

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: Συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$

Εξισώσεις-Ανισώσεις

Δείκτες επιτυχίας:

- Αναπαριστούν γραφικά τη συνάρτηση $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ και αναγνωρίζουν πώς προκύπτει από την παραβολή $y = ax^2$ με μετατόπιση. Α5.9
- Κατασκευάζουν συναρτήσεις, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς $f(x + h)$, $f(x) + \kappa$, $cf(x)$, $f(cx)$. Α6.5
- Διερευνούν το είδος και το πλήθος των ριζών τριωνύμου δεύτερου βαθμού και τις μεταξύ τους σχέσεις (τύποι Vieta) και τις εφαρμόζουν στη λύση προβλημάτων. Α6.13
- Επιλύουν και διερευνούν εξισώσεις και ανισώσεις ανωτέρου του β' βαθμού. Α6.15
- Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τον τύπο $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου $f(x)$. Α6.14

Τι θα μάθουμε:

- Να μελετούμε και να κατασκευάζουμε γραφικές παραστάσεις της μορφής
 - ✓ $f(x) = ax^2, a \neq 0$
 - ✓ $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda, a \neq 0$
- Να κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$
- Να υπολογίζουμε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$.
- Να μελετούμε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ και να λύουμε ανισώσεις δεύτερου βαθμού.
- Να λύουμε ανισώσεις ανώτερου βαθμού και κλασματικές ανισώσεις.

Περιεχόμενα Ενότητας

- **Μελέτη της Συνάρτησης $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda, a \neq 0$**
- **Πρόσημο Τιμών Τριωνύμου-Ανισώσεις Δεύτερου Βαθμού**
- **Ανισώσεις Ανώτερου Βαθμού-Κλασματικές Ανισώσεις**



Εισηγήσεις:

➤ Ο βασικός στόχος της ενότητας είναι η μελέτη και η κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda, a \neq 0$ για τις διάφορες τιμές των a, κ και λ . Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα χαρακτηριστικά στοιχεία της (μέγιστη ή ελάχιστη τιμή, τομές με άξονες). Στη συνέχεια, παρατηρούν το είδος των ριζών της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$ γραφικά και αποδεικνύουν σχέσεις μεταξύ των ριζών. Τέλος, οι μαθητές μελετούν το πρόσημο τιμών του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$ και επιλύουν ανισώσεις δεύτερου βαθμού, ανώτερου βαθμού καθώς και κλασματικές ανισώσεις.

Η ενότητα αυτή μπορεί να οργανωθεί ως εξής:

➤ **Μελέτη της Συνάρτησης $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda, a \neq 0$**

● Βασικός στόχος της διερεύνησης είναι η μελέτη της συνάρτησης $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda, a \neq 0$. Μελετώντας αρχικά την $y = ax^2$, οι μαθητές παρατηρούν το ρόλο του a στη γραφική παράσταση της συνάρτησης και συγκρίνουν σε κάθε περίπτωση με τις γραφικές παραστάσεις των «γνωστών» συναρτήσεων $y = x^2$ και $y = -x^2$. Στη συνέχεια, μελετούν διαδοχικά τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων της μορφής $y = ax^2 + \lambda, y = a(x + \kappa)^2$ και $y = a(x + \kappa)^2 + \lambda$, συμπεραίνοντας το είδος της μετατόπισης σε κάθε περίπτωση.

● Στις δραστηριότητες 1-4 οι μαθητές μελετούν και κατανοούν τον ρόλο του a στη συνάρτηση $y = ax^2$. Συγκεκριμένα, υπολογίζουν για ποιες τιμές του a η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη-ελάχιστη τιμή ή για ποιες τιμές του a ένα συγκεκριμένο σημείο ανήκει σε αυτή.

Στις δραστηριότητες 5, 6 και 11 οι μαθητές μελετούν το είδος της μετατόπισης της $y = ax^2$ (οριζόντια-κατακόρυφη).

Στις δραστηριότητες 7-10 και 29 οι μαθητές βρίσκουν βασικά στοιχεία της παραβολής, όπως άξονας συμμετρίας, κορυφή και μέγιστη-ελάχιστη τιμή που παρουσιάζει το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$.

Στις δραστηριότητες 12 και 13 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα μέγιστων ή ελάχιστων τιμών συναρτήσεων της μορφής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$.

Οι δραστηριότητες 14, 15 και 16 έχουν στόχο να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν πώς μπορούν να υπολογίσουν τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ και το πρόσημο της διακρίνουσας Δ , από την αντίστοιχη γραφική παράσταση της f .



Στη δραστηριότητα 17 οι μαθητές χρησιμοποιούν τη μέθοδο συμπλήρωσης του τέλειου τετραγώνου για το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, για να υπολογίσουν την ελάχιστη τιμή της f και να αποφασίσουν για το πρόσημο της διακρίνουσας.

Οι δραστηριότητες 18-21, 28, 31 και 32 στοχεύουν στον άμεσο υπολογισμό του $S = x_1 + x_2$, $P = x_1x_2$ και άλλων συμμετρικών παραστάσεων των ριζών x_1, x_2 της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις τιμές των S και P , για να επιλύσουν προβλήματα που αναφέρονται στις σχέσεις μεταξύ των ριζών, όπως αντίθετες και αντίστροφες.

Οι δραστηριότητες 22-24 οι μαθητές επιλύουν συστήματα $2^{\text{ου}}$ βαθμού δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Στη δραστηριότητα 25 οι μαθητές παραγοντοποιούν ένα τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$.

Στις δραστηριότητες 26 και 30 οι μαθητές αντιμετωπίζουν το αντίστροφο του προβλήματος της επίλυσης μίας εξίσωσης $2^{\text{ου}}$ βαθμού, δηλαδή κατασκευάζουν εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού, όταν δίνονται οι ρίζες της εξίσωσης.

Στη δραστηριότητα 27 οι μαθητές απλοποιούν κλάσματα που έχουν όρους τριώνυμα.

➤ **Πρόσημο Τιμών Τριωνύμου-Ανισώσεις Δεύτερου Βαθμού**

- ♦ Στόχος της διερεύνησης είναι να μελετήσουν οι μαθητές το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, μέσα από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Οι μαθητές παρατηρούν τις διάφορες περιπτώσεις που προκύπτουν ανάλογα με το είδος των ριζών του τριωνύμου, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο.
- ♦ Στις δραστηριότητες 1 και 2 οι μαθητές βρίσκουν το πρόσημο των τιμών τριωνύμου της μορφής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ για διάφορες τιμές του x .

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές επιλύουν ανισώσεις $2^{\text{ου}}$ βαθμού, χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$.

Στις δραστηριότητες 4 και 5 οι μαθητές επιλύουν ανισώσεις $2^{\text{ου}}$ βαθμού.



Στις δραστηριότητες 6-14 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια ανισώσεων 2^{ου} βαθμού.

➤ **Ανισώσεις Ανώτερου Βαθμού-Κλασματικές Ανισώσεις**

- Στόχος της διερεύνησης (1) είναι να βρουν οι μαθητές το πρόσημο πολυωνυμικής συνάρτησης ανώτερου του δεύτερου βαθμού.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές διερευνούν γραφικές παραστάσεις κλασματικών συναρτήσεων της μορφής $f(x) = \frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}$. Οι μαθητές αποφασίζουν για το πρόσημο των τιμών της f , ανάλογα με τη θέση της αντίστοιχης γραφικής παράστασης ως προς τον άξονα των τετμημένων.

- Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές βρίσκουν το πρόσημο μιας πολυωνυμικής συνάρτησης ανωτέρου του δευτέρου βαθμού.

Στις δραστηριότητες 2, 3 και 8 οι μαθητές επιλύουν ανισώσεις ανώτερου βαθμού ή κλασματικές ανισώσεις.

Στις δραστηριότητες 4, 5, 6, 7 και 9 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα που καταλήγουν είτε σε πολυωνυμικές είτε σε κλασματικές ανισώσεις.

➤ **Δραστηριότητες Ενότητας**

Στις δραστηριότητες 1-5 οι μαθητές κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων της μορφής $f(x) = ax^2, a \neq 0$ και υπολογίζουν τις τιμές του a , όταν η συνάρτηση έχει μέγιστη-ελάχιστη τιμή ή διέρχεται από συγκεκριμένο σημείο.

Στις δραστηριότητες 6 και 7 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια συνάρτησης της μορφής $f(x) = ax^2, a \neq 0$.

Στις δραστηριότητες 8-16 οι μαθητές βρίσκουν τα βασικά στοιχεία της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$, όπως πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών, ελάχιστη ή μέγιστη τιμή, άξονα συμμετρίας και κατασκευάζουν τη γραφική της παράσταση (δραστηριότητες 8 και 12).

Στη δραστηριότητα 17 οι μαθητές βρίσκουν τα βασικά στοιχεία της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$, όταν δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης.



Με τις δραστηριότητες 18 και 19 οι μαθητές κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$, όταν τους δίνονται βασικά στοιχεία της όπως άξονας συμμετρίας και κάποια σημεία που ανήκουν στην καμπύλη της.

Στη δραστηριότητα 20 οι μαθητές ανακαλούν τις γνώσεις τους για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ (χωρίς να επιλύσουν την εξίσωση).

Στις δραστηριότητες 21 και 22 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια εξίσωσης δεύτερου βαθμού.

Στη δραστηριότητα 23 οι μαθητές υπολογίζουν συμμετρικές παραστάσεις των ριζών x_1, x_2 μίας συγκεκριμένης εξίσωσης.

Στις δραστηριότητες 24-26 οι μαθητές σχηματίζουν εξίσωση δεύτερου βαθμού, όταν είναι γνωστές οι ρίζες της.

Στις δραστηριότητες 27 και 32 οι μαθητές αποφασίζουν πότε μία εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και βρίσκουν σχέσεις που συνδέουν τα S και P .

Στη δραστηριότητα 28 οι μαθητές βρίσκουν σημεία τομής με τους άξονες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και σχεδιάζουν τη γραφική της παράσταση.

Οι δραστηριότητες 29-31 αναφέρονται σε προβλήματα που καταλήγουν στην εύρεση του πρόσημου τιμών του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$.

➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές βρίσκουν τις αντίστοιχες τεταγμένες σημείων μίας παραβολής, όταν δίνονται οι τετμημένες τους και σχεδιάζουν τη παραβολή.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές διατυπώνουν λεκτικά μία ιδιότητα που έχει η παραβολή $y = \frac{x^2}{4}$ και στη συνέχεια επεκτείνουν την ιδιότητα και για την $y = x^2$.

Στις δραστηριότητες 3, 4, 6 και 13 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα εύρεσης ελάχιστης ή μέγιστης τιμής ενός τριωνύμου $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$.



Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές σχεδιάζουν γραφική παράσταση καμπύλης που είναι κατά τμήματα παραβολή και αναφέρουν βασικά στοιχεία της (άξονας συμμετρίας, τομές με άξονες, μέγιστη ή ελάχιστη τιμή και πεδίο τιμών).

Στη δραστηριότητα 7 οι μαθητές συμπληρώνουν μοτίβο και βρίσκουν τον γενικό τύπο που αντιπροσωπεύει τον κάθε όρο του, παρατηρώντας ότι ανήκει σε τριώνυμο δεύτερου βαθμού.

Στη δραστηριότητα 8 οι μαθητές συνδέουν το είδος των ριζών ενός τριωνύμου με τον μετασχηματισμό του τριωνύμου σε διαφορά δύο τετραγώνων.

Στις δραστηριότητες 9 και 22 οι μαθητές βρίσκουν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών συνάρτησης, εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στο πρόσημο τριωνύμου.

Στη δραστηριότητα 10 οι μαθητές επιλύουν πρόβλημα με τη βοήθεια συστήματος $2^{\text{ου}}$ βαθμού.

Στη δραστηριότητα 11 οι μαθητές εφαρμόζουν τις γνώσεις τους για τη διακρίνουσα της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ και για το είδος των ριζών της.

Στις δραστηριότητες 12, 16, 17 και 18 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα που σχετίζονται με το πρόσημο τριωνύμου.

Στη δραστηριότητα 14 οι μαθητές επιλύουν γραφικά ανίσωση ανώτερου βαθμού.

Στη δραστηριότητα 15 οι μαθητές μετατρέπουν το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ σε άλλη μορφή με τη συμπλήρωση τέλει τετραγώνου.

Στις δραστηριότητες 19 και 24 οι μαθητές επιλύουν γραφικά κλασματικές ανισώσεις.

Στις δραστηριότητες 20, 21 και 23 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα ανισώσεων.

Σημείωση:

Η ενότητα αυτή μπορεί να αξιολογηθεί και με γραπτό τελικό διαγώνισμα.

