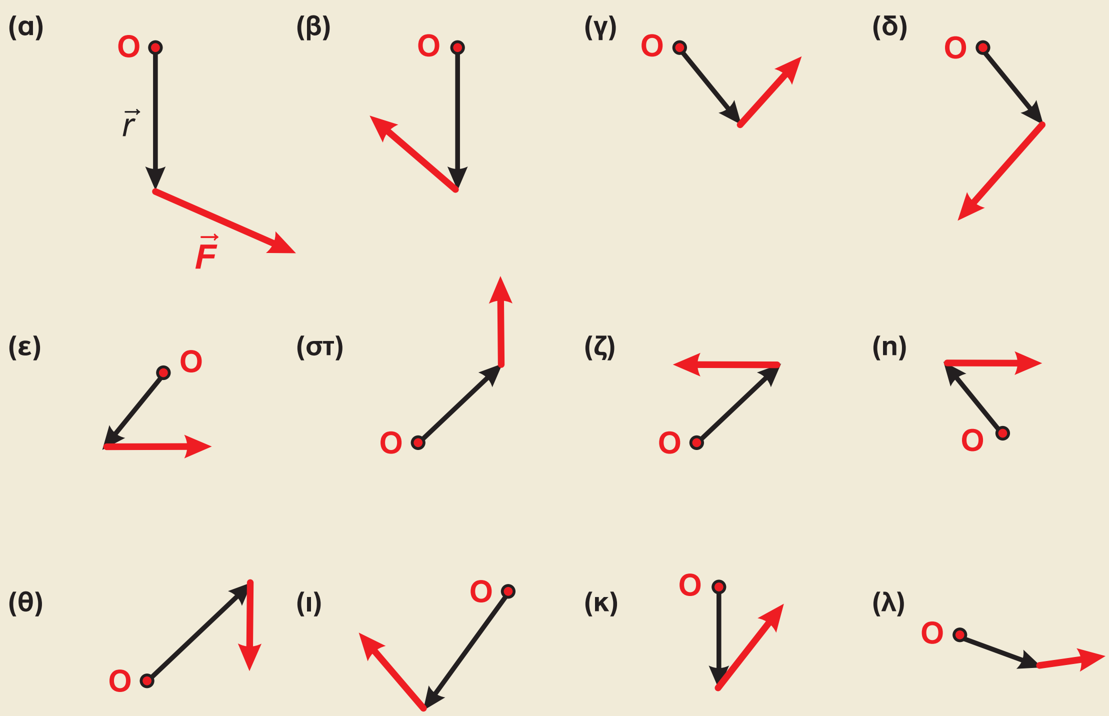
Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Ένα σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση όταν:	
α	Όλα τα σημεία του κινούνται με την ίδια ταχύτητα.	
β	Το ΚΜ του σώματος είναι ακίνητο ή κινείται με σταθερή ταχύτητα.	
γ	Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων στο σώμα είναι ίση με μηδέν.	
2	Όταν ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα:	
α	Όλα τα σημεία του κινούνται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα.	
β	Όλα τα σημεία του κινούνται με την ίδια γραμμική ταχύτητα.	
γ	Τα σημεία του διαγράφουν κυκλικές τροχιές με κέντρα πάνω στον άξονα περιστροφής.	
3	Ένα στερεό σώμα εκτελεί **σύνθετη** κίνηση όταν:	
α	Το ΚΜ του κινείται και ταυτόχρονα το σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα, που διέρχεται από το ΚΜ.	
β	Ο άξονας περιστροφής του σώματος μετακινείται στον χώρο.	
4	Μία δύναμη έχει πάντοτε μη μηδενική ροπή ως προς οποιοδήποτε σημείο.	
5	Η ροπή μίας δύναμης ως προς ένα σημείο **Ο** είναι ανάλογη με την απόσταση του σημείου εφαρμογής της δύναμης από το **Ο**.	
6	Η ροπή μίας δύναμης ως προς ένα σημείο **Ο** είναι ανάλογη με την απόσταση του φορέα της δύναμης από το **Ο**.	
7	Δύο ίσες δυνάμεις έχουν την ίδια ροπή ως προς οποιοδήποτε σημείο του χώρου.	
8	Δύο ίσες και συγγραμμικές δυνάμεις έχουν την ίδια ροπή ως προς οποιοδήποτε σημείο του χώρου.	
9	Δύο αντίθετες δυνάμεις έχουν αντίθετη ροπή ως προς οποιοδήποτε σημείο του χώρου.	
10	Δύο αντίθετες και συγγραμμικές δυνάμεις έχουν αντίθετη ροπή ως προς οποιοδήποτε σημείο του χώρου.	

Ασκήσεις

❶ Στα πιό κάτω σχήματα **(α) - (λ)**, οι φορείς των διανυσμάτων $\vec{r}$ (μαύρο) και $\vec{F}$ (κόκκινο) ανήκουν στο επίπεδο της σελίδας. Για κάθε σχήμα:

(i) Να καθορίσετε εάν η δύναμη στρέφει **αριστερόστροφα** ή **δεξιόστροφα** το σημείο εφαρμογής της (την αιχμή του $\vec{r}$).

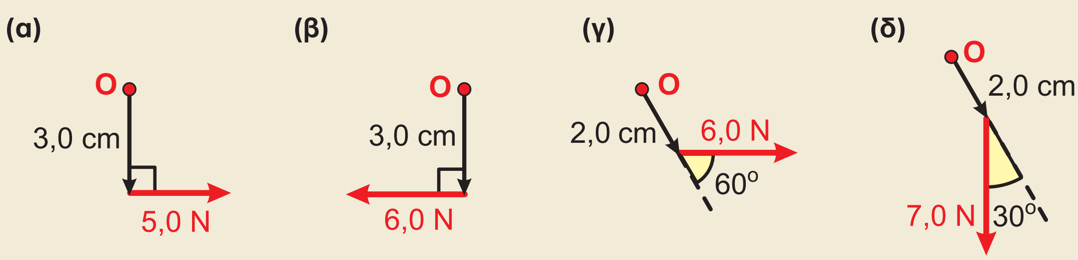
(ii) Να προσδιορίσετε την **κατεύθυνση** του διανύσματος της ροπής ως προς το σημείο **O**. Να χρησιμοποιήσετε τη σύμβαση ότι τα διανύσματα ροπής με **θετική** αλγεβρική τιμή έχουν κατεύθυνση προς τον αναγνώστη.

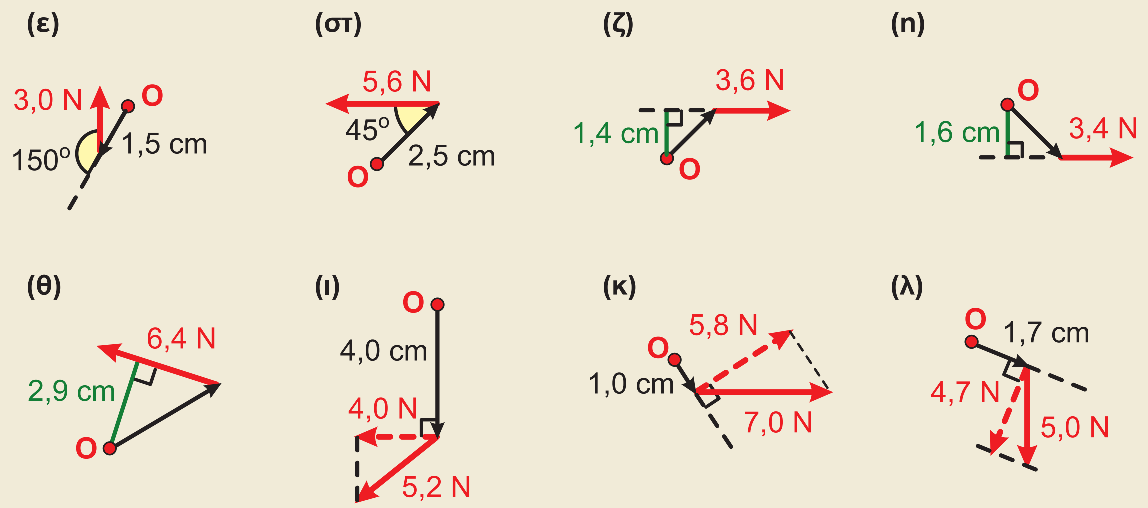


❷ Στα επόμενα σχήματα **(α) - (λ)**, οι φορείς των διανυσμάτων $\vec{r}$ (μαύρο) και $\vec{F}$ (κόκκινο) ανήκουν στο επίπεδο της σελίδας. Για κάθε σχήμα:

(i) Να υπολογίσετε την **αλγεβρική τιμή** της ροπής ως προς το σημείο **O**, χρησιμοποιώντας τον πιο κατάλληλο κανόνα.

(ii) Να υποδείξετε την **κατεύθυνση** του διανύσματος της ροπής (από ή προς τον αναγνώστη).





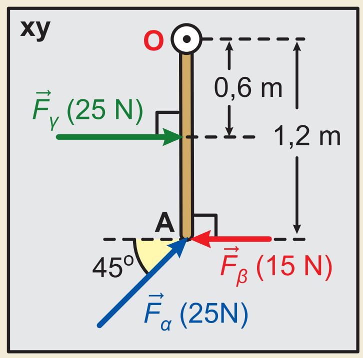
❸ Η ράβδος του επομένου σχήματος μπορεί να περιστρέφεται πάνω στο επίπεδο **xy** της σελίδας, γύρω από το σημείο **O** του επιπέδου.

Στη ράβδο ασκούνται οι τρείς δυνάμεις $\vec{F}_\alpha$, $\vec{F}_\beta$ και $\vec{F}_\gamma$. Οι φορείς των τριών δυνάμεων ανήκουν στο επίπεδο **xy**.

Α. Να καθορίσετε τη φορά περιστροφής του σημείου εφαρμογής κάθε δύναμης.

Β. Να υπολογίσετε τις αλγεβρικές τιμές των ροπών των τριών δυνάμεων ως προς το σημείο **O**.

Γ. Ποιά δύναμη περιστρέφει πιο αποτελεσματικά τη ράβδο;



❹ Η πόρτα του επόμενου σχήματος περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα **Oz**. Στο σημείο **A** της πόρτας εφαρμόζουμε μία δύναμη $\vec{F}$, η οποία μπορεί να αναλυθεί στις εξής συνιστώσες:

(i) Τη συνιστώσα $\vec{F}_z$, κατά μήκος του άξονα περιστροφής **Oz**.

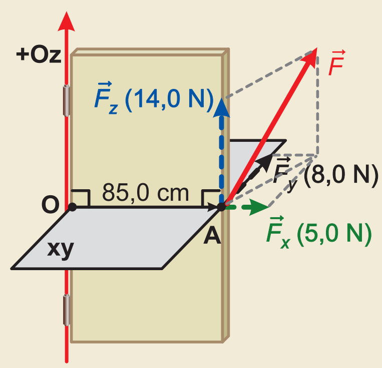
(ii) Τη συνιστώσα $\vec{F}_x$, κατά μήκος της κάθετης στον άξονα ευθείας **OA**.

(iii) Τη συνιστώσα $\vec{F}_y$, που ανήκει στο επίπεδο xy και είναι κάθετη στην ευθεία **OA**. Το επίπεδο xy διέρχεται από το σημείο **A**, και είναι κάθετο στον άξονα **Oz**.

Α. Ποιά από τις τρείς συνιστώσες $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$, $\vec{F}_z$ τείνει να περιστρέψει την πόρτα ως προς τον άξονα **Oz**;

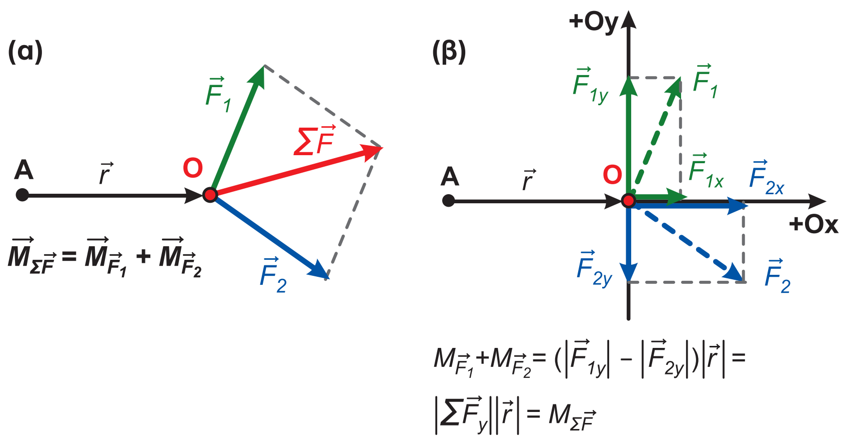
Β. Να υπολογίσετε τη ροπή M_z κάθε μίας από τις τρείς συνιστώσες $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$, $\vec{F}_z$.

Γ. Κατά ποιά φορά τείνει να περιστραφεί η πόρτα (αριστερόστροφα ή δεξιόστροφα);



1.5. Το Θεώρημα των Ροπών

Στην **Εικόνα 1-4(α)** απεικονίζεται ένα σημείο **O** του χώρου, στο οποίο δρούν οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Η συνισταμένη $\sum\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ των δύο δυνάμεων συμπεριλαμβάνεται επίσης στο σχήμα **1-4(α)**.



Εικόνα 1-4
(α) Η ροπή της συνισταμένης δύο ή περισσοτέρων δυνάμεων, που εφαρμόζονται στο ίδιο σημείο **O**, ισούται με το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων. **(β)** Απόδειξη (συμβ. το Ένθετο).

Οι ροπές $\vec{M}_{\vec{F}_1}$ και $\vec{M}_{\vec{F}_2}$ των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ως προς ένα αυθαίρετο σημείο **A** συνδέονται με την ροπή της συνισταμένης δύναμης, ως προς το ίδιο σημείο **A**, με το επόμενο θεώρημα:

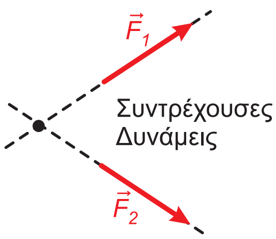
Θεώρημα των Ροπών

Η ροπή της συνισταμένης δύο (ή περισσότερων) δυνάμεων **με κοινό σημείο εφαρμογής** ισούται με το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων:

$$\vec{M}_{\Sigma\vec{F}} = \vec{M}_{\vec{F}_1} + \vec{M}_{\vec{F}_2}$$

Παρατηρήσεις

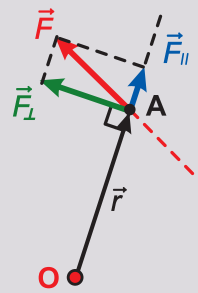
- Το θεώρημα ισχύει και στη γενικότερη περίπτωση που οι δυνάμεις δεν έχουν κοινό σημείο εφαρμογής, αλλά οι φορείς τους **τέμνονται στο ίδιο σημείο**. Σε αυτή την περίπτωση οι δυνάμεις ονομάζονται **συντρέχουσες**. Δυνάμεις με κοινό σημείο εφαρμογής αποτελούν ειδική περίπτωση συντρεχουσών δυνάμεων.



- Το θεώρημα ισχύει για παράλληλες δυνάμεις όταν έχουν τον ίδιο φορέα (είναι συγγραμμικές). **Δεν ισχύει γενικά** για παράλληλες δυνάμεις με διαφορετικούς φορείς (π.χ. για ζεύγος δυνάμεων, που θα μελετήσουμε στην **Ενότητα 1.6**).

Πώς χρησιμοποιούμε το Θεώρημα των Ροπών:

Συνήθως, χρησιμοποιούμε το θεώρημα των ροπών με έναν από τους εξής τρόπους:



1. Για να υπολογίσουμε τη ροπή μίας δύναμης $\vec{F}$, μπορούμε να αναλύσουμε τη δύναμη σε συνιστώσες κάθετα και παράλληλα στο διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ (αυτή είναι η 3η μέθοδος της **Ενότητας 1.3**). Η ροπή της παράλληλης συνιστώσας $\vec{F}_{//}$ είναι ίση με μηδέν. Άρα, η ροπή της $\vec{F}$ ισούται με τη ροπή της κάθετης συνιστώσας $\vec{F}_{\perp}$:

$$\vec{M}_{\vec{F}} = \vec{M}_{\vec{F}_{//}} + \vec{M}_{\vec{F}_{\perp}} = \vec{0} + \vec{M}_{\vec{F}_{\perp}} = \vec{M}_{\vec{F}_{\perp}}$$

2. Όταν σε ένα σώμα δρουν δύο ή περισσότερες συντρέχουσες δυνάμεις, το άθροισμα των ροπών τους ισούται με τη ροπή της συνισταμένης δύναμης. **Ειδική περίπτωση:** Εάν η συνισταμένη δύναμη είναι μηδενική, το άθροισμα των ροπών είναι επίσης μηδενικό: $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_{\sum \vec{F}} = \vec{0}$.

ΕΝΘΕΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το σώμα του επόμενου σχήματος είναι αναρτημένο από τρία σχοινιά και ισορροπεί. Τα σχοινιά ΑΓ και ΒΓ έχουν μήκος 0,70 m και οι γωνίες $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 45^o$.

Θα υπολογίσουμε τις ροπές των τριών τάσεων σχοινιού ως προς τα σημεία Α και Δ, και θα δείξουμε ότι ισχύει το θεώρημα των ροπών.

Α. Η δύναμη $\vec{T}_1$ έχει μηδενική ροπή ως προς το σημείο **Α**. Η ροπή της δύναμης $\vec{T}_2$ έχει αλγεβρική τιμή

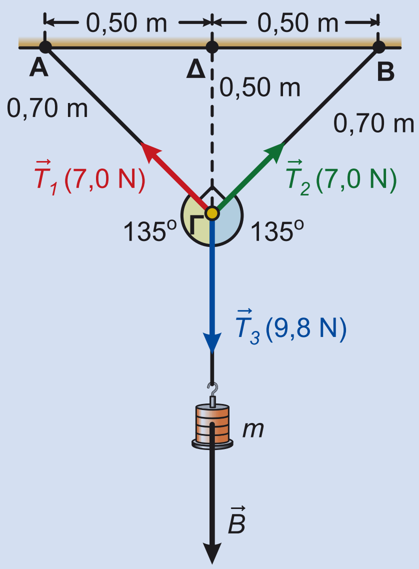
$$M_2 = +\left|\vec{T}_2\right| L_{\mathrm{A\Gamma}} = +(7{,}0\ \mathrm{N}) \times (0{,}70\ \mathrm{m}) = +4{,}9\ \mathrm{N\ m}$$

Η ροπή της δύναμης $\vec{T}_3$ έχει αλγεβρική τιμή

$$M_3 = -|\vec{T}_3| L_{A\Delta} = -(9{,}8\ \text{N}) \times (0{,}50\ \text{m}) = -4{,}9\ \text{N m}$$

Τα διανύσματα των ροπών $\vec{M}_2$ και $\vec{M}_3$ είναι παράλληλα, με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο **xy** της σελίδας. Άρα, η συνολική ροπή έχει αλγεβρική τιμή

$$\sum M = M_1 + M_2 + M_3 = (0\ \text{N m}) + (4{,}9\ \text{N m}) - (4{,}9\ \text{N m}) = 0{,}0\ \text{N m}$$



Επειδή το σώμα ισορροπεί, η συνισταμένη δύναμη μηδενίζεται:

$$\sum \vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = \vec{0}$$

Άρα, και η ροπή της δύναμης $\sum \vec{T}$ είναι ίση με μηδέν, δηλαδή το θεώρημα των ροπών ισχύει:

$$\sum \vec{M} = \vec{M}_{\Sigma \vec{T}} = \vec{0}$$

Β. Ως προς το σημείο **Δ**:

Η ροπή της δύναμης $\vec{T}_1$ ισούται με:

$$M_1 = -|\vec{T}_1| L_{\Delta\Gamma}\, \eta\mu 135^o = -(7{,}0\ \text{N}) \times (0{,}50\ \text{m}) \times 0{,}71 = -2{,}5\ \text{N m}$$

Η ροπή της δύναμης $\vec{T}_2$ ισούται με:

$$M_2 = +|\vec{T}_2| L_{\Delta\Gamma}\, \eta\mu 135^o = +(7{,}0\ \text{N}) \times (0{,}50\ \text{m}) \times 0{,}71 = +2{,}5\ \text{N m}$$

Η ροπή της δύναμης $\vec{T}_3$ είναι μηδενική. Τα διανύσματα $\vec{M}_1$ και $\vec{M}_2$ είναι παράλληλα. Άρα, η συνολική ροπή είναι ίση με μηδέν, και το θεώρημα των ροπών ισχύει:

$$\sum M = M_1 + M_2 + M_3 = -(2{,}5\ \text{N m}) + (2{,}5\ \text{N m}) + (0\ \text{N m})$$

$$= 0{,}0\ \text{N m} = M_{\Sigma \vec{T}}$$

ΕΝΘΕΤΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ

Θα αποδείξουμε το θεώρημα για την περίπτωση των δύο ομοεπίπεδων και συντρεχουσών δυνάμεων του σχήματος **1-4(β)**.

Χαράσσουμε σύστημα αξόνων **Oxy**, με σημείο αναφοράς το κοινό σημείο εφαρμογής των δυνάμεων, **O**.

Επιλέγουμε τον άξονα **Ox** παράλληλο με το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ του σημείου **O** ως προς το σημείο **A.** O άξονας **Oy** είναι κάθετος στον **Ox.**

Αναλύουμε τις δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ σε συνιστώσες ως προς τους δύο άξονες. Οι ροπές των δύο δυνάμεων έχουν κάθετη διεύθυνση στο επίπεδο.

Επειδή η δύναμη $\vec{F}_1$ τείνει να στρέψει το σημείο **O αριστερόστροφα** ως προς το **A**, η ροπή της είναι **θετική.** Η δύναμη $\vec{F}_{1y}$ είναι η κάθετη συνιστώσα της $\vec{F}_1$ στο διάνυσμα $\vec{r}$. Άρα, η ροπή της δύναμης $\vec{F}_1$ έχει αλγεβρική τιμή:

$$M_{\vec{F}_1} = +|\vec{F}_{1y}||\vec{r}|$$

Η δύναμη $\vec{F}_2$ τείνει να στρέψει το σημείο **O δεξιόστροφα** ως προς το **A**, οπότε η ροπή της είναι **αρνητική.** Η ροπή της δύναμης $\vec{F}_2$ έχει αλγεβρική τιμή:

$$M_{\vec{F}_2} = -|\vec{F}_{2y}||\vec{r}|$$

Τα διανύσματα των ροπών $\vec{M}_{\vec{F}_1}$ και $\vec{M}_{\vec{F}_2}$ είναι παράλληλα (κάθετα στο επίπεδο των δυνάμεων). Άρα, η συνισταμένη ροπή έχει την ίδια διεύθυνση, και αλγεβρική τιμή ίση με το άθροισμα των αλγεβρικών τιμών:

$$\sum M = M_{\vec{F}_1} + M_{\vec{F}_2} = \left(|\vec{F}_{1y}| - |\vec{F}_{2y}|\right)|\vec{r}| \qquad \textbf{ΣΧΕΣΗ 1}$$

Η **κάθετη συνιστώσα** της συνισταμένης δύναμης $\sum\vec{F}$ είναι η $\sum\vec{F}_y$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Εάν $|\vec{F}_{1y}| > |\vec{F}_{2y}|$, η κάθετη συνιστώσα $\sum\vec{F}_y$ έχει μέτρο $|\vec{F}_{1y}| - |\vec{F}_{2y}|$ και στρέφει **αριστερόστροφα** το σημείο **O.** Άρα, η ροπή της $\sum\vec{F}$ είναι θετική και ισούται με:

$$M_{\sum\vec{F}} = +\left(|\vec{F}_{1y}| - |\vec{F}_{2y}|\right)|\vec{r}|$$

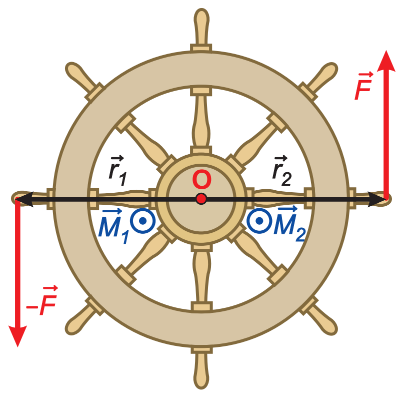
- Εάν $|\vec{F}_{1y}| < |\vec{F}_{2y}|$, η κάθετη συνιστώσα $\sum\vec{F}_y$ έχει μέτρο $|\vec{F}_{2y}| - |\vec{F}_{1y}|$ και στρέφει **δεξιόστροφα** το σημείο **O.** Άρα, η ροπή της $\sum\vec{F}$ είναι αρνητική και ισούται με:

$$M_{\sum\vec{F}} = -\left(|\vec{F}_{2y}| - |\vec{F}_{1y}|\right)|\vec{r}| = +\left(|\vec{F}_{1y}| - |\vec{F}_{2y}|\right)|\vec{r}|$$

Και στις δύο περιπτώσεις, η ροπή της συνισταμένης δύναμης συμπίπτει με το αποτέλεσμα της σχέσης 1. Άρα:

$$\vec{M}_{\sum\vec{F}} = \vec{M}_{\vec{F}_1} + \vec{M}_{\vec{F}_2}$$

Εικόνα 1-5
Το ζεύγος δυνάμεων $\vec{F}$ και $-\vec{F}$ τείνει να περιστρέψει το τιμόνι του πλοίου ως προς άξονα **κάθετο** στο επίπεδο των φορέων των δυνάμεων. Η ροπή του ζεύγους έχει μέτρο $|\vec{M}| = |\vec{F}|d$, όπου d είναι η απόσταση των φορέων.



Η **Εικόνα 1-5** απεικονίζει το τιμόνι ενός πλοίου. Ο άξονας περιστροφής του τιμονιού είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας, και διέρχεται από το κέντρο του τιμονιού. Σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία του τιμονιού εφαρμόζονται οι αντίθετες δυνάμεις $\vec{F}$ και $-\vec{F}$.

Το σύστημα δύο **αντίθετων** δυνάμεων, που εφαρμόζονται σε **διαφορετικά** σημεία ενός σώματος, ονομάζεται **ζεύγος δυνάμεων**.

Θα μελετήσουμε τη δράση του ζεύγους δυνάμεων στο τιμόνι.

- Η συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{F}$ και $-\vec{F}$ είναι ίση με μηδέν:

$$\sum \vec{F} = \vec{F} - \vec{F} = \vec{0}$$

  Άρα, το ζεύγος δυνάμεων δεν μεταβάλλει τη **μεταφορική** ταχύτητα του τιμονιού.

- Κάθε μία από τις δυνάμεις εξασκεί **ροπή**, η οποία τείνει να περιστρέψει **αριστερόστροφα** το τιμόνι. Οι αλγεβρικές τιμές των ροπών των δύο δυνάμεων ως προς το **Ο** είναι θετικές και ίσες μεταξύ τους:

$$M_1 = M_2 = +|\vec{F}|R$$

όπου $R = |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$ είναι η απόσταση του σημείου εφαρμογής κάθε δύναμης από τον άξονα περιστροφής. Τα διανύσματα $\vec{M}_1$ και $\vec{M}_2$ είναι **ομόρροπα** (κάθετα στο επίπεδο των δύο φορέων, με φορά προς τον αναγνώστη). Η συνολική ροπή έχει την ίδια κατεύθυνση, και αλγεβρική τιμή

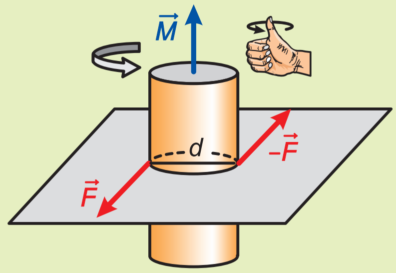
$$\sum M = M_1 + M_2 = (2R)|\vec{F}| = d|\vec{F}|$$

Το μέγεθος $d = 2R$ ισούται με την απόσταση **μεταξύ των φορέων** των δύο δυνάμεων.

Σημείωση
Υπολογίσαμε τη ροπή του ζεύγους ως προς το σημείο **Ο. Αποδεικνύεται** όμως ότι η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων είναι σταθερή ως προς οποιοδήποτε σημείο του χώρου.

Συνοψίζουμε:

- Ένα **ζεύγος δυνάμεων** δεν προκαλεί μεταφορική κίνηση αλλά μπορεί να προκαλέσει **περιστροφή** ενός σώματος.
- Το **μέτρο** της συνολικής ροπής του ζεύγους δυνάμεων ισούται με το μέτρο $|\vec{F}|$ κάθε δύναμης, επί τη συνολική απόσταση d μεταξύ των φορέων των δυνάμεων.
- Η **διεύθυνση** της ροπής είναι κάθετη στο επίπεδο, που ορίζουν οι παράλληλοι φορείς των δυνάμεων.
- Η **φορά** της ροπής καθορίζεται από τον κανόνα της δεξιάς παλάμης: Λυγίζουμε τα δάκτυλα προς την κατεύθυνση περιστροφής, και ο τεντωμένος αντίχειρας δείχνει την κατεύθυνση της ροπής.



Προτεινόμενη Δραστηριότητα

Να σημειώσετε μία κουκίδα στο θρανίο σας και να τοποθετήσετε ένα μακρόστενο αντικείμενο (μαρκαδόρο, ρίγα, το κινητό σας) στο θρανίο, έτσι ώστε το ΚΜ του (το κέντρο του) να βρίσκεται πάνω από την κουκίδα.

Να ακουμπήσετε τα δάχτυλά σας στις δύο άκρες του αντικειμένου και να σπρώξετε απότομα τις δύο άκρες, με δυνάμεις ίσου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης.

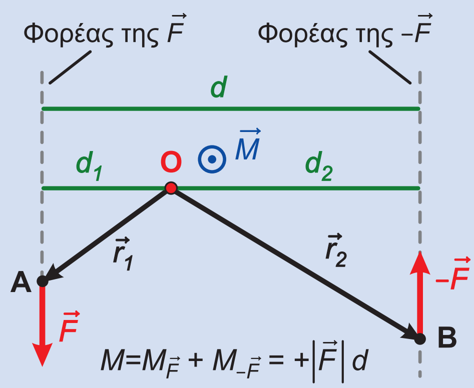
Να περιγράψετε την κίνηση του αντικειμένου. Μετατοπίζεται το ΚΜ του;

ΕΝΘΕΤΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Η ΡΟΠΗ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟΥ ΖΕΥΓΟΥΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΕΙΝΑΙ ΣΤΑΘΕΡΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

Θα αποδείξουμε ότι η ροπή είναι σταθερή ως προς τα σημεία του επιπέδου, που ορίζουν οι φορείς των δυνάμεων του ζεύγους.

Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι δύο παράλληλες ευθείες ορίζουν ένα επίπεδο. Στο επόμενο σχήμα, το επίπεδο των παράλληλων φορέων των $\vec{F}$ και $-\vec{F}$ ταυτίζεται με το επίπεδο της σελίδας. Επιλέγουμε ένα σημείο **Ο** αυτού του επιπέδου, ανάμεσα στους δύο φορείς.

Οι ροπές των $\vec{F}$ και $-\vec{F}$ είναι **κάθετες** στο επίπεδο. Επειδή και οι δύο δυνάμεις τείνουν να περιστρέψουν **αριστερόστροφα** τα σημεία εφαρμογής τους **Α** και **Β** ως προς το **Ο**, οι ροπές είναι **θετικές** και κατευθύνονται έξω από τη σελίδα (προς τον αναγνώστη).



Η ροπή της δύναμης $\vec{F}$ έχει αλγεβρική τιμή $M_{\vec{F}} = +|\vec{F}|d_1$, όπου d_1 είναι η απόσταση του **Ο** από τον φορέα της $\vec{F}$.

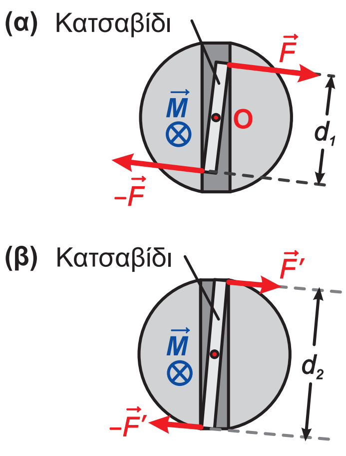
Η ροπή της $-\vec{F}$ έχει αλγεβρική τιμή $M_{-\vec{F}} = +|-\vec{F}|d_2 = |\vec{F}|d_2$, όπου d_2 είναι η απόσταση του σημείου **Ο** από τον φορέα της $-\vec{F}$. Η συνολική ροπή έχει τιμή:

$$\sum M = M_{\vec{F}} + M_{-\vec{F}} = (d_1 + d_2)|\vec{F}| = d|\vec{F}|$$

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι προκύπτει η ίδια σχέση, όταν το σημείο **Ο** βρίσκεται από την ίδια πλευρά των δύο φορέων (π.χ. στα αριστερά των φορέων).

1.7. Παραδείγματα Ζευγών Δυνάμεων

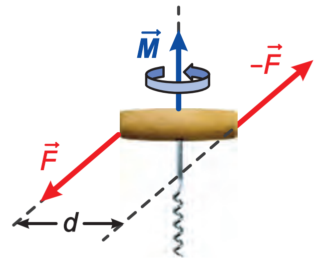


Για να βιδώσουμε τη βίδα του σχήματος **(α)**, της ασκούμε ζεύγος δυνάμεων συγκεκριμένης ροπής, με τη λεπίδα ενός κατσαβιδιού.

Όσο πιο φαρδιά είναι η λεπίδα, τόσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση d ανάμεσα στους φορείς των δυνάμεων, και τόσο μικρότερα είναι τα μέτρα των δυνάμεων. Άρα, με λεπίδα μεγαλύτερου πλάτους η βίδα καταπονείται λιγότερο.

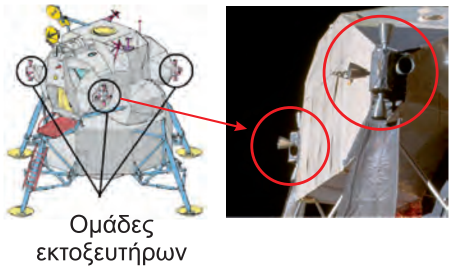
Για να περιστρέψουμε το ανοιχτήρι του κρασιού, ασκούμε ζεύγος δυνάμεων στην οριζόντια ξύλινη λαβή του. Η ροπή του ζεύγους είναι παράλληλη με τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής του ανοιχτηριού, και το μέτρο της αυξάνεται με την απόσταση d (το μήκος της λαβής).

Άρα, όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος της λαβής, τόσο ευκολότερα περιστρέφει το ανοιχτήρι τον φελλό του μπουκαλιού.



Τα διαστημόπλοια χρησιμοποιούν συστήματα από εκτοξευτήρες (reaction control systems), για να περιστρέφονται γύρω από διάφορες κατευθύνσεις στο διάστημα.

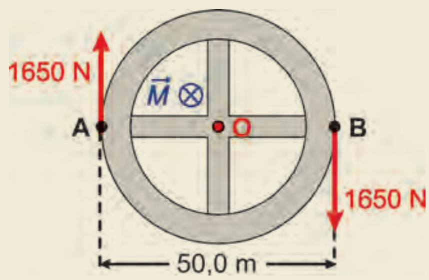
Η ταυτόχρονη εκτόξευση αερίου από δύο αντίθετα προσανατολισμένους εκτοξευτήρες δημιουργεί ζεύγος δυνάμεων. Η ροπή του ζεύγους προκαλεί περιστροφή του διαστημόπλοιου ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του ζεύγους.



Οι ομάδες εκτοξευτήρων στη σεληνάκατο του διαστημικού προγράμματος Apollo.

Παράδειγμα 1

Ένας διαστημικός σταθμός περιέχει εκτοξευτήρες, οι οποίοι μπορούν να εκτοξεύουν αέρια σε διαφορετικές κατευθύνσεις.



Εάν δύο εκτοξευτήρες στα σημεία **A** και **B** ασκούν δυνάμεις μέτρου 1650 N, ποια η συνολική ροπή στον σταθμό;

Από το σχήμα προκύπτει ότι η απόσταση μεταξύ των φορέων $d = 50{,}0$ m. Οι δυνάμεις στρέφουν τον σταθμό **δεξιόστροφα.** Άρα, η ροπή έχει **αρνητική** αλγεβρική τιμή:

$$M = -\left|\vec{F}\right| d = -(1650\ \text{N}) \times (50{,}0\ \text{m}) = -82500\ \text{N m}$$

Η διεύθυνση της ροπής είναι κάθετη προς το επίπεδο του διαστημικού σταθμού, και η φορά της είναι προς το εσωτερικό της σελίδας.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

1.7.1. Ένας μαθητής επιχειρηματολογεί ως εξής: «Αφού οι δυνάμεις ενός ζεύγους είναι αντίθετες, η συνισταμένη δύναμη μηδενίζεται. Άρα, και η συνισταμένη ροπή μηδενίζεται». Είναι σωστή ή λανθασμένη η επιχειρηματολογία του μαθητή;

1.7.2. Είναι δυνατόν να επιταχύνουμε το ΚΜ ενός σώματος με τη δράση ζεύγους δυνάμεων;

1.7.3. Σε δύο διαφορετικά σημεία ενός τιμονιού δρουν αντίθετες, συγγραμμικές δυνάμεις. Ποιά είναι η συνολική ροπή των δυνάμεων;

1.7.4. Γιατί το τιμόνι ενός φορτηγού είναι μεγαλύτερο από το τιμόνι ενός οικογενειακού αυτοκινήτου;

1.7.5. Για να ξεβιδώσουμε μία βίδα της ασκούμε δεδομένη ροπή. Πότε καταπονείται λιγότερο η βίδα, με ένα απλό κατσαβίδι ή με ένα κατσαβίδι ίσου μεγέθους σε σχήμα σταυρού; Γιατί;

1.7.6. Ένα σώμα περιστρέφεται εξαιτίας της δράσης ενός ζεύγους δυνάμεων. Είναι δυνατόν να αναιρέσουμε τη δράση του ζεύγους, ασκώντας στο σώμα μία τρίτη δύναμη;

1.7.7. Πώς μπορούμε να αναιρέσουμε το αποτέλεσμα της δράσης ζεύγους δυνάμεων σε ένα σώμα;

Ερωτήσεις Κατανόησης

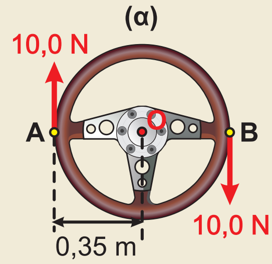
Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

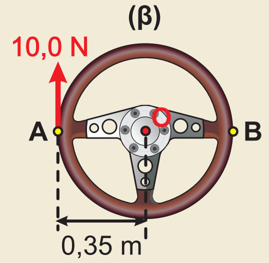
Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Για να συνιστούν ζεύγος, δύο δυνάμεις πρέπει να είναι:	
α	Παράλληλες.	
β	Αντίρροπες.	
γ	Αντίθετες.	
2	Η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων μηδενίζεται όταν:	
α	Οι δυνάμεις είναι αντίθετες.	

β	Οι φορείς των δυνάμεων συμπίπτουν.	
3	Η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων είναι πάντοτε κάθετη στο επίπεδο των φορέων τους.	
4	Η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων είναι ανάλογη με την απόσταση μεταξύ των φορέων τους.	
5	Η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων είναι ανάλογη με το μέτρο των δυνάμεων.	
6	Οι ροπές των δυνάμεων ζεύγους είναι αντίθετες μεταξύ τους.	
7	Ένα ζεύγος δυνάμεων δεν μπορεί να μετακινήσει το ΚΜ ενός ακίνητου σώματος.	

Ασκήσεις

1 Το τιμόνι ενός φορτηγού, ακτίνας $R = 0{,}35$ m, μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό κάθετο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο του **Ο**.





Α. Στα αντιδιαμετρικά σημεία του τιμονιού εφαρμόζουμε ζεύγος δυνάμεων μέτρου 10,0 N (**σχήμα (α)**). Να υπολογίσετε το μέτρο της ροπής του ζεύγους, και να προσδιορίσετε την κατεύθυνσή της.

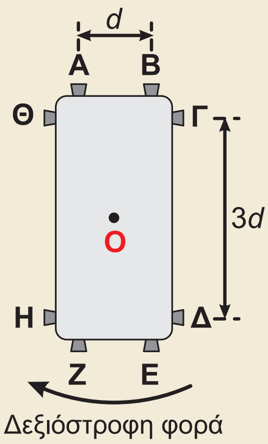
Β. Εφαρμόζουμε με το ένα μας χέρι μόνο μία δύναμη μέτρου 10,0 N στο σημείο **Α** (**σχήμα (β)**). Να εξηγήσετε γιατί στο σημείο **Ο** του τιμονιού θα εφαρμοσθεί μία αντίθετη δύναμη από τον άξονα περιστροφής. (Υπόδειξη: Να εξετάσετε την κίνηση του ΚΜ του τιμονιού).

Γ. Οι δύο δυνάμεις του ερωτήματος **Β** αποτελούν ζεύγος. Ποια είναι η ροπή αυτού του ζεύγους (μέτρο και κατεύθυνση);

Δ. Είναι πιο εύκολο να περιστρέψουμε το τιμόνι με το ένα χέρι ή με τα δύο χέρια;

2 Μία διαστημική κάψουλα μπορεί να περιστρέφεται με τη βοήθεια των εκτοξευτήρων αερίου **Α - Θ**. Όλοι οι εκτοξευτήρες είναι πανομοιότυποι.

Το αέριο που εκπέμπεται από έναν εκτοξευτήρα φεύγει κά-



θετα προς το τοίχωμα, στο οποίο είναι στερεωμένος, και προς τα έξω. Για να στραφεί η κάψουλα, επιλέγουμε και θέτουμε σε ταυτόχρονη λειτουργία ένα κατάλληλο ζεύγος εκτοξευτήρων. Το παραγόμενο ζεύγος δύναμης στρέφει την κάψουλα ως προς άξονα που διέρχεται από το ΚΜ της.

Α. Ποια ζεύγη εκτοξευτήρων θα επιλέγατε, για να στρέψετε την κάψουλα αριστερόστροφα;

Β. Ποια ζεύγη εκτοξευτήρων θα επιλέγατε, για να στρέψετε την κάψουλα δεξιόστροφα;

Γ. Στο ερώτημα **Α**, μπορείτε να επιλέξετε δύο δυνατά ζεύγη. Ποιο από αυτά δημιουργεί μεγαλύτερη ροπή;

Δ. Ποια ροπή παράγεται, εάν θέσουμε σε λειτουργία τους εκτοξευτήρες **Α** και **Ζ**;

1.8 Ο Πρώτος Νόμος του Νεύτωνα στην Περιστροφική Κίνηση

Όπως εξηγήσαμε στις προηγούμενες τάξεις, ο Πρώτος Νόμος του Νεύτωνα περιγράφει τη μεταφορική κίνηση ενός σημειακού σώματος (υλικού σημείου), όταν η συνισταμένη εξωτερική δύναμη μηδενίζεται:

Πρώτος Νόμος του Νεύτωνα για τη Μεταφορική Κίνηση Υλικού Σημείου

Ένα υλικό σημείο κινείται με σταθερή ταχύτητα ή παραμένει ακίνητο, όταν η συνισταμένη εξωτερική δύναμη σε αυτό μηδενίζεται:

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\upsilon} = \text{σταθερή ή μηδενική}$$

Ένα στερεό σώμα μπορεί να εκτελεί μεταφορική, περιστροφική ή σύνθετη κίνηση. Στη Β΄ Λυκείου μάθαμε ότι η δράση εξωτερικών δυνάμεων επηρεάζει τη **μεταφορική κίνηση του ΚΜ** του σώματος:

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\upsilon}_{KM} = \text{σταθερή ή μηδενική}$$

Επιπρόσθετα, η δράση εξωτερικών δυνάμεων επηρεάζει την **περιστροφική κίνηση** του σώματος. Θα θεωρήσουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Η **Εικόνα 1-6** απεικονίζει ***σε κάτοψη*** δύο πανομοιότυπα σφαιρίδια μάζας m, στερεωμένα στα άκρα **A** και **B** ενός ραβδιού αμελητέας μάζας. Το ραβδί μπορεί να περιστρέφεται πάνω σε ένα λείο οριζόντιο τραπέζι. Το επίπεδο περιστροφής **xy** ταυτίζεται με το επίπεδο της σελίδας. Ο άξονας περιστροφής είναι κάθετος στο επίπεδο **xy** και διέρχεται από το ΚΜ των σφαιριδίων (το κέντρο του ραβδιού).

Α. Όταν το ραβδί περιστρέφεται, τα σφαιρίδια διαγράφουν κυκλική τροχιά. Εάν στα σφαιρίδια δεν δρουν εφαπτομενικές εξωτερικές δυνάμεις, το μέτρο της ταχύτητάς τους δεν μεταβάλλεται - τα σφαιρίδια (και το ραβδί) περιστρέφονται με **σταθερή** γωνιακή ταχύτητα ω. Παρατηρούμε ότι η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων κατά μήκος του άξονα περιστροφής έχει μηδενική τιμή[3].

Β. Έστω ότι στα σφαιρίδια **A** και **B** δρα εφαπτομενικά το **ζεύγος δυνάμεων** $\vec{F}$ και $-\vec{F}$ (**σχήμα 1-6(β)**). Εξαιτίας αυτών των δυνάμεων, η γωνιακή ταχύτητα των σφαιριδίων αυξάνεται. Η ροπή του ζεύγους $\vec{F}$ και $-\vec{F}$ είναι **μη μηδενική** ($|\vec{M}| = 2R|\vec{F}|$).

Οι παρατηρήσεις συνοψίζονται στον Πρώτο Νόμο για την Περιστροφική Κίνηση:

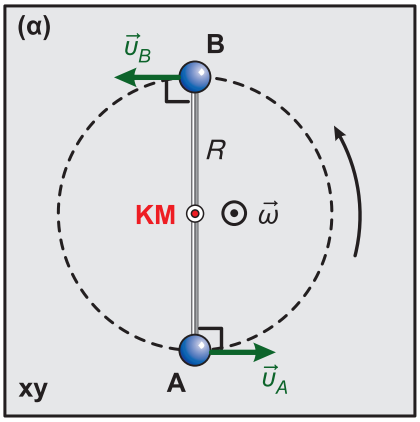
Πρώτος Νόμος για την Περιστροφική Κίνηση

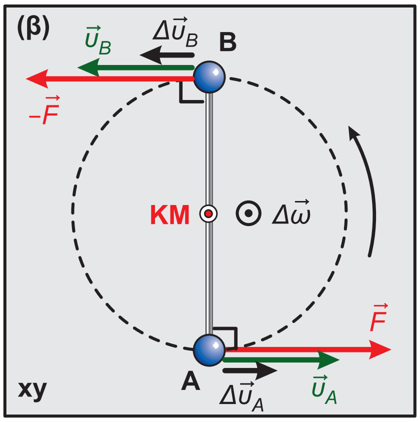
Ένα **στερεό σώμα** δεν περιστρέφεται ή περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ως προς κάποιον σταθερό άξονα **Oz**, **εάν και μόνο εάν** το άθροισμα των **εξωτερικών** ροπών κατά μήκος του άξονα **Oz** μηδενίζεται:

$$\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau,\,z} = 0 \Leftrightarrow \omega = \text{σταθερή ή μηδενική}$$

Προσοχή
Ο Πρώτος Νόμος εφαρμόζεται και σε ένα **σύστημα** στερεών σωμάτων. Στην εφαρμογή, λαμβάνουμε υπόψη μόνο τις ροπές **των εξωτερικών** δυνάμεων του συστήματος (εξωτερικές ροπές).

Εικόνα 1-6
Τα σφαιρίδια **A** και **B** είναι στερεωμένα σε ραβδί αμελητέας μάζας και περιστρέφονται γύρω από το ΚΜ του συστήματος σφαιριδίων - ραβδιού. **(α)** Όταν η ροπή εξωτερικών δυνάμεων είναι ίση με μηδέν, το σύστημα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. **(β)** Το ζεύγος δυνάμεων $\vec{F}$ και $-\vec{F}$ έχει ροπή και μεταβάλλει τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος.

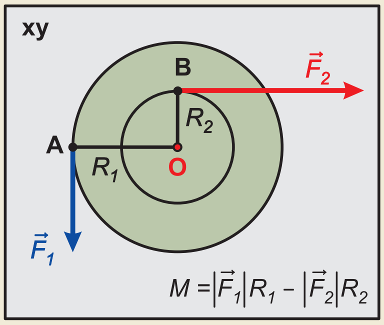




[3] Στα σφαιρίδια δρουν τα βάρη τους και οι κάθετες δυνάμεις από το τραπέζι. Αυτές οι δυνάμεις είναι κάθετες στο επίπεδο **xy** (παράλληλες με τον άξονα περιστροφής) και έχουν μηδενική συνιστώσα ροπής κατά μήκος του άξονα.

Παράδειγμα 1

Το επόμενο σχήμα απεικονίζει σε **κάτοψη** έναν δίσκο, ο οποίος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το κέντρο του Ο, πάνω στο επιπεδο **xy** της σελίδας. Ο άξονας περιστροφής **Oz** είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας.



Στα σημεία **Α** και **Β** του δίσκου δρουν οι **εξωτερικές** δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Οι φορείς των δυνάμεων ανήκουν στο επίπεδο **xy.** Θα εξαγάγουμε μία σχέση ανάμεσα στα μέτρα των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, έτσι ώστε ο δίσκος να ηρεμεί ή να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Η δύναμη $\vec{F}_1$ τείνει να περιστρέψει τον δίσκο **αριστερόστροφα**. Η ροπή της $\vec{F}_1$ ως προς το **Ο** έχει τη διεύθυνση του άξονα **Oz** και θετική αλγεβρική τιμή $M_1 = +|\vec{F}_1|R_1$.

Η δύναμη $\vec{F}_2$ τείνει να περιστρέψει τον δίσκο **δεξιόστροφα**. Η ροπή της $\vec{F}_2$ ως προς το **Ο** έχει επίσης τη διεύθυνση του άξονα **Oz** και αρνητική αλγεβρική τιμή $M_2 = -|\vec{F}_2|R_2$.

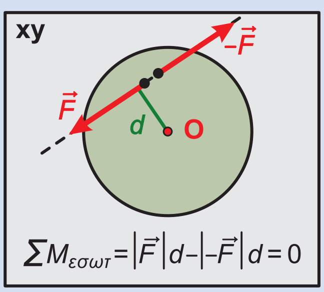
Επειδή τα διανύσματα $\vec{M}_1$ και $\vec{M}_2$ είναι παράλληλα, η συνολική ροπή έχει τη διεύθυνση του άξονα **Oz** και αλγεβρική τιμή ίση με το **άθροισμα των αλγεβρικών τιμών** M_1 και M_2:

$$\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau,\,z} = M_1 + M_2 = |\vec{F}_1|R_1 - |\vec{F}_2|R_2$$

Όταν το πιο πάνω άθροισμα είναι ίσο με μηδέν, ο δίσκος ηρεμεί ή περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από τον άξονα **Oz**. Άρα:

$$|\vec{F}_1|R_1 - |\vec{F}_2|R_2 = 0 \Rightarrow \frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{R_2}{R_1}$$

ΕΝΘΕΤΟ: ΓΙΑΤΙ ΑΓΝΟΟΥΜΕ ΤΙΣ ΡΟΠΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

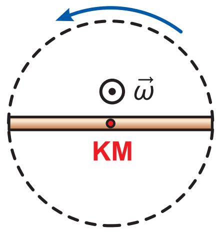


Οι **εσωτερικές** δυνάμεις εμφανίζονται σε ζεύγη δράσης- αντίδρασης, και έχουν συνισταμένη δύναμη $\sum \vec{F}_{\varepsilon\sigma\omega\tau} = \vec{0}$. Όταν είναι συγγραμμικές, ικανοποιούν το θεώρημα των ροπών. Άρα, **η συνισταμένη ροπή των εσωτερικών δυνάμεων μηδενίζεται:**

$$\sum M_{\varepsilon\sigma\omega\tau} = M_{\sum \vec{F}_{\varepsilon\sigma\omega\tau}} = 0$$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

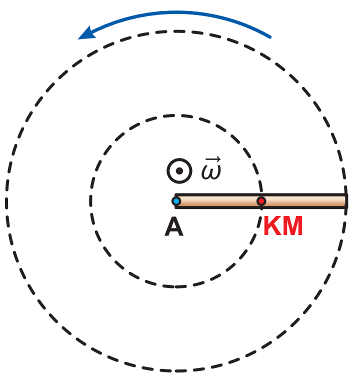
1.8.1. Ένα ραβδί μάζας *m* περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από άξονα **Oz**, που είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας και διέρχεται από το ΚΜ του ραβδιού. Το ΚΜ του ραβδιού παραμένει ακίνητο. Ποιο(α) από τα επόμενα είναι σωστό;



Ι. Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων στο ραβδί είναι μηδενική.

ΙΙ. Το άθροισμα των εξωτερικών ροπών κατά μήκος του άξονα **Oz** είναι μηδενικό.

1.8.2. Ένα ραβδί μάζας *m* περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από άξονα **Oz**, που είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας και διέρχεται από το άκρο **Α** του ραβδιού. Το σημείο **Α** παραμένει ακίνητο. Ποιο(α) από τα επόμενα είναι σωστό;



Ι. Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων στο ραβδί είναι μηδενική.

ΙΙ. Το άθροισμα των εξωτερικών ροπών κατά μήκος του άξονα περιστροφής **Oz** είναι μηδενικό.

1.8.3. Σε ένα αρχικά ακίνητο σώμα δρουν ομοεπίπεδες εξωτερικές δυνάμεις, οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες $\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \vec{0}$, $\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau,\, z} = 0$. Οι ροπές $M_{\varepsilon\xi\omega\tau,\, z}$ υπολογίζονται κατά μήκος ενός άξονα **Oz**, κάθετου στο επίπεδο των δυνάμεων. Ποιο(α) από τα επόμενα μπορεί να ισχύει;

I. Το σώμα παραμένει ακίνητο.

II. Το ΚΜ του σώματος κινείται με σταθερή ταχύτητα.

III. Το ΚΜ του σώματος κινείται με σταθερή ταχύτητα και το σώμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση ως προς τον άξονα **Oz**.

IV. Το ΚΜ του σώματος κινείται με σταθερή επιτάχυνση και το σώμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση ως προς τον άξονα **Oz**.

1.8.4. Σε ένα αρχικά ακίνητο σώμα δρουν ομοεπίπεδες εξωτερικές δυνάμεις, οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες $\sum \vec{F}_{εξωτ} = \vec{0}$, $\sum M_{εξωτ,\, z} \neq 0$. Τι κίνηση θα μπορούσε να εκτελεί το σώμα; Να περιγράψετε ξεχωριστά την κίνηση του ΚΜ του σώματος.

1.9. Συνθήκες Ισορροπίας Στερεού Σώματος

Στην **Α΄ Λυκείου** είχαμε μελετήσει την ισορροπία σωμάτων, που μπορούσαν να θεωρηθούν σημειακά. Στο παρόν Κεφάλαιο, επεκτείνουμε την έννοια της ισορροπιας και σε μη σημειακά στερεά σώματα.

Θα θεωρούμε ότι ένα στερεό σώμα βρίσκεται σε **στατική ισορροπία**, όταν **όλα** τα σημεία του σώματος είναι ακίνητα ως προς έναν αδρανειακό παρατηρητή.

Αναγκαίες Συνθήκες Στατικής Ισορροπίας Στερεού Σώματος

Από τον Πρώτο Νόμο του Νεύτωνα προκύπτουν οι εξής **αναγκαίες** συνθήκες για στατική ισορροπία:

1. Αφού το **ΚΜ** του σώματος ηρεμεί, η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων μηδενίζεται: $\sum \vec{F}_{εξωτ} = \vec{0}$.

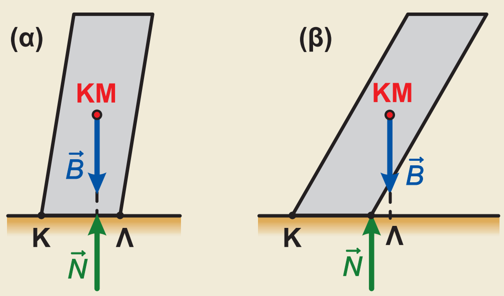
2. Αφού το σώμα δεν περιστρέφεται, έχει μηδενική γωνιακή ταχύτητα. Το άθροισμα των εξωτερικών ροπών στο σώμα μηδενίζεται **ως προς οποιοδήποτε σημείο** του χώρου: $\sum \vec{M}_{εξωτ} = \vec{0}$.

1.10 Παραδείγματα Στατικής Ισορροπίας Στερεών Σωμάτων

Παραδείγματα με Ομοεπίπεδες, Παράλληλες Δυνάμεις

Παράδειγμα 1
Ισορροπία Σώματος υπό την Επίδραση του Βάρους του

Το σώμα του σχήματος **(α)** ισορροπεί σε επαφή με οριζόντιο έδαφος υπό τη δράση του βάρους του $\vec{B}$ και μίας κάθετης δύναμης $\vec{N}$ από το έδαφος.



(α) Το ΚΜ του σώματος βρίσκεται πάνω από κάποιο σημείο επαφής με το έδαφος. Η ροπή του ζεύγους δυνάμεων $\vec{B}$ και $\vec{N}$ μηδενίζεται, και το σώμα ισορροπεί.
(β) Το ΚΜ βρίσκεται πέρα από οποιοδήποτε σημείο επαφής με το έδαφος. Το ζεύγος δυνάμεων $\vec{B}$ και $\vec{N}$ έχει μη μηδενική ροπή, και το σώμα ανατρέπεται.

Κέντρο Βάρους ενός Σώματος

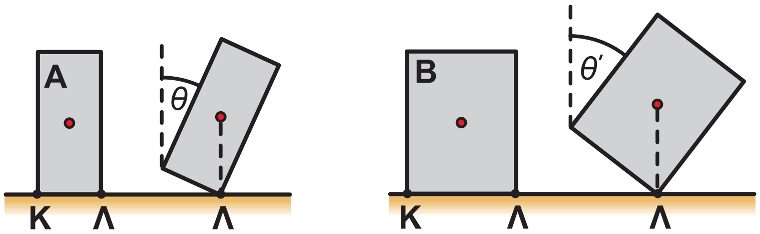
Το σημείο εφαρμογής του βάρους ενός σώματος ονομάζεται **«κέντρο βάρους (ΚΒ)»**. Όταν το βαρυτικό πεδίο είναι **ομογενές** σε όλη την έκταση του σώματος, **το ΚΒ και το ΚΜ του σώματος ταυτίζονται.**

Τα σημεία επαφής του σώματος με το έδαφος ορίζουν **μία βάση στήριξης ΚΛ**. Στο **σχήμα (α)**, το ΚΜ του σώματος βρίσκεται **πάνω από κάποιο σημείο** της βάσης στήριξης. Το έδαφος μπορεί να ασκήσει στο σώμα μία συνισταμένη κάθετη δύναμη $\vec{N}=-\vec{B}$, με σημείο εφαρμογής ***ακριβώς κάτω από το ΚΜ***. Οι $\vec{B}$ και $\vec{N}$ είναι **ζεύγος δυνάμεων** με τον ίδιο φορέα. Η ροπή του ζεύγους είναι ίση με μηδέν, και το σώμα ισορροπεί.

Στο **σχήμα (β)**, το ΚΜ του σώματος βρίσκεται **πέρα από τη βάση στήριξης**. Άρα, οι δυνάμεις $\vec{B}$ και $\vec{N}$ δεν μπορούν να είναι συγγραμμικές. Ακόμη και εάν ικανοποιείται η πρώτη συνθήκη ισορροπίας $\left(\vec{N}=-\vec{B}\right)$, η ροπή του ζεύγους **δεν** μηδενίζεται, και το σώμα ανατρέπεται.

Το σώμα **Α** ανατρέπεται όταν γείρει κατά γωνία θ. Σε αυτή τη γωνία, το **κέντρο μάζας** του σώματος μετατοπίζεται πέρα από το ακραίο σημείο στήριξης Λ.

Το σώμα **Β** χρειάζεται να γείρει κατά μεγαλύτερη γωνία θ', μέχρι να ανατραπεί, επειδή έχει μεγαλύτερη βάση στήριξης **ΚΛ.**



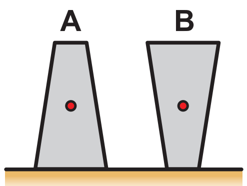
Συμπέρασμα

Όσο μεγαλύτερη είναι η βάση στήριξης ενός σώματος, τόσο δυσκολότερα ανατρέπεται το σώμα.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

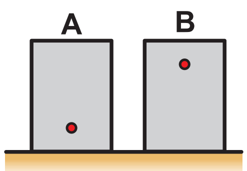
1.10.1. Ένας άνθρωπος σκοντάφτει σε ένα εμπόδιο καθώς περπατά, και το μπροστινό του πόδι ακινητοποιείται. Να εξηγήσετε γιατί ο άνθρωπος πέφτει προς τα εμπρός.

1.10.2. Το επόμενο σχήμα απεικονίζει δύο βάζα **Α** και **Β**, διαφορετικού σχήματος. Το **ΚΜ** κάθε βάζου υποδεικνύεται με την κόκκινη κουκίδα.



Ποιο από τα δύο βάζα ανατρέπεται ευκολότερα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1.10.3. Το επόμενο σχήμα απεικονίζει δύο κιβώτια **Α** και **Β** σε επαφή με ένα τραπέζι. Το **ΚΜ** κάθε κιβωτίου υποδεικνύεται με την κόκκινη κουκίδα.

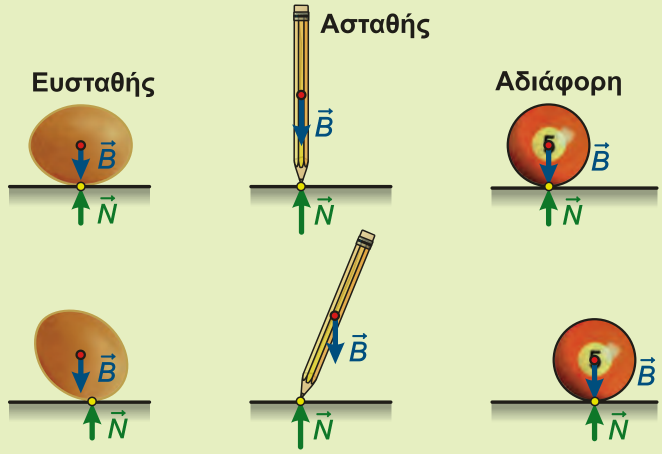


Ποιο από τα δύο κιβώτια ανατρέπεται ευκολότερα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Είδη Ισορροπίας

Έστω ότι ένα σώμα ισορροπεί, και μεταβάλλουμε τη στάση του. Η ισορροπία χαρακτηρίζεται ως:

- **Ευσταθής**, εάν δημιουργείται ροπή που τείνει να επαναφέρει το σώμα στην αρχική του θέση.
- **Ασταθής**, εάν δημιουργείται ροπή που τείνει να απομακρύνει το σώμα από την αρχική του θέση.
- **Αδιάφορη**, εάν η συνολική ροπή παραμένει ίση με μηδέν και το σώμα συνεχίζει να ισορροπεί.



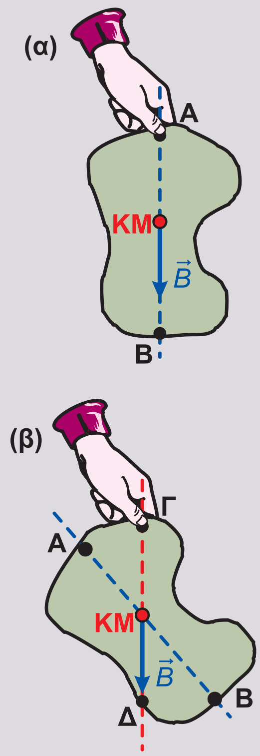
Δραστηριότητα
Εμπειρικός Προσδιορισμός του Κέντρου Μάζας Στερεού Σώματος

Α. Σχήμα (α)

Στηρίζουμε το σώμα από ένα σημείο **Α.** Όταν το σώμα ισορροπήσει, χαράσσουμε μία κατακόρυφη ευθεία **ΑΒ**, που διέρχεται από το **Α.** Επειδή το βάρος του σώματος δεν περιστρέφει το σώμα ως προς το **Α**, ο φορέας του βάρους πρέπει να διέρχεται από το **Α.** Άρα, το ΚΜ ανήκει στην ευθεία **ΑΒ.**

Β. Σχήμα (β)

Στηρίζουμε το σώμα από ένα διαφορετικό σημείο **Γ.** Όταν το σώμα ισορροπήσει, χαράσσουμε την κατακόρυφη ευθεία **ΓΔ.** Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό με προηγουμένως, συμπεραίνουμε ότι το ΚΜ ανήκει στην ευθεία **ΓΔ.** Άρα, το ΚΜ είναι το σημείο τομής των **ΑΒ** και **ΓΔ.**



Σημείωση

Στο σημείο στήριξης **Α** του σώματος εφαρμόζεται και μία δύναμη $\vec{N}$, που είναι αντίθετη στο βάρος (δεν περιλαμβάνεται στο σχήμα). Η δύναμη $\vec{N}$ έχει μηδενική ροπή ως προς το **Α** και δεν περιστρέφει το σώμα. Η ίδια παρατήρηση ισχύει για το σημείο **Γ**, όταν χρησιμοποιείται σαν σημείο στήριξης.

Στα επόμενα παραδείγματα, θα ασχοληθούμε με στερεά σώματα, ή συστήματα στερεών σωμάτων, στα οποία δρουν δύο ή περισσότερες **ομοεπίπεδες** εξωτερικές δυνάμεις. Για να μελετήσουμε τη δράση των δυνάμεων, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Στρατηγική Επίλυσης Προβλημάτων Ισορροπίας

(1) Ορίζουμε το σώμα ή σύστημα σωμάτων.

(2) Σχεδιάζουμε τις εξωτερικές δυνάμεις.

(3) Η δεύτερη συνθήκη ισορροπίας πρέπει να ικανοποιείται ως προς οποιοδήποτε σημείο του χώρου. Επιλέγουμε ένα **αυθαίρετο** σημείο **Ο**, πάνω στο επίπεδο που ορίζουν οι φορείς των δυνάμεων.

Σημείωση
Συνήθως, βοηθά να επιλέξουμε το σημείο **Ο** επάνω στον φορέα μίας άγνωστης εξωτερικής δύναμης $\vec{F}$. Τότε, η ροπή της άγνωστης δύναμης μηδενίζεται ως προς το **Ο**.

(4) Ο άξονας περιστροφής **Oz** διέρχεται από το **Ο** και τέμνει κάθετα το επίπεδο των φορέων. Υπολογίζουμε τις ροπές όλων των εξωτερικών δυνάμεων κατά μήκος του άξονα περιστροφής, όπως περιγράψαμε στην **Ενότητα 1.3.** Θυμίζουμε ότι η ροπή είναι θετική για δυνάμεις που στρέφουν αριστερόστροφα, και αρνητική για δυνάμεις που στρέφουν δεξιόστροφα το σημείο εφαρμογής τους ως προς το **Ο**.

(5) Εάν μία άγνωστη εξωτερική δύναμη $\vec{F}$ διέρχεται από το **Ο**, η ροπή της μηδενίζεται.

(α) Εάν δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε την $\vec{F}$, η δεύτερη συνθήκη ισορροπίας συνήθως **επαρκεί** για την επίλυση του προβλήματος:

$$\sum M_{\text{εξωτ}, z} = 0$$

(β) Εάν χρειάζεται να υπολογίσουμε την $\vec{F}$, χρησιμοποιούμε και την πρώτη συνθήκη. Καταστρώνουμε τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\sum \vec{F}_{\text{εξωτ}} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_{\text{εξωτ}, x} = 0 \\ \sum F_{\text{εξωτ}, y} = 0 \end{cases}$$

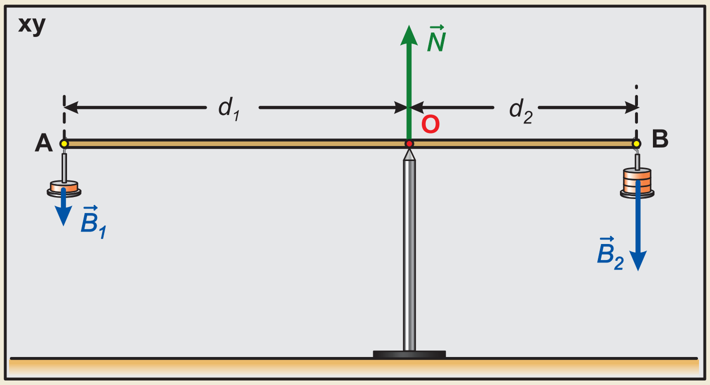
$$\sum M_{\text{εξωτ}, z} = 0$$

Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν **σύστημα**. Επιλύουμε το σύστημα και προσδιορίζουμε τις άγνωστες συνιστώσες $F_{\text{εξωτ}, x}$, $F_{\text{εξωτ}, y}$.

Παράδειγμα 2
Ισορροπία Ζυγαριάς

Στο επόμενο σχήμα, η **αβαρής** ράβδος μίας ζυγαριάς μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το σημείο **Ο**. Ο άξονας περιστροφής **Oz** είναι κάθετος στο επίπεδο **xy** της σελίδας και διέρχεται από το **Ο**.

Τα άκρα **Α** και **Β** της ράβδου απέχουν κατά d_1 και d_2 από το σημείο **Ο**. Στα άκρα **Α** και **Β** αναρτώνται δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 και η ράβδος ισορροπεί σε οριζόντια θέση. Θα υπολογίσουμε μία σχέση ανάμεσα στις μάζες m_1 και m_2 και τις αποστάσεις d_1 και d_2.



1. Θα θεωρήσουμε το **σύστημα ράβδου - σωμάτων**. Οι εξωτερικές δυνάμεις αυτού του συστήματος είναι τα βάρη $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ των δύο σωμάτων, και μία κατακόρυφη δύναμη $\vec{N}$ στη ράβδο από το σημείο στήριξης **Ο**. Οι φορείς όλων των δυνάμεων ανήκουν στο κατακόρυφο επίπεδο **xy**.

Σημείωση
Μπορούμε να θεωρήσουμε σαν σύστημα την οριζόντια ράβδο. Τότε, οι εξωτερικές δυνάμεις είναι η δύναμη $\vec{N}$, μία τάση σχοινιού $\vec{T}_1 = \vec{B}_1$ στο σημείο **Α**, και μία τάση σχοινιού $\vec{T}_2 = \vec{B}_2$ στο σημείο **Β**. Σας προτείνουμε να επιβεβαιώσετε ότι θα καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

2. Κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα **Oy** θεωρούμε θετική την κατεύθυνση προς τα πάνω. Εφαρμόζοντας την πρώτη συνθήκη ισορροπίας, βρίσκουμε:

$$\sum F_{\varepsilon\xi\omega\tau,\,y} = 0 \Rightarrow |\vec{N}| - m_1 g - m_2 g = 0 \Rightarrow |\vec{N}| = (m_1 + m_2)g$$

Η πιο πάνω σχέση χρησιμεύει στον υπολογισμό της άγνωστης δύναμης $\vec{N}$. Εάν όμως μας ενδιαφέρει απλώς να βρούμε μία σχέση ανάμεσα στις μάζες m_1 και m_2, **δεν** χρειαζόμαστε την πιο πάνω σχέση, αλλά χρησιμοποιούμε τη δεύτερη συνθήκη ισορροπίας (βήμα **(3)**).

3. Οι **ροπές** των τριών δυνάμεων ως προς το **Ο** είναι κάθετες στο επίπεδο **xy** (παράλληλες με τον άξονα περιστροφής **Oz**). Υπολογίζουμε ξεχωριστά την αλγεβρική τιμή κάθε ροπής.

- Ο φορέας της δύναμης $\vec{N}$ διέρχεται από το σημείο **Ο**. Άρα η ροπή της $\vec{N}$ μηδενίζεται: $M_{\vec{N}} = 0$.

- Επειδή το βάρος $\vec{B}_1$ στρέφει **αριστερόστροφα** τη ράβδο, η αντίστοιχη ροπή είναι **θετική.** Ο φορέας του βάρους $\vec{B}_1$ απέχει κατά d_1 από το **Ο.** Άρα, $M_{\vec{B}_1} = +|\vec{B}_1|d_1 = +m_1 g d_1$.
- Το βάρος $\vec{B}_2$ στρέφει **δεξιόστροφα** τη ράβδο, οπότε η αντίστοιχη ροπή είναι **αρνητική.** Ο φορέας του βάρους $\vec{B}_2$ απέχει κατά d_2 από το **Ο.** Άρα, $M_{\vec{B}_2} = -|\vec{B}_2|d_2 = -m_2 g d_2$.

Εφαρμόζοντας τη δεύτερη συνθήκη ισορροπίας, βρίσκουμε:

$$\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau,\, z} = 0 \Rightarrow m_1 g d_1 - m_2 g d_2 = 0 \Rightarrow m_1 g d_1 = m_2 g d_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

Από την τελευταία σχέση, συμπεραίνουμε τα εξής:

- Εάν οι μάζες είναι ίσες, το σημείο περιστροφής **Ο** πρέπει να βρίσκεται στη μέση της ράβδου: $m_1 = m_2 \Rightarrow d_1 = d_2$.
- Η ράβδος ισορροπεί, ακόμη και εάν οι μάζες **δεν** είναι ίσες. Η μεγαλύτερη μάζα πρέπει να τοποθετηθεί πιο κοντά στο σημείο περιστροφής **Ο**: $m_1 > m_2 \Rightarrow d_1 < d_2$.

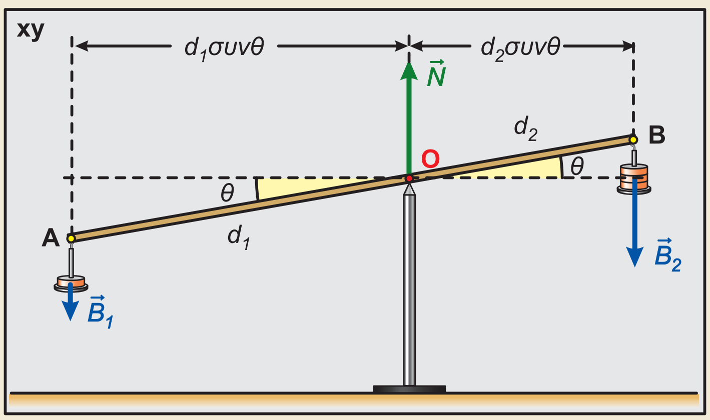
Αριθμητική Εφαρμογή

Έστω ότι τα δύο σώματα έχουν μάζες $m_1 = 0{,}50$ kg και $m_2 = 1{,}5$ kg. Συμπεραίνουμε ότι:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{0{,}50\ \text{kg}}{1{,}5\ \text{kg}} = 0{,}33$$

Παρατήρηση

Στο επόμενο σχήμα, η ράβδος ισορροπεί, σχηματίζοντας γωνία $\theta \neq 90^o$ με την οριζόντια διεύθυνση. Θα δείξουμε ότι **η συνθήκη μαζών-αποστάσεων παραμένει ίδια**.



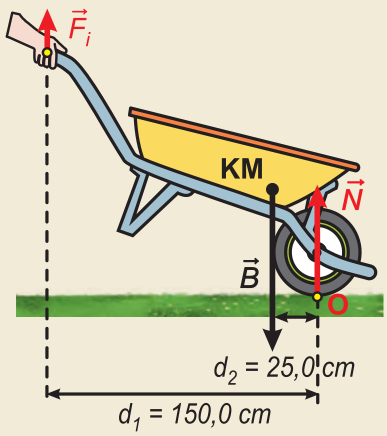
Οι αποστάσεις των φορέων των δυνάμεων $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ από το σημείο **Ο** γίνονται $d_1\sigma\upsilon\nu\theta$ και $d_2\sigma\upsilon\nu\theta$. Εφαρμογή της δεύτερης συνθήκης, δίνει:

$$\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau,\, z} = 0 \Rightarrow m_1 g d_1 \sigma\upsilon\nu\theta = m_2 g d_2 \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{d_2}{d_1}\ (\theta \neq 90^o)$$

Παράδειγμα 3
Το Καροτσάκι του Κηπουρού

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται ένα καροτσάκι κηπουρού, που χρησιμοποιείται για τη μεταφορά φορτίων. Το καροτσάκι μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν οριζόντιο άξονα, που διέρχεται από το σημείο επαφής **Ο** του τροχού με το έδαφος. Η συνολική μάζα του καροτσιού είναι $m = 30{,}0$ kg και το ΚΜ του βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση $d_2 = 25{,}0$ cm από το **Ο**.

Η δύναμη ανύψωσης $\vec{F_i}$ εφαρμόζεται σε οριζόντια απόσταση $d_1 = 150{,}0$ cm από το σημείο **Ο**. **Θα υπολογίσουμε τη δύναμη $\vec{F_i}$ σαν συνάρτηση του συνολικού βάρους του καροτσιού, όταν το καροτσάκι βρίσκεται σε στατική ισορροπία.**



1. Στο σύστημα του καροτσιού, εξωτερικές δύναμεις είναι η δύναμη $\vec{F_i}$, το βάρος $\vec{B}$ του καροτσιού και μία κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το έδαφος στο σημείο **Ο**. Όλες οι δυνάμεις είναι **κατακόρυφες**.

   Εάν δεν μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τη δύναμη $\vec{N}$, χρησιμοποιούμε μόνο τη δεύτερη συνθήκη ισορροπίας.

2. Θα υπολογίσουμε τις ροπές των δυνάμεων ως προς το σημείο **Ο**. Όλες οι ροπές έχουν διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της σελίδας (άξονας **Oz**).
   - Η ροπή της δύναμης $\vec{N}$ είναι ίση με μηδέν ως προς το σημείο **Ο**: $M_{\vec{N}} = 0$.
   - Η ροπή του βάρους είναι θετική: $M_{\vec{B}} = +mgd_2$.
   - Η ροπή της δύναμης $\vec{F_i}$ είναι αρνητική: $M_{\vec{F_i}} = -\left|\vec{F_i}\right| d_1$.

Η δεύτερη συνθήκη ισορροπίας δίνει:

$$\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau,\,z} = 0 \Rightarrow M_{\vec{N}} + M_{\vec{B}} + M_{\vec{F_i}} = 0 \Rightarrow 0 + mgd_2 - \left|\vec{F_i}\right| d_1 = 0 \Rightarrow \left|\vec{F_i}\right| = mg\,\frac{d_2}{d_1}$$

Η δύναμη $\vec{F_i}$ είναι **μικρότερη** από το βάρος του σώματος: $d_1 > d_2 \Rightarrow \left|\vec{F_i}\right| < mg$. Άρα, το καροτσάκι του κηπουρού έχει **μηχανικό πλεονέκτημα**.

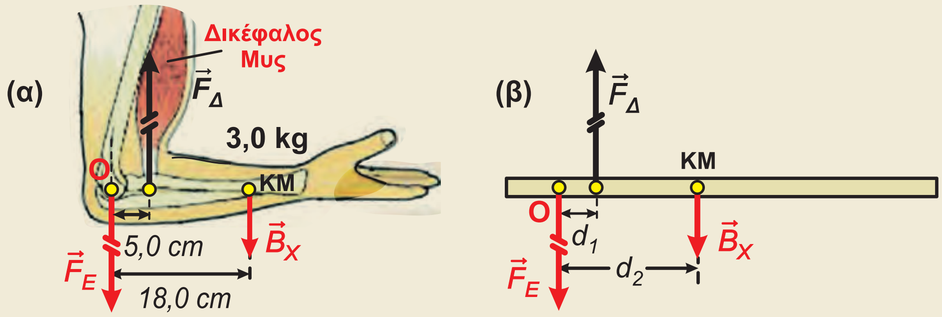
Αριθμητική Εφαρμογή
Αντικαθιστούμε $m = 30{,}0$ kg, $d_1 = 150{,}0$ cm και $d_2 = 25{,}0$ cm.

$$\left|\vec{F_i}\right| = mg \times \frac{25{,}0\ \text{cm}}{150{,}0\ \text{cm}} = \frac{mg}{6} = \frac{1}{6} \times (30{,}0\ \text{kg}) \times (9{,}81\ \text{m/s}^2) = 49{,}1\ \text{N}$$

Να παρατηρήσετε ότι καταβάλλουμε την ίδια δύναμη, με την οποία θα σηκώναμε μία μάζα 5,0 kg (το 1/6 της μάζας του καροτσιού).

Παράδειγμα 4
Ο Δικέφαλος Μυς

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται το μπροστινό μέρος του χεριού ενός ανθρώπου. Το χέρι μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν οριζόντιο άξονα, που διέρχεται από το σημείο **Ο** του αγκώνα. Όταν το μπροστινό μέρος ισορροπεί σε οριζόντια στάση, ασκούνται σε αυτό οι ακόλουθες δυνάμεις:



(i) Ο δικέφαλος μυς ασκεί μία κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}_\Delta$ με φορά προς τα πάνω, σε απόσταση $d_1 = 5{,}0$ cm από το σημείο **Ο**.

(ii) Το βάρος $\vec{B}_X$ του μπροστινού μέρους του χεριού δρα στο ΚΜ του (περίπου στη μέση του χεριού, σε απόσταση $d_2 = 18{,}0$ cm από τον αγκώνα).

(iii) Στο σημείο **Ο** του αγκώνα ασκείται μία δύναμη $\vec{F}_E$ από το υπόλοιπο σώμα.

Όλες οι δυνάμεις είναι κατακόρυφες και ανήκουν στο επίπεδο της σελίδας. Οι ροπές των δυνάμεων είναι κάθετες στο επίπεδο της σελίδας.

Θα εφαρμόσουμε τη δεύτερη συνθήκη ισορροπίας, ως προς το σημείο **Ο**. Η άγνωστη δύναμη $\vec{F}_E$ έχει μηδενική ροπή ως προς αυτό το σημείο. Για τις υπόλοιπες δυνάμεις, βρίσκουμε:

$$+d_1\left|\vec{F}_\Delta\right| - d_2\left|\vec{B}_X\right| = 0 \Rightarrow \left|\vec{F}_\Delta\right| = \frac{d_2}{d_1}\left|\vec{B}_X\right| = \frac{d_2}{d_1}(mg)$$

Να παρατηρήσετε ότι η δύναμη $\vec{F}_\Delta$ από τον δικέφαλο μυ είναι αρκετά μεγαλύτερη από το βάρος του χεριού:

$$\left|\vec{F}_\Delta\right| = \frac{18{,}0\text{ cm}}{5{,}0\text{ cm}} \times (mg) = 3{,}6 \times (mg)$$

Αυτό συμβαίνει επειδή ο μοχλοβραχίονας της $\vec{F}_\Delta$ είναι πολύ μικρότερος από τον μοχλοβραχίονα του βάρους $\vec{B}_X$.

Εάν ο άνθρωπος κρατά και ένα σώμα στην παλάμη του, η απαιτούμενη δύναμη $\vec{F}_\Delta$ γίνεται ακόμη μεγαλύτερη.

Εφαρμόζοντας την πρώτη συνθήκη ισορροπίας, βρίσκουμε τη δύναμη $\vec{F}_E$:

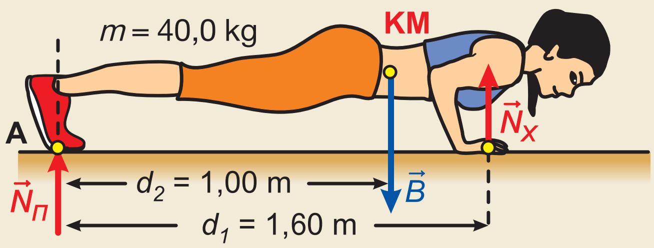
$$\left|\vec{F}_\Delta\right| - \left|\vec{F}_E\right| - \left|\vec{B}_X\right| = 0 \Rightarrow \left|\vec{F}_E\right| = \left|\vec{F}_\Delta\right| - \left|\vec{B}_X\right| = 2{,}6 \times (mg)$$

Η φορά της $\vec{F}_E$ είναι προς τα κάτω.

Παράδειγμα 5

Αθλήτρια που ισορροπεί σε οριζόντια στάση

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται μία αθλήτρια μάζας $m = 40{,}0$ kg, που ισορροπεί σε οριζόντια στάση. Εκτός από το βάρος $\vec{B}$ της αθλήτριας, στα χέρια και τα πόδια της ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις από το έδαφος. Θα συμβολίζουμε τη συνισταμένη δύναμη στα πόδια της αθλήτριας με $\vec{N}_{\Pi}$, και τη συνισταμένη δύναμη στα χέρια της με $\vec{N}_{X}$. **Θα υπολογίσουμε τις δυνάμεις $\vec{N}_{\Pi}$ και $\vec{N}_{X}$, εάν η αθλήτρια ισορροπεί.**



Εφαρμόζουμε την πρώτη συνθήκη ισορροπίας, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα πάνω:

$$\sum F_{\varepsilon\xi\omega\tau,\,y} = 0 \Rightarrow |\vec{N}_{\Pi}| - |\vec{B}| + |\vec{N}_{X}| = 0 \Rightarrow |\vec{N}_{\Pi}| = mg - |\vec{N}_{X}|$$

Οι φορείς των $\vec{N}_{\Pi}$, $\vec{B}$ και $\vec{N}_{X}$ ανήκουν στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο **xy**. Ο φορέας της $\vec{N}_{\Pi}$ τέμνει το πάτωμα στο σημείο **A**. Θα υπολογίσουμε τις ροπές όλων των δυνάμεων ως προς το **A**.

Όλες οι ροπές έχουν διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο **xy** (το επίπεδο της σελίδας).

- Η δύναμη $\vec{N}_{\Pi}$ διέρχεται από το σημείο **A**. Άρα η ροπή της μηδενίζεται: $M_{\vec{N}_{\Pi}} = 0$.
- Η δύναμη $\vec{N}_{X}$ στρέφει **αριστερόστροφα** το σώμα της αθλήτριας, οπότε η αντίστοιχη ροπή είναι **θετική**. Ο φορέας της $\vec{N}_{X}$ απέχει κατά d_1 από το **A**. Άρα, $M_{\vec{N}_{X}} = +|\vec{N}_{X}|\,d_1$.
- Το βάρος $\vec{B}$ στρέφει **δεξιόστροφα** το σώμα της αθλήτριας, οπότε η αντίστοιχη ροπή είναι **αρνητική**. Ο φορέας του βάρους απέχει κατά d_2 από το **A**. Άρα, $M_{\vec{B}} = -mg\,d_2$.

Εφαρμόζοντας τη δεύτερη συνθήκη ισορροπίας, βρίσκουμε:

$$\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau,\,z} = 0 \Rightarrow |\vec{N}_{X}|\,d_1 - mg\,d_2 = 0 \Rightarrow |\vec{N}_{X}| = mg\,\frac{d_2}{d_1}$$

Να παρατηρήσετε ότι το μέτρο της $\vec{N}_{X}$ είναι **μικρότερο** από το βάρος του σώματος: $d_2 < d_1 \Rightarrow |\vec{N}_{X}| < mg$.

Για να υπολογίσουμε το μέτρο της δύναμης $\vec{N}_{\Pi}$, αντικαθιστούμε το μέτρο $|\vec{N}_{X}|$ στην πρώτη συνθήκη ισορροπίας:

$$|\vec{N}_{\Pi}| = mg - |\vec{N}_{X}| = mg\left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right)$$

Η αθλήτρια ασκεί στο έδαφος με τα χέρια της συνολική δύναμη $\vec{F}_{X} = -\vec{N}_{X}$ (ζεύγος δράσης - αντίδρασης). Με τα πόδια της ασκεί στο έδαφος συνολική δύναμη $\vec{F}_{\Pi} = -\vec{N}_{\Pi}$ (ζεύγος δράσης - αντίδρασης).

Αριθμητική Εφαρμογή

Έστω ότι η αθλήτρια έχει μάζα 40,0 kg και οι αποστάσεις d_1 = 1,60 m και d_2 = 1,00 m. Το μέτρο της δύναμης $\vec{N}_X$ ισούται με:

$$\left|\vec{N}_X\right| = (mg) \times \frac{1{,}00\ \text{m}}{1{,}60\ \text{m}} = \frac{5}{8} \times (mg) = \frac{5}{8} \times (40{,}0\ \text{kg}) \times (9{,}81\ \text{m/s}^2) = 245\ \text{N}$$

(Η δύναμη αυτή μοιράζεται στα δύο χέρια της αθλήτριας).

Το μέτρο της $\vec{N}_\Pi$ ισούται με:

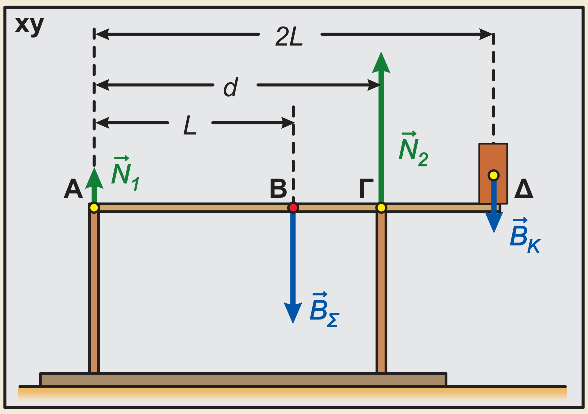
$$\left|\vec{N}_\Pi\right| = \frac{3}{8} \times (mg) = \frac{3}{8} \times (40{,}0\ \text{kg}) \times (9{,}81\ \text{m/s}^2) = 147\ \text{N}$$

(Η δύναμη αυτή μοιράζεται στα δύο πόδια της αθλήτριας).

Παράδειγμα 6

Ισορροπία Πλατφόρμας

Η οριζόντια σανίδα του επόμενου σχήματος έχει μάζα m_Σ = 1,00 kg και μήκος $2L$ = 2,00 m. Τα σημεία **Α** και **Γ** της σανίδας στηρίζονται σε κατακόρυφους στύλους. Η απόσταση **ΑΓ** ισούται με d = 1,50 m. Στο άκρο **Δ** της σανίδας ισορροπεί ένα κιβώτιο μάζας m_K. **Θα υπολογίσουμε τη μέγιστη μάζα του κιβωτίου, για την οποία δεν ανατρέπεται η σανίδα.**



1. Θα θεωρήσουμε το σύστημα σανίδας - κιβωτίου.
2. Οι **εξωτερικές** δυνάμεις είναι το βάρος $\vec{B}_\Sigma$ της σανίδας, οι δυνάμεις $\vec{N}_1$ και $\vec{N}_2$ από τους στύλους, και το βάρος $\vec{B}_K$ του κιβωτίου. Όλες οι δυνάμεις είναι κατακόρυφες.
3. Θα υπολογίσουμε τις **ροπές** των δυνάμεων ως προς το σημείο Γ. Όλες οι ροπές είναι κάθετες στο κατακόρυφο επίπεδο **xy**.
   - Η ροπή της δύναμης $\vec{N}_1$ είναι **αρνητική**: $M_{\vec{N}_1} = -\left|\vec{N}_1\right| d$.
   - Η ροπή της δύναμης $\vec{N}_2$ είναι ίση με μηδέν: $M_{\vec{N}_2} = 0$.

- Η ροπή της $\vec{B}_\Sigma$ είναι **θετική**: $M_{\vec{B}_\Sigma} = +|\vec{B}_\Sigma|(d-L) = +m_\Sigma g\,(d-L)$.
- Η ροπή της $\vec{B}_K$ είναι **αρνητική**: $M_{\vec{B}_K} = -|\vec{B}_K|(2L-d) = -m_K g\,(2L-d)$.

Εφαρμόζοντας τη δεύτερη συνθήκη ισορροπίας, βρίσκουμε:

$$\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau,\,z} = 0 \Rightarrow -|\vec{N}_1|\,d + m_\Sigma g\,(d-L) - m_K g\,(2L-d) = 0 \Rightarrow m_\Sigma g\,(d-L) - m_K g\,(2L-d) = |\vec{N}_1|\,d$$

Η σανίδα αρχίζει να ανατρέπεται όταν το σημείο **Α** χάσει επαφή με τον κατακόρυφο στύλο. Μόλις η σανίδα αρχίζει να ανατρέπεται, η δύναμη $\vec{N}_1$ **μηδενίζεται.** Άρα:

$$m_\Sigma g\,(d-L) - m_K g\,(2L-d) = 0 \Rightarrow m_\Sigma (d-L) = m_K (2L-d) \Rightarrow m_K = m_\Sigma \frac{d-L}{2L-d}$$

Αριθμητική Εφαρμογή

Αντικαθιστώντας $m_\Sigma = 1{,}00$ kg, $L = 1{,}00$ m και $d = 1{,}50$ m, βρίσκουμε:

$$m_K = \frac{1{,}50-1{,}00}{2{,}00-1{,}50} \times (1{,}00\text{ kg}) = 1{,}00\text{ kg}$$

Σημειώσεις

- Για να μην ανατρέπεται η σανίδα όταν το κιβώτιο έχει μάζα $m_K > m_\Sigma \frac{d-L}{2L-d}$, πρέπει η δύναμη $\vec{N}_1$ να αποκτήσει φορά προς τα κάτω (δηλαδή το σημείο **Α** να είναι καρφωμένο στον στύλο).
- Έστω ότι η μάζα m_K είναι δεδομένη. Με το ίδιο σκεπτικό προσδιορίζουμε την **ελάχιστη απόσταση** d, στην οποία πρέπει να τοποθετηθεί το στήριγμα **Γ** για να μην ανατρέπεται η σανίδα:

$$m_\Sigma g\,(d-L) - m_K g\,(2L-d) \geq 0 \Rightarrow (m_\Sigma + m_K)d \geq (m_\Sigma + 2m_K)L \Rightarrow$$

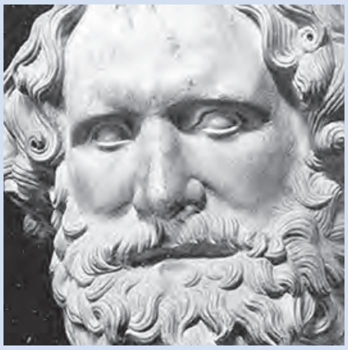
$$d \geq \frac{m_\Sigma + 2m_K}{m_\Sigma + m_K} L \Rightarrow d_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = \frac{m_\Sigma + 2m_K}{m_\Sigma + m_K} L$$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

1.10.4. Έστω ότι η σανίδα είναι καρφωμένη στον κατακόρυφο στύλο στο άκρο **Α.** Τι φορά αποκτά η δύναμη $\vec{N}_1$, εάν η απόσταση $d > \frac{m_\Sigma + 2m_K}{m_\Sigma + m_K} L$;

1.10.5. Να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση $d_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}$, εάν $m_K = 2{,}50$ kg.

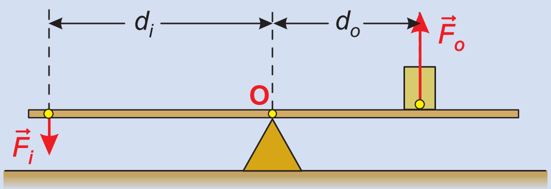
ΕΝΘΕΤΟ: ΤΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΙΔΗ ΜΟΧΛΩΝ

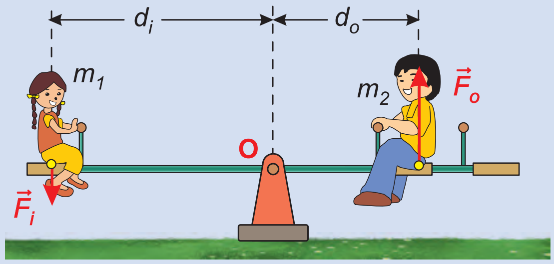


Οι μοχλοί είναι περιστρεφόμενες μηχανικές διατάξεις, που λειτουργούν με βάση το φυσικό μέγεθος της **ροπής**. Η εφαρμογή δύναμης $\vec{F}_i$ **σε** έναν μοχλό προκαλεί την άσκηση δύναμης $\vec{F}_o$ **από** τον μοχλό.

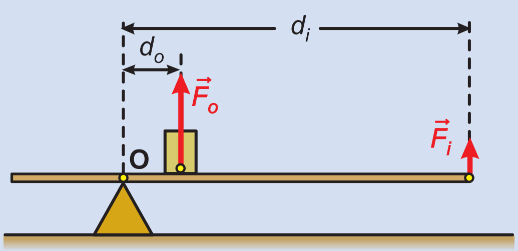
Ο σπουδαίος αρχαίος Έλληνας Φυσικός, Μαθηματικός και Μηχανικός Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (287-212 π.Χ.) εξήγησε τη λειτουργία των μοχλών. Για να τονίσει τη χρησιμότητά τους, είχε πει: *«Δῶς μοι πᾷ στῶ καὶ τὰν Γᾶν κινάσω»*: **Δος μου που να σταθώ και θα κινήσω τη Γη.**

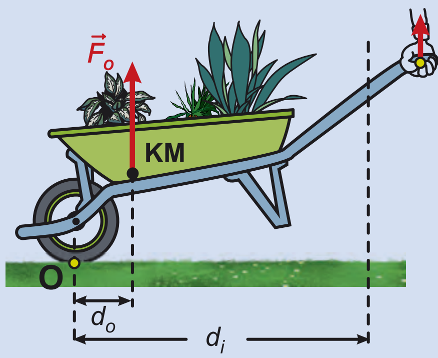
Στους μοχλούς **πρώτου είδους**, το σημείο περιστροφής **Ο** παρεμβάλλεται ανάμεσα στα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων $\vec{F}_i$ και $\vec{F}_o$. Παραδείγματα μοχλών πρώτου είδους είναι η ζυγαριά και η τραμπάλα. Ένας μοχλός πρώτου είδους ασκεί **μεγαλύτερη δύναμη** από αυτή που δέχεται: $|\vec{F}_o| > |\vec{F}_i|$ για $d_i > d_o$.



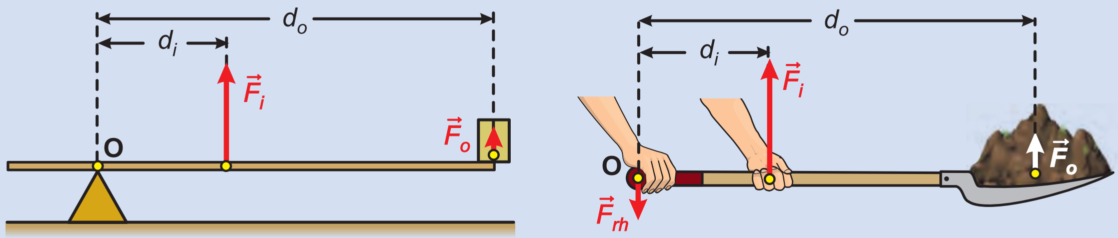


Στους μοχλούς **δευτέρου είδους**, το σημείο εφαρμογής της $\vec{F}_o$ παρεμβάλλεται ανάμεσα στο σημείο περιστροφής **Ο** και στο σημείο εφαρμογής της $\vec{F}_i$. Παραδείγματα μοχλών δευτέρου είδους είναι το καροτσάκι του κηπουρού και ο καρυοθραύστης. Ένας μοχλός δευτέρου είδους ασκεί πάντοτε **μεγαλύτερη δύναμη** από αυτή που δέχεται: $|\vec{F}_o| > |\vec{F}_i|$.





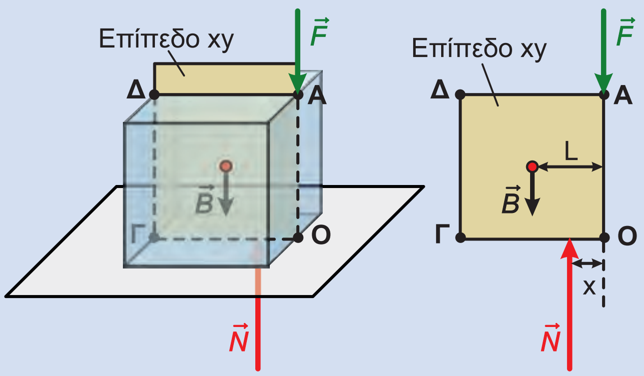
Στους μοχλούς **τρίτου είδους**, το σημείο εφαρμογής της $\vec{F}_i$ παρεμβάλλεται ανάμεσα στο σημείο περιστροφής **Ο** και στο σημείο εφαρμογής της $\vec{F}_o$. Παραδείγματα μοχλών τρίτου είδους είναι το φτυάρι, το καλάμι του ψαρέματος, το ακόντιο του αθλητή, ο δικέφαλος μυς. Ένας μοχλός τρίτου είδους ασκεί πάντοτε **μικρότερη δύναμη** από αυτή που δέχεται: $|\vec{F}_i| > |\vec{F}_o|$.



ΕΝΘΕΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΚΑΘΕΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ

Το επόμενο σχήμα απεικονίζει έναν ομογενή κύβο μάζας m και ακμής $2L$, που ισορροπεί πάνω σε ένα οριζόντιο πάτωμα. Στο σημείο **Α** του κύβου ασκούμε μία κατακόρυφη **γνωστή** εξωτερική δύναμη $\vec{F}$, με φορά προς τα κάτω. Στον κύβο δρα επίσης μία κάθετη εξωτερική δύναμη $\vec{N}$ από το πάτωμα, με φορά προς τα επάνω. Στην πραγματικότητα, η δύναμη $\vec{N}$ είναι η συνισταμένη ενός μεγάλου αριθμού από στοιχειώδεις δυνάμεις, που ασκούν σημεία του πατώματος σε σημεία του κύβου. Εάν ο κύβος βρίσκεται σε **στατική ισορροπία**, **μπορούμε από τις συνθήκες ισορροπίας να προσδιορίσουμε το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης δύναμης $\vec{N}$.**

Το σημείο **Α** εφαρμογής της $\vec{F}$ ανήκει στο κατακόρυφο επίπεδο **xy**, που διέρχεται από το ΚΜ του κύβου και τέμνει τις ακμές του κύβου στα μέσα τους **Α**, **Ο**, **Γ** και **Δ**. Στο δεξί σχήμα απεικονίζεται το επίπεδο **xy** σε πρόσοψη. Το σημείο εφαρμογής της $\vec{N}$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΟΓ, σε απόσταση x από το σημείο **Ο**.



Επειδή ο κύβος ηρεμεί, η συνισταμένη εξωτερική δύναμη μηδενίζεται:

$$\sum F_{\varepsilon\xi\omega\tau,\,y} = 0 \Rightarrow |\vec{N}| - mg - |\vec{F}| = 0 \Rightarrow |\vec{N}| = mg + |\vec{F}|$$

Οι **ροπές** των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το **Ο** είναι κάθετες στο επίπεδο xy. Θα υπολογίσουμε ξεχωριστά την αλγεβρική τιμή κάθε ροπής:

- Ο φορέας της δύναμης $\vec{F}$ διέρχεται από το σημείο **Ο**. Άρα η ροπή της $\vec{F}$ μηδενίζεται: $M_{\vec{F}} = 0$.

- Επειδή το βάρος $\vec{B}$ στρέφει **αριστερόστροφα** τον κύβο, η ροπή του βάρους είναι **θετική.** Ο φορέας του βάρους $\vec{B}$ απέχει κατά L από το **O.** Άρα, $M_{\vec{B}} = +|\vec{B}|L = +mgL$.
- Η δύναμη $\vec{N}$ στρέφει **δεξιόστροφα** τον κύβο, οπότε η αντίστοιχη ροπή είναι **αρνητική.** Ο φορέας της $\vec{N}$ απέχει κατά x από το **O.** Άρα, $M_{\vec{N}} = -|\vec{N}|x$.

Εφαρμόζοντας τη δεύτερη συνθήκη ισορροπίας, βρίσκουμε:

$$\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau,\,z} = 0 \Rightarrow mgL - |\vec{N}|x = 0 \Rightarrow x = \frac{mg}{|\vec{N}|}L = \frac{mg}{mg + |\vec{F}|}L$$

Εάν η $\vec{F}$ μηδενισθεί, το σημείο εφαρμογής της κάθετης δύναμης $\vec{N}$ βρίσκεται στο μέσο της ευθείας **ΟΓ** (κάτω από το ΚΜ): $x = \frac{mg}{mg}L = L$. Εάν $\vec{F} \neq \vec{0}$, το σημείο εφαρμογής της $\vec{N}$ μετατοπίζεται προς τον φορέα της $\vec{F}$.

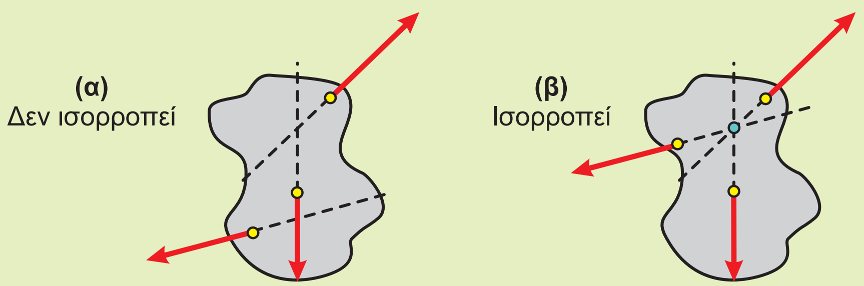
Παραδείγματα με Ομοεπίπεδες, όχι Παράλληλες Δυνάμεις

Θα αναφέρουμε πρώτα μία πολύ χρήσιμη ιδιότητα:

Στο σώμα της **Εικόνας 1-7** δρουν **τρεις ομοεπίπεδες**, μη παράλληλες δυνάμεις. **Για να ισορροπεί το σώμα, οι φορείς των δυνάμεων πρέπει να διέρχονται από το ίδιο σημείο.** Εάν δεν ισχύει αυτό, το άθροισμα των ροπών των τριών δυνάμεων δεν μηδενίζεται:

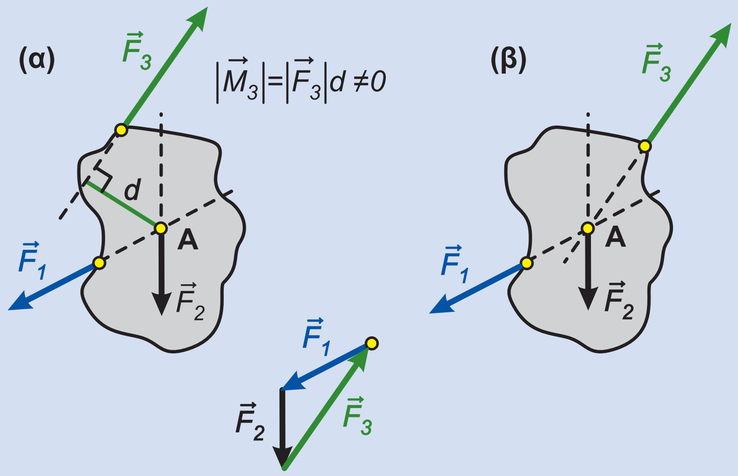
$$\sum \vec{M} \neq \vec{0}$$

Εικόνα 1-7



ΕΝΘΕΤΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται ένα σώμα το οποίο ισορροπεί υπό την επίδραση των τριών ομοεπίπεδων δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$. Το διανυσματικό άθροισμα $\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$. Για να ισορροπεί το σώμα, πρέπει επίσης το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων να μηδενίζεται **ως προς οποιοδήποτε σημείο**: $\sum \vec{M}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = \vec{0}$.



Έστω ότι οι φορείς των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ τέμνονται στο σημείο **A.** Ας υποθέσουμε ότι ο φορέας της $\vec{F}_3$ **δεν** διέρχεται από το **A** (σχήμα **(α)**). Οι ροπές των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ μηδενίζονται ως προς το **A**, αλλά η ροπή της $\vec{F}_3$ είναι μη μηδενική, ως προς το ίδιο σημείο:

$$|\vec{M}_3| = |\vec{F}_3| d \neq 0$$

Άρα, η δεύτερη συνθήκη ισορροπίας **δεν** ικανοποιείται.

Για να ικανοποιείται η δεύτερη συνθήκη, ο φορέας της $\vec{F}_3$ πρέπει να διέρχεται επίσης από το σημείο **A** (σχήμα **(β)**).

Σημείωση

Στα προβλήματα ισορροπίας θα συναντήσετε δυνάμεις που ασκούνται από διάφορα σώματα, όπως σχοινιά, ράβδους, δοκούς, πατώματα, τοίχους. Μπορείτε να προσδιορίζετε τη διεύθυνση αυτών των δυνάμεων με τους εξής κανόνες:

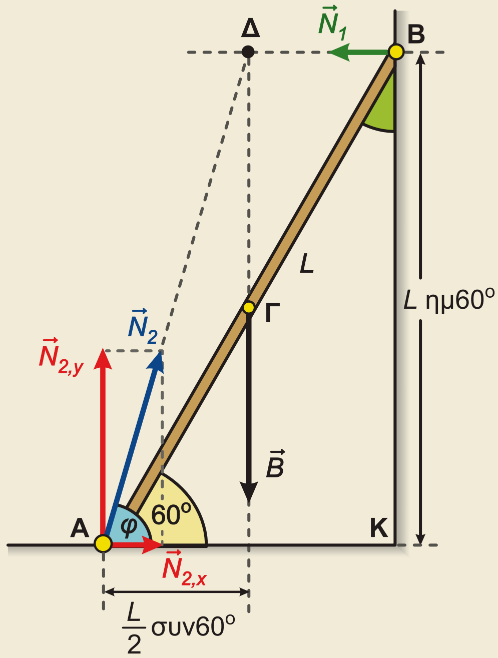
- Η τάση ενός σχοινιού είναι πάντοτε ελκτική, με διεύθυνση κατά μήκος του σχοινιού.
- Η δύναμη από έναν **λείο** τοίχο ή πάτωμα είναι κάθετη σε αυτό. Εάν ο τοίχος ή το πάτωμα είναι τραχύ, η δύναμη μπορεί να έχει οποιαδήποτε διεύθυνση.
- Η δύναμη από μία στερεά ράβδο μπορεί να είναι ελκτική ή απωστική, και να έχει οποιαδήποτε διεύθυνση. Δεν είναι αναγκαστικά παράλληλη στη ράβδο.
- Εάν σε ένα σώμα που ισορροπεί δρουν **τρεις ομοεπίπεδες, μη παράλληλες** δυνάμεις, **απαιτούμε οι φορείς των δυνάμεων να τέμνονται**.

Παράδειγμα 1

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται ένα λεπτό ραβδί μάζας m και μήκους L, το οποίο εφάπτεται με ένα **τραχύ** πάτωμα και έναν **λείο** κατακόρυφο τοίχο. Στο ραβδί ασκείται το βάρος του $\vec{B}$, η δύναμη $\vec{N}_1$ από τον τοίχο και η δύναμη $\vec{N}_2$ από το πάτωμα. Εάν το ραβδί **ισορροπεί** υπό γωνία $\theta = 60^o$ με το οριζόντιο πάτωμα, θα υπολογίσουμε τις δυνάμεις $\vec{N}_1$ και $\vec{N}_2$.

Οι φορείς των τριών δυνάμεων ανήκουν στο κατακόρυφο επίπεδο **xy**, που διέρχεται από το ΚΜ του ραβδιού. Σύμφωνα με την προηγούμενη απόδειξη, οι φορείς των τριών δυνάμεων πρέπει να **τέμνονται**.

Το βάρος $\vec{B}$ έχει σημείο εφαρμογής στο μέσο του ραβδιού **Γ** και κατακόρυφη διεύθυνση. Επειδή ο τοίχος είναι λείος, η δύναμη $\vec{N}_1$ έχει οριζόντια διεύθυνση (κάθετη στον τοίχο). Προεκτείνοντας τους φορείς των $\vec{B}$ και $\vec{N}_1$, βρίσκουμε ότι τέμνονται στο σημείο **Δ**.



Αναγκαστικά, ο φορέας της δύναμης $\vec{N}_2$ διέρχεται επίσης από το **Δ**. Να **παρατηρήσετε** ότι η δύναμη $\vec{N}_2$ **δεν** είναι κάθετη στο πάτωμα. Αυτό συμβαίνει επειδή το πάτωμα είναι **τραχύ**. Υπό την επίδραση του βάρους $\vec{B}$, το ραβδί τείνει να περιστραφεί δεξιόστροφα ως προς το σημείο Α. Το άκρο **Α** του ραβδιού τείνει να κινηθεί προς τα αριστερά, και υφίσταται μία οριζόντια δύναμη στατικής τριβής $\vec{f}_s = \vec{N}_{2,x}$ από το πάτωμα, με κατεύθυνση προς τα δεξιά, και μία κατακόρυφη δύναμη $\vec{N}_{2,y}$, με κατεύθυνση προς τα πάνω. Η $\vec{N}_2$ είναι η **συνισταμένη** των δύο αυτών δυνάμεων:

$$\vec{N}_2 = \vec{N}_{2,x} + \vec{N}_{2,y}$$

Επειδή οι δυνάμεις $\vec{B}$, $\vec{N}_1$ και $\vec{N}_2$ δεν είναι παράλληλες, εφαρμόζουμε την πρώτη συνθήκη ξεχωριστά στις κατευθύνσεις x και y:

$$\sum F_{\varepsilon\xi\omega\tau,\,x} = 0 \Rightarrow -\left|\vec{N}_1\right| + \left|\vec{N}_{2,x}\right| = 0 \Rightarrow \left|\vec{N}_1\right| = \left|\vec{N}_{2,x}\right|$$

$$\sum F_{\varepsilon\xi\omega\tau,\,y} = 0 \Rightarrow \left|\vec{N}_{2,y}\right| - mg = 0 \Rightarrow \left|\vec{N}_{2,y}\right| = mg$$

Από τις πιο πάνω εξισώσεις υπολογίσθηκε η συνιστώσα $\vec{N}_{2,y}$. Για να υπολογίσουμε τη συνιστώσα $\vec{N}_{2,x}$ και τη δύναμη $\vec{N}_1$, χρειαζόμαστε μία επιπλέον εξίσωση. Αυτή προκύπτει από τη δεύτερη συνθήκη ισορροπίας.

Όταν χρησιμοποιούμε τη δεύτερη συνθήκη, υπολογίζουμε συνήθως τις ροπές ως προς το σημείο εφαρμογής μίας από τις άγνωστες δυνάμεις. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, οποιοδήποτε από τα σημεία **Α** και **Β** είναι κατάλληλο. Θα υπολογίσουμε τις ροπές των διαφόρων δυνάμεων ως προς το σημείο **Α**.

Όλες οι ροπές έχουν διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο **xy** (το επίπεδο της σελίδας).

- Η δύναμη $\vec{N}_1$ στρέφει **αριστερόστροφα** τη ράβδο, οπότε η αντίστοιχη ροπή είναι **θετική**. Ο φορέας της $\vec{N}_1$ απέχει κατά $L\eta\mu 60^o$ από το **Α**. Άρα $M_{\vec{N}_1} = +\left|\vec{N}_1\right|(L\eta\mu 60^o)$.
- Το βάρος $\vec{B}$ στρέφει **δεξιόστροφα** τη ράβδο, οπότε η αντίστοιχη ροπή είναι **αρνητική**. Ο φορέας του $\vec{B}$ απέχει κατά $(L/2)\sigma\upsilon\nu 60^o$ από το **Α**. Άρα, $M_{\vec{B}} = -\left|\vec{B}\right|(L/2)\sigma\upsilon\nu 60^o$.
- Η δύναμη $\vec{N}_2$ έχει μηδενική ροπή ως προς το **Α**: $M_{\vec{N}_2} = 0$.

Εφαρμόζοντας τη δεύτερη συνθήκη ισορροπίας, βρίσκουμε:

$$\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau,\,z} = 0 \Rightarrow \left|\vec{N}_1\right|(L\eta\mu 60^o) - mg\,(L/2)\sigma\upsilon\nu 60^o = 0 \Rightarrow \left|\vec{N}_1\right| = \frac{\sigma\upsilon\nu 60^o}{2\eta\mu 60^o}\,mg = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,mg$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της πρώτης συνθήκης, προκύπτει ότι

$$\left|\vec{N}_{2,x}\right| = \left|\vec{N}_1\right| = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,mg$$

Η γωνία $\varphi = \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K}$, που σχηματίζει η δύναμη $\vec{N}_2$ με το οριζόντιο πάτωμα, προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\left|\vec{N}_{2,y}\right|}{\left|\vec{N}_{2,x}\right|} = \frac{mg}{(mg)/2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \tau o\xi\ \varepsilon\varphi(2\sqrt{3}) = 74^o$$

Το μέτρο της $\vec{N}_2$ ισούται με

$$\left|\vec{N}_2\right| = \sqrt{\left|\vec{N}_{2,x}\right|^2 + \left|\vec{N}_{2,y}\right|^2} = \sqrt{\left(\frac{mg}{2\sqrt{3}}\right)^2 + (mg)^2} = \sqrt{\frac{13}{12}}\,mg$$

Σημείωση

Σας προτείνουμε να εφαρμόσετε τη δεύτερη συνθήκη ως προς το σημείο **Β**, και να επιβεβαιώσετε ότι καταλήγετε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

1.10.6. Εάν το πάτωμα και ο τοίχος ήταν λεία, θα μπορούσε να ισορροπεί η ράβδος στην ίδια πλάγια διεύθυνση;

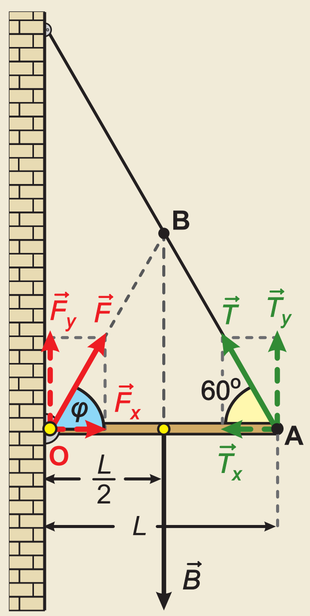
1.10.7. Εάν το πάτωμα ήταν λείο, ποια δύναμη θα έπρεπε να ασκεί ο τοίχος στη ράβδο ώστε η ράβδος να ισορροπεί στην ίδια πλάγια διεύθυνση;

Παράδειγμα 2

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται μία ράβδος μάζας m και μήκους L, η οποία **ισορροπεί** σε οριζόντια θέση. Το άκρο **O** της ράβδου είναι στερεωμένο στον τοίχο μέσω άρθρωσης, ενώ το άκρο **A** είναι συνδεδεμένο με ένα τεντωμένο σχοινί, που σχηματίζει γωνία $\theta = 60^o$ με την οριζόντιο. Θα υπολογίσουμε τις δυνάμεις που δρουν στη ράβδο.

Οι εξωτερικές δυνάμεις της ράβδου είναι το βάρος της $\vec{B}$, η δύναμη $\vec{T}$ από το σχοινί και η δύναμη $\vec{F}$ από τον τοίχο. Οι τρεις αυτές δυνάμεις είναι **ομοεπίπεδες**: Οι φορείς τους ανήκουν στο κατακόρυφο επίπεδο **xy**, που διέρχεται από το ΚΜ του ραβδιού. Σύμφωνα με την προηγούμενη απόδειξη, οι φορείς των τριών δυνάμεων πρέπει να **τέμνονται**.

Το βάρος $\vec{B}$ έχει σημείο εφαρμογής στο μέσο της ράβδου, και κατακόρυφη διεύθυνση. Η τάση $\vec{T}$ του σχοινιού έχει διεύθυνση **κατά μήκος του σχοινιού**. Άρα, οι φορείς των δυνάμεων $\vec{B}$ και $\vec{T}$ τέμνονται στο σημείο **B** του σχοινιού. Ο φορέας της $\vec{F}$ διέρχεται αναγκαστικά από το **B**.



Εφαρμόζοντας την πρώτη συνθήκη στις διευθύνσεις x και y, βρίσκουμε:

$$\sum F_{\varepsilon\xi\omega\tau,\, x} = 0 \Rightarrow |\vec{F}_x| - |\vec{T}_x| = 0 \Rightarrow |\vec{F}_x| = |\vec{T}_x|$$

$$\sum F_{\varepsilon\xi\omega\tau,\, y} = 0 \Rightarrow |\vec{F}_y| + |\vec{T}_y| - mg = 0$$

Θα εφαρμόσουμε τη δεύτερη συνθήκη ως προς το σημείο **O**. Όλες οι ροπές έχουν διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο **xy** (το επίπεδο της σελίδας).

- Η δύναμη $\vec{F}$ έχει μηδενική ροπή ως προς το **O**: $M_{\vec{F}} = 0$.
- Το βάρος $\vec{B}$ στρέφει **δεξιόστροφα** τη ράβδο, οπότε η αντίστοιχη ροπή είναι **αρνητική**: $M_{\vec{B}} = -mg(L/2)$.
- Η δύναμη $\vec{T}$ στρέφει **αριστερόστροφα** τη ράβδο, οπότε έχει **θετική** ροπή ως προς το **O**. Η συνιστώσα $\vec{T}_x$ δεν συνεισφέρει στη ροπή, επειδή ο φορέας της διέρχεται από το **O**. Άρα: $M_{\vec{T}} = |\vec{T}_y| L$.

Εφαρμόζοντας τη δεύτερη συνθήκη ισορροπίας, βρίσκουμε:

$$\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau,\, z} = 0 \Rightarrow |\vec{T}_y| L - mg(L/2) = 0 \Rightarrow |\vec{T}_y| = \frac{mg}{2}$$

Από το αποτέλεσμα της πρώτης συνθήκης, βρίσκουμε:

$$|\vec{F}_y| = mg - |\vec{T}_y| = \frac{mg}{2} = |\vec{T}_y|$$

Οι συνιστώσες της δύναμης $\vec{T}$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{|\vec{T}_y|}{|\vec{T}_x|} = \varepsilon\varphi 60^o \Rightarrow |\vec{T}_x| = \frac{|\vec{T}_y|}{\varepsilon\varphi 60^o} = \frac{mg}{(2\sqrt{3})}$$

Ο φορέας της $\vec{F}$ σχηματίζει επίσης γωνία 60^o με την οριζόντιο (το τρίγωνο ΒΟΑ είναι ισοσκελές, με πλευρές $OB = AB$ και γωνίες $B\hat{O}A = O\hat{A}B = 60^o$).

Οι δυνάμεις $\vec{T}$ και $\vec{F}$ έχουν ίσα μέτρα

$$|\vec{F}| = |\vec{T}| = \sqrt{|\vec{T}_x|^2 + |\vec{T}_y|^2} = \sqrt{\left(\frac{mg}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{mg}{2}\right)^2} = \frac{mg}{\sqrt{3}}$$

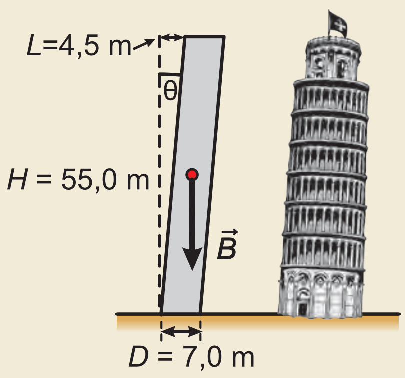
Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση:	
α	Ένα σώμα παραμένει ακίνητο όταν η συνισταμένη δύναμη μηδενίζεται.	
β	Ένα σώμα παραμένει ακίνητο όταν η συνισταμένη ροπή μηδενίζεται.	
γ	Ένα σώμα περιστρέφεται με σταθερή (ή μηδενική) γωνιακή ταχύτητα όταν το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων μηδενίζεται.	
2	Ένα σώμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ως προς ακλόνητο άξονα. Συμπεραίνουμε ότι:	
α	Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων στο σώμα μηδενίζεται.	
β	Το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων ως προς οποιοδήποτε σημείο του χώρου μηδενίζεται.	

3	Εάν η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος μεταβάλλεται, το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων στο σώμα δεν μηδενίζεται.	
4	Όταν ένα σώμα βρίσκεται σε στατική ισορροπία, η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του είναι μηδενική.	
5	Όταν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων σε ένα σώμα **δεν** μηδενίζεται, το σώμα **δεν** βρίσκεται σε στατική ισορροπία.	
6	Όταν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων σε ένα σώμα μηδενίζεται, το σώμα βρίσκεται σε στατική ισορροπία.	

Ασκήσεις

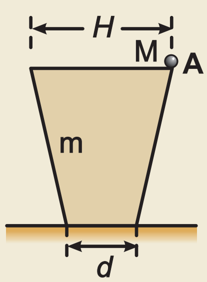


1 Ο φημισμένος πύργος της Πίζας ισορροπεί σε πλάγια θέση ως προς την κατακόρυφο.

Το ύψος του πύργου είναι 55,0 m και η οριζόντια μετατόπιση της οροφής του πύργου, σε σχέση με την κατακόρυφο, είναι L = 4,5 m.

Α. Υποθέτοντας ότι ο πύργος είναι ομογενής, να εξηγήσετε γιατί ισορροπεί.

Β. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της γωνίας θ, για την οποία ο πύργος μπορεί να ισορροπεί.



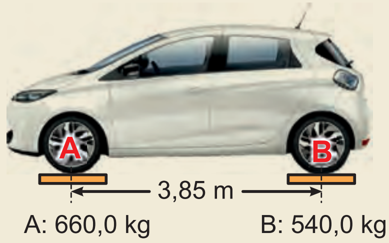
2 Ένα ομογενές χάρτινο κουτί μάζας m ισορροπεί όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Οι δύο βάσεις του κουτιού έχουν μήκη H και d.

Α. Να εξηγήσετε γιατί το κουτί δεν ανατρέπεται.

Β. Στο άκρο **Α** του κουτιού τοποθετούμε προσεκτικά μία μεταλλική σφαίρα μάζας M και αμελητέων διαστάσεων, ***χωρίς να γείρουμε το κουτί***. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της μάζας M, για την οποία το κουτί μπορεί να ισορροπεί.

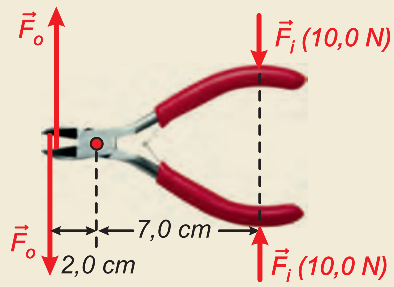
Υπόδειξη
Να εξετάσετε για ποια τιμή της μάζας M, το ΚΜ του συστήματος μετακινείται έξω από τη βάση στήριξης.

3 Ο καθηγητής της Φυσικής σας έχει αναθέσει να υπολογίσετε τη θέση του ΚΜ του νέου του αυτοκινήτου. Η μέθοδος προσδιορισμού του ΚΜ, σύμφωνα με την οποία θα αναρτήσετε το αυτοκίνητο από δύο διαφορετικά σημεία, είναι κάπως επικίνδυνη σε αυτή την περίπτωση. Ο μηχανικός της γειτονιάς σας εισηγείται μία εναλλακτική μέθοδο:



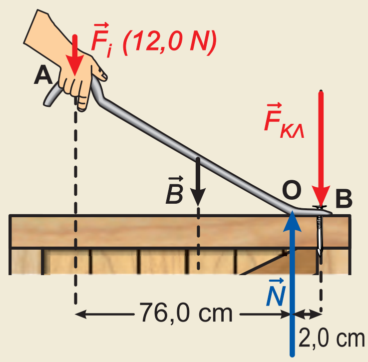
Σταθμεύετε το αυτοκίνητο, έτσι ώστε οι μπροστινοί και πίσω τροχοί να πατούν στις ζυγαριές **A** και **B**. Η απόσταση ανάμεσα στα σημεία επαφής των τροχών είναι $L = 3{,}85$ m και οι ενδείξεις των ζυγαριών είναι 660,0 kg και 540,0 kg. Σε ποιά θέση ανάμεσα στα σημεία επαφής **A** και **B** βρίσκεται το ΚΜ του αυτοκινήτου;

4 Το εργαλείο του διπλανού σχήματος χρησιμοποιείται για την κοπή μεταλλικών συρμάτων. Οι λαβές μπορούν να περιστρέφονται γύρω από το σημείο **O**. Επειδή οι λαβές έχουν πολύ μεγαλύτερο μήκος από τις λεπίδες, η δύναμη $\vec{F}_i$, που εφαρμόζουμε στις λαβές, πολλαπλασιάζεται στις λεπίδες.



Εάν η εφαρμοζόμενη δύναμη σε κάθε λαβή έχει μέτρο 10,0 N να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_o$ που ασκεί κάθε λεπίδα.

5 Το διπλανό σχήμα απεικονίζει έναν λοστό μάζας 1,0 kg, ο οποίος αφαιρεί ένα καρφί από ένα ξύλινο πάτωμα.



Ο λοστός ακουμπά στο πάτωμα στο σημείο **O** και στο καρφί στο σημείο **B**. Εάν πιέσουμε προς τα κάτω το άκρο **A** του λοστού με μία κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}_i$ μέτρου 12,0 N, το άκρο **B** του λοστού τείνει να κινηθεί προς τα πάνω, και δέχεται μία δύναμη $\vec{F}_{ΚΛ}$ από το καρφί. Το πάτωμα ασκεί στον λοστό τη δύναμη $\vec{N}$.

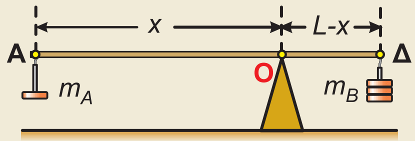
A. Να προσδιορίσετε τις εξωτερικές δυνάμεις στον ***λοστό***. Ποιές από αυτές τις δυνάμεις έχουν μη μηδενική ροπή ως προς το **O**;

B. Να υπολογίσετε το μέτρο της $\vec{F}_{ΚΛ}$, εάν ο λοστός αρχίζει να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Γ. Να προσδιορίσετε το μέτρο και την κατεύθυνση της δύναμης, που ασκεί ο λοστός στο καρφί.

Σημείωση

Να υποθέσετε ότι το ΚΜ του λοστού είναι στο μέσο της οριζόντιας απόστασης μεταξύ των **A** και **B**.

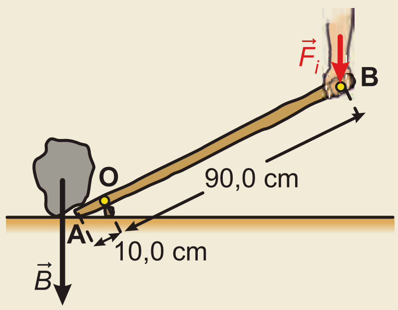


6 Το διπλανό σχήμα απεικονίζει τη ράβδο μίας ζυγαριάς, η οποία έχει μήκος L = 1,20 m και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το σημείο στήριξης **Ο**.

Από τα άκρα **Α** και **Β** της ράβδου αναρτώνται δύο σώματα με μάζες m_{A} = 0,25 kg και m_{B} = 0,75 kg. Να προσδιορίσετε την απόσταση x από το σημείο **Α**, στην οποία πρέπει να τοποθετηθεί το σημείο στήριξης **Ο** για να ισορροπεί η ράβδος εάν:

Α. Η ράβδος είναι αβαρής.

Β. Η ράβδος είναι ομογενής και έχει μάζα m_{P} = 0,20 kg.



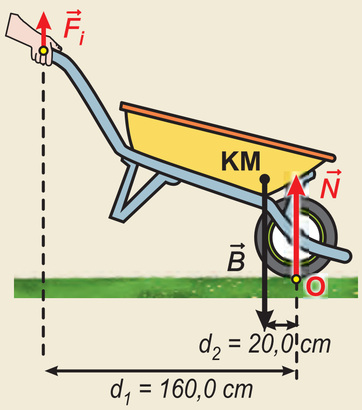
7 Ένας άνθρωπος θέλει να σηκώσει ένα βράχο μάζας m = 125,0 kg χρησιμοποιώντας μία αβαρή δοκό, όπως στο διπλανό σχήμα. Η δοκός έχει μήκος L = 1,00 m και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το σημείο **Ο**, το οποίο απέχει κατά d = 10,0 cm από το άκρο της **Α**.

Ο άνθρωπος ασκεί μία κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}_i$ στο άκρο **Β**.

Α. Να προσδιορίσετε όλες τις **εξωτερικές** δυνάμεις, που δρουν στο ***σύστημα δοκού-βράχου***. Ποιές από αυτές ασκούν ροπή ως προς το σημείο **Ο**;

Β. Ποιό πρέπει να είναι το μέτρο της $\vec{F}_i$, έτσι ώστε ο άνθρωπος να σηκώσει τον βράχο με σταθερή ταχύτητα; Να συγκρίνετε το μέτρο $|\vec{F}_i|$ με το βάρος του βράχου.

Γ. Το αποτέλεσμά σας εξαρτάται από τη γωνία, που σχηματίζει η δοκός με το οριζόντιο έδαφος;



8 Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται ένα καροτσάκι μάζας 10,0 kg, το οποίο μπορεί να περιστρέφεται ως προς το σημείο στήριξης **Ο** με το έδαφος.

Τοποθετούμε στο καροτσάκι επιπρόσθετο φορτίο 60,0 kg. Το ΚΜ του καροτσιού-φορτίου βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση d_2 = 20,0 cm από το σημείο Ο.

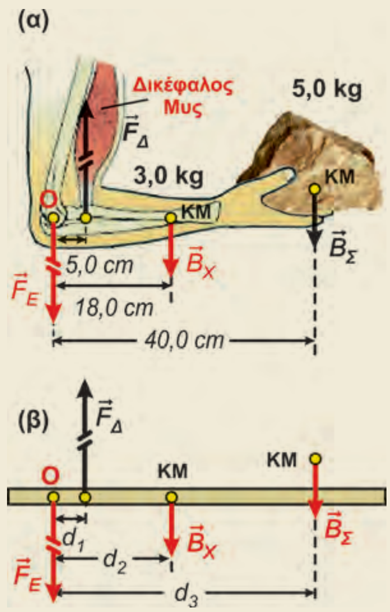
Α. Να προσδιορίσετε τις εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα καροτσιού-φορτίου.

Β. Να υπολογίσετε την κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}_i$, που χρειάζεται να ασκούμε στο καρότσι για να βρίσκεται σε στατική ισορροπία.

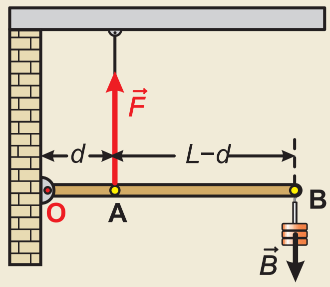
9 Στο διπλανό σχήμα **(α)** απεικονίζεται το χέρι ενός ανθρώπου, όπως στο **Παράδειγμα 4**. Το χέρι μπορεί να περιστρέφεται ως προς το σημείο **Ο** του αγκώνα.

Ο δικέφαλος μυς ασκεί μία κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}_{\Delta}$ στο χέρι, σε απόσταση 5,0 cm από το σημείο **Ο**. Το μπροστινό τμήμα του χεριού έχει μάζα 3,0 kg και το ΚΜ του τμήματος βρίσκεται σε απόσταση 18,0 cm από το σημείο **Ο**. Ο άνθρωπος κρατά έναν βράχο μάζας 5,0 kg. Το ΚΜ του βράχου βρίσκεται σε απόσταση 40,0 cm από το σημείο **Ο**.

Το σχήμα **(β)** δείχνει ένα απλοποιημένο μοντέλο του χεριού. Εάν το χέρι ισορροπεί σε οριζόντια στάση, να υπολογίσετε την απαιτούμενη δύναμη από τον δικέφαλο μύ και να την συγκρίνετε με το συνολικό βάρος $B_{X} + B_{\Sigma}$.



10 Το διπλανό σχήμα απεικονίζει μία δοκό μήκους $L = 0,75$ m, η οποία μπορεί να περιστρέφεται μέσω άρθρωσης ως προς το άκρο της **Ο**. Η ράβδος αναρτάται με σχοινί από το σημείο **Α**, που απέχει κατά $d = 0,25$ m από το άκρο **Ο**. Στο δεύτερο άκρο **Β** της ράβδου αναρτάται ένα σώμα μάζας $m = 2,4$ kg.



Να προσδιορίσετε τη δύναμη $\vec{F}$, εάν η δοκός ισορροπεί και είναι:

Α. αβαρής.

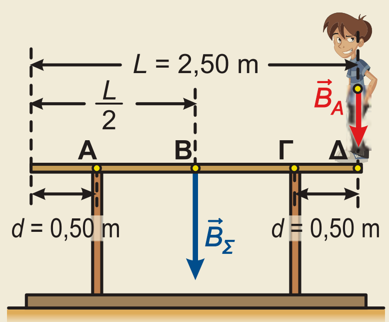
Β. ομογενής, με μάζα $m_{\Delta} = 1,2$ kg.

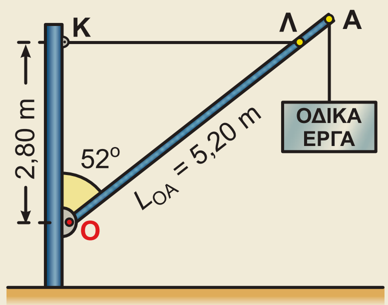
Να συγκρίνετε τη δύναμη $\vec{F}$ με το βάρος του σώματος. Τι παρατηρείτε;

11 Μία οριζόντια σανίδα μήκους $L = 2,50$ m και μάζας $m_{\Sigma} = 20,0$ kg στηρίζεται στα σημεία **Α** και **Γ** σε δύο κατακόρυφους πασσάλους. Τα σημεία **Α** και **Γ** απέχουν κατά $d = 0,50$ m από τα άκρα της σανίδας.

Α. Ένας νέος στέκεται στο άκρο **Δ** της σανίδας. Ποιά είναι η μέγιστη μάζα m_{A} που μπορεί να έχει ο νέος, χωρίς να ανατρέπεται η σανίδα;

Β. Εάν ο νέος έχει μάζα 50,0 kg, ποια είναι η μικρότερη απόσταση x από το σημείο **Δ**, στην οποία μπορεί να σταθεί χωρίς να ανατρέπεται η σανίδα;





12 Το διπλανό σχήμα απεικονίζει έναν πάσσαλο **ΟΑ** μάζας $m_{Π} = 24{,}0$ kg, από τον οποίο έχει αναρτηθεί ένα σήμα τροχαίας με μάζα $m_{Σ} = 8{,}0$ kg.

Να υποθέσετε ότι ο πάσσαλος **ΟΑ** είναι ομογενής και βρίσκεται σε στατική ισορροπία. Να υπολογίσετε την τάση στο σημείο **Λ** του πασσάλου από το συρματόσχοινο **ΚΛ**, και τη δύναμη στο σημείο **Ο** από τον κατακόρυφο στύλο.

Συσχέτιση Εννοιών των Ενοτήτων 1.1 - 1.10.

1.1. Σημειακό / Μη Σημειακό / Στερεό Σώμα

1.2. Μεταφορική / Περιστροφική Κίνηση Στερεού Σώματος

1.3. Ροπή Δύναμης **ως προς σημείο**

1.4. Συνιστώσα Ροπής Δύναμης **κατά μήκος άξονα**

1.5. Θεώρημα Ροπών **Εφαρμογή του Θεωρήματος σε συντρέχουσες δυνάμεις**

1.6. - 1.7. Ζεύγος Δυνάμεων. Παραδείγματα

1.8. 1ος Νόμος

$$\sum M_{εξωτ,\,z} = 0 \Leftrightarrow \omega = σταθερή$$

1.9. - 1.10. Συνθήκες Στατικής Ισορροπίας

$$\sum \vec{F}_{εξωτ} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_{εξωτ} = \vec{0}$$

Απαντήσεις Ελέγχου Κατανόησης Εννοιών

1.1.1. **(γ), (δ), (στ).** Τα υπόλοιπα δεν διατηρούν το σχήμα τους.

1.1.2. Όχι, διότι δεν έχει σταθερό σχήμα.

1.2.1. **(α) (ζ)** μεταφορική, **(β)**, **(γ)**, **(δ)**, **(ε)**, **(στ)**, **(η)**, **(θ)** περιστροφική.

1.2.2. Ο έλικας, ο κύλινδρος και η μπάλα μετακινούνται και ταυτόχρονα περιστρέφονται ως προς το ΚΜ.

1.3.1. **Α**, **Β**.

1.3.2. Στο σχήμα **(β)**, η δύναμη δεν μεταβάλλεται, αλλά το σημείο εφαρμογής της μετακινείται πάνω στον φορέα της (από το **Α** στο **Β**). Άρα, η ροπή δεν μεταβάλλεται. Οι δύο μαθητές ανοίγουν την πόρτα με την ίδια ευκολία.

1.4.1. Η ροπή είναι μηδενική και στις δύο περιπτώσεις.

1.7.1. Το θεώρημα των ροπών δεν ισχύει για ζεύγος δυνάμεων (δεν είναι συντρέχουσες).

1.7.2. Όχι, διότι η συνισταμένη δύναμη μηδενίζεται.

1.7.3. Μηδέν.

1.7.4. Ένα ζεύγος δυνάμεων, που δρουν σε αντιδιαμετρικά σημεία του μεγαλύτερου τιμονιού, ασκούν μεγαλύτερη ροπή.

1.7.5. Το κατσαβίδι ασκεί δεδομένη ροπή στη βίδα για να την περιστρέψει. Εάν το κατασβίδι έχει σχήμα σταυρού, η λεπίδα του ασκεί δύο ζεύγη δυνάμεων στη βίδα. Το μέτρο της ροπής κάθε ζεύγους ισούται με το μισό του μέτρου της συνολικής ροπής. Συνεπώς, τα μέτρα των δυνάμεων του ζεύγους είναι μικρότερα κατά 50%.

1.7.6. Όχι. Το άθροισμα του ζεύγους και μίας τρίτης δύναμης $\vec{F}_1$ δίνει μη μηδενική συνισταμένη: $\sum\vec{F} = \vec{F} - \vec{F} + \vec{F}_1 \neq \vec{0}$. Η συνισταμένη των τριών δυνάμεων επιταχύνει το ΚΜ του σώματος.

1.7.7. Ασκώντας ένα δεύτερο ζεύγος δυνάμεων με αντίθετη ροπή από το πρώτο.

1.8.1. Το ΚΜ του ραβδιού είναι ακίνητο, άρα $\sum \vec{F}_{εξωτ} = \vec{0}$. Η γωνιακή ταχύτητα του ραβδιού είναι σταθερή, οπότε $\sum M_{εξωτ} = 0$. Τα **Ι** και **ΙΙ** είναι σωστά.

1.8.2. Το ΚΜ του ραβδιού εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Άρα, υπάρχει συνισταμένη εξωτερική δύναμη, που ενεργεί σαν κεντρομόλος: $\sum \vec{F}_{εξωτ} = \vec{F}_{K} \neq \vec{0}$. Η δύναμη αυτή ασκείται στο σημείο **Α** του ραβδιού από τον άξονα περιστροφής. Το ραβδί κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, άρα το άθροισμα των ροπών εξωτερικών δυνάμεων μηδενίζεται ως προς τον άξονα περιστροφής: $\sum M_{εξωτ} = 0$. Το **Ι** λάθος/ το **ΙΙ** σωστό.

1.8.3. Το **Ι**.

1.8.4. Επειδή η συνισταμένη εξωτερική δύναμη μηδενίζεται και το ΚΜ ήταν αρχικά ακίνητο, το ΚΜ παραμένει ακίνητο. Επειδή το άθροισμα των ροπών δεν μηδενίζεται, το σώμα περιστρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση. Το ΚΜ πρέπει να ανήκει στον άξονα περιστροφής για να μην περιστρέφεται. (Εάν το ΚΜ περιστρέφονταν, η συνισταμένη εξωτερική δύναμη θα ήταν κεντρομόλος και δεν θα μηδενίζονταν).

1.10.1. Όταν το ΚΜ του ανθρώπου βρεθεί έξω από τη βάση στήριξής του στο έδαφος (τα πόδια του), η συνολική ροπή του βάρους και της κάθετης δύναμης από το έδαφος ανατρέπει τον άνθρωπο.

1.10.2. Το βάζο **Β** έχει μικρότερη βάση στήριξης. Για να ανατραπεί το **Β**, αρκεί να γείρει κατά μικρότερη γωνία σε σύγκριση με το **Α**.

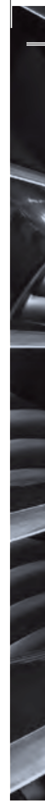
1.10.3. Το ΚΜ του κιβωτίου **Β** απέχει περισσότερο από το έδαφος. Για να μετακινηθεί το ΚΜ του **Β** έξω από τη βάση στήριξης, αρκεί να γείρουμε το **Β** κατά μικρότερη γωνία, σε σύγκριση με το **Α**.

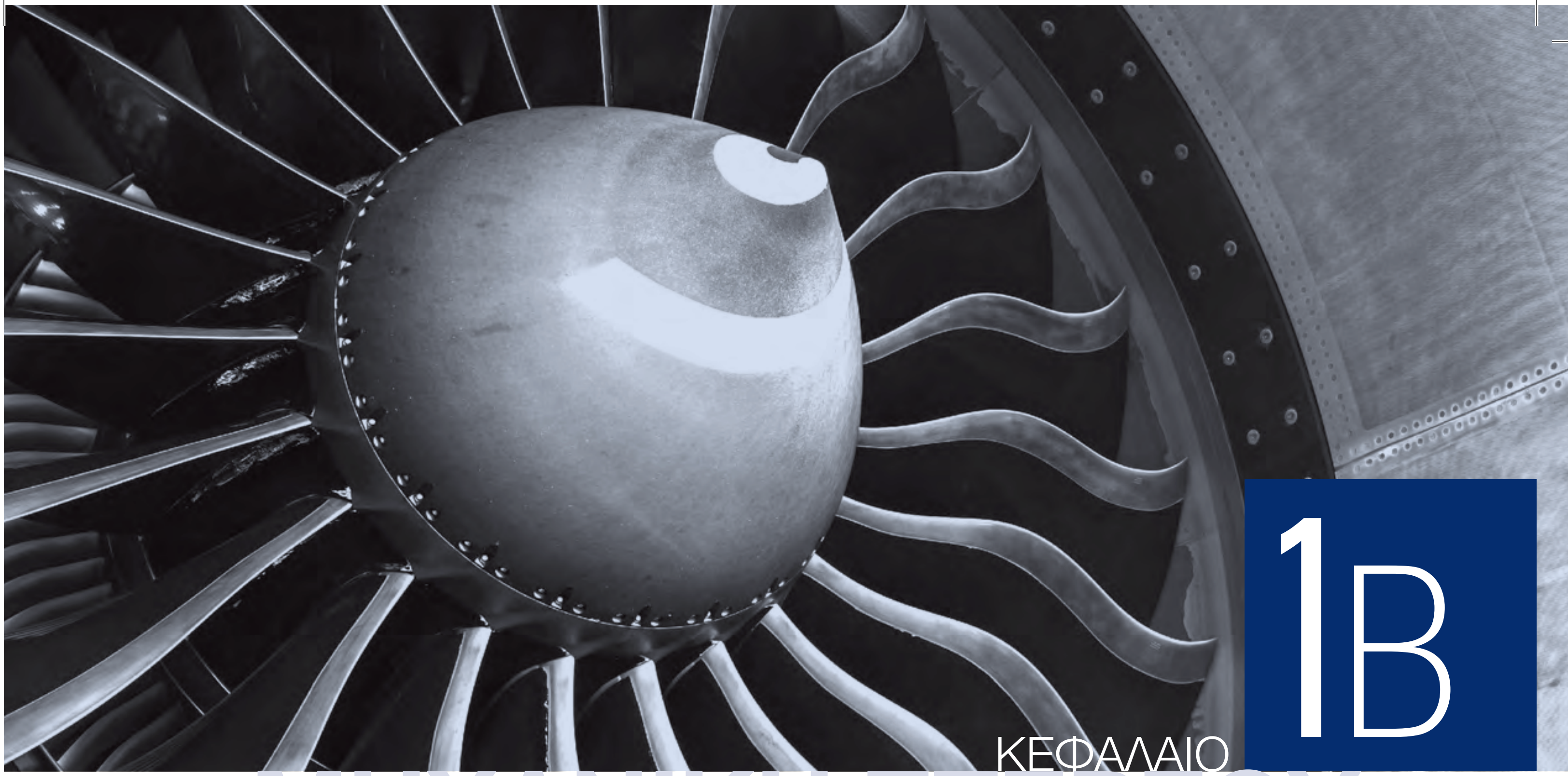
1.10.4. Προς τα κάτω (προσπαθεί να συγκρατήσει τη σανίδα, ασκώντας αριστερόστροφη ροπή).

1.10.5. $d_{ελαχ} = \dfrac{1{,}00 + 5{,}00}{1{,}00 + 2{,}50} \times (1{,}00 \text{ m}) = 1{,}71 \text{ m}.$

1.10.6. Όχι, γιατί η δύναμη $\vec{N}_2$ θα γίνονταν κατακόρυφη, και οι φορείς των τριών ομοεπίπεδων, μη παράλληλων δυνάμεων $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ και $\vec{B}$ δεν θα τέμνονταν.

1.10.7. Στη ράβδο ασκείται μία κατακόρυφη δύναμη $\vec{N}_2$ από το πάτωμα και το βάρος της. Για να ισορροπεί χρειάζεται να ασκηθεί μία κατακόρυφη δύναμη στο σημείο **Β** από τον κατακόρυφο τοίχο, με φορά προς τα πάνω. Οι τρεις δυνάμεις είναι παράλληλες, και η σκάλα ισορροπεί όπως μία ζυγαριά.





ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1Β

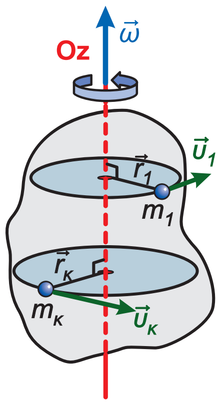
ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Ενότητες 1.11.-1.19.

Στις Ενότητες 1.11.-1.19. του Κεφαλαίου 1Β:

- **Υπολογίζουμε** την κινητική ενέργεια της περιστροφικής κίνησης.
- **Ορίζουμε** τη **ροπή αδράνειας** σώματος ως προς άξονα περιστροφής.
- **Διατυπώνουμε** τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση.
- **Συζητούμε** τη φυσική σημασία της ροπής αδράνειας.
- **Εφαρμόζουμε** τον Δεύτερο Νόμο σε προβλήματα περιστροφικής κίνησης.
- **Εφαρμόζουμε** την Αρχή της Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας σε προβλήματα περιστροφικής κίνησης.
- **Ορίζουμε** το φυσικό μέγεθος της **Στροφορμής** υλικού σημείου ως προς σημείο του χώρου.
- **Υπολογίζουμε** τη στροφορμή στερεού σώματος κατά μήκος ακλόνητου άξονα περιστροφής.
- **Διατυπώνουμε** τη **γενικευμένη έκφραση** του Δεύτερου Νόμου για την περιστροφική κίνηση.
- **Διατυπώνουμε** τις συνθήκες, κάτω από τις οποίες η **συνολική** στροφορμή ενός σώματος, ή συστήματος σωμάτων, **διατηρείται**.
- **Εφαρμόζουμε** την Αρχή της Διατήρησης της Στροφορμής σε συστήματα σωμάτων και σε σώματα με μεταβαλλόμενη ροπή αδράνειας.

1.11. Η Κινητική Ενέργεια Περιστροφής



Το διπλανό σχήμα απεικονίζει ένα σώμα συνολικής μάζας m, το οποίο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από τον άξονα **Oz.** Χωρίζουμε το σώμα σε έναν μεγάλο αριθμό από στοιχειώδη τμήματα 1, 2, ..., k, ..., με μάζες m_1, m_2, ..., m_k, ... Το τμήμα k έχει μάζα m_k και βρίσκεται σε απόσταση r_k από τον άξονα περιστροφής. Καθώς το σώμα περιστρέφεται, το τμήμα k διαγράφει κυκλική τροχιά με γραμμική ταχύτητα $\upsilon_k = \omega r_k$. Η κινητική ενέργεια του τμήματος k ισούται με

$$E_{\text{κιν},\,k} = \frac{1}{2} m_k \upsilon_k^2 = \frac{1}{2} m_k (\omega r_k)^2 = \frac{1}{2} m_k r_k^2 \omega^2$$

Για να υπολογίσουμε τη **συνολική** περιστροφική κινητική ενέργεια του σώματος, προσθέτουμε τις κινητικές ενέργειες όλων των στοιχειωδών τμημάτων του:

$$E_{\text{κιν, περ}} = \sum_k E_{\text{κιν},\,k} = \sum_k \left(\frac{1}{2} m_k r_k^2 \omega^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_k m_k r_k^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Να παρατηρήσετε ότι η περιστροφική κινητική ενέργεια:

- Είναι ανάλογη με το τετράγωνο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του σώματος.

- Εξαρτάται από την **κατανομή της μάζας** του σώματος γύρω από τον άξονα περιστροφής, μέσω του αθροίσματος

$$I = \sum_k m_k r_k^2$$

  Εάν η μάζα του σώματος είναι συγκεντρωμένη κοντά στον άξονα περιστροφής, η κινητική ενέργεια είναι μικρότερη.

Το άθροισμα I ονομάζεται **ροπή αδράνειας** του σώματος και το μελετούμε στην επόμενη ενότητα.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

1.11.1. Πώς μεταβάλλεται η περιστροφική κινητική ενέργεια ενός σώματος, εάν διπλασιάσουμε τη γωνιακή του ταχύτητα;

1.11.2. Δύο σώματα περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Είναι σωστό να συμπεράνουμε ότι έχουν την ίδια περιστροφική κινητική ενέργεια;

1.12. Η Ροπή Αδράνειας

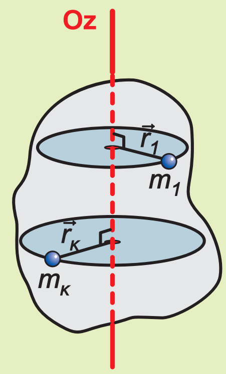
Η ροπή αδράνειας ενός σώματος ως προς έναν **συγκεκριμένο άξονα** περιστροφής, ορίζεται από την επόμενη σχέση:

Ροπή Αδράνειας Στερεού Σώματος ως προς Άξονα Περιστροφής

$$I = \sum_k m_k r_k^2$$

όπου m_k είναι η μάζα και r_k είναι η απόσταση του στοιχειώδους τμήματος k από τον άξονα περιστροφής.

Στο διεθνές σύστημα SI, η ροπή αδράνειας εκφράζεται σε μονάδες kg m^2.



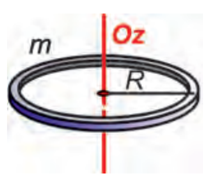
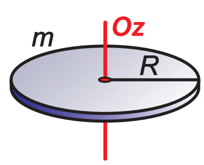
Παρατηρήσεις

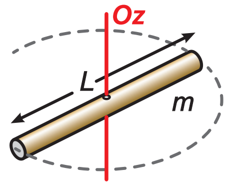
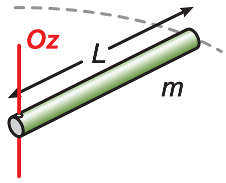
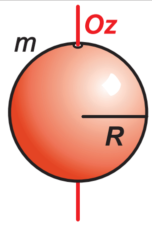
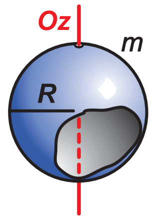
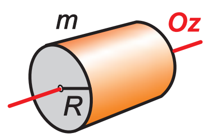
- Η ροπή αδράνειας ενός σώματος εξαρτάται από τη **μάζα** του σώματος, το **σχήμα** του, και τον **άξονα** περιστροφής. Όσο πιο κοντά στον άξονα περιστροφής βρίσκεται το μεγαλύτερο ποσοστό της μάζας του σώματος, τόσο μικρότερη είναι η ροπή αδράνειας του σώματος.
- Η **ροπή αδράνειας υλικού σημείου** μάζας m ορίζεται με τον ίδιο τρόπο: $I = mr^2$.

Ροπή Αδράνειας διαφόρων Στερεών Σωμάτων

Η ροπή αδράνειας αντιπροσωπευτικών στερεών σωμάτων ως προς συγκεκριμένους άξονες περιστροφής καταγράφεται στον **Πίνακα 1-1**.

Πίνακας 1-1
Ροπή Αδράνειας διαφόρων Ομογενών Στερεών.

Ομογενές Στερεό Σώμα και Άξονας Περιστροφής		Ροπή Αδράνειας
Δακτύλιος μάζας m και ακτίνας R, ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του.		mR^2
Δίσκος μάζας m και ακτίνας R, ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του.		$\frac{1}{2}mR^2$

Ράβδος μάζας m και μήκους L, ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της.		$\frac{1}{12}mL^2$
Ράβδος μάζας m και μήκους L, ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το άκρο της.		$\frac{1}{3}mL^2$
Συμπαγής σφαίρα μάζας m και ακτίνας R, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της.		$\frac{2}{5}mR^2$
Λεπτός σφαιρικός φλοιός μάζας m και ακτίνας R, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του.		$\frac{2}{3}mR^2$
Συμπαγής κύλινδρος μάζας m, με βάση ακτίνας R, ως προς άξονα συμμετρίας κάθετο στη βάση του.		$\frac{1}{2}mR^2$

Φυσική Σημασία της Ροπής Αδράνειας

Συγκρίνοντας την περιστροφική κινητική ενέργεια $E_{\text{κιν, περ}} = \frac{1}{2}I\omega^2$ και τη μεταφορική κινητική ενέργεια $E_{\text{κιν, μετ}} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$, παρατηρούμε ότι η ροπή αδράνειας I είναι αντίστοιχη με το μέγεθος της μάζας m στη μεταφορική κίνηση. Θυμίζουμε ότι η μάζα ενός σώματος εκφράζει την τάση του να αντιδρά σε μεταβολές της μεταφορικής του ταχύτητας. Αντίστοιχα:

Η ροπή αδράνειας εκφράζει την τάση ενός σώματος να αντιδρά σε μεταβολές της γωνιακής του ταχύτητας. Σώματα με **μεγάλη** ροπή αδράνειας ως προς κάποιον άξονα περιστροφής τείνουν να διατηρούν σταθερή (ή μηδενική) γωνιακή ταχύτητα ως προς αυτόν τον άξονα.

Η φυσική σημασία της ροπής αδράνειας θα αναδειχθεί περισσότερο από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα για την Περιστροφική Κίνηση, τον οποίο συζητούμε στην **Ενότητα 1.13**.

Παράδειγμα 1
Υπολογισμός της Κινητικής Ενέργειας Περιστρεφόμενου Δίσκου.

Ένας μεταλλικός δίσκος έχει μάζα 50,0 kg και ακτίνα 1,0 m και περιστρέφεται με συχνότητα 600,0 rpm γύρω από κάθετο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο του.

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον κάθετο άξονα συμμετρίας του είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$. Άρα, η κινητική ενέργεια του δίσκου είναι: $E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{4}mR^2\omega^2$. Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε:

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{4}(50{,}0\ \text{kg}) \times (1{,}0\ \text{m})^2 \times \left(\frac{600{,}0 \times 2\pi\ \text{rad}}{60\ \text{s}}\right)^2 = \frac{1}{4} \times 50{,}0 \times (1{,}0)^2 \times (20{,}00 \times \pi)^2\ \text{kg}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 4{,}9 \times 10^4\ \text{J}$$

Ερώτηση
Έστω ότι ο ίδιος δίσκος εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση. Με ποιά ταχύτητα θα έπρεπε να κινείται, ώστε να έχει την ίδια κινητική ενέργεια;

$$E^{\mu\varepsilon\tau}_{\kappa\iota\nu} = E^{\pi\varepsilon\rho}_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{4}mR^2\omega^2 \Rightarrow \upsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega R = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(20{,}00 \times \pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) \times (1{,}0\ \text{m}) = 45\frac{\text{m}}{\text{s}} = 160\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

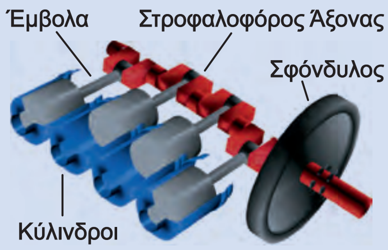
Η ταχύτητα αυτή είναι πολύ μεγάλη. Άρα, ένας περιστρεφόμενος δίσκος μπορεί να αποθηκεύσει μεγάλη ποσότητα κινητικής ενέργειας. Αυτή η ιδιότητα βρίσκει εφαρμογή στον σφόνδυλο, που επεξηγείται στο επόμενο **Ένθετο**.

ΕΝΘΕΤΟ: Ο ΣΦΟΝΔΥΛΟΣ (FLYWHEEL)

Ο σφόνδυλος είναι μία μηχανική διάταξη (συνήθως ένας τροχός με μεγάλη ροπή αδράνειας), που χρησιμοποιείται για την αποθήκευση και απόδοση μεγάλων ποσοτήτων περιστροφικής κινητικής ενέργειας, και για την διατήρηση της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής μηχανών. Παράδειγμα σφονδύλου είναι ο τροχός του αγγειοπλάστη, ο οποίος χρησιμοποιούνταν ήδη πριν από 5000 χρόνια στην αρχαία Μεσοποταμία και Αίγυπτο.

Οι μηχανές των αυτοκινήτων περιέχουν έναν σφόνδυλο, συνδεδεμένο με τον στροφαλοφόρο άξονα (σχήμα). Επειδή η καύση του

Για μία εφαρμογή του σφονδύλου στην αγγειοπλαστική, συμβουλευθείτε το video **https://www.youtube.com/watch?v=SHW1XoRLfuo**



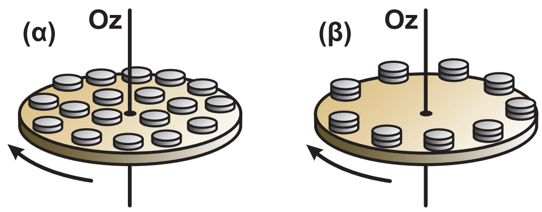
αερίου στους κυλίνδρους δεν είναι συνεχής, η ροπή από τα έμβολα στον στροφαλοφόρο άξονα διακόπτεται. Η ροπή αδράνειας του σφονδύλου εξασφαλίζει ότι ο στροφαλοφόρος άξονας διατηρεί σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Σφόνδυλοι χρησιμοποιούνται σε ηλεκτρικά δίκτυα για την διατήρηση σταθερής διαφοράς δυναμικού και για την αποθήκευση ενέργειας, και σε μέσα μεταφοράς για την γρήγορη μετάδοση κινητικής ενέργειας.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

1.12.1. Στο επόμενο σχήμα απεικονίζονται δύο αβαρείς οριζόντιοι δίσκοι, που περιέχουν στην επιφάνειά τους ίσο αριθμό σταθμών.

Α. Στον δίσκο **(α)** τα σταθμά κατανέμονται σε όλη την επιφάνεια, ενώ στον δίσκο **(β)** στερεώνονται σε στήλες, κατά μήκος της περιφέρειας. Οι δίσκοι μπορούν να περιστρέφονται γύρω από κατακόρυφους άξονες **Oz**, που διέρχονται από τα κέντρα τους. Ποιος δίσκος έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας, ως προς τον άξονά του;



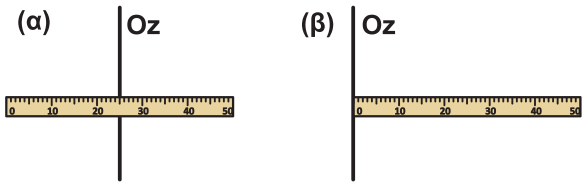
Β. Οι δύο δίσκοι περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα γύρω από τον άξονά τους **Oz**. Ποιος δίσκος έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια;

Γ. Ποιον δίσκο νομίζετε ότι είναι ευκολότερο να θέσουμε σε περιστροφή; **(Σας προτείνουμε να πραγματοποιήσετε τη διάταξη, και να δοκιμάσετε το πείραμα)**.

1.12.2. Στο επόμενο σχήμα απεικονίζονται δύο πανομοιότυποι χάρακες. Κάθε χάρακας μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται **(α)** από το κέντρο του ή **(β)** από την άκρη του.

Α. Ποιος χάρακας έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας, ως προς τον άξονά του, ***και γιατί***;

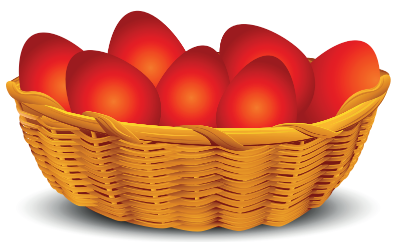
Β. Οι δύο χάρακες περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα γύρω από τον άξονά τους.



Ποιος χάρακας έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια;

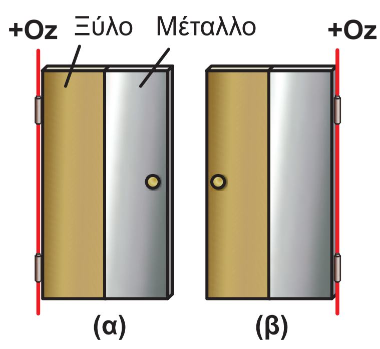
Γ. Ποιον χάρακα νομίζετε ότι είναι πιο εύκολο να θέσουμε σε ηρεμία;

1.12.3. Στις τελευταίες γιορτές του Πάσχα, βάψατε κατά λάθος και μερικά ωμά αυγά, μαζί με τα βρασμένα (σφιχτά). Η μεγαλύτερή σας αδελφή (φοιτήτρια της Φυσικής) σας προτείνει να ξεχωρίστε τα βρασμένα από τα ωμά αυγά, θέτοντάς τα σε περιστροφή. Γιατί;



1.12.4. Ποιο από τα δύο σώματα έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας ως προς κάθετο άξονα συμμετρίας, ένας συμπαγής ομογενής κύλινδρος ή ένας κούφιος ομογενής κύλινδρος με την ίδια μάζα και διαστάσεις; Γιατί; Ποιο από τα δύο σώματα θέτουμε πιο εύκολα σε κίνηση;

1.12.5. Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται μία πόρτα, που αποτελείται από ένα ξύλινο και ένα μεταλλικό φύλλο ίδιων διαστάσεων. Από ποιά μεριά θα τοποθετούσατε τον άξονα περιστροφής **Oz**, έτσι ώστε η πόρτα να περιστρέφεται ευκολότερα;



ΕΝΘΕΤΟ: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΕΝΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας ενός στερεού σώματος, ακολουθούμε τα εξής **γενικά βήματα**.

(i) Ορίζουμε τον άξονα περιστροφής του σώματος.

(ii) Χωρίζουμε το σώμα σε έναν πολύ μεγάλο αριθμό από στοιχειώδη τμήματα.

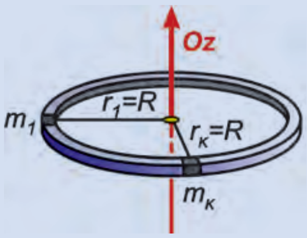
(iii) Υπολογίζουμε την απόσταση r_k του τμήματος k, μάζας m_k, από τον άξονα περιστροφής.

(iv) Αθροίζουμε τις ποσότητες $m_k r_\text{k}^2$ ως προς όλα τα στοιχειώδη τμήματα.

Παράδειγμα

Ροπή Αδράνειας Δακτυλίου ως προς Κάθετο Άξονα Συμμετρίας.

Το πιο κάτω σχήμα απεικονίζει έναν ομοιόμορφο λεπτό δακτύλιο ακτίνας R και συνολικής μάζας m. Χωρίζουμε τον δακτύλιο σε στοιχειώδη τμήματα 1, 2, ..., k, ..., με μάζες m_1, m_2, ..., m_k, ... Το τμήμα k έχει μάζα m_k και βρίσκεται σε απόσταση $r_k = R$ από το σημείο **O**.



Η ροπή αδράνειας του δακτυλίου, ως προς τον κάθετο άξονα **Oz** που διέρχεται από το κέντρο του, ισούται με:

$$I_{\text{δακτυλίου}} = \sum_k m_k r_\text{k}^2 = \left(\sum_k m_k\right) R^2 = mR^2$$

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Η περιστροφική κιντητική ενέργεια ενός σώματος είναι:	
α	Ανάλογη με τη γωνιακή του ταχύτητα.	
β	Ανάλογη με τη ροπή αδράνειας του σώματος.	
2	Δύο σώματα ίσης μάζας, που περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα, έχουν την ίδια περιστροφική κινητική ενέργεια.	

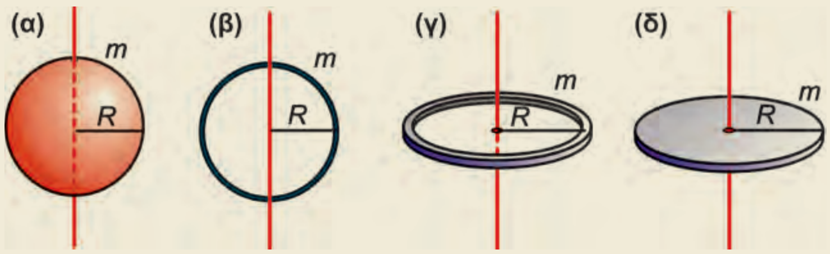
3	Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος δεν μεταβάλλεται ως προς συγκεκριμένο άξονα περιστροφής.	
4	Η ροπή αδράνειας ενός σώματος εξαρτάται από τον άξονα περιστροφής.	
5	Όσο μεγαλύτερη ροπή αδράνειας έχει ένα σώμα, τόσο δυσκολότερο είναι να μεταβάλλουμε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του.	
6	Περιστρέφουμε πιο εύκολα μία ράβδο ως προς το κέντρο της και πιο δύσκολα ως προς το άκρο της.	

Ασκήσεις

1 Το πιο κάτω σχήμα απεικονίζει διάφορα ομογενή σώματα της ίδιας μάζας m. Να συγκρίνετε τις ροπές αδράνειας των εξής σωμάτων, ως προς τους σημειωμένους άξονες (κόκκινες ευθείες):

I. Της συμπαγούς σφαίρας **(α)** και του σφαιρικού φλοιού **(β)**.

II. Του δακτυλίου **(γ)** και του δίσκου **(δ)**.



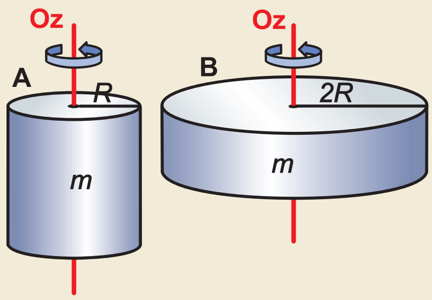
Για την απάντησή σας να **μην συμβουλευτείτε τον Πίνακα 1-1**. Να σκεφτείτε πώς κατανέμεται η μάζα των διαφόρων σωμάτων ως προς τους άξονες περιστροφής τους.

2 Τα σώματα της άσκησης 1 περιστρέφονται γύρω από τους άξονες περιστροφής τους με την **ίδια** γωνιακή ταχύτητα ω. Να τα κατατάξετε κατά αύξουσα σειρά, ως προς την κινητική τους ενέργεια.

3 Να υποθέσετε ότι η Γη είναι στερεή, ομογενής σφαίρα, ακτίνας R = 6370 km και μάζας m_Γ = 5,97 × 10^{24} kg.

A. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της Γης ως προς άξονα, που διέρχεται από το κέντρο της.

B. Η Γη εκτελεί μία πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονά της σε 24 ώρες και περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο με μεταφορική ταχύτητα 30 × 10^3 m/s. Να υπολογίσετε και να συγκρίνετε μεταξύ τους την περιστροφική κινητική ενέργεια και τη μεταφορική κινητική ενέργεια της Γης.



4 Οι ομογενείς κύλινδροι **Α** και **Β** του επόμενου σχήματος έχουν την ίδια μάζα m, ακτίνες R και $2R$, και μπορούν να περιστρέφονται γύρω από άξονες συμμετρίας, που διέρχονται από το ΚΜ τους.

Α. Να συγκρίνετε τις ροπές αδράνειας των δύο κυλίνδρων ως προς τον άξονα περιστροφής τους.

Β. Οι δυο κύλινδροι περιστρέφονται με την ίδια περιστροφική κινητική ενέργεια. Εάν το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου **Α** είναι ω_A = 16 rad/s, να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου **Β**.

5 Μία ομογενής συμπαγής σφαίρα **Α** και ένας ομογενής σφαιρικός φλοιός **Β** έχουν την ίδια ακριβώς μάζα και ακτίνα. Να περιγράψετε ένα πείραμα, με το οποίο θα ξεχωρίσετε τη συμπαγή σφαίρα από τον σφαιρικό φλοιό.

6 Στη διπλανή φωτογραφία, πέντε παιδιά παίζουν σε μια περιστρεφόμενη παιδική πλατφόρμα, ακτίνας R = 1,5 m και μάζας m_Π = 550,0 kg.

Α. Να εξηγήσετε γιατί οι πλατφόρμες σαν αυτή κατασκευάζονται με μεγάλη μάζα και διάμετρο.

Β. Να θεωρήσετε ότι κάθε παιδί μπορεί να προσεγγισθεί σαν υλικό σημείο μάζας m = 30,0 kg, που βρίσκεται στην περιφέρεια της πλατφόρμας. Να δείξετε ότι η συνολική περιστροφική κινητική ενέργεια του συστήματος πλατφόρμας-παιδιών δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\text{κιν περ}} = \frac{1}{2}\left(I_\Pi + 5mR^2\right)\omega^2$$

Το μέγεθος $I_\Pi = \frac{1}{2}m_\Pi R^2$ είναι η ροπή αδρανείας της πλατφόρμας ως προς κάθετο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο της.

Γ. Η πλατφόρμα και τα παιδιά περιστρέφονται, εκτελώντας 32 rpm. Να υπολογίσετε τη συνολική περιστροφική κινητική ενέργεια του συστήματος πλατφόρμας-παιδιών.

1.13. Ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα για την Περιστροφική Κίνηση

Στην Α΄ Λυκείου είχαμε διατυπώσει τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα για τη Μεταφορική Κίνηση:

Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα για τη Μεταφορική Κίνηση

Η επιτάχυνση ενός σώματος, που εκτελεί μεταφορική κίνηση, είναι ανάλογη με τη συνισταμένη δύναμη και έχει μέτρο αντιστρόφως ανάλογο με τη μάζα του σώματος:

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{m}\sum \vec{F}$$

Στη Β΄ Λυκείου αποδείξαμε έναν αντίστοιχο νόμο για την κίνηση του **ΚΜ** ενός μη σημειακού σώματος, ή συστήματος σωμάτων:

$$\vec{\alpha}_{\text{ΚΜ}} = \frac{1}{m}\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi\omega\tau}$$

Εάν το σώμα δεν είναι σημειακό, η δράση μίας δύναμης δεν επιταχύνει μόνο το ΚΜ, αλλά μπορεί να μεταβάλλει και τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σώματος γύρω από έναν άξονα. Εάν το σώμα είναι **στερεό**, έχει **σταθερή** ροπή αδράνειας ως προς συγκεκριμένο άξονα. Για ένα στερεό σώμα **αποδεικνύεται** η εξής διατύπωση του Δεύτερου Νόμου για την Περιστροφική Κίνηση:

Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα για την Περιστροφική Κίνηση

Έστω ότι ένα **στερεό σώμα** μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα **Oz**. Η **γωνιακή επιτάχυνση** του σώματος είναι ευθέως ανάλογη με τη **συνισταμένη των εξωτερικών ροπών** κατά μήκος του άξονα περιστροφής, και έχει μέτρο αντιστρόφως ανάλογο με τη ροπή αδράνειας I του σώματος ως προς τον ίδιο άξονα:

$$\alpha_{\gamma} = \frac{1}{I}\left(\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau,\,z}\right)$$

Παρατηρήσεις

- Στην πιο πάνω σχέση εμφανίζονται οι **αλγεβρικές** τιμές της γωνιακής επιτάχυνσης και της συνισταμένης των εξωτερικών ροπών κατά μήκος του **Oz**. Οι διευθύνσεις των διανυσμάτων είναι κατά μήκος του άξονα **Oz**.
- Εάν στο σώμα δρουν περισσότερες από μία εξωτερικές δυνάμεις, υπολογίζουμε **ξεχωριστά** τη ροπή $M_{\varepsilon\xi\omega\tau,\,z}$ κάθε εξωτερικής δύναμης, κατά μήκος του Oz. Κατόπιν, υπολογίζουμε **το άθροισμα** $\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau,\,z}$ των ροπών.

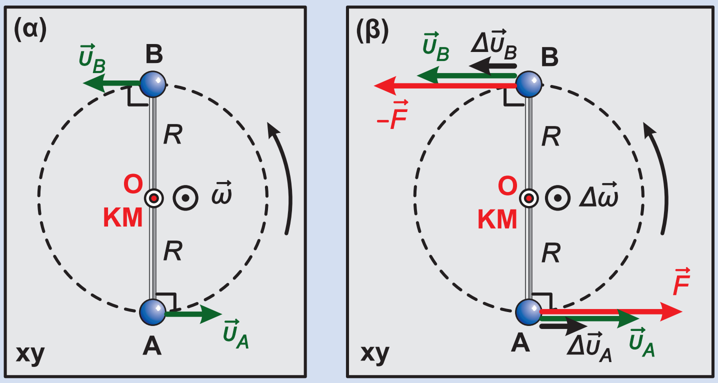
Η γωνιακή επιτάχυνση α_γ είναι **αντιστρόφως ανάλογη** με τη ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του. Άρα, η ροπή αδράνειας εκφράζει την τάση ενός σώματος να αντιδρά σε μεταβολές της γωνιακής του ταχύτητας:

Όσο **μεγαλύτερη** είναι η ροπή αδράνειας ενός σώματος ***ως προς κάποιον άξονα***, τόσο **μικρότερη** γωνιακή επιτάχυνση αποκτά το σώμα από **δεδομένη** εξωτερική ροπή. Σώματα με μεγάλη ροπή αδράνειας τείνουν να διατηρούν σταθερή (ή μηδενική) γωνιακή ταχύτητα.

ΕΝΘΕΤΟ: ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΝΟΜΟΥ ΓΙΑ ΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΦΑΙΡΙΔΙΩΝ ΕΝΩΜΕΝΩΝ ΜΕ ΡΑΒΔΙ

Η **Εικόνα 1-8** απεικονίζει ***σε κάτοψη*** ένα άκαμπτο ραβδί μήκους $2R$ και αμελητέας μάζας. Στα άκρα του ραβδιού είναι στερεωμένα δύο πανομοιότυπα σφαιρίδια μάζας m.

Εικόνα 1-8
Τα σφαιρίδια **Α** και **Β** περιστρέφονται γύρω από το σημείο **Ο** στερεωμένα σε ραβδί αμελητέας μάζας. **(α)** Όταν δεν δρα επιτρόχιος δύναμη, η γωνιακή ταχύτητα ω είναι σταθερή. **(β)** Όταν δρουν επιτρόχιες δυνάμεις, με μη μηδενική ροπή ως προς το Ο, η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται.



Στο **σχήμα (α)**, το σύστημα ραβδιού-σφαιριδίων περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από έναν άξονα περιστροφής, που είναι κάθετος στο επίπεδο **xy** και διέρχεται από το κέντρο του ραβδιού. Το **ΚΜ** του συστήματος συμπίπτει με το κέντρο του ραβδιού. Κάθε σφαιρίδιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, με κέντρο το ΚΜ και ακτίνα R. Σε κάθε σφαιρίδιο δρα μία κεντρομόλος δύναμη από το ραβδί. Η ροπή της κεντρομόλου κατά μήκος του άξονα περιστροφής είναι ίση με μηδέν.

Στο **σχήμα (β)**, στα σφαιρίδια **Α** και **Β** δρουν οι επιτρόχιες αντίθετες δυνάμεις $\vec{F}$ και $-\vec{F}$. Οι δυνάμεις αυτές συνιστούν ζεύγος, και έχουν ροπή μέτρου $|\vec{M}|=|\vec{F}|(2R)$.

Η γωνιακή επιτάχυνση κάθε σωματιδίου συνδέεται με την επιτρόχιο δύναμη με τη σχέση:

$$|\vec{F}| = m\frac{|\Delta\upsilon|}{\Delta t} = m\frac{|R\Delta\omega|}{\Delta t} = mR\frac{|\Delta\omega|}{\Delta t} = mR|\alpha_\gamma|$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση με τη διάμετρο της κυκλικής τροχιάς, $2R$, βρίσκουμε:

$$|\vec{F}|(2R) = (2mR^2)|\vec{\alpha}_\gamma|$$

Το αριστερό μέλος ισούται με τη ροπή του **ζεύγους** δυνάμεων: $|\vec{M}| = |\vec{F}|(2R)$. Η ποσότητα $I = 2mR^2$ ισούται με τη ροπή αδράνειας του συστήματος ραβδιού-σφαιριδίων ως προς τον άξονα **Oz**. Άρα:

$$|\vec{M}| = I|\vec{\alpha}_\gamma| \Rightarrow |\vec{\alpha}_\gamma| = \frac{|\vec{M}|}{I}$$

Τα διανύσματα $\vec{M}$ και $\vec{\alpha}_\gamma$ έχουν κοινή διεύθυνση (κατά μήκος του **Oz**) και την ίδια φορά:

- Εάν το ζεύγος δρα **αριστερόστροφα** ($M > 0$), η γωνιακή ταχύτητα των σφαιριδίων αυξάνεται (γίνεται πιο θετική ή λιγότερο αρνητική):

$$M > 0 \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\Delta t} > 0 \Rightarrow \alpha_\gamma > 0$$

- Ομοίως, εάν το ζεύγος δρα **δεξιόστροφα** ($M < 0$), η γωνιακή ταχύτητα του σώματος ελαττώνεται (γίνεται λιγότερο θετική ή πιο αρνητική):

$$M < 0 \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\Delta t} < 0 \Rightarrow \alpha_\gamma < 0$$

Άρα, η σχέση γωνιακής επιτάχυνσης - ροπής ισχύει και για τις **αλγεβρικές τιμές**:

$$\alpha_\gamma = \frac{M}{I}$$

Παραδείγματα από την Καθημερινή Ζωή

Σύμφωνα με τον Δεύτερο Νόμο για την Περιστροφική Κίνηση, σώματα με μεγάλη ροπή αδράνειας τείνουν να διατηρούν αμετάβλητη τη γωνιακή τους ταχύτητα. Αυτό το εκμεταλλευόμαστε στην καθημερινή μας ζωή, για να βελτιώσουμε την ικανότητα του σώματός μας να ισορροπεί.

Ένας σχοινοβάτης που κρατά ένα μακρύ οριζόντιο κοντάρι βελτιώνει την ικανότητά του να ισορροπεί. Το σύστημα σχοινοβάτη - κονταριού έχει μεγαλύτερη συνολική ροπή αδράνειας.

Στις 7 Αυγούστου 1974, ο γάλλος ακροβάτης Philippe Petit διέσχισε οκτώ φορές την απόσταση 60 m ανάμεσα στους δίδυμους πύργους του World Trade Center, σε ύψος 400 m από την επιφάνεια της Γης. Ο Pettit περπατούσε στο κενό για 45 λεπτά. Το ριψοκίνδυνο αυτό κατόρθωμα δεν επαναλήφθηκε ποτέ, και εξιστορήθηκε πρόσφατα στην εντυπωσιακή ταινία **The Walk** (2015). http://www.telegraph.co.uk/film/the-walk/philippe_petit_world_tradecenter/

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

1.13.1. Όταν ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, κινείται χωρίς γωνιακή επιτάχυνση. Ποιο από τα επόμενα είναι σωστό:

A. Στο σώμα δρα μηδενική συνισταμένη εξωτερική δύναμη.

B. Στο σώμα δρα μηδενική συνισταμένη των εξωτερικών ροπών, ως προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

Να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας.

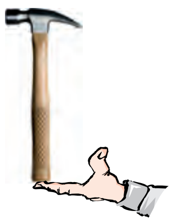
1.13.2. Δύο ομογενείς κύλινδροι **A** και **B** έχουν τις ίδιες διαστάσεις και μάζα και είναι ακίνητοι. Ο κύλινδρος A είναι συμπαγής και ο B είναι κούφιος.

A. Ποιον από τους δύο κυλίνδρους μπορούμε να θέσουμε ευκολότερα σε περιστροφή, ως προς άξονα συμμετρίας του κάθετο στην κυκλική του βάση; Γιατί;

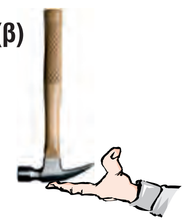
B. Οι δύο κύλινδροι περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ως προς τον πιο πάνω άξονα συμμετρίας. Ποιον από τους δύο κυλίνδρους μπορούμε να ακινητοποιήσουμε πιο εύκολα, και γιατί;

1.13.3. Πώς διατηρούμε πιο εύκολα σε ισορροπία ένα σφυρί επάνω στο χέρι μας, με την ξύλινη λαβή του προς τα κάτω (**σχήμα (α)**) ή προς τα πάνω (**σχήμα (β)**); Γιατί; **Δοκιμάστε το!**

(α)



(β)



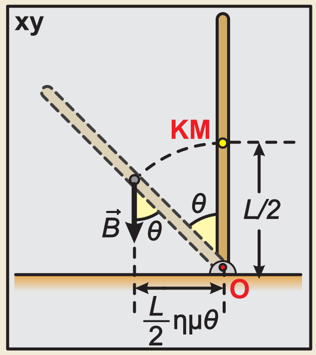
Παράδειγμα 1

Ράβδος που περιστρέφεται γύρω από στερεωμένο άκρο της

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται μία ράβδος μάζας m και μήκους $L = 125{,}0$ cm, η οποία είναι στερεωμένη στο έδαφος με τη βοήθεια μίας άρθρωσης. Η ράβδος περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το ακίνητο άκρο της **O**.

Αρχικά η ράβδος είναι κατακόρυφη και ακίνητη. Σε κάποια στιγμή της ασκούμε μία στιγμιαία ώθηση, με αποτέλεσμα να πέσει στο έδαφος σε οριζόντια στάση. Θα υπολογίσουμε τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου, όταν σχηματίζει γωνία $\theta = 0^o$, 45^o και 90^o με την κατακόρυφη διεύθυνση.

Στη ράβδο ασκούνται το βάρος της $\vec{B}$ και μία δύναμη $\vec{F}$ από το έδαφος. Η $\vec{F}$ δεν περιλαμβάνεται στο σχήμα γιατί έχει **μηδενική** ροπή ως προς το σημείο περιστροφής **O**. Η ροπή του βάρους ως προς το σημείο **O** είναι κάθετη στο κατακόρυφο επίπεδο **xy**, με φορά προς τον αναγνώστη. Η αλγεβρική τιμή της ροπής ισούται με



$$M_{\vec{B}} = mg\frac{L}{2}\eta\mu\theta$$

Εφαρμόζοντας τον Δεύτερο Νόμο για την Περιστροφική Κίνηση, βρίσκουμε:

$$\alpha_\gamma = \frac{1}{I}\left(\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau,\,z}\right) = \frac{M_{\vec{B}}}{I} = \frac{mgL}{2I}\eta\mu\theta$$

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής, που διέρχεται από το άκρο της **O**, είναι $I=(1/3)mL^2$. Συνδυάζοντας τις τελευταίες δύο σχέσεις, παίρνουμε:

$$\alpha_\gamma = \frac{mgL\eta\mu\theta}{2\times\left(\frac{1}{3}mL^2\right)} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\eta\mu\theta$$

Παρατήρηση

Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου μεταβάλλεται με τη γωνία θ.

Αριθμητική Εφαρμογή

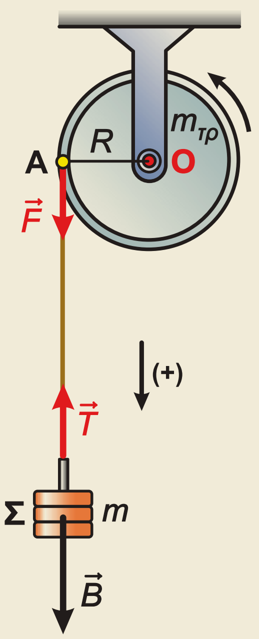
Η γωνιακή επιτάχυνση μηδενίζεται όταν η ράβδος είναι κατακόρυφη ($\theta = 0^o$, $\eta\mu 0^o = 0$). Αυτό συμβαίνει επειδή η ροπή του βάρους μηδενίζεται ως προς το **O**.

Όταν η γωνία $\theta = 45^o$, η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου γίνεται:

$$\alpha_\gamma = \frac{3}{2}\times\frac{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}{1{,}250\ \mathrm{m}}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 8{,}32\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

Η ράβδος φθάνει στο έδαφος ($\theta = 90^o$, $\eta\mu 90^o = 1$) με γωνιακή επιτάχυνση:

$$\alpha_\gamma = \frac{3}{2}\times\frac{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}{1{,}250\ \mathrm{m}}\times 1 = 11{,}8\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$



Παράδειγμα 2

Μία τροχαλία μάζας $m_{τρ}$ = 3,00 kg και ακτίνας R = 0,750 m είναι συνδεδεμένη μέσω αβαρούς σχοινιού με ένα σώμα μάζας m = 4,00 kg. Η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο της **Ο**. Το σχοινί δεν ολισθαίνει ως προς την τροχαλία.

Θα υπολογίσουμε την επιτάχυνση, με την οποία κατεβαίνει το σώμα.

Στο σώμα δρουν το βάρος του $\vec{B}$ και μία τάση $\vec{T}$ από το σχοινί. Στο άκρο Α του τυλιγμένου σχοινιού δρα μία δύναμη $\vec{F}$ από το κατακόρυφο τμήμα του σχοινιού ΑΣ. Όπως μάθαμε στην Α΄ Λυκείου, οι δυνάμεις $\vec{F}$ και $\vec{T}$ έχουν ίσα μέτρα επειδή το σχοινί είναι αβαρές.

Επειδή το τυλιγμένο τμήμα του σχοινιού περιστρέφεται μαζί με την τροχαλία χωρίς να ολισθαίνει ως προς αυτήν, μπορούμε να θεωρούμε ότι το τυλιγμένο τμήμα του σχοινιού και η τροχαλία αποτελούν ένα σύστημα. Η δύναμη $\vec{F}$ δρα σε αυτό το σύστημα ως εξωτερική δύναμη. Η ροπή αδράνειας του συστήματος τυλιγμένου σχοινιού - τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ίση με τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας. Η ροπή της $\vec{F}$ ως προς το σημείο Ο είναι $M_{\vec{F}} = +|\vec{F}|R = +|\vec{T}|R$.

Στην τροχαλία ασκείται επίσης το βάρος της και μία αντίρροπη δύναμη $\vec{N}$ από το σημείο στήριξης **Ο**. Οι δυνάμεις αυτές έχουν μηδενική ροπή ως προς το **Ο** και **δεν** περιστρέφουν την τροχαλία. Γι αυτό, δεν συμπεριλαμβάνονται στο σχήμα.

Το σώμα εκτελεί **μεταφορική κίνηση** στην κατακόρυφη διεύθυνση. Θεωρούμε ως **θετική** τη φορά προς τα κάτω, και εφαρμόζουμε τον Δεύτερο Νόμο για τη **Μεταφορική** Κίνηση:

Μεταφορική κίνηση του Σώματος: $mg - |\vec{T}| = m\alpha$ **(σχέση 1)**

Το μέγεθος α είναι η αλγεβρική τιμή της **γραμμικής επιτάχυνσης** του σώματος.

Η περιστροφή του συστήματος τροχαλίας - τυλιγμένου σχοινιού ως προς το σημείο **Ο** περιγράφεται από τον Δεύτερο Νόμο της Περιστροφικής Κίνησης:

$$\sum M_{εξωτ} = M_{\vec{F}} = I\alpha_{γ}$$

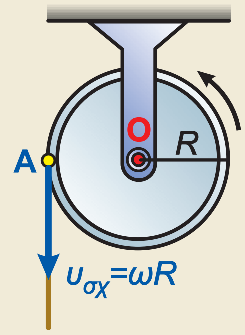
Το μέγεθος $\alpha_{γ}$ είναι η αλγεβρική τιμή της **γωνιακής επιτάχυνσης** της τροχαλίας.

Ο Δεύτερος Νόμος δίνει:

Περιστροφική κίνηση συστήματος Τυλιγμένου Σχοινιού - Τροχαλίας: $|\vec{T}|R = I\alpha_\gamma$ **(σχέση 2)**

Οι σχέσεις **1** και **2** είναι σύστημα **δύο** εξισώσεων με **τρεις** άγνωστες μεταβλητές: το μέτρο $|\vec{T}|$ και τις επιταχύνσεις α και α_γ. Για να προσδιορίσουμε τις άγνωστες μεταβλητές, χρειαζόμαστε μία τρίτη εξίσωση.

Για να καταστρώσουμε τη ζητούμενη εξίσωση, χρησιμοποιούμε το δεδομένο ότι το σχοινί **δεν ολισθαίνει** ως προς την τροχαλία. Άρα, η γραμμική ταχύτητα του σημείου **Α** του σχοινιού ισούται με



$$\upsilon_{\sigma\chi} = \omega R \Rightarrow \frac{\Delta \upsilon_{\sigma\chi}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t} \Rightarrow \alpha = R\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha = R\alpha_\gamma \qquad \textbf{(σχέση 3)}$$

Από τις σχέσεις **1 - 3** μπορούμε να προσδιορίσουμε τους τρεις αγνώστους:

- Συνδυάζοντας τις σχέσεις **2** και **3**, βρίσκουμε:

$$|\vec{T}|R^2 = I(R\alpha_\gamma) = I\alpha$$

- Συνδυάζοντας την τελευταία εξίσωση με τη σχέση **1**, βρίσκουμε:

$$\left(mg - |\vec{T}|\right)R^2 = m\alpha R^2 \Rightarrow mgR^2 - I\alpha = m\alpha R^2 \Rightarrow \alpha = \frac{mR^2}{mR^2 + I}g$$

Εάν η τροχαλία συμπεριφέρεται σαν ομογενής κύλινδρος, η ροπή αδράνειας της δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2}m_{\tau\rho}R^2$. Αντικαθιστούμε, και βρίσκουμε:

$$\alpha = \frac{mR^2}{mR^2 + \left(\frac{1}{2}m_{\tau\rho}\right)R^2}g = \frac{m}{m + \left(\frac{1}{2}m_{\tau\rho}\right)}g$$

Να παρατηρήσετε ότι:

- Η γραμμική επιτάχυνση α του σώματος είναι **μικρότερη** από την επιτάχυνση της βαρύτητας g, και ελαττώνεται με τη μάζα της τροχαλίας.
- Εάν η τροχαλία είναι αβαρής ($m_{\tau\rho} = 0$), το σώμα πέφτει με την επιτάχυνση της βαρύτητας.

Αριθμητική Αντικατάσταση

Αντικαθιστώντας $m_{\tau\rho} = 3{,}00$ kg και $m = 4{,}00$ kg, βρίσκουμε:

$$\alpha = \frac{4{,}00\ \text{kg}}{4{,}00\ \text{kg} + (3{,}00\ \text{kg})/2} \times g = 0{,}72 \times g = 7{,}06\ \text{m/s}^2$$

Σημείωση/Ενδεικτική Δραστηριότητα

Εάν δεν γνωρίζουμε τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας, μπορούμε να την υπολογίσουμε από την πιο πάνω διάταξη, ως εξής:

1. **Μετρούμε** τη μάζα m του σώματος.
2. **Πραγματοποιούμε** την πιο πάνω διάταξη, και αφήνουμε το σώμα να κινηθεί.
3. **Μετρούμε** την επιτάχυνση α του σώματος.
4. **Υπολογίζουμε** την άγνωστη ροπή αδράνειας από τη σχέση:

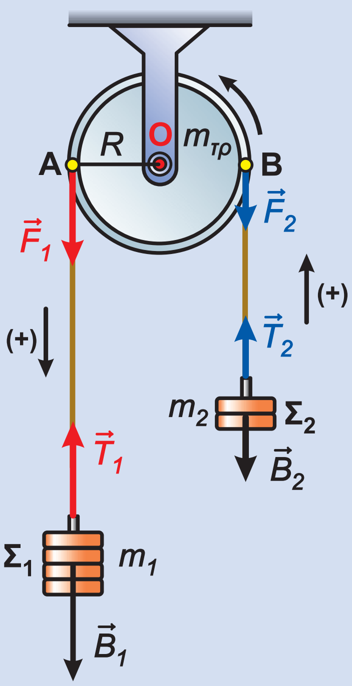
$$\alpha = \frac{mR^2}{mR^2 + I} g \Rightarrow mR^2 + I = mR^2 \frac{g}{\alpha} \Rightarrow I = \left(\frac{g}{\alpha} - 1\right) mR^2$$

(Υποθέτουμε ότι η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς τριβές).

Για παράδειγμα, εάν το σώμα πέφτει με επιτάχυνση α = 0,15 g, η ροπή αδράνειας της τροχαλίας είναι:

$$I = \left(\frac{g}{0{,}15\ \mathrm{g}} - 1\right) mR^2 = 5{,}67 \times (4{,}00\ \mathrm{kg}) \times (0{,}750\ \mathrm{m})^2 = 12{,}8\ \mathrm{kg\ m^2}$$

ΕΝΘΕΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3



Μία τροχαλία μάζας $m_{τρ}$ = 2,50 kg και ακτίνας R = 0,750 m είναι συνδεδεμένη μέσω αβαρούς σχοινιού με δύο σώματα **1** και **2**, με μάζες m_1 = 25,5 kg και m_2 = 8,50 kg. Η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο της **O**. Το σχοινί δεν ολισθαίνει ως προς την τροχαλία.

Θα υπολογίσουμε την επιτάχυνση, με την οποία κινούνται τα σώματα. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας είναι $I = \frac{1}{2} m_{τρ} R^2$.

Χωρίζουμε το σχοινί σε 3 τμήματα: **(i)** το κατακόρυφο τμήμα $ΑΣ_1$ (που είναι συνδεδεμένο με το σώμα 1), **(ii)** το κατακόρυφο τμήμα $ΒΣ_2$ και **(iii)** το τυλιγμένο τμήμα ΑΒ του σχοινιού που εφάπτεται με την τροχαλία. Θεωρούμε την τροχαλία και το τμήμα ΑΒ του σχοινιού ως ένα σύστημα. Επειδή το σχοινί είναι αβαρές, η ροπή αδράνειας του συστήματος αυτού είναι $I = \frac{1}{2} m_{τρ} R^2$.

Στο σώμα **1** δρουν το βάρος του $\vec{B}_1$ και η τάση $\vec{T}_1$ του σχοινιού.

Ομοίως, στο σώμα **2** δρουν το βάρος του $\vec{B}_2$ και η τάση $\vec{T}_2$ του σχοινιού. Στο σύστημα τροχαλίας - σχοινιού AB δρουν οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ από τα τμήματα $A\Sigma_1$ και $B\Sigma_2$ αντίστοιχα. Οι δυνάμεις αυτές έχουν μη μηδενική ροπή ως προς το σημείο **O**, και περιστρέφουν το σύστημα τροχαλίας - σχοινιού AB.

Στην τροχαλία ασκείται επίσης το βάρος της και μία αντίρροπη δύναμη $\vec{N}$ από το σημείο στήριξης **O** (δεν σημειώνονται στο σχήμα). Οι δυνάμεις αυτές έχουν μηδενική ροπή ως προς το **O** και δεν επηρεάζουν την περιστροφική κίνηση της τροχαλίας.

Τα σώματα **1** και **2** εκτελούν μεταφορική κίνηση. Επειδή το σχοινί **δεν** είναι εκτατό, οι ταχύτητες των δύο σωμάτων έχουν συνεχώς **ίσα μέτρα**. Άρα, και οι γραμμικές επιταχύνσεις των σωμάτων έχουν το **ίδιο μέτρο**, που συμβολίζουμε με α.

Εάν $m_1 > m_2$, το σώμα **1** θα κινηθεί προς τα κάτω και το σώμα **2** προς τα πάνω. Για κάθε σώμα θεωρούμε ως **θετική** τη φορά της κίνησής του, και εφαρμόζουμε ***ξεχωριστά*** τον Δεύτερο Νόμο της **μεταφορικής** κίνησης, όπως είχαμε κάνει στα παραδείγματα της Α΄ Λυκείου:

Σώμα 1: $m_1 g - |\vec{T}_1| = m_1 \alpha$ **(σχέση 1α)**

Σώμα 2: $|\vec{T}_2| - m_2 g = m_2 \alpha$ **(σχέση 1β)**

Οι δυνάμεις $\vec{T}_1$ και $\vec{F}_1$ έχουν ίσα μέτρα, επειδή το σχοινί είναι αβαρές. Ομοίως, οι δυνάμεις $\vec{T}_2$ και $\vec{F}_2$ έχουν ίσα μέτρα:

$$|\vec{T}_1| = |\vec{F}_1| \text{ και } |\vec{T}_2| = |\vec{F}_2|$$

Εφαρμόζουμε τον Δεύτερο Νόμο της Περιστροφικής Κίνησης ως προς το σημείο O στην τροχαλία, και βρίσκουμε:

$$\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau} = I\alpha_\gamma \Rightarrow +|\vec{F}_1|R - |\vec{F}_2|R = I\alpha_\gamma \Rightarrow \left(|\vec{T}_1| - |\vec{T}_2|\right)R = I\alpha_\gamma \qquad \textbf{(σχέση 2)}$$

Προσοχή

Η σχέση 2 υποδεικνύει ότι γενικά $|\vec{T}_1| \neq |\vec{T}_2|$ και $|\vec{F}_1| \neq |\vec{F}_2|$. Οι δυνάμεις αυτές έχουν **ίσα μέτρα** μόνο εάν η ροπή αδράνειας της τροχαλίας είναι **μηδενική** ($I = 0$).

Οι σχέσεις **1α**, **1β** και **2** είναι σύστημα **τριών** εξισώσεων με **τέσσερεις** αγνώστους: τα μέτρα $|\vec{T}_1|$, $|\vec{T}_2|$, το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης α και την αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης α_γ. Επειδή το σχοινί δεν ολισθαίνει ως προς την τροχαλία, γνωρίζουμε από το **Παράδειγμα 2** ότι:

$$\alpha_\gamma = \pm \frac{\alpha}{R}$$

Επειδή η τροχαλία περιστρέφεται αριστερόστροφα, επιλέγουμε τη θετική τιμή:

$$\alpha_\gamma = \frac{\alpha}{R} \qquad \textbf{(σχέση 3)}$$

Οι σχέσεις **1α**, **1β**, **2** και **3** αρκούν για να προσδιορισθούν οι άγνωστοι:

1. Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις **1α** και **1β**, βρίσκουμε:

$$(m_1 - m_2)g + \left(\left|\vec{T}_2\right| - \left|\vec{T}_1\right|\right) = (m_1 + m_2)\alpha$$

2. Από τις σχέσεις **2** και **3**, βρίσκουμε:

$$\left|\vec{T}_2\right| - \left|\vec{T}_1\right| = -I\frac{\alpha_\gamma}{R} = -I\frac{\alpha}{R^2}$$

3. Συνδυάζοντας τις τελευταίες δύο σχέσεις, βρίσκουμε:

$$(m_1 - m_2)g - I\frac{\alpha}{R^2} = (m_1 + m_2)\alpha \Rightarrow (m_1 - m_2)g = \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}g$$

Αντικαθιστώντας τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας, $I = \frac{1}{2}m_{\tau\rho}R^2$, βρίσκουμε:

$$\alpha = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{m_{\tau\rho}}{2}}g$$

Να παρατηρήσετε ότι:

- Εάν τα σώματα **1** και **2** έχουν ίσες μάζες, κινούνται με μηδενική γραμμική επιτάχυνση ($\alpha = 0$).
- Εάν η τροχαλία έχει μηδενική μάζα, η ροπή αδράνειας της μηδενίζεται. Τότε, τα σώματα κινούνται με γραμμική επιτάχυνση:

$$\alpha = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$$

  Το αποτέλεσμα αυτό συμπίπτει με τη γραμμική επιτάχυνση, της **μηχανής Atwood** με αβαρή τροχαλία και δύο σώματα, που είχαμε υπολογίσει στην Α΄ Λυκείου.

- Τα σώματα κινούνται με μικρότερη γραμμική επιτάχυνση, εάν η τροχαλία έχει μεγαλύτερη μάζα.

Αριθμητική Αντικατάσταση

Αντικαθιστούμε $m_1 = 25{,}5$ kg, $m_2 = 8{,}50$ kg, $m_{\tau\rho} = 2{,}50$ kg και βρίσκουμε:

$$\alpha = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m_{\tau\rho}}{2}} \times g = \frac{25{,}5\text{ kg} - 8{,}50\text{ kg}}{25{,}5\text{ kg} + 8{,}50\text{ kg} + 1{,}25\text{ kg}} \times g = 0{,}482 \times g = 4{,}73\text{ m/s}^2$$

Σημείωση / Ενδεικτική Δραστηριότητα

Εάν δεν γνωρίζουμε τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας, μπορούμε να την υπολογίσουμε, **μετρώντας** τις μάζες και την επιτάχυνση α των σωμάτων.

1. **Μετρούμε** τις μάζες m_1 και m_2 των δύο σωμάτων.
2. **Πραγματοποιούμε** την πιο πάνω διάταξη, και αφήνουμε τα σώματα να κινηθούν.
3. **Μετρούμε** τη γραμμική επιτάχυνση α.
4. **Υπολογίζουμε** την άγνωστη ροπή αδράνειας από τη σχέση:

$$\alpha = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} g \Rightarrow \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right) = (m_1 - m_2)\frac{g}{\alpha} \Rightarrow I = \left[(m_1 - m_2)\frac{g}{\alpha} - (m_1 + m_2)\right] R^2$$

Για παράδειγμα, εάν τα σώματα κινούνται με $\alpha = g/3$, η ροπή αδράνειας της τροχαλίας είναι:

$$I = \left[(25{,}5 - 8{,}50) \times 3 - (25{,}5 + 8{,}50)\right] \times (0{,}750)^2 \,\mathrm{kg\ m^2} = 9{,}56 \mathrm{\ kg\ m^2}$$

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Η γωνιακή επιτάχυνση ενός στερεού σώματος, που περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα, είναι:	
α	Ανάλογη με τη ροπή αδράνειας του σώματος.	
β	Αντιστρόφως ανάλογη με τη ροπή αδράνειας του σώματος.	
γ	Ανάλογη με το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων στο σώμα.	
δ	Ανάλογη με τη συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων στο σώμα.	
2	Ένας ακροβάτης χρησιμοποιεί ένα μακρύ κοντάρι για να βελτιώσει την ικανότητά του να ισορροπεί, επειδή:	

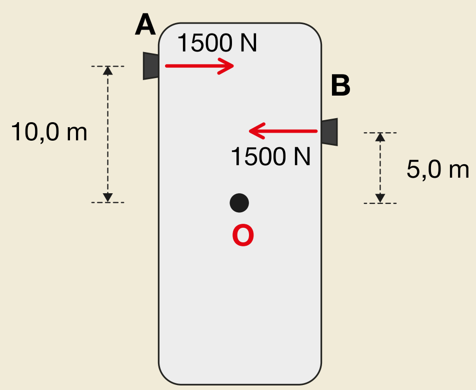
α	Αυξάνει τη μάζα του.	
β	Το σύστημα κονταριού - ανθρώπου έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το ΚΜ του.	
3	Το κοντάρι του ακροβάτη της ερώτησης 2 είναι πιο σημαντικό να έχει:	
α	Μεγάλη μάζα.	
β	Μεγάλο μήκος.	

Ασκήσεις

Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα για την Περιστροφική Κίνηση

1 Η επίπεδη διαστημική κάψουλα του επόμενου σχήματος μπορεί να περιστρέφεται με τη βοήθεια των εκτοξευτήρων αερίου Α - Β. Το σημείο Ο αντιστοιχεί στο ΚΜ της κάψουλας. Η κάψουλα ηρεμεί και βρίσκεται μακριά από οποιοδήποτε πεδίο βαρύτητας.

Σε κάποια στιγμή οι εκτοξευτήρες τίθενται σε λειτουργία. Η δύναμη από κάθε εκτοξευτήρα παραμένει συνεχώς κάθετη στο τοίχωμα με το οποίο είναι στερεωμένος ο εκτοξευτήρας, και έχει φορά προς την κάψουλα. Τα μέτρα των δυνάμεων από τους δύο εκτοξευτήρες Α και Β στην κάψουλα είναι 1500 N.



Α. Να περιγράψετε την κίνηση του ΚΜ της κάψουλας μετά την ενεργοποίηση των εκτοξευτήρων.

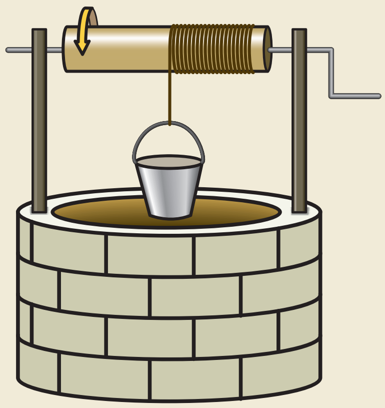
Β. Να θεωρήσετε ότι η κάψουλα είναι επίπεδη, με αμελητέο πάχος. Να εξηγήσετε γιατί η κάψουλα αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από άξονα, που είναι κάθετος στο επίπεδο της κάψουλας και διέρχεται από το ΚΜ της.

Γ. Η συνολική ροπή αδράνειας της κάψουλας ως προς το κέντρο μάζας **Ο** είναι $5{,}0 \times 10^3$ kgm^2. Να προσδιορίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση της κάψουλας.

Δ. Εάν οι εκτοξευτήρες λειτουργήσουν για χρονικό διάστημα $\Delta t = 20{,}0$ s, να προσδιορίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της κάψουλας στο τέλος του χρονικού διαστήματος.

2 Ένα δοχείο μάζας $m = 0{,}75$ kg κρέμεται από τον οριζόντιο κύλινδρο ενός πηγαδιού με ένα αβαρές σχοινί.

Ο κύλινδρος έχει ακτίνα 35,0 cm και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα. Εάν αφήσουμε το δοχείο ελεύθερο, ο κύλινδρος αρχίζει να περιστρέφεται και το δοχείο πέφτει με επιτάχυνση $g/5$. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του. Να υποθέσετε ότι το σχοινί δεν ολισθαίνει ως προς τον κύλινδρο, κατά την πτώση του δοχείου.



1.14. Εξισώσεις της Ομαλά Επιταχυνόμενης Περιστροφικής Κίνησης

Όταν ένα σώμα είναι **στερεό**, η ροπή αδράνειας του δεν μεταβάλλεται ($I = σταθ$). Εάν το άθροισμα των εξωτερικών ροπών κατά μήκος του άξονα περιστροφής είναι επίσης σταθερό, το σώμα περιστρέφεται με **σταθερή γωνιακή επιτάχυνση**:

$$\sum M_{εξωτ,\, z} = σταθ \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{1}{I}\left(\sum M_{εξωτ,\, z}\right) = σταθ$$

Γράφουμε τις εξισώσεις της περιστροφικής κίνησης με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, κατ΄ αναλογία με τις εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης:

Εξίσωση Γωνίας Θέσης

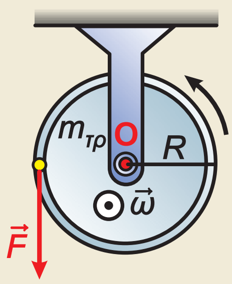
$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \omega(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha_\gamma (t - t_0)^2$$

Εξίσωση Γωνιακής Ταχύτητας

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \alpha_\gamma (t - t_0)$$

όπου η Γωνιακή Επιτάχυνση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha_\gamma = \frac{1}{I}\left(\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau,\, z}\right)$$



Παράδειγμα 1

Ένας συμπαγής, ομογενής τροχός μάζας 1,50 kg και ακτίνας $R =$ 31,0 cm μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν οριζόντιο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο του. Ο τροχός περιστρέφεται αριστερόστροφα με γωνιακή ταχύτητα ω = 12,5 rad/s. Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής ισούται με $I = \frac{1}{2}mR^2$.

Για ένα χρονικό διάστημα 4,00 s ασκείται στον τροχό μία επιτρόχιος δύναμη σταθερού μέτρου $|\vec{F}|$ = 15,5 N. Θα υπολογίσουμε **τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού, και τη γωνιακή του ταχύτητα στο τέλος του χρονικού διαστήματος.**

Οι εξωτερικές δυνάμεις στον τροχό είναι **(i)** η επιτρόχιος δύναμη $\vec{F}$, **(ii)** το βάρος του $\vec{B}$, και **(iii)** μία δύναμη $\vec{N}$ από τον άξονα περιστροφής. Οι δυνάμεις $\vec{B}$ και $\vec{N}$ έχουν μηδενική ροπή ως προς το **O** και δεν περιλαμβάνονται στο σχήμα. Η ροπή της $\vec{F}$ έχει αλγεβρική τιμή $M = +|\vec{F}|R$. Άρα, η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού έχει αλγεβρική τιμή

$$\alpha_\gamma = \frac{M_{\vec{F}}}{I} = \frac{|\vec{F}|R}{I} = \frac{|\vec{F}|R}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{2|\vec{F}|}{mR}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση είναι θετική, δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται. Αντικαθιστούμε και βρίσκουμε:

$$\alpha_\gamma = \frac{2 \times (15{,}5\ \text{N})}{(1{,}50\ \text{kg}) \times (0{,}310\ \text{m})} = 0{,}667\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Από τις εξισώσεις κίνησης, υπολογίζουμε τη γωνιακή ταχύτητα στο τέλος του χρονικού διαστήματος:

$$\omega(t_1) = \omega(t_0) + \alpha_\gamma(t_1 - t_0) = (12{,}5 \text{ rad/s}) + (0{,}667 \text{ rad/s}^2) \times (4{,}00 \text{ s}) = 15{,}2 \text{ rad/s}$$

1.15. Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας

Όταν ένα σώμα περιστρέφεται ως προς ακλόνητο άξονα, έχει περιστροφική κινητική ενέργεια. Το άθροισμα της περιστροφικής κινητικής ενέργειας και της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος σώματος - Γης είναι η μηχανική ενέργεια:

$$E_{\mu\eta\chi} = E_{\kappa\iota\nu\ \pi\varepsilon\rho} + U_{\delta\upsilon\nu}^{\beta\alpha\rho}$$

Α. Υπολογισμός της Βαρυτικής Δυναμικής Ενέργειας συστήματος Σώματος - Γης

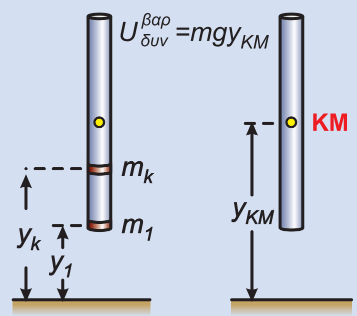
Για να υπολογίσουμε τη συνολική βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης, όταν το σώμα δεν είναι υλικό σημείο, υποθέτουμε ότι η **συνολική μάζα** m του σώματος είναι συγκεντρωμένη **στο ΚΜ** του:

$$U_{\delta\upsilon\nu}^{\beta\alpha\rho} = mgy_{\text{KM}}$$

όπου y_{KM} είναι το ύψος του **ΚΜ** του σώματος από το έδαφος.

ΕΝΘΕΤΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Χωρίζουμε το σώμα μάζας m σε πολλά στοιχειώδη τμήματα με μάζες m_1, m_2, ..., m_k,.... Τα στοιχειώδη τμήματα βρίσκονται σε ύψη y_1, y_2, ..., y_k,... από το έδαφος.



Η συνολική βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης είναι:

$$U_{\delta\upsilon\nu}^{\beta\alpha\rho} = \sum m_i g y_i = g\left(\sum m_i y_i\right) = mg\frac{\sum m_i y_i}{m} = mgy_{\text{KM}}$$

όπου $m = \sum m_i$ είναι η συνολική μάζα του σώματος, και y_{KM} είναι το ύψος του ΚΜ του σώματος από το έδαφος:

$$y_{\text{KM}} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i y_i}{m}$$

Β. Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας

Εάν το ΚΜ του σώματος μετατοπίζεται στην κατακόρυφη διεύθυνση, η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος-Γης μεταβάλλεται. Η αρνητική μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ισούται με το έργο του βάρους:

$$W_{\vec{B}} = -\Delta U_{\text{δυν}}^{\text{βαρ}} = mg\left(y_{\text{ΚΜ}}^{\text{αρχ}} - y_{\text{ΚΜ}}^{\text{τελ}}\right)$$

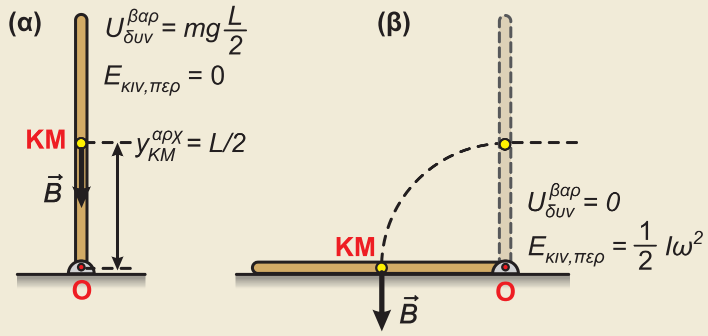
Εάν το έργο όλων των άλλων δυνάμεων, που δρουν στο σώμα, είναι μηδενικό, **η μηχανική ενέργεια διατηρείται**:

$$E_{\text{μηχ}}^{\text{αρχ}} = E_{\text{μηχ}}^{\text{τελ}} \Rightarrow \Delta E_{\text{κιν περ}} = -\Delta U_{\text{δυν}}^{\text{βαρ}}$$

Παράδειγμα

Ράβδος που περιστρέφεται γύρω από στερεωμένο άκρο της

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται μία ράβδος μάζας m και μήκους L, η οποία είναι στερεωμένη στο έδαφος με τη βοήθεια μίας άρθρωσης. Η ράβδος περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το ακίνητο άκρο της **Ο**.



Αρχικά η ράβδος είναι ακίνητη και κατακόρυφη (**σχήμα (α)**). Εάν την απομακρύνουμε ελάχιστα από την κατακόρυφη στάση, η ράβδος αρχίζει να περιστρέφεται. Θα υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου, όταν αποκτήσει οριζόντια στάση (**σχήμα (β)**).

Στη ράβδο ασκούνται το βάρος της $\vec{B}$ και μία δύναμη $\vec{N}$ από το έδαφος (δεν περιλαμβάνεται στο σχήμα). Η δύναμη $\vec{N}$ δεν παράγει έργο, επειδή το σημείο εφαρμογής της είναι ακίνητο. Άρα, η μηχανική ενέργεια διατηρείται:

$$\Delta E_{\text{κιν περ}} = -\Delta U_{\text{δυν}}^{\text{βαρ}} \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 = mgy_{\text{ΚΜ}}^{\text{αρχ}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2mgy_{\text{ΚΜ}}^{\text{αρχ}}}{I}}$$

Επειδή η ράβδος είναι ομογενής, η αρχική θέση του ΚΜ της βρίσκεται σε ύψος $y_{\text{ΚΜ}}^{\text{αρχ}} = L/2$ από το έδαφος. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα περιστροφής, που διέρχεται από το άκρο της, είναι $I = \frac{1}{3}mL^2$. Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση, βρίσκουμε:

$$\omega = \sqrt{\frac{2mg(L/2)}{mL^2/3}} = \sqrt{3\frac{g}{L}}$$

Αριθμητική Εφαρμογή

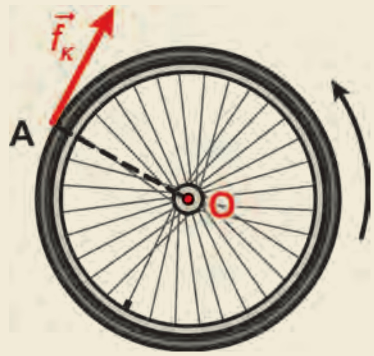
Έστω ότι η ράβδος έχει μήκος $L = 1{,}00$ m. Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου, όταν φθάνει στο έδαφος, ισούται με:

$$\omega = \sqrt{3 \times \frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{1{,}00\ \text{m}}} = 5{,}42\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Ασκήσεις

Εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης Περιστροφικής Κίνησης

1 Ένας κατακόρυφος τροχός ποδηλάτου, μάζας $m = 1{,}50$ kg και ακτίνας $R = 0{,}60$ m, είναι στερεωμένος σε ακλόνητο οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του, και περιστρέφεται αριστερόστροφα με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 32{,}5$ rad/s. Σε κάποια στιγμή, εφαρμόζουμε σε ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού μία σταθερή εφαπτομενική δύναμη τριβής, μέτρου $|\vec{f}_\kappa| = 2{,}50$ N. Να υπολογίσετε:



Α. Τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.

Β. Το χρονικό διάστημα, στο οποίο θα σταματήσει ο τροχός.

Γ. Τη συνολική γωνία που θα διαγράψει ο τροχός, από τη στιγμή που εφαρμόζεται η τριβή μέχρι τη στιγμή που σταματά.

Να υποθέσετε ότι: **(i)** όλη η μάζα του τροχού είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του, και **(ii)** η τριβή από τον άξονα του τροχού είναι αμελητέα. (Για τη ροπή αδράνειας ενός δακτυλίου, συμβ. τον Πίνακα 1-1 της **Ενότητας 1.12**).

2 Δύο παιδιά με μάζες $m_\Pi = 15{,}0$ kg κάθονται σε αντιδιαμετρικά σημεία μίας οριζόντιας πλατφόρμας της παιδικής χαράς. Η πλατφόρμα έχει μάζα $m_{\Pi\Lambda} = 450{,}0$ kg και ακτίνα $R = 3{,}00$ m, και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο της. Ένα τρίτο παιδί επιταχύνει την πλατφόρμα από ηρεμία μέχρι τελική συχνότητα 12 rpm σε χρονικό διάστημα 12 s, ασκώντας στην περιφέρειά της μία σταθερή εφαπτομενική δύναμη.

Α. Να υπολογίσετε τη ροπή που πρέπει να ασκεί το παιδί στην πλατφόρμα, για να της προσδώσει αυτή την επιτάχυνση. Να θεωρήσετε ότι η πλατφόρμα είναι ομογενής δίσκος.

Υπόδειξη: Να υπολογίσετε τη συνολική ροπή αδράνειας του συστήματος πλατφόρμας-παιδιών, θεωρώντας τα δύο παιδιά σαν υλικά σημεία.

Β. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης από το παιδί στην πλατφόρμα.

3 Ο τροχός ενός αγγειοπλάστη έχει συνολική ροπή αδράνειας $I = 0{,}65\ \text{kgm}^2$ και περιστρέφεται αριστερόστροφα με αρχική συχνότητα $f = 120$ rpm.

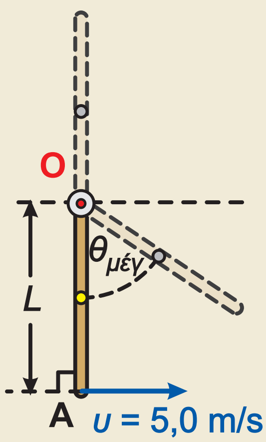
Ο αγγειοπλάστης αρχίζει να εφαρμόζει μία σταθερή εφαπτομενική δύναμη τριβής στο αγγείο, με μέτρο 4,0 N. Το σημείο εφαρμογής της δύναμης απέχει κατά 5,0 cm από τον άξονα περιστροφής.

Α. Να υπολογίσετε τη ροπή της τριβής.

Β. Να προσδιορίστε το χρονικό διάστημα, στο οποίο μηδενίζεται η γωνιακή ταχύτητα του τροχού.

Γ. Ένα κομμάτι πηλού έχει μάζα 0,60 kg, και σχήμα συμπαγούς κυλίνδρου με ακτίνα 5,0 cm. Ο πηλός περιστρέφεται με συχνότητα $f = 120$ rpm πάνω σε μία οριζόντια πλατφόρμα αμελητέας μάζας. Εάν ο αγγειοπλάστης εφαρμόσει τη ροπή τριβής του ερωτήματος **Α** στο αγγείο, σε ποιο χρονικό διάστημα θα σταματήσει να περιστρέφεται ο πηλός; Τι συμπεραίνετε για τη χρησιμότητα του τροχού του αγγειοπλάστη;

Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας



4 Μία κατακόρυφη ομογενής ράβδος μήκους 1,20 m μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα, που διέρχεται από το άκρο της **Ο**.

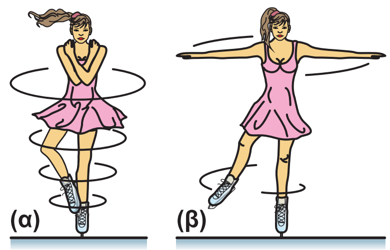
Α. Η ράβδος είναι αρχικά ακίνητη. Σε κάποια στιγμή δίνουμε οριζόντια γραμμική ταχύτητα μέτρου $υ = 5{,}0$ m/s στο άκρο **Α** της ράβδου. Να υπολογίσετε τη μέγιστη γωνία $\theta_{μεγ}$, που θα σχηματίσει η ράβδος με την κατακόρυφο. Εξαρτάται η τιμή $\theta_{μεγ}$ από τη μάζα της ράβδου;

Β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα που πρέπει να δώσουμε στο άκρο της ράβδου, έτσι ώστε η ταχύτητά της να μηδενισθεί, όταν φθάσει σε κατακόρυφη στάση ($\theta_{μεγ} = 180^o$).

1.16. Το Φυσικό Μέγεθος της Στροφορμής

Σύμφωνα με τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα για την Περιστροφική Κίνηση, η γωνιακή επιτάχυνση περιστροφής ενός σώματος γύρω από κάποιον άξονα είναι ανάλογη με τη συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων ως προς τον ίδιο άξονα.

Στην καθημερινή μας ζωή όμως, παρατηρούμε φαινόμενα όπως τα ακόλουθα:



- Μία παγοδρόμος περιστρέφεται γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα συμμετρίας, με τα χέρια κολλημένα στο σώμα της. Εάν η παγοδρόμος τεντώσει τα χέρια της, η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ελαττώνεται.

- Ένας αθλητής κατάδυσης περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα, που διέρχεται από το ΚΜ του. Εάν μαζέψει τα χέρια και τα πόδια του κοντά στο ΚΜ του, η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής αυξάνεται.

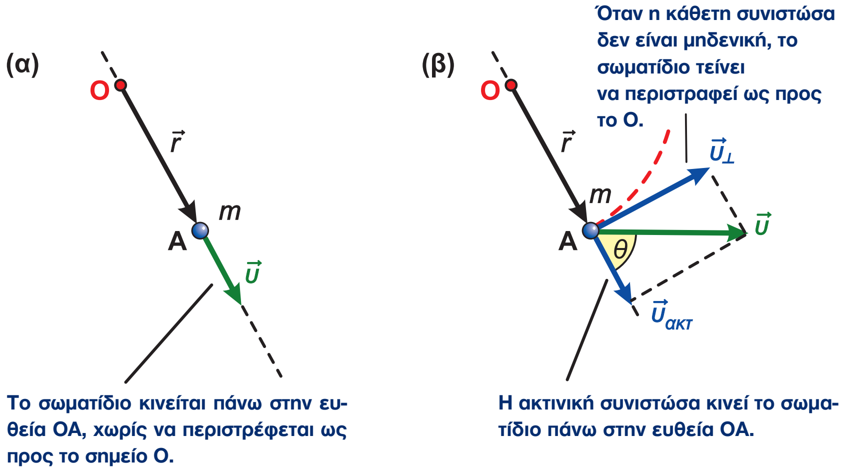
Στο παράδειγμα της παγοδρόμου, οι εξωτερικές δυνάμεις (το βάρος και η κάθετη δύναμη από το έδαφος) είναι παράλληλες με τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής. Στο παράδειγμα του δύτη, το σημείο εφαρμογής του βάρους (το ΚΜ) ανήκει στον άξονα περιστροφής. Και στα δύο παραδείγματα, **η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων είναι συνεχώς μηδενική** κατά μήκος του άξονα περιστροφής.

Συμπέρασμα
Η πιο πάνω διατύπωση του Δεύτερου Νόμου για την Περιστροφική Κίνηση δεν μπορεί να ερμηνεύσει τις μεταβολές στη γωνιακή ταχύτητα της παγοδρόμου και του αθλητή. Για να εξηγήσουμε αυτές τις μεταβολές, θα ορίσουμε ένα νέο φυσικό μέγεθος, τη **στροφορμή**.

Α. Στροφορμή Σημειακού Σωματιδίου ως προς Σημείο του Χώρου

Η **Εικόνα 1-9** απεικονίζει ένα σημειακό σωματίδιο μάζας m, το οποίο βρίσκεται στο σημείο **Α** του χώρου και έχει ταχύτητα $\vec{v}$ και ορμή $\vec{p} = m\vec{v}$. Θεωρούμε το σημείο **Ο** ως αρχή των αξόνων. Το σωματίδιο έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ως προς το **Ο**.

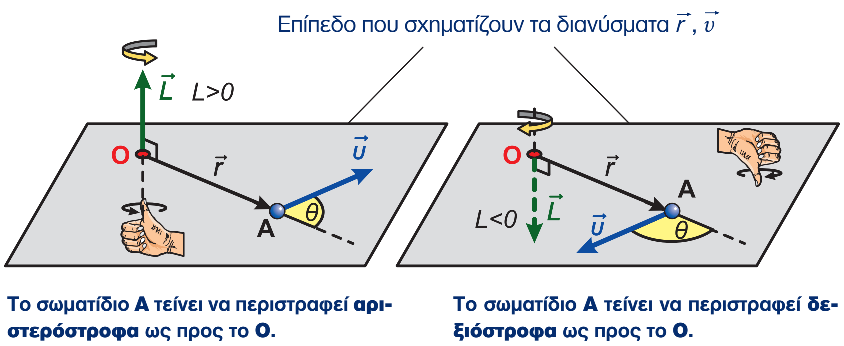
Εικόνα 1-9
(α) Όταν η ταχύτητα είναι παράλληλη με το διάνυσμα θέσης, το σωματίδιο **δεν** περιστρέφεται ως προς το σημείο **Ο**. **(β)** Όταν η ταχύτητα έχει κάθετη συνιστώσα, το σωματίδιο περιστρέφεται ως προς το σημείο **Ο**.



Εάν η ταχύτητα $\vec{v}$ του σωματιδίου είναι παράλληλη με το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ (**σχήμα 1-9(α)**), το σωματίδιο κινείται κατά μήκος της ευθείας ΟΑ χωρίς να περιστρέφεται ως προς το **Ο**. Εάν η ταχύτητα **δεν** είναι παράλληλη με το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ (**σχήμα 1-9(β)**), το σωματίδιο περιστρέφεται ως προς το σημείο **Ο**.

Για να εκφράσουμε ποσοτικά την τάση του σωματιδίου να περιστρέφεται γύρω από το Ο, ορίζουμε ένα νέο φυσικό μέγεθος, τη **στροφορμή** του σωματιδίου ***ως προς το Ο***.

Εικόνα 1-10
Στροφορμή υλικού σημείου Α ως προς σημείο Ο του χώρου.



Στροφορμή Σημειακού Σωματιδίου ως προς Σημείο Ο

Η **Εικόνα 1-10** απεικονίζει ένα υλικό σημείο **Α** μάζας m, το οποίο κινείται με ορμή $\vec{p} = m\vec{v}$. Ορίζουμε ως στροφορμή $\vec{L}$ του σημείου **Α** ***ως προς το Ο***, το εξής διανυσματικό μέγεθος:

- Το **μέτρο** της στροφορμής ισούται με το γινόμενο

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{p}\right|\eta\mu\theta = m\left|\vec{r}\right|\left|\vec{v}\right|\eta\mu\theta$$

όπου:

- $\vec{r}$ είναι το **διάνυσμα θέσης** του σημείου **Α** ως προς το **Ο**.
- $0 \leq \theta \leq 180^o$ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{r}$ και $\vec{p}$. Για να προσδιορίσουμε

τη γωνία θ, σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{r}$ και $\vec{p}$ (ή $\vec{\upsilon}$) με κοινή αρχή. Από τις δύο γωνίες που σχηματίζονται, διαλέγουμε τη μικρότερη.

- Στο διεθνές σύστημα SI, η στροφορμή εκφράζεται σε μονάδες kg m^2/s.

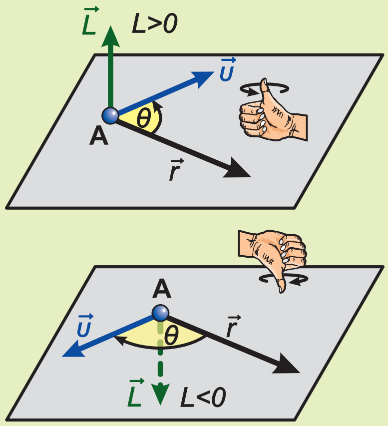
- Η **διεύθυνση** της στροφορμής είναι κάθετη στο επίπεδο, που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{r}$ και $\vec{p}$.

- Η **φορά** της στροφορμής προσδιορίζεται με τον κανόνα της **δεξιάς παλάμης**, ως ακολούθως:

  (i) Σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{r}$ και $\vec{\upsilon}$ με κοινή αρχή.

  (ii) Σχεδιάζουμε ένα τόξο από το $\vec{r}$ στο $\vec{\upsilon}$ (υπάρχουν δύο τέτοια τόξα - διαλέγουμε το μικρότερο).

  (iii) Ακουμπάμε τη **δεξιά** παλάμη πάνω στο επίπεδο. Λυγίζουμε τα δάκτυλα κατά τη φορά του τόξου, και ο τεντωμένος αντίχειρας δείχνει τη φορά της στροφορμής.

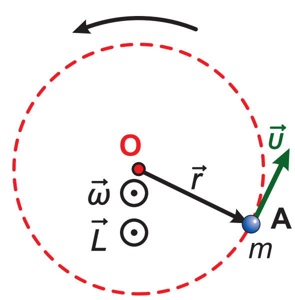


- Θεωρούμε ότι η στροφορμή έχει **θετική αλγεβρική τιμή** $L > 0$, όταν το σωματίδιο τείνει να περιστραφεί **αριστερόστροφα** ως προς το σημείο **O** (**σχήμα 1-10(α)**).

- Αντίστοιχα, θεωρούμε ότι η στροφορμή έχει **αρνητική αλγεβρική τιμή** $L < 0$, όταν το σωματίδιο τείνει να περιστραφεί **δεξιόστροφα** ως προς το σημείο **O** (**σχήμα 1-10(β)**).

Β. Στροφορμή Σημειακού Σωματιδίου σε Κυκλική Τροχιά

Το σωματίδιο του διπλανού σχήματος περιστρέφεται αριστερόστροφα σε κυκλική τροχιά ακτίνας R, με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω. Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ του σωματιδίου είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ και έχει μέτρο $\upsilon = \omega R$.



$|\vec{L}| = m|\vec{r}||\vec{\upsilon}| = mR^2\omega$

Το **μέτρο** της στροφορμής του σωματιδίου ως προς το κέντρο της τροχιάς **O** είναι:

$$\left|\vec{L}\right| = m\left|\vec{r}\right|\left|\vec{\upsilon}\right| = mR^2\omega$$

Ο άξονας περιστροφής **Oz** είναι κάθετος στο επίπεδο της τροχιάς και διέρχεται από το **O.** Τόσο η γωνιακή ταχύτητα, όσο και η στροφορμή έχουν διεύθυνση κατά μήκος του **Oz**, και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα της δεξιάς παλάμης. Άρα, **οι αλγεβρικές τιμές** L και ω ικανοποιούν την ίδια σχέση:

$$L = mR^2\omega$$

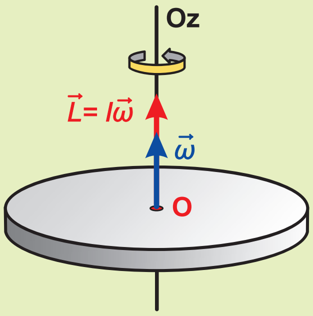
Το μέγεθος mR^2 είναι η **ροπή αδράνειας** I του σωματιδίου ως προς τον κάθετο άξονα **Oz.** Άρα:

$$L = I\omega$$

Γ. Στροφορμή Περιστρεφόμενου Στερεού Σώματος

Η τελευταία σχέση γενικεύεται για **οποιοδήποτε στερεό σώμα**, που περιστρέφεται γύρω από έναν **ακλόνητο άξονα**:

Στροφορμή Στερεού Σώματος κατά μήκος Ακλόνητου Άξονα Περιστροφής



Εάν ο ακλόνητος άξονας περιστροφής **Oz** είναι και **άξονας συμμετρίας**, η στροφορμή του σώματος έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής, και ισούται με:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

- Η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής.
- Το μέγεθος I είναι η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής **Oz.**
- Όπως η ροπή, έτσι και η στροφορμή ορίζεται πάντοτε ως προς κάποιο σημείο του χώρου. Για ένα στερεό σώμα, που περιστρέφεται ως προς ακλόνητο άξονα συμμετρίας, αποδεικνύεται ότι η στροφορμή ισούται με $\vec{L} = I\vec{\omega}$ ως προς οποιοδήποτε σημείο του άξονα περιστροφής.
- Η στροφορμή του σώματος ως προς έναν άλλο άξονα περιστροφής γενικά θα διαφέρει, επειδή εξαρτάται από τη ροπή αδράνειας.

ΕΝΘΕΤΗ ΣΗΜΕΙΩΣΗ

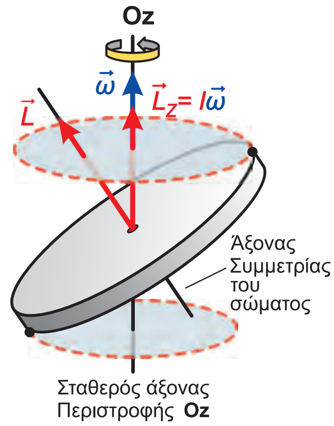
Εάν ο ακλόνητος άξονας περιστροφής **Oz δεν** είναι άξονας συμμετρίας του σώματος, το διάνυσμα της στροφορμής **δεν** είναι γενικά παράλληλο με τον άξονα περιστροφής.

Η **συνιστώσα** της στροφορμής κατά μήκος του άξονα περιστροφής **Oz** ισούται με

$$L_z = I\omega$$

I είναι η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον **Oz**.

Η συνολική στροφορμή $\vec{L}$ εξαρτάται από το σημείο του άξονα περιστροφής, ως προς το οποίο υπολογίζεται. Αποδεικνύεται ότι η συνιστώσα L_z έχει την ίδια τιμή ως προς οποιοδήποτε σημείο του άξονα περιστροφής.



Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

1.16.1. Ένα σωματίδιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Πώς θα μεταβληθεί η στροφορμή του σωματιδίου, εάν:

Α. Διπλασιασθεί η ταχύτητά του.

Β. Διπλασιασθεί η γωνιακή του ταχύτητα.

Γ. Διπλασιασθεί η μάζα του.

Δ. Διπλασιασθεί η ακτίνα της τροχιάς του.

1.16.2. Ποιο(α) από τα επόμενα είναι σωστό(α), για στερεά σώματα, που περιστρέφονται γύρω από ακλόνητο άξονα:

Α. Η στροφορμή κατά μήκος του άξονα είναι ανάλογη με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.

Β. Η στροφορμή κατά μήκος του άξονα είναι ανάλογη με τη μάζα του σώματος.

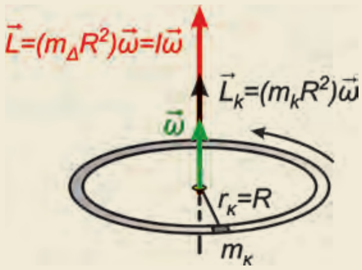
1.16.3. Δύο πανομοιότυποι κύλινδροι, που περιστρέφονται με την ίδια κατά μέτρο γωνιακή ταχύτητα, έχουν την ίδια στροφορμή ή όχι;

Παράδειγμα 1

Στροφορμή Δακτυλίου ως προς τον Κάθετο Άξονα Συμμετρίας του

Ο δακτύλιος του επόμενου σχήματος έχει συνολική μάζα m_Δ και ακτίνα R και περιστρέφεται αριστερόστροφα με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας του, **Oz**. Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας έχει τη διεύθυνση του άξονα **Oz**.

Ο δακτύλιος είναι τόσο λεπτός, που τον θεωρούμε επίπεδο. Χωρίζουμε τον δακτύλιο σε έναν μεγάλο αριθμό από στοιχειώδη τμήματα 1, 2, ..., k, ..., με μάζες m_1, m_2, ..., m_k, ... Καθώς ο δακτύλιος περι-



στρέφεται, όλα τα τμήματα κινούνται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Κάθε τμήμα διαγράφει κυκλική τροχιά με κέντρο το σημείο **O** και ακτίνα $r_k = R$. Άρα, η στροφορμή του τμήματος k, ως προς το κέντρο **O** του δακτυλίου, ισούται με:

$$L_k = (m_k R^2)\omega$$

Οι στροφορμές των στοιχειωδών τμημάτων έχουν την ίδια διεύθυνση, κατά μήκος του **Oz**. Για να υπολογίσουμε τη **συνολική** στροφορμή του δακτυλίου, αθροίζουμε όλες τις στοιχειώδεις στροφορμές:

$$L = \sum_k L_k = \sum_k (m_k R^2)\omega = \left(\sum_k m_k\right) R^2 \omega = (m_\Delta R^2)\omega$$

Η ποσότητα $I = m_\Delta R^2$ είναι η ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς τον άξονα συμμετρίας του **Oz**. Άρα, ισχύει η σχέση που διατυπώσαμε για το στερεό σώμα:

$$L = I\omega$$

Παράδειγμα 2
Στροφορμή της Γης ως προς τον Άξονά της

Να υπολογίσετε τη στροφορμή της Γης εξαιτίας της περιστροφής ***ως προς τον άξονά της***. Να υποθέσετε ότι η Γη είναι τέλεια σφαίρα ακτίνας $R = 6370$ km και μάζας $m_\Gamma = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg.

Η Γη συμπληρώνει μία περιστροφή σε 24 ώρες. Άρα, η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3{,}14 \text{ rad}}{86400 \text{ s}} = 7{,}27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

Η ροπή αδράνειας μίας σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της υπολογίζεται από τη σχέση $I = \frac{2}{5}mR^2$. Άρα, η ροπή αδράνειας της Γης ισούται με:

$$I = \frac{2}{5}(5{,}97 \times 10^{24} \text{ kg}) \times (6{,}37 \times 10^{6} \text{ m})^2 = 9{,}69 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$$

Η ζητούμενη στροφορμή της Γης ισούται με:

$$L = I\omega = (9{,}69 \times 10^{37} \text{ kg m}^2) \times \left(7{,}27 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) = 7{,}04 \times 10^{33} \text{ kg } \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Σημείωση

Επειδή η Γη περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο, ο άξονας περιστροφής της Γης δεν είναι ακλόνητος. Η σχέση $L = I\omega$ δίνει τη στροφορμή της Γης ως προς σύστημα αναφοράς, που κινείται μαζί με το ΚΜ της Γης.

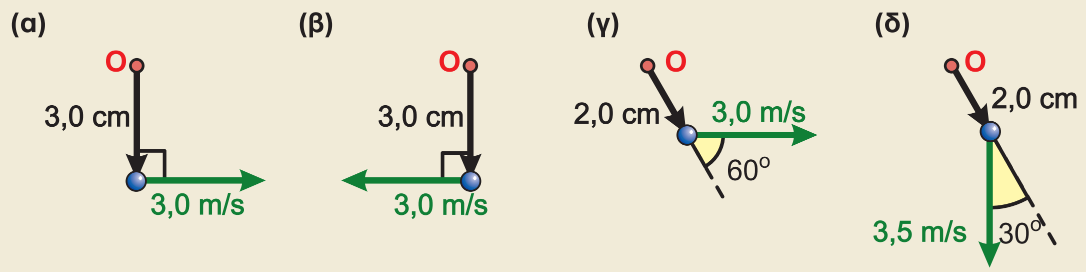
Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Η στροφορμή ενός σώματος, που περιστρέφεται γύρω από άξονα συμμετρίας του, είναι:	
α	Ανάλογη με τη ροπή αδράνειας του σώματος.	
β	Αντιστρόφως ανάλογη με τη ροπή αδράνειας του σώματος.	
γ	Ανάλογη με τη γωνιακή ταχύτητα του σώματος.	
δ	Μηδενική, εάν το σώμα δεν περιστρέφεται.	
2	Η στροφορμή ενός σωματιδίου, που κινείται σε κυκλική τροχιά, είναι:	
α	Ανάλογη με την ακτίνα της τροχιάς, για δεδομένη γωνιακή ταχύτητα.	
β	Ανάλογη με τη μάζα του σωματιδίου.	
γ	Ανάλογη με τη γωνιακή ταχύτητα του σωματιδίου, για δεδομένη ακτίνα.	
δ	Ανάλογη με τη γραμμική ταχύτητα του σωματιδίου, για δεδομένη ακτίνα.	
3	Ένα σωματίδιο, που κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά, έχει πάντα μηδενική στροφορμή.	

Ασκήσεις

1. Μία μικρή μεταλλική σφαίρα **Α** μάζας 0,50 kg κινείται όπως στα επόμενα σχήματα. Να υπολογίσετε τη στροφορμή της σφαίρας ως προς το σημείο **Ο**, και να καθορίσετε την κατεύθυνσή της.



2 Ένα βαγονάκι μάζας $m = 15,0$ kg κινείται με γραμμική ταχύτητα μέτρου 3,0 m/s σε οριζόντια κυκλική σιδηροτροχιά ακτίνας $R = 4,50$ m.

Α. Να υπολογίσετε τη στροφορμή του βαγονιού ως προς το κέντρο της τροχιάς.

Β. Το βαγονάκι μετακινείται σε ομόκεντρη κυκλική τροχιά ακτίνας $R = 6,00$ m, και διατηρεί την ίδια γραμμική ταχύτητα. Να υπολογίσετε τη νέα στροφορμή ως προς το κέντρο της τροχιάς.

Γ. Τι γραμμική ταχύτητα θα έπρεπε να έχει το βαγόνι, για να διατηρήσει τη στροφορμή του ερωτήματος **Α**;

3 Ένα σφαιρίδιο μάζας $m = 1,5$ kg κινείται σε οριζόντια κυκλική διαδρομή ακτίνας $R = 30,0$ cm με συχνότητα 215 rpm.

Α. Να υπολογίσετε τη στροφορμή του σφαιριδίου ως προς το κέντρο της τροχιάς.

Β. Το σφαιρίδιο μετακινείται σε ομόκεντρη κυκλική τροχιά ακτίνας $R = 2,70$ m και διατηρεί την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Να υπολογίσετε τη νέα στροφορμή του σφαιριδίου.

Γ. Τι γωνιακή ταχύτητα θα έπρεπε να έχει το σφαιρίδιο, για να διατηρήσει τη στροφορμή του ερωτήματος **Α**;

4 Μία συμπαγής, ομογενής σφαίρα **Α** και ένας ομογενής, λεπτός σφαιρικός φλοιός **Β** έχουν μάζα 0,75 kg και ακτίνα $R = 0,50$ m. Τα δύο σώματα περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα 61,4 rad/s ως προς άξονες, που διέρχονται από το κέντρο τους. Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής των δύο σωμάτων ως προς τον άξονα περιστροφής τους.

5 Το Ηλιακό Σύστημα έχει συνολική στροφορμή $3,3 \times 10^{45}$ kgm^2/s. Στη στροφορμή αυτή συνεισφέρει η περιφορά των πλανητών γύρω από τον Ήλιο και η περιστροφή του Ήλιου και των πλανητών γύρω από τον άξονά τους.

Α. Ο Ήλιος συμπληρώνει μία πλήρη περιστροφή γύρω από τον εαυτό του σε 24,6 ημέρες. Να θεωρήσετε ότι ο Ήλιος είναι ομογενής στερεά σφαίρα με μάζα 2×10^{30} kg και ακτίνα 7×10^{8} m. Να υπολογίσετε τη στροφορμή του Ήλιου εξαιτίας της περιστροφής γύρω από τον άξονά του, και να τη συγκρίνετε με τη στροφορμή του ηλιακού συστήματος.

Β. Ο Δίας έχει μάζα 2×10^{27} kg και συμπληρώνει μία περιφορά γύρω από τον Ήλιο σε 4300 ημέρες. Να θεωρήσετε ότι ο Δίας είναι υλικό σημείο που κινείται σε κυκλική τροχιά με κέντρο τον Ήλιο και ακτίνα 8×10^{11} m. Να υπολογίσετε τη στροφορμή του Δία λόγω της κυκλικής του κίνησης γύρω από τον Ήλιο και να τη συγκρίνετε με τη στροφορμή του ηλιακού συστήματος.

Γ. Από τα αποτελέσματα Α και Β μπορείτε να συμπεράνετε τι συνεισφέρει περισσότερο στη συνολική στροφορμή του Ηλιακού συστήματος, η μεταφορική κίνηση των πλανητών ή η περιστροφική κίνηση του ήλιου και των πλανητών;

1.17. Ο Γενικευμένος Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα για την Περιστροφική Κίνηση

Όπως εξηγήσαμε στα προηγούμενα, η στροφορμή είναι αντίστοιχη με το μέγεθος της ορμής στη μεταφορική κίνηση:

$$\vec{L} \sim \vec{p}$$

Ομοίως, η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών είναι το αντίστοιχο μέγεθος με τη συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων στη μεταφορική κίνηση:

$$\sum \vec{M}_{\varepsilon\xi\omega\tau} \sim \sum \vec{F}_{\varepsilon\xi\omega\tau}$$

Στη μελέτη της μεταφορικής κίνησης είχαμε διατυπώσει την εξής γενικευμένη μορφή του Δεύτερου Νόμου του Νεύτωνα:

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Χρησιμοποιώντας τις πιο πάνω αναλογίες, γράφουμε τη γενικευμένη έκφραση για τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα στην περίπτωση της Περιστροφικής Κίνησης:

Γενικευμένος Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα για την Περιστροφική Κίνηση

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός σώματος ως προς κάποιο σημείο του χώρου, ισούται με τη συνισταμένη των **εξωτερικών** ροπών στο σώμα, ***ως προς το ίδιο σημείο***:

$$\sum \vec{M}_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

Για ένα **σύστημα σωμάτων**, ο Νόμος παίρνει τη μορφή:

$$\sum \vec{M}_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \frac{\Delta \vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{\Delta t} = \frac{\Delta\left(\sum \vec{L}_i\right)}{\Delta t}$$

Στο αριστερό μέλος εμφανίζεται το άθροισμα **εξωτερικών** ροπών του συστήματος. Στο δεξί μέλος εμφανίζεται η **συνολική** στροφορμή του συστήματος, $\vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \sum \vec{L}_i$. Για να προσδιορίσουμε τη στροφορμή $\vec{L}_{συστ}$, υπολογίζουμε τις στροφορμές όλων των σωμάτων του συστήματος ως προς το ίδιο σημείο, και τις προσθέτουμε διανυσματικά.

Από την πιο πάνω γενικευμένη διατύπωση, προκύπτει η εξής **θεμελιώδης αρχή**:

Αρχή της Διατήρησης της Στροφορμής

Εάν το άθροισμα των **εξωτερικών** ροπών σε ένα σώμα ή σύστημα μηδενίζεται ως προς κάποιο σημείο του χώρου, η **συνολική** στροφορμή του σώματος ή συστήματος, ως προς το ίδιο σημείο, διατηρείται:

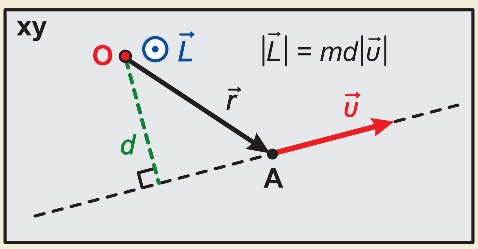
$$\sum \vec{M}_{εξωτ} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum \vec{L}_i = σταθερή$$

Να παρατηρήσετε ότι η προηγούμενη σχέση έχει γραφεί ως ισοδυναμία. Άρα, το συμπέρασμα ισχύει και **αντίστροφα**:

Εάν η **συνολική** στροφορμή ενός σώματος ή συστήματος σωμάτων ως προς κάποιο σημείο του χώρου διατηρείται, το άθροισμα των εξωτερικών ροπών στο σώμα ή σύστημα, ως προς το ίδιο σημείο, μηδενίζεται.

Παράδειγμα 1
Σωματίδιο που εκτελεί Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση

Το υλικό σημείο **Α** του παρακάτω σχήματος κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{υ}$ κατά μήκος ευθύγραμμης τροχιάς. **Θα αποδείξουμε ότι η στροφορμή του υλικού σημείου είναι σταθερή ως προς οποιοδήποτε σημείο Ο του χώρου.**



Επιλέγουμε ένα αυθαίρετο σημείο **Ο** του χώρου, το οποίο απέχει κατά d από την ευθεία της τροχιάς του σώματος. Ως προς το **Ο**, η στροφορμή του σώματος έχει συνεχώς **σταθερό** μέτρο $|\vec{L}| = md|\vec{υ}|$. Η διεύθυνση της στροφορμής είναι κάθετη στο επίπεδο **xy**, που ορίζεται από το σημείο **Ο** και την ευθύγραμμη τροχιά. Η φορά της στροφορμής είναι προς τον αναγνώστη.

Η διατήρηση της στροφορμής είναι σε συμφωνία με τον δεύτερο νόμο της περιστροφικής κίνησης:

Επειδή το υλικό σημείο κινείται με σταθερή ταχύτητα, η **συνισταμένη δύναμη** στο σημείο είναι συνεχώς μηδενική. Η ροπή της συνισταμένης δύναμης είναι επίσης μηδενική.

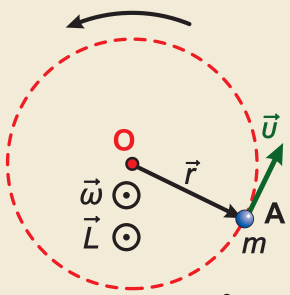
Παρατήρηση

Ένα σημείο ή σώμα έχει στροφορμή ως προς κάποιο σημείο **Ο**, ακόμα κι εάν κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά. Η στροφορμή μηδενίζεται εάν η ευθεία κίνησης διέρχεται από το **Ο**.

Παράδειγμα 2

Σωματίδιο που εκτελεί Ομαλή Κυκλική Κίνηση

Το υλικό σημείο **Α** του διπλανού σχήματος κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου υ, κατά μήκος κυκλικής τροχιάς ακτίνας R με κέντρο το **Ο**. Όπως αποδείξαμε προηγουμένως, η στροφορμή του σωματιδίου ως προς το **Ο** έχει σταθερό μέτρο, ίσο με $|\vec{L}| = mR^2\omega$. Η κατεύθυνση της στροφορμής είναι επίσης σταθερή (κάθετη στο επίπεδο της σελίδας, με φορά προς τον αναγνώστη).



$|\vec{L}| = m|\vec{r}||\vec{\upsilon}| = mR^2\omega$

Η διατήρηση της στροφορμής είναι σε συμφωνία με τον Δεύτερο Νόμο της Περιστροφικής Κίνησης: Επειδή το υλικό σημείο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, η **συνισταμένη δύναμη** (κεντρομόλος) είναι ακτινική, με φορά προς το **Ο** και μέτρο $|\vec{F}_K| = m\omega^2 R$. Επειδή ο φορέας της δύναμης διέρχεται από το **Ο**, η ροπή της δύναμης ως προς το **Ο** είναι μηδενική.

Παρατήρηση

Η στροφορμή του σημείου **Α δεν** διατηρείται ως προς κανένα άλλο σημείο του επιπέδου. Ομοίως, η ροπή της $\vec{F}_K$ δεν μηδενίζεται συνεχώς ως προς κανένα άλλο σημείο του επιπέδου.

1.18. Εφαρμογή του Γενικευμένου Δεύτερου Νόμου για την Περιστροφική Κίνηση σε Προβλήματα Διατήρησης της Στροφορμής

Διατήρηση της Συνολικής Στροφορμής Συστήματος Σωμάτων

Σε προβλήματα με ένα σύστημα δύο (ή περισσοτέρων) σωμάτων, το μέγεθος που διατηρείται είναι η **συνολική στροφορμή του συστήματος:**

$$\sum \vec{L}_i = σταθερή \ \left(\text{όταν} \sum \vec{M}_{εξωτ} = \vec{0}\right)$$

Η στροφορμή κάθε σώματος του συστήματος **δεν** είναι ανάγκη να διατηρείται ξεχωριστά.

Τα προβλήματα αυτά είναι **το περιστροφικό ανάλογο των κρούσεων**, και λύνονται με την εξής μεθοδολογία:

Στρατηγική Επίλυσης Προβλημάτων, στα οποία διατηρείται η Συνολική Στροφορμή Συστήματος Σωμάτων

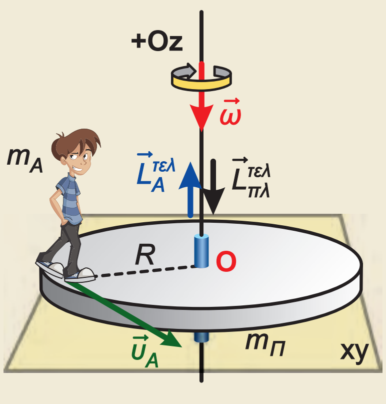
1. Ορίζουμε το **σύστημα σωμάτων** που συγκρούονται, και καθορίζουμε τις δυνάμεις, που είναι **εξωτερικές** στο σύστημα.
2. Υπολογίζουμε τις ροπές των εξωτερικών δυνάμεων κατά μήκος του άξονα περιστροφής **Oz**, και επιβεβαιώνουμε ότι η συνολική ροπή μηδενίζεται:

$$\sum M_{εξωτ,z} = 0$$

3. Υπολογίζουμε την αρχική και τελική στροφορμή των διαφόρων σωμάτων κατά μήκος του άξονα περιστροφής, από τα δεδομένα.
4. Εξισώνουμε τη **συνολική** αρχική και τελική στροφορμή του συστήματος:

$$\sum L_{αρχ,z} = \sum L_{τελ,z} \ \text{(κατά μήκος του άξονα περιστροφής)}$$

5. Από την πιο πάνω ισότητα, λύνουμε ως προς το άγνωστο μέγεθος.



Παράδειγμα 1

Ένας άνθρωπος μάζας 75,0 kg στέκεται ακίνητος στην άκρη μίας ακίνητης οριζόντιας πλατφόρμας μάζας 750,0 kg και ακτίνας R = 2,0 m. Η πλατφόρμα μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον σταθερό κατακόρυφο άξονα **Oz**, που διέρχεται από το κέντρο της **O**. Σε κάποια στιγμή ο άνθρωπος αρχίζει να περπατά **αριστερόστροφα** και εφαπτομενικά στην περιφέρεια της πλατφόρμας, με ταχύτητα μέτρου υ_A = 1,2 m/s ως *προς το έδαφος*.

Θα υπολογίσουμε τη φορά και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας, με την οποία αρχίζει να περιστρέφεται η πλατφόρμα.

1. Θα θεωρήσουμε το σύστημα **ανθρώπου - πλατφόρμας**.

2. Οι **εξωτερικές** δυνάμεις στο σύστημα είναι τα βάρη του ανθρώπου και της πλατφόρμας, $\vec{B}_{A}$ και $\vec{B}_{\Pi}$, και μία δύναμη $\vec{F}$ στην πλατφόρμα από τον ακλόνητο άξονα περιστροφής της (οι δυνάμεις δεν περιλαμβάνονται στο σχήμα).

Επειδή οι εξωτερικές δυνάμεις $\vec{B}_{A}$ και $\vec{B}_{\Pi}$ είναι **κατακόρυφες**, οι ροπές τους έχουν μηδενικές συνιστώσες κατά μήκος του άξονα **Oz**. Η ροπή της $\vec{F}$ κατά μήκος του άξονα **Oz** είναι επίσης μηδενική (η κατακόρυφη συνιστώσα είναι παράλληλη με τον άξονα και η οριζόντια συνιστώσα έχει μηδενικό μοχλοβραχίονα ως προς το σημείο Ο). Άρα, η συνολική στροφορμή του συστήματος πλατφόρμας-ανθρώπου κατά μήκος του **Oz** διατηρείται:

$$\sum L_{\alpha\rho\chi,\,z} = \sum L_{\tau\varepsilon\lambda,\,z}$$

3. Επειδή ο άνθρωπος και η πλατφόρμα είναι αρχικά ακίνητοι, έχουν μηδενική αρχική στροφορμή κατά μήκος του **Oz**:

$$L^{A}_{\alpha\rho\chi,\,z} = L^{\Pi\Lambda}_{\alpha\rho\chi,\,z} = 0 \Rightarrow \sum L_{\alpha\rho\chi,\,z} = 0$$

Έστω ότι ο άνθρωπος αρχίζει να περπατά αριστερόστροφα κατά μήκος της περιφέρειας, με γραμμική ταχύτητα μέτρου υ_{A} ως προς το έδαφος. Θεωρούμε τον άνθρωπο σαν υλικό σημείο σε κυκλική κίνηση. Η στροφορμή του ανθρώπου κατά μήκος του **Oz** έχει αλγεβρική τιμή

$$L^{A}_{\tau\varepsilon\lambda,\,z} = +R\,(m_{A}\upsilon_{A})\eta\mu 90^{o} = m_{A}R\upsilon_{A}$$

Για να διατηρηθεί η συνολική στροφορμή του συστήματος ανθρώπου-πλατφόρμας, η πλατφόρμα αρχίζει να περιστρέφεται **δεξιόστροφα**, με αντίθετη στροφορμή:

$$L^{A}_{\tau\varepsilon\lambda,\,z} + L^{\Pi\Lambda}_{\tau\varepsilon\lambda,\,z} = L^{A}_{\alpha\rho\chi,\,z} + L^{\Pi\Lambda}_{\alpha\rho\chi,\,z} = 0 \Rightarrow L^{\Pi\Lambda}_{\tau\varepsilon\lambda,\,z} = -L^{A}_{\tau\varepsilon\lambda,\,z} = -m_{A}R\upsilon_{A}$$

Θεωρούμε την πλατφόρμα σαν στερεό σώμα, που περιστρέφεται ως προς τον ακλόνητο άξονα **Oz** με γωνιακή ταχύτητα $\omega_{\Pi\Lambda}$. Η στροφορμή της πλατφόρμας κατά μήκος του **Oz** ισούται με $L^{\Pi\Lambda}_{\tau\varepsilon\lambda,\,z} = I\omega_{\Pi\Lambda}$. Συνδυάζουμε με την προηγούμενη σχέση:

$$I\omega_{\Pi\Lambda} = -m_{A}R\upsilon_{A} \Rightarrow \omega_{\Pi\Lambda} = -\frac{m_{A}R\upsilon_{A}}{I}$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η πλατφόρμα περιστρέφεται δεξιόστροφα (αντίθετα από τον άνθρωπο).

Η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας ως προς τον άξονα **Oz** ισούται με $I = \frac{1}{2}m_{\Pi}R^{2}$. Άρα:

$$I\omega_{\Pi\Lambda} = -m_{A}R\upsilon_{A} \Rightarrow \omega_{\Pi\Lambda} = -\frac{m_{A}R\upsilon_{A}}{\frac{1}{2}m_{\Pi}R^{2}} = -\frac{2m_{A}}{m_{\Pi}}\frac{\upsilon_{A}}{R}$$

Αριθμητική Αντικατάσταση

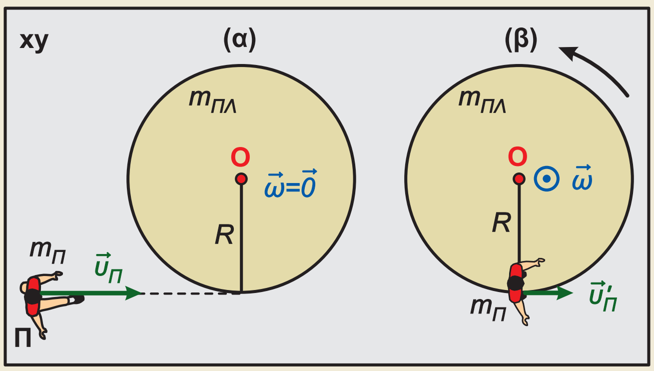
$$\omega_{\Pi\Lambda} = -2\,\frac{75{,}0\ \text{kg}}{750{,}0\ \text{kg}}\,\frac{1{,}2\ \text{m/s}}{2{,}0\ \text{m}} = -0{,}12\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Σημείωση

Όταν το παιδί αρχίζει να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, ασκείται σε αυτό μία ακτινική (κεντρομόλος) δύναμη τριβής $\vec{f}_s$ από την πλατφόρμα. Η πλατφόρμα δέχεται αντίθετη δύναμη τριβής $\vec{F}_1 = -\vec{f}_s$ από το παιδί (δράση - αντίδραση). Επειδή το ΚΜ της πλατφόρμας παραμένει ακίνητο, η πλατφόρμα δέχεται και μία εξωτερική οριζόντια δύναμη $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = \vec{f}_s$ από τον άξονα περιστροφής, με μηδενικό μοχλοβραχίονα ως προς το σημείο Ο. Επιπρόσθετα δέχεται και μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{N}$ από τον άξονα περιστροφής. Η συνολική δύναμη στην πλατφόρμα από τον άξονα περιστροφής, $\vec{F} = \vec{F}_2 + \vec{N}$, δεν επηρεάζει τη συνολική στροφορμή κατά μήκος του άξονα **Oz**.

Παράδειγμα 2

Το **σχήμα (α)** δείχνει σε κάτοψη μία οριζόντια πλατφόρμα μάζας $m_{\Pi\Lambda} = 300{,}0$ kg και ακτίνας $R = 1{,}0$ m. Η πλατφόρμα μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν ακλόνητο κατακόρυφο άξονα **Oz**, που διέρχεται από το κέντρο της **Ο** και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας. Οι τριβές στην πλατφόρμα από τον άξονα περιστροφής θεωρούνται αμελητέες.



Αρχικά, η πλατφόρμα είναι ακίνητη. Ένα παιδί **Π** μάζας $m_\Pi = 50{,}0$ kg, που βαδίζει με σταθερή ταχύτητα μέτρου $\upsilon_\Pi = 4{,}0$ m/s, ανεβαίνει στην πλατφόρμα και σταματά να βαδίζει. Αμέσως μετά, το παιδί και η πλατφόρμα αρχίζουν να περιστρέφονται με κοινή γωνιακή ταχύτητα ω (**σχήμα (β)**).

Θα υπολογίσουμε την άγνωστη γωνιακή ταχύτητα ω.

1. Θα μελετήσουμε το σύστημα **παιδιού - πλατφόρμας**.

2. Οι **εξωτερικές** δυνάμεις στο σύστημα είναι (i) τα βάρη του παιδιού και της πλατφόρμας, και (ii) η

δύναμη στην πλατφόρμα από τον ακλόνητο άξονα περιστροφής **Oz**. Όλες οι εξωτερικές δυνάμεις έχουν **μηδενική ροπή** κατά μήκος του **Oz**. Άρα, η συνολική **στροφορμή** του συστήματος παιδιού-πλατφόρμας κατά μήκος του **Oz διατηρείται**:

$$L^{\Pi}_{\tau\varepsilon\lambda,\, z} + L^{\Pi\Lambda}_{\tau\varepsilon\lambda,\, z} = L^{\Pi}_{\alpha\rho\chi,\, z} + L^{\Pi\Lambda}_{\alpha\rho\chi,\, z}$$

3. Επειδή η πλατφόρμα είναι αρχικά ακίνητη, έχει μηδενική στροφορμή: $L^{\Pi\Lambda}_{\alpha\rho\chi,\, z} = 0$. Η αρχική στροφορμή του παιδιού, ως προς τον **Oz**, είναι: $L^{\Pi}_{\alpha\rho\chi,\, z} = +m_{\Pi} R \upsilon_{\Pi}$. Η φορά είναι προς τον αναγνώστη.

Όταν το παιδί ανέβει στην πλατφόρμα, αρχίζει να περιστρέφεται μαζί της με γωνιακή ταχύτητα ω και γραμμική ταχύτητα μέτρου $\upsilon'_{\Pi} = \omega R$. Η τελική στροφορμή του παιδιού ως προς τον **Oz** είναι ίση με $L^{\Pi}_{\tau\varepsilon\lambda,\, z} = m_{\Pi} R(\omega R) = m_{\Pi} R^2 \omega$.

Η τελική στροφορμή της πλατφόρμας είναι $L^{\Pi\Lambda}_{\tau\varepsilon\lambda,\, z} = I\omega = \frac{1}{2} m_{\Pi\Lambda} R^2 \omega$.

4. Από τη διατήρηση της στροφορμής, προκύπτει:

$$L^{\Pi}_{\tau\varepsilon\lambda,\, z} + L^{\Pi\Lambda}_{\tau\varepsilon\lambda,\, z} = L^{\Pi}_{\alpha\rho\chi,\, z} + L^{\Pi\Lambda}_{\alpha\rho\chi,\, z} \Rightarrow m_{\Pi} R^2 \omega + \frac{1}{2} m_{\Pi\Lambda} R^2 \omega = m_{\Pi} R \upsilon_{\Pi} \Rightarrow \omega = \frac{m_{\Pi}}{m_{\Pi} + \left(\frac{m_{\Pi\Lambda}}{2}\right)} \frac{\upsilon_{\Pi}}{R}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των μαζών και της αρχικής ταχύτητας του παιδιού, βρίσκουμε:

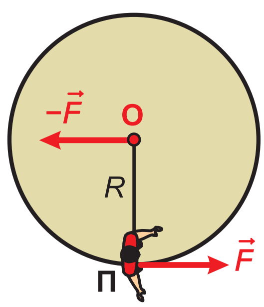
$$\omega_{\Pi\Lambda} = \frac{50{,}0\ \text{kg}}{50{,}0\ \text{kg} + 150{,}0\ \text{kg}} \times \frac{4{,}0\ \text{m/s}}{1{,}0\ \text{m}} = 1{,}0\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Σημειώσεις

1. Καθώς το παιδί ανεβαίνει στην ακίνητη πλατφόρμα, της ασκεί μία οριζόντια δύναμη τριβής με εφαπτομενική συνιστώσα $\vec{F}$. Η πλατφόρμα περιστρέφεται εξαιτίας της $\vec{F}$.

2. Η δύναμη τριβής παιδιού/πλατφόρμας έχει επίσης ακτινική συνιστώσα (συμβ. προηγούμενο παράδειγμα). Η εφαπτομενική συνιστώσα $\vec{F}$ δρα στο μικρό χρονικό διάστημα μέχρι το παιδί και η πλατφόρμα να αποκτήσουν κοινή γωνιακή ταχύτητα ω.

3. Το ΚΜ της πλατφόρμας δεν μετακινείται, επειδή δέχεται μία δύναμη από τον άξονα περιστροφής με οριζόντια συνιστώσα



αντίθετη της τριβής από το παιδί στην πλατφόρμα. Η δύναμη από τον άξονα περιστροφής στην πλατφόρμα έχει **μηδενική ροπή κατά μήκος του άξονα Oz**.

4. Η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης από τον άξονα περιστροφής είναι η μοναδική **εξωτερική** δύναμη στο σύστημα παιδιού - πλατφόρμας, κατά την οριζόντια διεύθυνση. Εξαιτίας της δύναμης αυτής **η συνολική ορμή παιδιού-πλατφόρμας δεν διατηρείται.**

5. Η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος παιδιού-πλατφόρμας επίσης **δεν** διατηρείται. **Προβλήματα όπως αυτό λύνονται μόνο με την Αρχή της Διατήρησης της Συνολικής Στροφορμής.**

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

Στο τελευταίο παράδειγμα:

1.18.1. Γιατί δεν διατηρείται η στροφορμή της πλατφόρμας ως προς το σημείο **O**; Ποιά ροπή προσδίδει γωνιακή ταχύτητα στην πλατφόρμα;

1.18.2. Γιατί δεν διατηρείται η στροφορμή του παιδιού ως προς το **O**; Ποιά ροπή μεταβάλλει τη στροφορμή του παιδιού;

1.18.3. Η συνισταμένη εξωτερική δύναμη του συστήματος πλατφόρμας - παιδιού μηδενίζεται, όταν το παιδί ανεβαίνει στην πλατφόρμα;

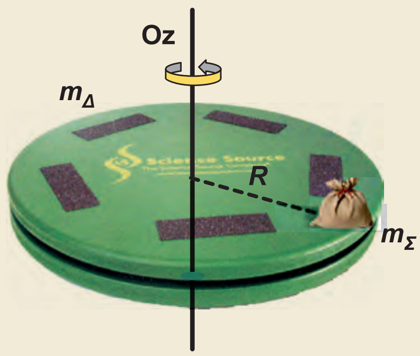
1.18.4. Γιατί διατηρείται η συνολική στροφορμή του συστήματος πλατφόρμας - παιδιού κατά μήκος του άξονα **Oz**;

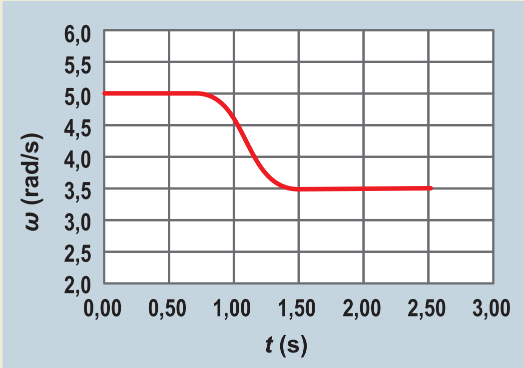
Παράδειγμα 3

Ένας μαθητής διερευνά την Αρχή της Διατήρησης της Στροφορμής με τη βοήθεια ενός δίσκου μάζας $m_\Delta = 0{,}500$ kg και ακτίνας $R = 0{,}20$ m. Ο δίσκος είναι οριζόντιος και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα **Oz**, που διέρχεται από το κέντρο του. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον **Oz** ισούται με $I = \frac{1}{2} m_\Delta R^2$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0{,}00$ s ο μαθητής θέτει τον δίσκο σε περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα $\omega_{αρχ} =$ 5,0 rad/s και κατόπιν τον αφήνει ελεύθερο. Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου απεικονίζεται σαν συνάρτηση του χρόνου στην πιο κάτω γραφική παράσταση.

Α. Μελετώντας το γράφημα ω - t στο χρονικό διάστημα 0,00 s - 0,75 s, να εξηγήσετε εάν ο δίσκος υφίσταται τριβή από τον άξονα περιστροφής.





Επειδή η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου παραμένει σταθερή, η τριβή από τον άξονα περιστροφής είναι αμελητέα.

Β. Τη χρονική στιγμή $t = 0{,}75$ s ο μαθητής τοποθετεί πάνω στον δίσκο έναν σάκο μάζας m_Σ με άμμο. Ο σάκος αρχίζει να περιστρέφεται από ηρεμία, και τη χρονική στιγμή $t = 1{,}50$ s αποκτά την ίδια τελική γωνιακή ταχύτητα $\omega_{\tau\epsilon\lambda} = 3{,}5$ rad/s με τον δίσκο. Στο διάστημα 1,50 s - 2,50 s ο δίσκος και ο σάκος περιστρέφονται με σταθερή κοινή γωνιακή ταχύτητα $\omega_{\tau\epsilon\lambda} = 3{,}5$ rad/s. Να εξηγήσετε γιατί η στροφορμή του συστήματος δίσκου - σάκου διατηρείται.

Οι εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα δίσκου - σάκου είναι τα βάρη τους και μία δύναμη από τον άξονα περιστροφής. Οι ροπές των δυνάμεων αυτών μηδενίζονται κατά μήκος του άξονα **Oz**. Άρα, η ολική στροφορμή κατά μήκος του άξονα **Oz** διατηρείται.

Γ. Να προσδιορίσετε την αρχική και τελική στροφορμή του δίσκου και του σάκου κατά μήκος του άξονα Oz, και να υπολογίσετε τη μάζα του σάκου.

Η αρχική στροφορμή του δίσκου ***κατά μήκος του άξονα*** **Oz** είναι

$$L^{\Delta}_{\alpha\rho\chi,\,z} = I_\Delta \omega_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2} m_\Delta R^2 \omega_{\alpha\rho\chi}$$

Η αρχική ταχύτητα του σάκου (αμέσως πριν ακουμπήσει στον δίσκο) είναι μηδενική. Άρα, η αρχική στροφορμή του σάκου ***κατά μήκος του άξονα*** **Oz** είναι μηδενική:

$$L^{\Sigma}_{\alpha\rho\chi,\,z} = m_\Sigma R \upsilon_\Sigma = 0$$

Στο διάστημα 1,50 s - 2,50 s ο σάκος και ο δίσκος κινούνται με κοινή γωνιακή ταχύτητα $\omega_{\tau\epsilon\lambda}$. Η στροφορμή του δίσκου γίνεται:

$$L^{\Delta}_{\tau\epsilon\lambda,\,z} = I_\Delta \omega_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2} m_\Delta R^2 \omega_{\tau\epsilon\lambda}$$

και η στροφορμή του σάκου γίνεται:

$$L^{\Sigma}_{\tau\epsilon\lambda,\,z} = m_\Sigma R \upsilon_\Sigma = m_\Sigma R(\omega_{\tau\epsilon\lambda} R) = m_\Sigma R^2 \omega_{\tau\epsilon\lambda}$$

Από τη διατήρηση της συνολικής στροφορμής, συμπεραίνουμε:

$$L^{\Delta}_{\text{αρχ}, z} + L^{\Sigma}_{\text{αρχ}, z} = L^{\Delta}_{\text{τελ}, z} + L^{\Sigma}_{\text{τελ}, z} \Rightarrow I_{\Delta}\omega_{\text{αρχ}} + 0 = \left(I_{\Delta} + m_{\Sigma}R^2\right)\omega_{\text{τελ}}$$

Προσοχή

Η ποσότητα $\left(I_{\Delta} + m_{\Sigma}R^2\right)$ είναι **η συνολική ροπή αδράνειας του συστήματος δίσκου - σάκου**. Η συνολική ροπή αδράνειας του συστήματος είναι **σταθερή** αμέσως πριν και μετά την τοποθέτηση του σάκου. Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου ελαττώνεται όταν τοποθετούμε τον σάκο, επειδή μέρος της στροφορμής του δίσκου μεταφέρεται στον σάκο, μέσω των δυνάμεων τριβής μεταξύ τους.

Από την τελευταία εξίσωση προσδιορίζουμε την άγνωστη μάζα του σάκου:

$$I_{\Delta}\omega_{\text{αρχ}} = \left(I_{\Delta} + m_{\Sigma}R^2\right)\omega_{\text{τελ}} \Rightarrow m_{\Sigma} = \frac{I_{\Delta}\left(\omega_{\text{αρχ}} - \omega_{\text{τελ}}\right)}{R^2\omega_{\text{τελ}}}$$

Η ροπή αδράνειας του δίσκου είναι:

$$I_{\Delta} = \frac{1}{2}m_{\Delta}R^2 = \frac{1}{2}(0{,}500\text{ kg}) \times (0{,}20\text{ m})^2 = 0{,}010\text{ kgm}^2$$

Άρα, η μάζα του σάκου είναι:

$$m_{\Sigma} = \frac{I_{\Delta}\left(\omega_{\text{αρχ}} - \omega_{\text{τελ}}\right)}{R^2\omega_{\text{τελ}}} = \frac{(0{,}010\text{ kgm}^2) \times (1{,}5\text{ rad/s})}{(0{,}20\text{ m})^2 \times (3{,}5\text{ rad/s})} = 0{,}11\text{ kg}$$

Δ. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του συστήματος τις χρονικές στιγμές t = 0,50 s και t = 2,50 s. Σε τι οφείλεται η μεταβολή της κινητικής ενέργειας;

Αρχικά, μόνο ο δίσκος έχει περιστροφική κινητική ενέργεια:

$$E^{\text{αρχ}}_{\text{κιν περ}} = \frac{1}{2}I_{\Delta}\omega^2_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2}(0{,}010\text{ kgm}^2) \times \left(5{,}00\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 = 0{,}13\text{ J}$$

Μετά την πρόσκρουση, η συνολική κινητική ενέργεια είναι:

$$E^{\text{τελ}}_{\text{κιν περ}} = \frac{1}{2}\left(I_{\Delta} + m_{\Sigma}R^2\right)\omega^2_{\text{τελ}} = \frac{1}{2}(0{,}010\text{ kgm}^2 + 0{,}11 \times 0{,}20^2\text{ kgm}^2) \times \left(3{,}50\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 = 0{,}088\text{ J}$$

Άρα, η συνολική κινητική ενέργεια **ελαττώνεται.** Η μεταβολή οφείλεται στη μετατροπή κινητικής ενέργειας σε εσωτερική ενέργεια του συστήματος, μέσω τριβών μεταξύ δίσκου/σάκου.

Ε. Να προσδιορίσετε τις δυνάμεις από τον σάκο στον δίσκο στο διάστημα 0,75 - 1,50 s. Να υπολογίσετε τη μέση ροπή αυτών των δυνάμεων κατά μήκος του Oz.

Ανάμεσα στον δίσκο (Δ) και τον σάκο (Σ) αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής. Οι δυνάμεις αυτές είναι **εσωτερικές** και δεν επηρεάζουν τη συνολική στροφορμή του συστήματος δίσκου - σάκου. Η εφαπτομενική συνιστώσα της δύναμης τριβής $\vec{f}_{\Delta\rightarrow\Sigma}$, από τον δίσκο στον σάκο, επιταχύνει τον σάκο μέχρι να αποκτήσει την τελική γωνιακή ταχύτητα 3,5 rad/s τη στιγμή $t = 1{,}50$ s. Η ροπή κατά μήκος του άξονα Oz της δύναμης τριβής $\vec{f}_{\Sigma\rightarrow\Delta}$, από τον σάκο στον δίσκο, ελαττώνει τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου από την τιμή $\omega_{\alpha\rho\chi}$ στην τιμή $\omega_{\tau\varepsilon\lambda}$.

Στο διάστημα 0,75 s - 1,50 s, η μέση συνισταμένη ροπή στο δίσκο, κατά μήκος του άξονα **Oz**, είναι:

$$\left(\sum M^{\Delta}_{\varepsilon\xi\omega\tau,\,z}\right)_{\mu} = \frac{\Delta L^{\Delta}_{z}}{\Delta t} = \frac{L^{\Delta}_{\tau\varepsilon\lambda,\,z} - L^{\Delta}_{\alpha\rho\chi,\,z}}{\Delta t} = \frac{m_{\Delta}R^2(\omega_{\tau\varepsilon\lambda} - \omega_{\alpha\rho\chi})}{2\Delta t} =$$

$$\frac{(0{,}500\ \text{kg}) \times (0{,}20\ \text{m})^2 \times (-1{,}5\ \text{rad/s})}{1{,}5\ \text{s}} = -0{,}020\ \text{Nm}$$

ΣΤ. Στο χρονικό διάστημα 1,50 - 2,50 s ο δίσκος και ο σάκος περιστρέφονται με κοινή γωνιακή ταχύτητα. Να εξηγήσετε τη μορφή του γραφήματος ω - t σε αυτό το διάστημα. Ποιά είναι η συνολική ροπή στον δίσκο;

Όταν ο σάκος αποκτήσει τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου, αρχίζει να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Η δύναμη τριβής $\vec{f}_{\Delta\rightarrow\Sigma}$ στον σάκο γίνεται ακτινική με κατεύθυνση προς το **O**, και ενεργεί σαν κεντρομόλος (όπως στο παράδειγμα νομίσματος σε περιστρεφόμενη πλατφόρμα, που μελετήσατε πέρισυ). Η δύναμη τριβής $\vec{f}_{\Sigma\rightarrow\Delta}$ στον δίσκο είναι επίσης ακτινική. Οι ροπές των δύο δυνάμεων μηδενίζονται ως προς το **O** και δεν μεταβάλλουν τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου και του σάκου.

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Σύμφωνα με τη **γενικευμένη έκφραση** του Δεύτερου Νόμου για την Περιστροφική Κίνηση, η στροφορμή ενός σώματος ή συστήματος σωμάτων **διατηρείται** εάν:	
α	Το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων στο σώμα ή σύστημα μηδενίζεται.	
β	Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων στο σώμα ή σύστημα μηδενίζεται.	

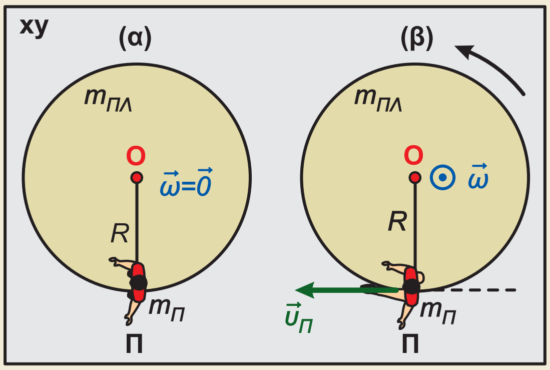
2	Όταν ένα σημείο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, η ροπή της κεντρομόλου δύναμης είναι μηδενική:	
α	Ως προς το κέντρο της τροχιάς.	
β	Ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου της τροχιάς.	
3	Όταν ένα σημείο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, η στροφορμή του διατηρείται:	
α	Ως προς το κέντρο της τροχιάς.	
β	Ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου της τροχιάς.	

Ασκήσεις

Προβλήματα με αστεράκι (*) απαιτούν σύνθεση εννοιών.

Εφαρμογή της Διατήρησης της Στροφορμής σε Συστήματα Σωμάτων

1 Ένα παιδί μάζας $m_{\Pi} = 35{,}0$ kg κάθεται στην περιφέρεια μίας οριζόντιας πλατφόρμας, με μάζα $m_{\Pi\Lambda} = 150{,}0$ kg και ακτίνα $R = 1{,}50$ m. Αρχικά, η πλατφόρμα και το παιδί είναι ακίνητα. Σε κάποια στιγμή, το παιδί πηδά έξω από την πλατφόρμα σε εφαπτομενική διεύθυνση, με ταχύτητα μέτρου 3,00 m/s ως προς το έδαφος. Η πλατφόρμα αρχίζει να περιστρέφεται χωρίς τριβές, ως προς κατακόρυφο άξονα **Oz** που διέρχεται από το κέντρο της.



Α. Να εξετάσετε εάν διατηρείται η συνολική στροφορμή του συστήματος πλατφόρμας-παιδιού κατά μήκος του άξονα **Oz**, καθώς το παιδί φεύγει από την πλατφόρμα.

Β. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα που αποκτά η πλατφόρμα, εφαρμόζοντας την αρχή της διατήρησης της στροφορμής.

Γ. Να εξηγήσετε γιατί δεν διατηρείται ξεχωριστά η στροφορμή της πλατφόρμας και του παιδιού κατά μήκος του άξονα **Oz**.

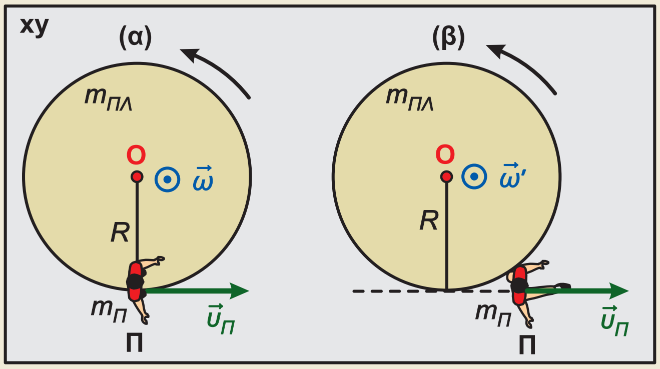
Δ. Γιατί το ΚΜ της πλατφόρμας δεν μετακινείται; Διατηρείται η συνολική ορμή του συστήματος παιδιού-πλατφόρμας;

Ε. Να υπολογίσετε τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος παιδιού-πλατφόρμας.

ΣΤ. Τι θα συνέβαινε, εάν το παιδί εγκατέλειπε την πλατφόρμα με ταχύτητα 3,00 m/s κατά την **ακτινική** διεύθυνση **ΟΠ**;

Σημείωση
Να δώσετε όλες τις απαντήσεις σας με τον σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων. Η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2} m_{\Pi\Lambda} R^2$.

2 Στο προηγούμενο παράδειγμα, το παιδί και η πλατφόρμα περιστρέφονται αρχικά με γωνιακή ταχύτητα ω. Το παιδί κινείται με εφαπτομενική ταχύτητα $\upsilon_\Pi = \omega R$ ως προς το έδαφος. Σε κάποια στιγμή, το παιδί εγκαταλείπει την πλατφόρμα σε εφαπτομενική διεύθυνση, με την ***ίδια ταχύτητα*** ωR ως προς το έδαφος. Πώς θα επηρεασθεί η γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας; **Γιατί;**



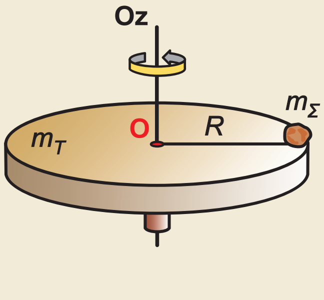
3 Ο τροχός ενός αγγειοπλάστη έχει μάζα $m_T = 0{,}450$ kg και ακτίνα $R = 0{,}350$ m και περιστρέφεται **χωρίς τριβές** με συχνότητα 125 rpm γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα **Oz**, που διέρχεται από το κέντρο του.

Σε κάποια στιγμή αφήνουμε να ακουμπήσει με μηδενική ταχύτητα ένα μικρό σφαιρίδιο πηλού μάζας $m_\Sigma = 0{,}075$ kg σε ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού. Το σφαιρίδιο προσκολλάται στον τροχό και κινείται μαζί του.

Α. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την αρχική γωνιακή ταχύτητα και στροφορμή του τροχού.

Β. Ποιά είναι η αρχική στροφορμή του σφαιριδίου κατά μήκος του **Oz**, αμέσως πριν ακουμπήσει στον τροχό;

Γ. Να εξετάσετε εάν διατηρείται η **συνολική** στροφορμή του συστήματος τροχού-σφαιριδίου κατά μήκος του **Oz**. ***Να αιτιολογήσετε*** την απάντησή σας, χρησιμοποιώντας τις εξωτερικές δυνάμεις του **συστήματος τροχού-σφαιριδίου**.



Δ. Να υπολογίσετε την τελική γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος τροχού/σφαιριδίου.

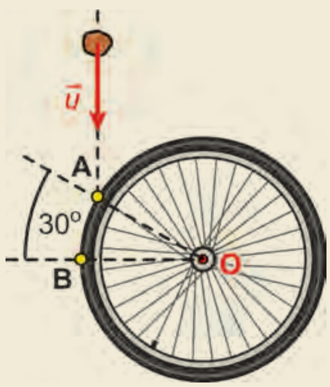
Ε. Να εξηγήσετε γιατί δεν διατηρείται ξεχωριστά η στροφορμή του τροχού και η στροφορμή του σφαιριδίου κατά μήκος του άξονα **Oz**.

Σημείωση

Να δώσετε όλες τις απαντήσεις σας με τον σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων. Η ροπή αδράνειας του τροχού δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2} m_{\mathrm{T}} R^2$.

4 Ένας ακίνητος κατακόρυφος τροχός ποδηλάτου έχει μάζα $m_{\mathrm{T}} = 2{,}50$ kg και ακτίνα $R = 0{,}50$ m. Ο τροχός αιωρείται στον αέρα και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο του **O**.

Ένα μικρό κομμάτι πηλού μάζας $m_{\Pi} = 65{,}0$ g πέφτει και προσκολλάται στο σημείο **A** της περιφέρειας του τροχού, με κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου 10,0 m/s. Η προσκόλληση μπορεί να θεωρηθεί στιγμιαία. Μετά την προσκόλληση ο πηλός και ο τροχός κινούνται μαζί.



Α. Ποια είναι η στροφορμή του πηλού και του τροχού γύρω από το κέντρο του τροχού **O**, αμέσως πριν την προσκόλληση;

Β. Να προσδιορίσετε τις εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα τροχού-πηλού. Διατηρείται η στροφορμή κατά τη διάρκεια της προσκόλλησης;

Γ. Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος τροχού-πηλού αμέσως μετά την προσκόλληση του πηλού στον τροχό;

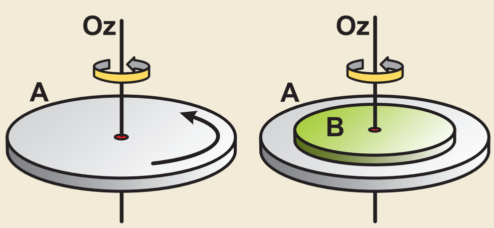
Δ. Η συνολική ορμή του συστήματος τροχού-πηλού διατηρείται; Αν όχι, γιατί;

Ε. Η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος τροχού-πηλού διατηρείται;

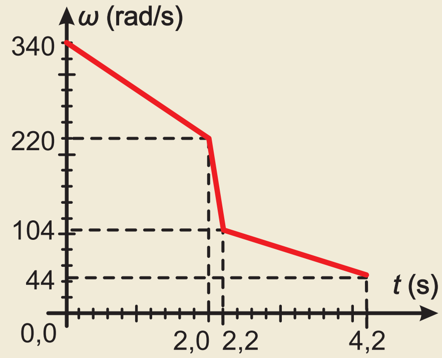
Σημείωση

Να θεωρήσετε ότι ο τροχός είναι ομογενής, και ότι όλη η μάζα του είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του.

5* Στο αριστερό σχήμα, ένας ομογενής δίσκος Α με ροπή αδράνειας $I = 0{,}25$ kgm^2 περιστρέφεται γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα **Oz**, που διέρχεται από το ΚΜ του.



Ο άξονας περιστροφής ασκεί τριβή στον δίσκο **Α**, η οποία είναι ***συνεχώς σταθερή***. Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου **Α** απεικονίζεται σαν συνάρτηση του χρόνου στη γραφική παράσταση.



Α. Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση στο χρονικό διάστημα 0,0 s - 2,0 s, να υπολογίσετε τη ροπή της τριβής από τον άξονα περιστροφής στον δίσκο **Α**.

Β. Τη χρονική στιγμή $t = 2{,}0$ s τοποθετούμε στον δίσκο **Α** έναν δεύτερο ακίνητο δίσκο **Β** με την ίδια ροπή αδράνειας I (**δεξί σχήμα**). Ο δίσκος **Β** αρχίζει να περιστρέφεται, και τη χρονική στιγμή $t = 2{,}2$ s αποκτά την ίδια γωνιακή ταχύτητα με τον πρώτο. Ο άξονας περιστροφής δεν ασκεί τριβή στον δίσκο **Β**. Ποιά εξωτερική ροπή προσδίδει γωνιακή επιτάχυνση στον δίσκο **Β**, στο διάστημα 2,0 s - 2,2 s;

Γ. Ποιες εξωτερικές ροπές προσδίδουν γωνιακή επιτάχυνση στον δίσκο **Α**, στο διάστημα 2,0 s - 2,2 s;

Δ. Να υπολογίσετε τη μέση ροπή στον δίσκο **Α**, στο χρονικό διάστημα 2,0 s - 2,2 s.

Ε. Στο χρονικό διάστημα 2,2 s - 4,2 s, οι δύο δίσκοι γυρνούν με κοινή γωνιακή ταχύτητα. Να εξηγήσετε γιατί το γράφημα ω - t έχει μικρότερη κλίση στο διάστημα 2,2 s - 4,2 s, σε σύγκριση με το διάστημα 0,0 s - 2,0 s.

ΣΤ. Ποια ροπή προσδίδει γωνιακή επιτάχυνση στον δίσκο **Β**, στο διάστημα 2,2 s - 4,2 s;

Ζ. Ποιες ροπές προσδίδουν γωνιακή επιτάχυνση στον δίσκο **Α**, στο διάστημα 2,2 s - 4,2 s;

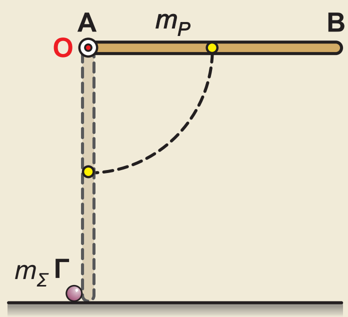
Η. Να υπολογίσετε τη μέση ροπή στον δίσκο **Α**, στο διάστημα 2,2 s - 4,2 s.

Σύνθετα Προβλήματα

6* Ομογενής ράβδος **ΑΒ** μήκους $d = 0{,}300$ m και μάζας $m_{\mathrm{P}} = 0{,}450$ kg μπορεί να περιστρέφεται κατακόρυφα, χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της **Α**.

Η ράβδος αφήνεται ελεύθερη από οριζόντια θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $I = \frac{1}{3} m_{\mathrm{P}} d^2$.

Α. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου, τη στιγμή που φθάνει στην κατακόρυφη θέση (**σημείο Γ**).



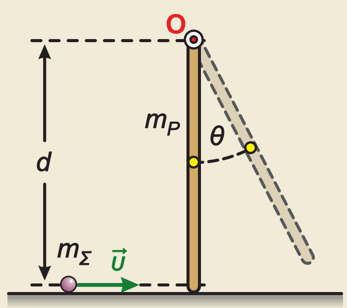
Β. Μία σφαίρα από πλαστελίνη μάζας $m_\Sigma = 0{,}100$ kg ισορροπεί στο σημείο **Γ**. Τη στιγμή που η ράβδος περνά από την κατακόρυφη θέση, το κάτω άκρο της συγκρούεται με τη σφαίρα και στη συνέχεια τα δύο σώματα περιστρέφονται μαζί. Η κρούση έχει αμελητέα διάρκεια.

I. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου-σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής μετά την κρούση. Να θεωρήσετε ότι η σφαίρα είναι σημειακή.

II. Να προσδιορίσετε τις εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα ράβδου-σφαίρας, κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης. Ποιά είναι η ροπή αυτών των δυνάμεων ως προς τον άξονα περιστροφής; Διατηρείται η στροφορμή ως προς τον άξονα περιστροφής;

III. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος ράβδου-πλαστελίνης αμέσως μετά την κρούση.

7* Μία μπάλα μάζας $m_\Sigma = 0{,}125$ kg προσκρούει με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 6{,}0$ m/s στο άκρο **Α** ενός κατακόρυφου ξύλινου ραβδιού, μάζας $m_P = 0{,}750$ kg και μήκους $d = 0{,}850$ m. Το ραβδί μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν ακλόνητο οριζόντιο άξονα, που διέρχεται από το άκρο του **Ο**. Μετά από την πρόσκρουση, το ραβδί και η μπάλα κινούνται σαν ένα σώμα.



Α. Να προσδιορίσετε τις εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα ραβδιού-μπάλας. Τι ροπή ασκούν αυτές οι δυνάμεις ως προς το σημείο **Ο**;

Β. Να εξηγήσετε γιατί **δεν** διατηρείται η ορμή του συστήματος ραβδιού-μπάλας.

Γ. Να εξηγήσετε γιατί **δεν** διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος ραβδιού-μπάλας.

Δ. Να εξηγήσετε γιατί διατηρείται η στροφορμή του συστήματος ραβδιού-μπάλας ***ως προς το σημείο*** **Ο**.

Ε. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ραβδιού-μπάλας αμέσως μετά την πρόσκρουση.

ΣΤ. Μετά την πρόσκρουση, το ραβδί ανυψώνεται μέχρι μία μέγιστη γωνία θ. Να υπολογίσετε την τιμή αυτής της γωνίας, χρησιμοποιώντας την αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας του συστήματος ραβδιού-μπάλας-Γης.

1.19. Εφαρμογή του Γενικευμένου Δεύτερου Νόμου για την Περιστροφική Κίνηση σε Σώματα με Μεταβαλλόμενη Ροπή Αδράνειας

Στην **Ενότητα 1.16** εξηγήσαμε ότι όταν ένα σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν ακλόνητο άξονα ή άξονα συμμετρίας **Oz**, η στροφορμή του σώματος κατά μήκος του άξονα ισούται με $L_z = I\omega$.

Εφαρμόζοντας τη γενικευμένη έκφραση του Δεύτερου Νόμου κατά μήκος του **Oz**, βρίσκουμε:

$$\sum \vec{M}_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \Rightarrow \sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau,z} = \frac{\Delta L_z}{\Delta t} = \frac{\Delta (I\omega)}{\Delta t}$$

Εάν το άθροισμα των **εξωτερικών** ροπών κατά μήκος του **Oz** μηδενίζεται, το γινόμενο $I\omega$ παραμένει σταθερό:

Εάν το σώμα **δεν είναι στερεό**, οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων του μπορούν να μεταβάλλονται. Άρα, η ροπή αδράνειας I του σώματος **δεν** είναι γενικά σταθερή, ως προς τον άξονα **Oz**. Σε αυτή την περίπτωση, η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σώματος μεταβάλλεται επίσης, έτσι ώστε **το γινόμενο $I\omega$ να παραμένει σταθερό**.

Παράδειγμα 1

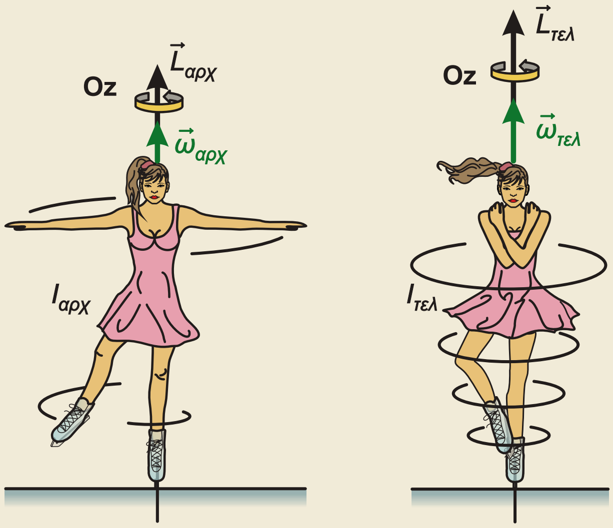
Μία χορεύτρια του μπαλέτου στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα συμμετρίας **Oz**, που διέρχεται από το ΚΜ της. **Εάν η χορεύτρια φέρει τα χέρια της σε συμμετρική στάση στο στήθος της, πώς θα μεταβληθεί η γωνιακή της ταχύτητα και η περιστροφική κινητική της ενέργεια;**

Στη χορεύτρια ασκούνται το βάρος της $\vec{B}$ και μία συνισταμένη κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το έδαφος. Το ΚΜ της χορεύτριας ανήκει στον άξονα περιστροφής και παραμένει ακίνητο. Άρα, οι δυνάμεις $\vec{B}$ και $\vec{N}$ είναι αντίθετες:

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N} = -\vec{B}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι $\vec{B}$ και $\vec{N}$ αποτελούν ζεύγος δυνάμεων. Για να μην ανατρέπεται η χορεύτρια, πρέπει η ροπή του ζεύγους να μηδενίζεται, δηλαδή οι δυνάμεις $\vec{B}$ και $\vec{N}$ να είναι **συγγραμμικές**. Άρα, το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης $\vec{N}$ βρίσκεται ακριβώς κάτω από το ΚΜ της χορεύτριας.

Η στροφορμή της χορεύτριας είναι $\vec{L} = I\vec{\omega}$, όπου I είναι η ροπή αδράνειας της χορεύτριας ως προς τον άξονα Oz. Η κατεύθυνση της στροφορμής είναι κατακόρυφη (παράλληλη με τον άξονα συμμετρίας). Επειδή η ροπή του ζεύγους είναι μηδενική, η στροφορμή παραμένει σταθερή κατά μέτρο και διεύθυνση.



Εάν η χορεύτρια φέρει τα χέρια της στο στήθος της, η ροπή αδράνειας της ως προς τον **Oz** ελαττώνεται. Άρα, η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής πρέπει να αυξηθεί:

$$I_{αρχ}\,\omega_{αρχ} = I_{τελ}\,\omega_{τελ} \Rightarrow \frac{\omega_{τελ}}{\omega_{αρχ}} = \frac{I_{αρχ}}{I_{τελ}} > 1$$

Η περιστροφική κινητική ενέργεια της χορεύτριας θα αυξηθεί επίσης:

$$\frac{E^{τελ}_{κιν\ περ}}{E^{αρχ}_{κιν\ περ}} = \frac{(1/2)I_{τελ}}{(1/2)I_{αρχ}}\,\frac{\omega^2_{τελ}}{\omega^2_{αρχ}} = \frac{I_{τελ}}{I_{αρχ}}\left(\frac{I_{αρχ}}{I_{τελ}}\right)^2 = \frac{I_{αρχ}}{I_{τελ}} > 1$$

Ερώτηση

Από πού προέρχεται η επιπρόσθετη Κινητική Ενέργεια της Χορεύτριας;

Καθώς η χορεύτρια περιστρέφεται, τα χέρια της έχουν την τάση να απομακρύνονται από τον άξονα περιστροφής. Οι μύες της χορεύτριας καταβάλλουν έργο για να κινήσουν τα χέρια της προς τον άξονα περιστροφής. Το έργο αυτό οφείλεται σε χημική ενέργεια, που είναι αποθηκευμένη στα μόρια του σώματος της χορεύτριας:

$$E^{τελ}_{χημ} + E^{τελ}_{κιν\ περ} = E^{αρχ}_{χημ} + E^{αρχ}_{κιν\ περ} \Rightarrow E^{τελ}_{κιν\ περ} - E^{αρχ}_{κιν\ περ} = E^{αρχ}_{χημ} - E^{τελ}_{χημ} \Rightarrow \Delta E_{κιν\ περ} = -\,\Delta E_{χημ}$$

Αριθμητική Εφαρμογή

Έστω ότι η αρχική ροπή αδράνειας της χορεύτριας είναι 3,20 kg m^2 και η τελική ροπή αδράνειας είναι 0,60 kg m^2. Εάν η χορεύτρια περιστρέφεται αρχικά με γωνιακή ταχύτητα $\omega_{αρχ} = 3{,}50$ rad/s, όταν μαζέψει τα χέρια της θα περιστρέφεται με ταχύτητα

$$\omega_{τελ} = (3{,}50\ \text{rad/s}) \times \frac{3{,}20\ \text{kg m}^2}{0{,}60\ \text{kg m}^2} = 18{,}7\ \text{rad/s}$$

Η αρχική κινητική ενέργεια της χορεύτριας είναι:

$$E_{\text{κιν περ}}^{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} I_{\text{αρχ}} \omega_{\text{αρχ}}^2 = \frac{1}{2}(3{,}20 \text{ kg m}^2) \times (3{,}50 \text{ rad/s})^2 = 19{,}6 \text{ J}$$

Η τελική κινητική ενέργεια της χορεύτριας είναι:

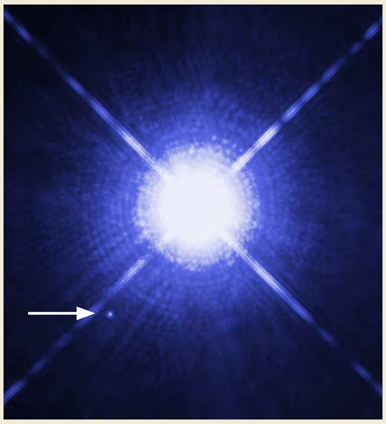
$$E_{\text{κιν περ}}^{\text{τελ}} = E_{\text{κιν περ}}^{\text{αρχ}} \left(\frac{I_{\text{αρχ}}}{I_{\text{τελ}}}\right) = (19{,}6 \text{ J}) \times \frac{3{,}20 \text{ kg m}^2}{0{,}60 \text{ kg m}^2} = 105 \text{ J}$$

Παράδειγμα 2
Γωνιακή Ταχύτητα Περιστροφής ενός Λευκού Νάνου

Η σημερινή ακτίνα του Ήλιου ισούται με 700000 km και η περίοδος περιστροφής του γύρω από τον άξονά του είναι 24 ημέρες. Σε περίπου 5 δισεκατομμύρια χρόνια από σήμερα, ο Ήλιος θα εξαντλήσει τα αποθέματα που συντηρούν τις πυρηνικές αντιδράσεις στο εσωτερικό του, και θα μετατραπεί σε λευκό νάνο. Ένας τυπικός λευκός νάνος με τη μάζα του Ήλιου έχει ακτίνα 7000 km. **Θα υπολογίσουμε την περίοδο περιστροφής του Ήλιου γύρω από τον άξονά του, όταν μετατραπεί σε λευκό νάνο.**

Θα προσεγγίσουμε τον Ήλιο σαν μία ομογενή σφαίρα, με ροπή αδράνειας $I = \frac{2}{5} m R^2$.

Επειδή η ακτίνα του Ήλιου θα ελαττωθεί κατά τη μετατροπή του σε λευκό νάνο, η ροπή αδράνειας του θα ελαττωθεί. Από τη διατήρηση της στροφορμής προκύπτει ότι η γωνιακή ταχύτητα του Ήλιου θα αυξηθεί, έτσι ώστε το γινόμενο $I\omega$ να παραμείνει σταθερό. Υποθέτοντας ότι η μάζα του Ήλιου παραμένει σταθερή κατά τη μετατροπή, βρίσκουμε:



Ο Σείριος Α με το αστέρι-συνοδό του, τον λευκό νάνο Σείριο Β (μικρή άσπρη κουκίδα). **Πηγή: NASA.**

$$I_{\text{αρχ}}\,\omega_{\text{αρχ}} = I_{\text{τελ}}\,\omega_{\text{τελ}} \Rightarrow \left(\frac{2}{5} m R_{\text{αρχ}}^2\right) \frac{2\pi}{T_{\text{αρχ}}} = \left(\frac{2}{5} m R_{\text{τελ}}^2\right) \frac{2\pi}{T_{\text{τελ}}} \Rightarrow$$

$$T_{\text{τελ}} = T_{\text{αρχ}} \frac{R_{\text{τελ}}^2}{R_{\text{αρχ}}^2} = (24 \times 86\,400 \text{ s}) \times \left(\frac{7 \times 10^3 \text{ km}}{7 \times 10^5 \text{ km}}\right)^2 =$$

$$\frac{24 \times 86\,400}{10^4} \text{ s} = 200 \text{ s}$$

Άρα, ο Ήλιος θα συμπληρώνει μία πλήρη περιστροφή σε περίπου 3,5 λεπτά της ώρας.

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Ένα περιστρεφόμενο σώμα αλλάζει σχήμα, και η ροπή αδράνειας του ελαττώνεται ως προς τον άξονα περιστροφής. Η γωνιακή ταχύτητα του σώματος θα αυξηθεί:	
α	Αναγκαστικά.	
β	Εάν η ροπή εξωτερικών δυνάμεων στο σώμα είναι μηδενική, ως προς τον ίδιο άξονα.	

Ασκήσεις

1. Όταν ένας άνθρωπος περπατά, φέρει προς τα εμπρός (ή προς τα πίσω) ταυτόχρονα το αριστερό του χέρι και το δεξί του πόδι, ή το δεξί του χέρι και το αριστερό του πόδι. Να εξηγήσετε γιατί με αυτό τον τρόπο διατηρείται η στροφορμή του σώματος.

   Σημείωση
   Εάν η στροφορμή μεταβάλλεται, στο σώμα πρέπει να δρα εξωτερική ροπή από το έδαφος. Άρα, και το σώμα θα ασκεί επιπρόσθετες δυνάμεις στο έδαφος. Το βάδισμα είναι πιο ξεκούραστο όταν διατηρείται η στροφορμή. (Δοκιμάστε να περπατήσετε κινώντας μαζί προς τα εμπρός το αριστερό χέρι και πόδι, ή το δεξί χέρι και πόδι. Τι παρατηρείτε;)

2. Παρατηρήστε πώς περπατά ένα περιστέρι ή μία γάτα: Τα πουλιά συνοδεύουν την κίνηση των ποδιών τους (μπρος/πίσω) με συγχρονισμένη κίνηση του κεφαλιού τους προς την ίδια κατεύθυνση (μπρος/πίσω). Τα τετράποδα ζώα κινούν μαζί προς τα εμπρός (ή προς τα πίσω) το δεξί μπροστινό πόδι και το πίσω αριστερό πόδι, **ή** το αριστερό μπροστινό πόδι και το πίσω δεξί πόδι. Σε τι εξυπηρετεί αυτό;

3. Για να περπατήσουμε σε έναν στενό, αιωρούμενο διάδρομο (π.χ. σε μία οριζόντια, αιωρούμενη σανίδα), βολεύει να απλώσουμε τα χέρια μας σε οριζόντια στάση. Όταν το σώμα μας τείνει να ανατραπεί, μπορούμε να διατηρήσουμε την ισορροπία μας, εάν κάνουμε διορθωτικές κινήσεις με τα χέρια. Ομοίως, ένας σχοινοβάτης που κρατά ένα μακρύ κοντάρι, μπορεί να διατηρεί καλύτερα την ισορροπία του με διορθωτικές κινήσεις του κονταριού. Σε τι εξυπηρετούν αυτές οι κινήσεις;

4. Ένα σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση και περιστρέφεται ως προς άξονα, που διέρχεται από το ΚΜ του.

Α. Ποια είναι η ροπή του βάρους του ως προς τον άξονα περιστροφής;

Β. Είναι δυνατόν να μεταβληθεί η στροφορμή του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής;

5 Μία γάτα που αφήνεται να πέσει ελεύθερα με τα πόδια προς τα επάνω, στριφογυρίζει το σώμα της και προσγειώνεται με τα πόδια. Γιατί είναι αναγκασμένη να κινήσει διάφορα τμήματα του σώματός της σε διαφορετικές κατευθύνσεις; Για μία εξήγηση, δείτε το video:
https://www.youtube.com/watch?v=yGusK69XVlk

6 Ένας αρσιβαρίστας στέκεται σε μία περιστρεφόμενη πλατφόρμα. Ο αθλητής κρατά κολλημένα στο σώμα του δύο βάρη των 5,0 kg και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα 9,0 rad/s. Η συνολική ροπή αδράνειας του αθλητή ως προς τον άξονα περιστροφής είναι 0,80 kg m^2. Σε κάποια στιγμή, ο αθλητής τεντώνει τα χέρια του και η συνολική ροπή αδράνειας του γίνεται 7,20 kg m^2. Η τριβή από τον άξονα περιστροφής θεωρείται αμελητέα.

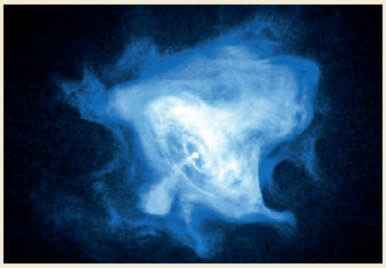
Α. Να εξηγήσετε γιατί διατηρείται η στροφορμή του αθλητή.

Β. Να υπολογίσετε τη νέα γωνιακή ταχύτητα περιστροφής και τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του αθλητή.

Γ. Να συζητήσετε τις μετατροπές ενέργειας στο σώμα του αθλητή.

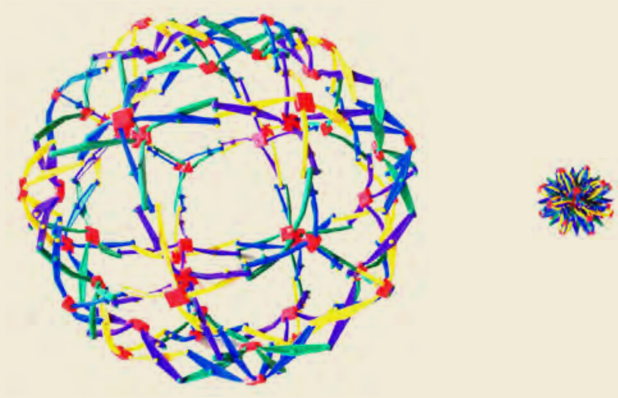
7 Τα pulsars είναι ουράνια σώματα, που προέρχονται από την έκρηξη και συρρίκνωση αστέρων.

Να υποθέσετε ότι ένα αστέρι με αρχική περίοδο περιστροφής 100 μέρες και αρχική ακτίνα 10^5 km συρρικνώνεται σε pulsar ακτίνας 10 km, διατηρώντας την αρχική του μάζα. Να υπολογίσετε την περίοδο περιστροφής του pulsar. Να υποθέσετε ότι το αρχικό αστέρι και το τελικό pulsar είναι ομογενείς σφαίρες.



Εικόνα του νεφελώματος Crab, που προέρχεται από μία έκρηξη supernova το 1054 μ.Χ. Το Crab pulsar που δημιουργήθηκε είναι η λευκή κουκίδα στο εσωτερικό και περιστρέφεται με περίοδο 33,5 ms.

8 Η σφαίρα του **Hobermann** είναι μία γεωμετρική κατασκευή, η οποία μπορεί να αυξομειώνει τις διαστάσεις της. Εκτός από τη χρήση τους σαν παιχνίδια, τέτοιες κατασκευές υπάρχουν σε διάφορα μουσεία επιστήμης.



Η σφαίρα του διπλανού σχήματος έχει ακτίνα R_1 = 1,25 m όταν είναι ανοικτή, και R_2 = 0,25 m όταν είναι κλειστή. Έστω ότι αρχίζουμε να περιστρέφουμε με γωνιακή ταχύτητα ω = 4,7 rad/s την ανοικτή σφαίρα, γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Με ποια γωνιακή ταχύτητα θα περιστρέφεται η σφαίρα, εάν την κλείσουμε απότομα;

Να υποθέσετε ότι η ανοικτή σφαίρα αντιστοιχεί σε έναν λεπτό σφαιρικό φλοιό και η κλειστή σφαίρα είναι συμπαγής. Η ροπή αδράνειας ενός σφαιρικού φλοιού δίνεται από τη σχέση $I = \frac{2}{3} m R^2$ και μίας συμπαγούς σφαίρας από τη σχέση $I = \frac{2}{5} m R^2$.

Για μία σχετική αναπαράσταση διατήρησης της στροφορμής μίας σφαίρας Hobermann, επισκεφθείτε την ιστοσελίδα **https://www.youtube.com/watch?v=64t-dVtDwkQ.**

Συσχέτιση Εννοιών των Ενοτήτων 1.11 - 1.19.

1.11. Κινητική Ενέργεια Περιστροφικής Κίνησης

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} I\omega^2$$

1.12. Ροπή Αδράνειας ως προς Άξονα

1.13. 2ος Νόμος

$$\alpha_\gamma = \frac{1}{I}\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau,\, z}$$

1.14. Εξισώσεις της Ομαλά Επιταχυνόμενης Περιστροφικής Κίνησης

1.15. Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας

1.16. Στροφορμή Υλικού Σημείου ως προς Σημείο

1.16. Στροφορμή Στερεού Σώματος κατά μήκος Ακλόνητου Άξονα Περιστροφής

$$L_z = I\omega$$

1.17. Γενικευμένος Δεύτερος Νόμος

$$\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \sum \vec{M}_{\varepsilon\xi\omega\tau}$$

1.17. Διατήρηση της Στροφορμής

$$\sum \vec{M}_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum \vec{L} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$$

1.18. Διατήρηση της Συνολικής Στροφορμής Συστήματος Σωμάτων

1.19. Σώματα με Μεταβαλλόμενη Ροπή Αδράνειας

Απαντήσεις Ελέγχου Κατανόησης Εννοιών

1.11.1. Τετραπλασιάζεται.

1.11.2. Όχι, γιατί η περιστροφική κινητική ενέργεια εξαρτάται και από τη ροπή αδράνειας.

1.12.1. **Α.** Ο δίσκος **(β)**, επειδή η μάζα των σταθμών είναι κατανεμημένη στην περιφέρεια (σε μεγαλύτερη απόσταση από τον άξονα περιστροφής).
Β. Ο **(β)**, επειδή έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας.
Γ. Τον **(α)**, επειδή έχει μικρότερη ροπή αδράνειας.

1.12.2. **Α.** Ο **(β)**, επειδή η μάζα του απέχει περισσότερο από τον άξονα περιστροφής.
Β. Ο **(β)**, επειδή έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας.
Γ. Τον **(α)** επειδή έχει μικρότερη ροπή αδράνειας.

1.12.3. Το περιεχόμενο των ωμών αυγών είναι υγρό και μπορεί να μετακινείται καθώς περιστρέφονται. Αντίθετα, το περιεχόμενο των βρασμένων αυγών είναι στερεό και δεν μετακινείται. Εάν περιστρέψετε ένα βρασμένο και ένα ωμό αυγό, θα διαπιστώσετε ότι το βρασμένο αυγό περιστρέφεται γρηγορότερα. Αυτό οφείλεται στο ότι το στερεό περιεχόμενό του έχει μικρότερη ροπή αδράνειας. (Σημ: Στη διαφορετική γωνιακή ταχύτητα συνεισφέρουν κι άλλοι παράγοντες, όπως η σχετική κίνηση του ρευστού εσωτερικού ως προς το κέλυφος στο ωμό αυγό, και διαφορές στις ροπές βάρους των αυγών).[1]

1.12.4. Ο κούφιος κύλινδρος, επειδή η περισσότερη μάζα του κατανέμεται στην περιφέρεια. Στον συμπαγή κύλινδρο, ένα μεγαλύτερο ποσοστό της μάζας κατανέμεται στο εσωτερικό, σε μικρότερη απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Επειδή ο συμπαγής κύλινδρος έχει μικρότερη ροπή αδράνειας, τίθεται ευκολότερα σε περιστροφή.

1.12.5. Το μεταλλικό φύλλο έχει μεγαλύτερη μάζα από το ξύλινο φύλλο ίδιων διαστάσεων. Εάν τοποθετήσουμε τον άξονα από τη μεριά του μετάλλου (**σχήμα (β)**), η πόρτα έχει μικρότερη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής.

1.13.1. **Α.** Λάθος (υπάρχει κεντρομόλος).
Β. Σωστό (η ροπή της κεντρομόλου ως προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς είναι ίση με μηδέν).

[1] Ευχαριστούμε τον Φυσικό κ. Γιώργο Τσικαλά για χρήσιμες επισημάνσεις σε αυτή την ερώτηση.

1.13.2. **Α.** Τον συμπαγή, επειδή έχει μικρότερη ροπή αδράνειας (η μάζα του είναι συγκεντρωμένη σε μεγαλύτερη απόσταση από τον άξονα περιστροφής, σε σχέση με τον κούφιο).
Β. Τον συμπαγή, για τον ίδιο λόγο.

1.13.3. Η βάση στήριξης είναι τα σημεία επαφής σφυριού-χεριού. Όταν το σφυρί ανατρέπεται, περιστρέφεται ως προς οριζόντιο άξονα, που διέρχεται από τη βάση στήριξης.

Σε κατακόρυφη στάση το σφυρί ισορροπεί, επειδή το ΚΜ του είναι πάνω από τη βάση στήριξης. Εάν το σφυρί γείρει κατά γωνία θ, το ΚΜ μετακινείται πέρα από τη βάση στήριξης. Για να επαναφέρουμε το σφυρί σε ισορροπία, πρέπει να μετακινήσουμε τη βάση στήριξης κάτω από το ΚΜ του σφυριού.

Το σφυρί ανατρέπεται σε **μικρότερη** γωνία θ στο **σχήμα (α)**, επειδή το ΚΜ του βρίσκεται ψηλότερα (συμβ. την **Ενότητα 1.10** και την **ερώτηση 1.10.3**). Ταυτόχρονα όμως, το σφυρί έχει **μεγαλύτερη** ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής στο **σχήμα (α)**. Άρα, το σφυρί αποκτά μικρότερη γωνιακή ταχύτητα στο **σχήμα (α)**, και προλαβαίνουμε ευκολότερα να το επαναφέρουμε σε ισορροπία.

1.16.1. **Α.** Διπλασιάζεται, **Β.** Διπλασιάζεται, **Γ.** Διπλασιάζεται, **Δ.** Τετραπλασιάζεται.

1.16.2. **Α.** Σωστό. **Β.** Λάθος: Η στροφορμή είναι ανάλογη με τη ροπή αδράνειας.

1.16.3. Όχι αναγκαστικά: Εάν οι κύλινδροι περιστρέφονται ως προς διαφορετικούς άξονες, έχουν διαφορετική ροπή αδράνειας.

1.18.1. Στην πλατφόρμα ασκείται μία οριζόντια δύναμη τριβής με εφαπτομενική συνιστώσα $\vec{F}$ από το παιδί. Η στροφορμή της πλατφόρμας μεταβάλλεται, επειδή η $\vec{F}$ έχει μη μηδενική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής.

1.18.2. Στο παιδί ασκείται μία οριζόντια δύναμη τριβής με εφαπτομενική συνιστώσα $\vec{F}'$ από την πλατφόρμα (ζεύγος δράσης-αντίδρασης με την $\vec{F}$). Η στροφορμή του παιδιού δεν διατηρείται επειδή η $\vec{F}'$ έχει μη μηδενική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής.

1.18.3. Η **συνισταμένη εξωτερική δύναμη** στο *σύστημα πλατφόρμας-παιδιού* είναι οριζόντια, και ασκείται στην πλατφόρμα από τον άξονα περιστροφής (βλ. σημείωση στο παράδειγμα 1). Εξαιτίας αυτής της δύναμης, η συνολική ορμή του συστήματος πλατφόρμας-παιδιού δεν διατηρείται.

1.18.4. Η συνισταμένη εξωτερική δύναμη έχει μηδενική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής (μηδενικός μοχλοβραχίονας). Γι αυτό, η συνολική στροφορμή του συστήματος πλατφόρμας-παιδιού κατά μήκος του άξονα περιστροφής διατηρείται.