

Μαθηματικά

Β'
ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ ΟΔΗΓΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ



ΟΜΑΔΑ ΣΤΗΡΙΞΗΣ ΝΕΩΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα μαθηματικά είναι ένα συστηματικό, συνεκτικό, συνεπές και συνεχώς αναπτυσσόμενο σύνολο εννοιών και μεθόδων. Ως επιστήμη, τα μαθηματικά χρησιμοποιούν δική τους γλώσσα και σύμβολα με στόχο τη μοντελοποίηση, την ανάλυση και την ερμηνεία του κόσμου. Τα μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα εμπεριέχουν δημιουργικότητα και φαντασία που είναι απαραίτητα στοιχεία για την ανακάλυψη μοτίβων σχημάτων και αριθμών, την κατανόηση και απόδειξη σχέσεων, την κατασκευή μοντέλων, την ερμηνεία δεδομένων και την επικοινωνία ιδεών και εννοιών. Το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών εδράζεται σε τέσσερις αρχές:

ΑΡΧΗ 1:

Οι μαθηματικές έννοιες διερευνούνται με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών.

ΑΡΧΗ 2:

Το αναλυτικό πρόγραμμα δίνει έμφαση στη λύση προβλήματος.

ΑΡΧΗ 3:

Η τεχνολογία αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης.

ΑΡΧΗ 4:

Όλοι οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν εμπειρίες μέσα από ένα ποιοτικό πρόγραμμα μαθηματικών.

Οι γενικοί σκοποί της μαθηματικής παιδείας, όπως αναπτύσσονται στο αναλυτικό πρόγραμμα, μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

Οι μαθητές, μέσω της διδασκαλίας των μαθηματικών:

- Εκτιμούν την αξία των μαθηματικών και τη χρησιμότητά τους σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας.
- Αναπτύσσουν την αυτοπεποίθησή τους ότι είναι ικανοί να «κάνουν» μαθηματικά και να αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά ως μια δημιουργική απασχόληση.
- Αναπτύσσουν τις στάσεις, γνώσεις και δεξιότητες και κατανοούν έννοιες που θα τους βοηθήσουν να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην καθημερινή τους ζωή και απασχόληση και στην ερμηνεία προβλημάτων από διάφορα γνωστικά αντικείμενα.
- Αναπτύσσουν την ικανότητα να επιλύουν προβλήματα με πολλαπλούς τρόπους και την ικανότητα να σκέφτονται και να αποφασίζουν με δημιουργικό και λογικό τρόπο.



- Αναπτύσσουν τις απαραίτητες γνώσεις που απαιτούνται στη σύγχρονη κοινωνία της πληροφορίας.
- Αναπτύσσουν τις γνώσεις και τις δεξιότητες που είναι απαραίτητες στο χώρο της εργασίας.
- Αναπτύσσουν τις γνώσεις και τις δεξιότητες, για να συνεχίσουν σπουδές σε αντικείμενα στα οποία η χρήση των μαθηματικών είναι απαραίτητη.

Κάθε νέα ενότητα είναι δομημένη ως εξής:

➤ Τι θα μάθουμε

Στην αρχή κάθε ενότητας παρατίθενται οι στόχοι οι οποίοι είναι συγκεκριμένοι και μετρήσιμοι. Οι στόχοι κάθε ενότητας προκύπτουν από τους δείκτες επιτυχίας του Αναλυτικού Προγράμματος. Οι καθηγητές με βάση τους στόχους αυτούς θα προγραμματίσουν και θα σχεδιάσουν τη διδασκαλία της κάθε ενότητας. Με το τέλος της ενότητας οι μαθητές και οι καθηγητές μπορούν να επανέλθουν στους στόχους και να ελέγξουν ποιους από αυτούς έχουν πετύχει και σε ποιο βαθμό.

➤ Έχουμε Μάθει

Στην αρχή κάθε ενότητας είναι συγκεντρωμένη η προαπαιτούμενη γνώση την οποία πρέπει να έχουν οι μαθητές για τη νέα ενότητα.

➤ Εξερεύνηση

Στις εξερευνήσεις υπάρχουν δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές εξερευνούν ελεύθερα μαθηματικές έννοιες. Οι δραστηριότητες αυτές συμβάλλουν:

- στη διαφοροποίηση και εξατομίκευση της διδασκαλίας,
- στην παροχή κινήτρων και στη χαρά της μάθησης,
- στην εννοιολογική διασύνδεση εννοιών,
- στην ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού, της δημιουργικότητας και της φαντασίας στα μαθηματικά.

Είναι ανοικτού τύπου.

- Ικανοποιούν τις ανάγκες των μαθητών ανάλογα με το επίπεδό τους.
- Αναπτύσσει την αποκλίνουσα σκέψη.



Διαμέσου των εξερευνήσεων επιτυγχάνεται η σύνδεση των μαθηματικών εννοιών με άλλα αντικείμενα του αναλυτικού προγράμματος, αναπτύσσεται η ικανότητα των μαθητών για λύση προβλήματος, επεκτείνεται και ολοκληρώνεται η έννοια, παρατίθενται ιστορικά στοιχεία και δίνονται εφαρμογές μαθηματικών εννοιών.

➤ Διερεύνηση

Οι διερευνήσεις περιλαμβάνουν δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές διερευνούν μαθηματικές ιδέες σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο και στις οποίες έχουν τη δυνατότητα:

- να διατυπώσουν υποθέσεις,
- να ελέγξουν την εγκυρότητα των υποθέσεών τους και
- να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους.

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με παραδείγματα, με εποπτικά μέσα ή και ψηφιακά εποπτικά μέσα και με προβλήματα. Οι μαθητές οδηγούνται να κάνουν υποθέσεις, να επαληθεύουν και να καταλήγουν σε συμπεράσματα.

➤ Μαθαίνω

Στο «Μαθαίνω» παρατίθεται η νέα γνώση που πρέπει να κατακτήσει ο μαθητής με το πέρας της μαθησιακής διαδικασίας της κάθε υποενότητας.

➤ Παραδείγματα

Τα παραδείγματα που περιέχονται στο διδακτικό βιβλίο έχουν ως σκοπό την καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση της έννοιας στην οποία αναφέρονται.

➤ Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες που προτείνονται απευθύνονται σε διαφορετικά επίπεδα μαθητών και αντιστοιχούν, ως επί το πλείστον, στη διδακτέα ύλη της συγκεκριμένης ενότητας. Αποφεύγουν τις πολύπλοκες διαδικασίες υπολογισμών, οι οποίες επιβραδύνουν τον ρυθμό της διδασκαλίας και δεν συμβάλλουν στην επίτευξη των σκοπών της διδασκαλίας. Οι καθηγητές πρέπει κατά τη διδασκαλία μιας ενότητας να λαμβάνουν υπόψη τις ατομικές διαφορές των μαθητών και τα ιδιαίτερα γνωρίσματα που μπορεί να έχει η τάξη τους και κάθε φορά να επιλέγουν τις κατάλληλες



δραστηριότητες τόσο για την κατανόηση της ενότητας, όσο και για την περαιτέρω εμβάθυνσή της.

Οι δραστηριότητες των υποενοτήτων, όπως και οι δραστηριότητες Ενότητας, δεν περιορίζονται σε απλούς υπολογισμούς, αλλά περιλαμβάνουν διάφορα είδη δραστηριοτήτων.

Υπάρχουν δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές καλούνται να αποφανθούν κατά πόσο οι προτάσεις είναι ορθές ή ακόμη κατά πόσο οι προτάσεις αυτές είναι κάποτε ορθές. Πολλές δραστηριότητες, επίσης, επιδέχονται περισσότερες από μία λύσεις, οπότε είναι αναγκαίο οι μαθητές να εξετάζουν κατά πόσο υπάρχουν περισσότερες από μία λύσεις πριν δώσουν την τελική τους απάντηση.

Οι δραστηριότητες είναι ενδεικτικές και αντιστοιχούν στους δείκτες επιτυχίας και αποτελούν παραδείγματα εμπειριών που οι μαθητές αναμένεται να αποκτήσουν από την καθημερινή επαφή τους με τις μαθηματικές έννοιες. Στόχος των ενδεικτικών δραστηριοτήτων είναι από τη μια η αποσαφήνιση των δεικτών επιτυχίας και από την άλλη αποτελούν εισηγήσεις προς τους εκπαιδευτικούς για έννοιες και προβλήματα που είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουν κατά τη διάρκεια των μαθημάτων τους. Τονίζεται ότι η αντιστοίχιση των ενδεικτικών δραστηριοτήτων με τους δείκτες επιτυχίας δεν είναι αποκλειστική ή μοναδική, με την έννοια ότι οι ίδιες δραστηριότητες είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη πολλαπλών δεικτών επιτυχίας. Σε καμιά όμως περίπτωση οι ενδεικτικές δραστηριότητες δεν πρέπει να θεωρηθούν ότι περιορίζουν τους εκπαιδευτικούς στη διαδικασία της διδασκαλίας - μάθησης. Αντίθετα, οι εκπαιδευτικοί παροτρύνονται να σχεδιάζουν και να εφαρμόζουν δραστηριότητες που πιστεύουν ότι εξυπηρετούν τις ανάγκες των μαθητών τους.

➤ Δραστηριότητες Ενότητας

Οι δραστηριότητες Ενότητας έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε όλοι οι μαθητές να έχουν μία ακόμη ευκαιρία να εφαρμόσουν τις έννοιες που έχουν διδαχθεί.

Οι δραστηριότητες ενότητας αποτελούν παραδείγματα δραστηριοτήτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς κατά την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της διδασκαλίας τους. Οι δραστηριότητες αυτές μπορούν να διαφοροποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς και να χρησιμοποιηθούν με πολλούς άλλους τρόπους. Επιπρόσθετα, οι δραστηριότητες ενότητας μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς για την αξιολόγηση ενός εύρους ικανοτήτων των μαθητών τους, όπως η ικανότητα των μαθητών να συλλέγουν δεδομένα, η ικανότητα να παρουσιάζουν τα επιχειρήματά τους, η ικανότητα να



προσεγγίζουν διαισθητικά τη λύση προβλημάτων. Πολλές από τις δραστηριότητες συνδυάζουν διαφορετικές περιοχές των Μαθηματικών (π.χ. Γεωμετρία – Άλγεβρα). Υπάρχουν, επίσης, θέματα τα οποία απευθύνονται σε διαφορετικά επίπεδα μαθητών, καθώς η προαγωγή της διαφοροποίησης αποτελεί στόχο του Α.Π..

Με βάση τις δραστηριότητες αυτές οι εκπαιδευτικοί αναμένεται να κατασκευάσουν τις δικές τους δραστηριότητες για συντρέχουσα και τελική αξιολόγηση των μαθητών τους.

➤ Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Οι δραστηριότητες εμπλουτισμού περιλαμβάνουν όχι μόνο επέκταση ενός συγκεκριμένου θέματος, αλλά κυρίως αναφέρονται σε ευκαιρίες που δίνονται στους μαθητές να εμβαθύνουν σε θέματα που τους ενδιαφέρουν. Στις δραστηριότητες εμπλουτισμού δίνεται, επίσης, η ευκαιρία στους μαθητές να ασχοληθούν με πρότζεκτ διαφορετικής θεματολογίας ανάλογα με τα ενδιαφέροντα των μαθητών. Ο κατάλογος των θεμάτων που προτείνονται στις δραστηριότητες εμπλουτισμού είναι ενδεικτικός και επομένως οι εκπαιδευτικοί, κάνοντας χρήση της σύγχρονης τεχνολογίας, μπορούν να προτείνουν τόσο δραστηριότητες όσο και άλλα θέματα για πρότζεκτ στους μαθητές τους.

Επιπρόσθετα, οι δραστηριότητες εμπλουτισμού δίνουν τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να ασχοληθούν με δραστηριότητες και ευρύτερα θέματα σχετικά με τις υπό ανάπτυξη μαθηματικές έννοιες. Για το σκοπό αυτό, οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνονται σε πολλές περιπτώσεις να χρησιμοποιήσουν τις δραστηριότητες εμπλουτισμού, για να παροτρύνουν τους μαθητές τους στη διερεύνηση μαθηματικών εννοιών σε ένα ευρύτερο πλαίσιο. Τέλος, πολλές από τις δραστηριότητες εμπλουτισμού δίνουν τη δυνατότητα στους χαρισματικούς μαθητές να επιλύσουν πιο ελκυστικά προβλήματα, συμβάλλοντας με αυτό τον τρόπο στην περαιτέρω ανάπτυξη των μαθηματικών τους ικανοτήτων.



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ: Από την Α' Γυμνασίου

Εισηγήσεις:

- Οι μαθητές ανακαλούν προαπαιτούμενες γνώσεις από την Α' Γυμνασίου. Οι προτεινόμενες δραστηριότητες περιορίζονται στις πιο βασικές πυρηνικές γνώσεις.
- Μέσα από τις δραστηριότητες 1, 2, 3, 4, 5 και 7, οι μαθητές ανακαλούν τις πράξεις και τη σύγκριση ρητών αριθμών. Η δραστηριότητα 6 βοηθά τους μαθητές να ανακαλέσουν την ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και την εύρεση Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών, ενώ η δραστηριότητα 8 ασχολείται με την επίλυση εξίσωσης.

Οι δραστηριότητες 9, 10, 11, 12, 13 και 14 εστιάζονται στις βασικές γεωμετρικές έννοιες, αλλά δίνουν επίσης, τη δυνατότητα επίλυσης εξίσωσης.

Στις δραστηριότητες 15, 16 και 17 οι μαθητές ανακαλούν την έννοια της συνάρτησης και την κατασκευή γραφικής παράστασης με τη βοήθεια πίνακα τιμών.

Οι δραστηριότητες 18, 19 και 20 αφορούν την επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια ποσοστών.

Τέλος, οι δραστηριότητες 21 και 22 αναφέρονται σε βασικές γνώσεις Στατιστικής και Πιθανοτήτων που έχουν διδαχθεί στην Α' Γυμνασίου.



ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Πραγματικοί Αριθμοί

Δείκτες επιτυχίας:

- Διατυπώνουν και επιλύουν προβλήματα με ρητούς αριθμούς, ποσοστά, ρίζες και δυνάμεις και ελέγχουν τη λογικότητα της απάντησής τους. Αρ4.14.
- Διερευνούν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες δυνάμεων ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο αριθμό. Αρ5.11.
- Κατανοούν την αριθμητική και γεωμετρική σημασία της τετραγωνικής και της κυβικής ρίζας ρητού αριθμού και αποδεικνύουν την αρρητότητα των τετραγωνικών και κυβικών ριζών των ρητών που δεν είναι τετράγωνα ή κύβοι ρητών αριθμών. Αρ5.12.
- Κατανοούν το δεκαδικό ανάπτυγμα των ρητών αριθμών και αναγνωρίζουν τη διαφορά ρητών και άρρητων αριθμών από τη μορφή του δεκαδικού αναπτύγματός τους. Αρ5.13.
- Εκφράζουν την τετραγωνική ρίζα αριθμών κατά προσέγγιση, υπολογίζουν παραστάσεις με τετραγωνικές και κυβικές ρίζες, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ριζών. Αρ5.25.
- Εκτελούν πράξεις ριζών και υπολογίζουν την τιμή αριθμητικών παραστάσεων. Αρ6.11.
- Ελέγχουν την εγκυρότητα βασικών

Τι θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε δυνάμεις ρητών με βάση ρητό αριθμό και εκθέτη ακέραιο αριθμό.
- Να διερευνούμε και να εφαρμόζουμε τις ιδιότητες δυνάμεων ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο αριθμό.
- Να υπολογίζουμε αριθμητικές παραστάσεις με δυνάμεις.
- Να διατυπώνουμε, να επιλύουμε προβλήματα με δυνάμεις και να ελέγχουμε τη λογικότητα της απάντησής μας.
- Να ορίζουμε και να υπολογίζουμε την τετραγωνική και την κυβική ρίζα μη αρνητικού αριθμού.
- Να ορίζουμε τις ιδιότητες των τετραγωνικών και των κυβικών ριζών και να τις εφαρμόζουμε, για να υπολογίζουμε παραστάσεις με τετραγωνικές και κυβικές ρίζες.
- Να διατυπώνουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και να το εφαρμόζουμε στην επίλυση προβλημάτων.
- Να εξετάζουμε κατά πόσο ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
- Να ορίζουμε τους άρρητους αριθμούς και το σύνολο των πραγματικών αριθμών.
- Να αναγνωρίζουμε τη διαφορά



γεωμετρικών θεωρημάτων ή προτάσεων, χρησιμοποιώντας επαγωγικό συλλογισμό.Γ3.9.

- Διερευνούν το Πυθαγόρειο θεώρημα (ιστορικές αποδείξεις).Γ4.9.
- Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και επεξηγούν τις οπτικές αναπαραστάσεις αποδείξεών του.Γ5.9.
- Χρησιμοποιούν λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, για να κατανοούν και να αποδεικνύουν σχέσεις.Μ4.8.
- Επιλύουν προβλήματα μέτρησης, χρησιμοποιώντας διάφορες στρατηγικές.Μ5.9.

ρητών και άρρητων αριθμών από τη μορφή του δεκαδικού αναπτύγματός τους.

- Να εκφράζουμε την τετραγωνική ρίζα αριθμών κατά προσέγγιση.

Περιεχόμενα ενότητας:

- **Ιδιότητες Δυνάμεων**
- **Δυνάμεις Ρητών με Ακέραιο Εκθέτη**
- **Τετραγωνική και Κυβική Ρίζα Αριθμού**
- **Ιδιότητες Ριζών**
- **Πυθαγόρειο Θεώρημα**
- **Πραγματικοί Αριθμοί**

Εισηγήσεις:

Βασικός στόχος της ενότητας των πραγματικών αριθμών είναι η επέκταση της γνώσης των μαθητών στις δυνάμεις. Οι μαθητές ανακαλύπτουν τις ιδιότητες των δυνάμεων, επεκτείνουν την έννοια των δυνάμεων σε δυνάμεις με εκθέτη αρνητικό ακέραιο αριθμό και ανακαλύπτουν την ανάγκη να οριστεί η τετραγωνική και η κυβική ρίζα. Το Πυθαγόρειο Θεώρημα δίνεται ως εφαρμογή των ριζών. Οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίζουν τους πραγματικούς αριθμούς, να τους κατατάσσουν στα σύνολα στα οποία ανήκουν και να επιλύουν προβλήματα στα οποία εμφανίζονται άρρητοι αριθμοί.



Η ενότητα μπορεί να οργανωθεί ως εξής:

➤ **Ιδιότητες Δυνάμεων**

- Στόχος της προτεινόμενης εξερεύνησης είναι οι μαθητές αρχικά να προβληματιστούν και αργότερα με καθοδήγηση να ανακαλύψουν πώς αριθμοί με μεγάλο πλήθος ψηφίων μπορούν να γραφούν υπό μορφή δύναμης.
- Στις διερευνήσεις (1) και (2) οι μαθητές θα ανακαλύψουν τις ιδιότητες των δυνάμεων, συμπληρώνοντας τους πίνακες με βάση τα λυμένα παραδείγματα.
- Στις δραστηριότητες 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10 και 11 οι μαθητές εκτελούν πράξεις, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των δυνάμεων.
- Οι δραστηριότητες 3, 5, 7 και 12 είναι προβλήματα που επιλύονται με την εφαρμογή των ιδιοτήτων των δυνάμεων.

➤ **Δυνάμεις Ρητών με Ακέραιο Εκθέτη**

- Στη διερεύνηση (1) οι μαθητές αντιλαμβάνονται την αναγκαιότητα συμβολισμού δύναμης με ακέραιο εκθέτη.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές κατανοούν το συμβολισμό: $a^{-ν} = \frac{1}{a^ν}$

- Στις δραστηριότητες 1, 2 και 3 οι μαθητές υπολογίζουν δυνάμεις με αρνητικό ακέραιο εκθέτη.

Στις δραστηριότητες 4 και 8 οι μαθητές συγκρίνουν αριθμούς υπό μορφή δύναμης.

Στις δραστηριότητες 5, 6 και 7 οι μαθητές εφαρμόζουν τις ιδιότητες των δυνάμεων, για να υπολογίσουν αριθμητικές και αλγεβρικές παραστάσεις.

Η δραστηριότητα 9 εξετάζει τη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της δύναμης.

Στις δραστηριότητες 10, 11 και 12, οι μαθητές εφαρμόζουν τις ιδιότητες των δυνάμεων σε αριθμούς με βάση ρητούς αριθμούς και ακέραιο εκθέτη.



➤ **Τετραγωνική και Κυβική Ρίζα Αριθμού**

- Βασικός στόχος της εξερεύνησης είναι η ανακάλυψη από τους μαθητές της ιδιότητας των τετράγωνων αριθμών και στη συνέχεια η σύνδεση της ιδιότητας των τετράγωνων αριθμών με την έννοια της τετραγωνικής ρίζας. Στην εξερεύνηση δίνεται, επίσης, η δυνατότητα χρήσης της υπολογιστικής μηχανής.
- Στη διερεύνηση (1) οι μαθητές ανακαλύπτουν την ανάγκη ορισμού της τετραγωνικής ρίζας μέσω ενός προβλήματος της καθημερινότητας. Στη συνέχεια κωδικοποιούν τα αριθμητικά δεδομένα και υπολογίζουν την τετραγωνική ρίζα.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές οδηγούνται στην ανάγκη ορισμού της κυβικής ρίζας.

- Οι δραστηριότητες 1, 4, 5, 6, 8 και 9 ασχολούνται με υπολογισμό τετραγωνικών ή κυβικών ριζών ή με πράξεις που περιέχουν ρίζες.

Οι δραστηριότητες 2, 3, 7, 10 και 11 έχουν στόχο την επίλυση προβλημάτων με τη χρήση των ριζών.

Η δραστηριότητα 12 είναι μια εξίσωση με ριζικά.

➤ **Ιδιότητες Ριζών**

- Στόχος της προτεινόμενης διερεύνησης είναι η ανακάλυψη από τους μαθητές βασικών ιδιοτήτων των τετραγωνικών και κυβικών ριζών.
- Στις δραστηριότητες 1, 2, 3, 4, 5 και 8 οι μαθητές εφαρμόζουν ιδιότητες των τετραγωνικών και κυβικών ριζών, για να απλοποιήσουν αριθμητικές και αλγεβρικές παραστάσεις.

Στις δραστηριότητες 6, 7 και 9 οι μαθητές εφαρμόζουν ιδιότητες των τετραγωνικών και κυβικών ριζών, για να επιλύσουν προβλήματα.

➤ **Πυθαγόρειο Θεώρημα**

- Η προτεινόμενη εξερεύνηση προσφέρει την ευκαιρία για συζήτηση και προβληματισμό για το ποια σχέση μπορεί να απεικονίζει το συγκεκριμένο γραμματόσημο με απώτερο στόχο την έννοια του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.



- Στη διερεύνηση (1) οι μαθητές ανακαλύπτουν την ανάγκη εύρεσης μίας σχέσης που να συνδέει τις πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί το προτεινόμενο εφαρμογίδιο ώστε οι μαθητές να ανακαλύψουν, μέσω επαγωγικής διαδικασίας, το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Το συγκεκριμένο εφαρμογίδιο, όπως έχει σχεδιαστεί δίνει την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό, να επικεντρωθεί αρχικά στη σχέση των εμβαδών των τετραγώνων και στη συνέχεια στη σχέση των πλευρών του τριγώνου.

Στόχος της διερεύνησης (2) είναι η εφαρμογή του αντιστρόφου του Πυθαγορείου για την κατασκευή ορθογώνιου τριγώνου. Η μελέτη του αντιστρόφου του θεωρήματος, θα μπορούσε να γίνει επίσης και με τη βοήθεια του εφαρμογιδίου της πρώτης διερεύνησης.

- Οι δραστηριότητες 1 και 4 είναι εφαρμογές του Πυθαγορείου Θεωρήματος στον υπολογισμό άγνωστων στοιχείων ενός σχήματος.

Στις δραστηριότητες 2, 3 και 9 οι μαθητές εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα, για να υπολογίσουν μια άγνωστη πλευρά ενός ορθογώνιου τριγώνου.

Οι δραστηριότητες 5, 6 και 7 εξετάζουν το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Ζητούν δηλαδή να διερευνηθεί κατά πόσο τρίγωνα με συγκεκριμένο μήκος πλευρών είναι ορθογώνια.

Η δραστηριότητα 8 είναι συνδυασμός του Πυθαγορείου Θεωρήματος και του αντιστρόφου του.

Η δραστηριότητα 10 προκαλεί τους μαθητές να εφαρμόσουν τους τύπους που δίνουν τις πυθαγόρειες τριάδες, για να παράξουν τρεις διαφορετικές πυθαγόρειες τριάδες.

➤ **Πραγματικοί Αριθμοί**

- Στόχος της διερεύνησης (1) είναι να προβληματίσει τους μαθητές πώς να κατασκευάσουν τετράγωνο με εμβαδόν $2 \tau.μ.$ και να προσδιορίσουν το μήκος της πλευράς του.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές αντιλαμβάνονται την ανάγκη υπολογισμού άρρητων αριθμών, μέσω μίας εφαρμογής του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Η



οπτικοποίηση του προβλήματος γίνεται μέσω του προτεινόμενου εφαρμογίδιου, το οποίο επιτρέπει τη μεταβολή των δεδομένων (διαστάσεων πόρτας) και τη μελέτη των αντίστοιχων άρρητων αριθμών. Προσεγγίζεται γεωμετρικά η θέση στην ευθεία των πραγματικών αριθμών με στόχο να οριστούν τα σύνολα των αρρήτων, ώστε να συμπληρωθεί το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

- Στις δραστηριότητες 1 και 3 οι μαθητές προσεγγίζουν άρρητους αριθμούς είτε με τον πλησιέστερο ακέραιο είτε με ακρίβεια δύο δεκαδικών, χρησιμοποιώντας την υπολογιστική μηχανή.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές κατατάσσουν τους πραγματικούς αριθμούς στα σύνολα στα οποία ανήκουν.

Στις δραστηριότητες 4, 5, 7 και 8 οι μαθητές συγκρίνουν αριθμούς.

Στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές αντικρούουν τον ισχυρισμό ότι «κάθε τετραγωνική ρίζα ρητού αριθμού είναι άρρητος», δίνοντας κατάλληλα αντιπαραδείγματα.

Οι δραστηριότητες 9, 10, 11, 12, 13 και 14 δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να επιλύσουν προβλήματα γεωμετρίας, χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Όταν η απάντηση που προκύπτει είναι άρρητος αριθμός, τότε αυτός προσεγγίζεται με έναν ρητό με την συγκεκριμένη ακρίβεια που ζητείται.

➤ **Δραστηριότητες Ενότητας**

Στις δραστηριότητες 1, 2 και 8 οι μαθητές εκτελούν πράξεις με δυνάμεις ρητών αριθμών.

Στις δραστηριότητες 3, 4, 5, 6 και 7 οι μαθητές εφαρμόζουν τις ιδιότητες των δυνάμεων.

Στις δραστηριότητες 9, 10, 11 και 12 οι μαθητές εκτελούν πράξεις με ρίζες.

Στις δραστηριότητες 13, 15 και 16 γίνεται σύγκριση άρρητων αριθμών.

Οι δραστηριότητες 14, 17, 18, 19, 20 και 21 αποτελούν εφαρμογές του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.



➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Οι δραστηριότητες 1, 2, 3, 4, 5 και 6 αφορούν πράξεις και ιδιότητες δυνάμεων, ενώ η δραστηριότητα 7 αφορά πράξεις με ρίζες.

Στη δραστηριότητα 8 οι μαθητές αποδεικνύουν τις ιδιότητες της κυβικής ρίζας που είχαν ανακαλύψει στη προτεινόμενη διερεύνηση της αντίστοιχης υποενότητας.

Η δραστηριότητα 9 ασχολείται με τον ορισμό των αρρήτων.

Οι δραστηριότητες 10, 11, 12, 14 και 15 αποτελούν εφαρμογές του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.

Τέλος, στη δραστηριότητα 13 οι μαθητές εξετάζουν την αρρητότητα μιας παράστασης για διάφορες τιμές της μεταβλητής.

Σημείωση:

Η ενότητα αυτή μπορεί να αξιολογηθεί με γραπτό τελικό διαγώνισμα.



ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Αλγεβρικές Παραστάσεις

Δείκτες επιτυχίας:

- Κατανοούν και εφαρμόζουν αλγεβρικές τεχνικές, για να κάνουν αναγωγή ομοίων όρων, απλοποιούν ή αναλύουν αλγεβρικές εκφράσεις και διακρίνουν τις διαφορές μεταξύ των εννοιών «εξίσωση», «τύπος», «ταυτότητα» και «παραστάση».A4.10.
- Συνδυάζουν αλγεβρικές εκφράσεις με δύο ή περισσότερες μεταβλητές, για την εξαγωγή συμπερασμάτων.A4.11.
- Μεταφράζουν αλγεβρικά σύμβολα σε λεκτική μορφή και αντίστροφα.A4.13.
- Εκτελούν πράξεις μονωνύμων και πολυωνύμων και αποδεικνύουν αλγεβρικά και γεωμετρικά βασικές αλγεβρικές ταυτότητες.A5.13.

Θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε και να διακρίνουμε είδη αλγεβρικών παραστάσεων όπως μονώνυμο και πολυώνυμο.
- Να ορίζουμε και να διακρίνουμε τον βαθμό των μονωνύμων και των πολυωνύμων.
- Να εκτελούμε πράξεις μονωνύμων και πολυωνύμων.
- Να εφαρμόζουμε αλγεβρικές τεχνικές, για να κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων και να απλοποιούμε αλγεβρικές παραστάσεις.
- Να αποδεικνύουμε αλγεβρικές ταυτότητες.

Περιεχόμενα ενότητας:

- **Αλγεβρικές Παραστάσεις – Μονώνυμα**
- **Πράξεις Μονωνύμων**
- **Πολυώνυμα – Πρόσθεση Πολυωνύμων**
- **Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων**

Εισηγήσεις:

Στόχος της ενότητας αυτής είναι οι μαθητές να ορίζουν και να διακρίνουν μονώνυμα και πολυώνυμα, αλλά και να εκτελούν πράξεις μονωνύμων και πολυωνύμων.

Η ενότητα μπορεί να οργανωθεί ως εξής:



➤ **Αλγεβρικές Παραστάσεις – Μονώνυμα**

- Στόχος της διερεύνησης είναι η μελέτη των αλγεβρικών παραστάσεων, όπως προκύπτουν από τα ερωτήματα που παρατίθενται στη διερεύνηση. Ταυτόχρονα, οι μαθητές ταξινομούν τις αλγεβρικές παραστάσεις με βάση το πλήθος των όρων τους έτσι, ώστε να μπορέσουν να καταλήξουν στον ορισμό του μονωνύμου.
- Στις δραστηριότητες 1 και 3 οι μαθητές διακρίνουν ποιες από τις αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα.

Στις δραστηριότητες 2, 4, 5, 6 και 7 οι μαθητές αναγνωρίζουν τα στοιχεία μονωνύμων (συντελεστής, βαθμός, κύριο μέρος) και διαπραγματεύονται τις σχέσεις τους (όμοια, ίσα, αντίθετα).

➤ **Πράξεις Μονωνύμων**

- Στην προτεινόμενη διερεύνηση οι μαθητές ανακαλύπτουν τη σχέση που συνδέει τους δύο όρους του κάθε μοτίβου με το αποτέλεσμα και κατ' επέκταση ανακαλύπτουν την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό μονωνύμων. Στη συνέχεια εκτελούν τις πράξεις.
- Στις δραστηριότητες 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 8 οι μαθητές εκτελούν πράξεις μονωνύμων.

Η δραστηριότητα 7 απαιτεί αρχικά εφαρμογή της προτεραιότητας των πράξεων.

Στις δραστηριότητες 9 και 10 οι μαθητές εκτελούν πράξεις μονωνύμων σε προβλήματα.

➤ **Πολυώνυμα – Πρόσθεση Πολυωνύμων**

- Βασικός στόχος των διερευνήσεων (1) και (2) είναι να ανακαλύψουν οι μαθητές την πρόσθεση και την αφαίρεση πολυωνύμων μέσα από ένα μοντέλο πλακιδίων, στο οποίο γίνεται οπτικοποίηση της αναγωγής των ομοίων όρων.
- Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές διατάσσουν πολυώνυμα και βρίσκουν το βαθμό τους.

Στις δραστηριότητες 2, 3, 4, 5, 6 και 7 οι μαθητές εκτελούν πράξεις πολυωνύμων.

Στη δραστηριότητα 8 οι μαθητές εκτελούν πράξεις πολυωνύμων, για να επιλύσουν ένα πρόβλημα γεωμετρίας.



➤ **Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων**

- Στη διερεύνηση (1) οι μαθητές ανακαλύπτουν τον πολλαπλασιασμό πολυώνυμων και εφαρμόζουν την επιμεριστική ιδιότητα, για να απλοποιήσουν τα γινόμενα αυτά.

Η διερεύνηση (2) παρουσιάζει το γινόμενο μέσω του μοντέλου των πλακιδίων για κάλυψη επιφάνειας.

- Στις δραστηριότητες 1-5 και 9 οι μαθητές εκτελούν πράξεις πολυωνύμων.

Στη δραστηριότητα 8 οι μαθητές αποδεικνύουν ταυτότητες.

Οι δραστηριότητες 6, 7, 10, 11 και 12 είναι προβλήματα γεωμετρίας – μέτρησης που καταλήγουν σε πράξεις πολυωνύμων.

➤ **Διαίρεση Πολυωνύμων**

- Η προτεινόμενη διερεύνηση βοηθά τους μαθητές να ανακαλύψουν τη διαίρεση πολυωνύμου με μονώνυμο και πολυωνύμου με πολυώνυμο, μέσω μιας εφαρμογής της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και αφαίρεση.

- Στις δραστηριότητες 1 και 2 οι μαθητές διαιρούν πολυώνυμα με μονώνυμα.

Στις δραστηριότητες 3 και 4 οι μαθητές διαιρούν πολυώνυμα με πολυώνυμα.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές συμπληρώνουν κενά σε διαιρέσεις πολυωνύμων με μονώνυμα και πολυωνύμων με πολυώνυμα.

Τέλος, στις δραστηριότητες 6-9 οι μαθητές εφαρμόζουν τον αλγόριθμο της Ευκλείδειας Διαίρεσης, για να επιλύσουν προβλήματα που αναφέρονται σε πολυώνυμα.

➤ **Δραστηριότητες Ενότητας**

Οι δραστηριότητες 1, 2, 3, 4 και 6 ασχολούνται με πράξεις μονωνύμων και πολυωνύμων.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές κατανοούν τον συμβολισμό $\varphi(x)$.



Στη δραστηριότητα 7 οι μαθητές εξετάζουν ορισμούς του κεφαλαίου.

Στις δραστηριότητες 8, 9 και 10 οι μαθητές εφαρμόζουν τον αλγόριθμο της Ευκλείδειας Διάρεσης, για να επιλύσουν προβλήματα που αναφέρονται σε πολυώνυμα.

Οι δραστηριότητες 11, 13, 14, 15 και 16 είναι προβλήματα που επιλύονται με αλγεβρικές παραστάσεις.

Η δραστηριότητα 12 εισάγει τους μαθητές στην έννοια της αλγεβρικής ταυτότητας και της απόδειξής της.

➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές εκτελούν πράξεις μονωνύμων.

Στις δραστηριότητες 2, 4, 5, 6 και 7 οι μαθητές εκτελούν πράξεις πολυωνύμων σε προβλήματα.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές υπολογίζουν τιμές αλγεβρικών παραστάσεων για συγκεκριμένες τιμές της μεταβλητής.

Στη δραστηριότητα 8 οι μαθητές αποδεικνύουν ταυτότητες.

Οι δραστηριότητες 9 και 11 είναι δραστηριότητες που αφορούν πράξεις πολυωνύμων.

Η δραστηριότητα 10 αναφέρεται στον προσδιορισμό του βαθμού των πολυωνύμων.

Σημείωση:

Η ενότητα αυτή μπορεί να αξιολογηθεί με γραπτό τελικό διαγώνισμα.



ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Γεωμετρία

Δείκτες επιτυχίας:

- Διακρίνουν τις μεταβλητές και μη ιδιότητες ενός σχήματος και συγκρίνουν τάξεις σχημάτων με βάση τις ιδιότητές τους.Γ3.8.
- Ελέγχουν την εγκυρότητα βασικών γεωμετρικών θεωρημάτων ή προτάσεων, χρησιμοποιώντας επαγωγικό συλλογισμό.Γ3.9.
- Αναγνωρίζουν, ονομάζουν και περιγράφουν τα βασικά στοιχεία και τις ιδιότητες των τριγώνων, των τραπεζίων, των παραλληλογράμμων, των πολυγώνων και του κύκλου.Γ4.5.
- Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων στην επίλυση και μοντελοποίηση προβλημάτων.Γ4.12.
- Κατασκευάζουν πολύγωνα και σχέδια με πολλούς άξονες συμμετρίας ή σχήματα που είναι συμμετρικά ως προς ένα σημείο.Γ4.16.
- Χρησιμοποιούν επαγωγικό συλλογισμό, για να διερευνήσουν υποθέσεις και να δώσουν αντιπαραδείγματα.Γ5.1.
- Ορίζουν και κατασκευάζουν τον κύκλο, κυκλικό δίσκο και τα στοιχεία τους και διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ τους (κύκλος, κυκλικός δίσκος, ακτίνα κύκλου, χορδή κύκλου, απόστημα χορδής, κυκλικός τομέας,

Θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε και να κατασκευάζουμε συμμετρικά σχήματα (σχήματα με άξονα συμμετρίας και σχήματα με κέντρο συμμετρίας).
- Να αναγνωρίζουμε και να κατασκευάζουμε βασικά είδη τετραπλεύρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο).
- Να αποδεικνύουμε και να εφαρμόζουμε τις ιδιότητες βασικών τετραπλεύρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο) στην επίλυση προβλημάτων.
- Να ανακαλύπτουμε, να αποδεικνύουμε και να εφαρμόζουμε τύπους για την εύρεση του εμβαδού και της περιμέτρου επίπεδων σχημάτων.
- Να υπολογίζουμε την περίμετρο και το εμβαδόν κύκλου και μεικτόγραμμων σχημάτων.
- Να επιλύουμε προβλήματα που



κυκλικό τμήμα, σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου, σχετικές θέσεις δύο κύκλων, μέτρο τόξου και γωνίας, επίκεντρες γωνίες, εγγεγραμμένες γωνίες, γωνία που σχηματίζεται από χορδή και εφαπτομένη).Γ5.7.

- Αναγνωρίζουν, κατασκευάζουν βασικά είδη τετραπλεύρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο), αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητές τους στη λύση προβλημάτων.Γ5.8.
- Επεξηγούν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες τριγώνων και τετραπλεύρων σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.Γ5.15.
- Ορίζουν και κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα (σχήματα με άξονα συμμετρίας, σχήματα συμμετρικά ως προς ευθεία, σχήματα με κέντρο συμμετρίας).Γ5.20.
- Υπολογίζουν την περίμετρο και το εμβαδόν του τραπέζιου και σύνθετων σχημάτων.Μ4.3.
- Επιλύουν προβλήματα που εμπεριέχουν σχέσεις μεταξύ ακτίνας, διαμέτρου, εμβαδού και περιφέρειας κύκλου.Μ4.7.
- Χρησιμοποιούν λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, για να κατανοούν και να αποδεικνύουν σχέσεις.Μ4.8.
- Υπολογίζουν την περίμετρο και το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών, το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο στερεών σχημάτων.Μ5.2.

εμπεριέχουν σχέσεις μεταξύ ακτίνας, διαμέτρου, εμβαδού και μήκους περιφέρειας κύκλου.

- Να διερευνούμε και να εφαρμόζουμε σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων επίπεδων σχημάτων και του εμβαδού τους.



- Διερευνούν και εφαρμόζουν σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων συγκεκριμένων σχημάτων και του εμβαδού ή/και όγκου τους.M5.3.
- Ανακαλύπτουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τύπους για την εύρεση του εμβαδού επίπεδων σχημάτων, της επιφάνειας και του όγκου στερεών.M5.4.
- Εφαρμόζουν ιστορικές προσεγγίσεις του π και του εμβαδού σχημάτων στην επίλυση προβλημάτων.M5.5.
- Επιλύουν προβλήματα μέτρησης, χρησιμοποιώντας διάφορες στρατηγικές.M5.9.
- Υπολογίζουν το εμβαδόν απλών καμπυλόγραμμων και μεικτόγραμμων επιφανειών.M6.7.

Περιεχόμενα ενότητας:

- **Συμμετρία**
- **Παραλληλόγραμμο**
- **Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο**
- **Ρόμβος**
- **Τετράγωνο**
- **Τραπέζιο**
- **Μήκος Κύκλου**
- **Εμβαδόν Κυκλικού Δίσκου**

Εισηγήσεις:

Στην ενότητα αυτή οι μαθητές θα γνωρίσουν την έννοια της συμμετρίας. Συγκεκριμένα, θα μάθουν να ορίζουν και να κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα ως προς άξονα συμμετρίας και ως προς κέντρο συμμετρίας. Γίνεται ανάκληση των γνώσεων που αφορούν στην αναγνώριση και στην κατασκευή βασικών ειδών



τετραπλεύρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο). Ένας από τους βασικούς στόχους της ενότητας είναι η ανακάλυψη και η εφαρμογή των ιδιοτήτων των βασικών αυτών τετραπλεύρων, αλλά και ο υπολογισμός του εμβαδού και της περιμέτρου τους. Οι τύποι εύρεσης του εμβαδού και της περιμέτρου βασικών ειδών τετραπλεύρων θα βοηθήσουν τους μαθητές να επιλύσουν προβλήματα εύρεσης εμβαδού και περιμέτρου μεικτόγραμμων σχημάτων. Οι μαθητές θα ασχοληθούν με μετρήσεις στον κύκλο και να επιλύουν προβλήματα που εμπεριέχουν σχέσεις μεταξύ ακτίνας, εμβαδού και μήκους περιφέρειας κύκλου.

Η ενότητα αυτή μπορεί να οργανωθεί ως εξής:

➤ **Συμμετρία**

- Στην προτεινόμενη εξερεύνηση οι μαθητές ανακαλούν την έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα, παρατηρώντας σημεία σε ένα σκίτσο ενός γλύπτη.
- Στη διερεύνηση (1) οι μαθητές σχεδιάζουν μια ευθεία με στόχο να χωρίσουν ένα σχήμα σε δύο μέρη, ώστε να είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία αυτή. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές ανακαλύπτουν ότι οι άξονες συμμετρίας που μπορούν να σχεδιάσουν είναι περισσότεροι από ένας.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές ανακαλύπτουν την έννοια του κέντρου συμμετρίας και ανακαλούν την έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα.

- Στις δραστηριότητες 1, 5 και 11 οι μαθητές αναγνωρίζουν, όπου υπάρχουν, άξονες συμμετρίας.

Στις δραστηριότητες 6 και 8 οι μαθητές σχεδιάζουν τον άξονα συμμετρίας.

Στις δραστηριότητες 2, 3 και 7 οι μαθητές κατασκευάζουν τα συμμετρικά επίπεδων σχημάτων ως προς άξονα συμμετρίας ή ως προς κέντρο συμμετρίας.

Στη δραστηριότητα 4 οι μαθητές τοποθετούν αριθμούς στον άξονα των πραγματικών αριθμών, με τρόπο που να είναι συμμετρικοί με άλλους ως προς κέντρο συμμετρίας.

Στη δραστηριότητα 9 οι μαθητές αναγνωρίζουν κέντρα συμμετρίας.



Στη δραστηριότητα 10 οι μαθητές περιγράφουν τη διαδικασία με την οποία προέκυψε ένα σχήμα, χρησιμοποιώντας τα συμμετρικά σχήματα του αρχικού ως προς άξονα συμμετρίας και ως προς κέντρο συμμετρίας.

Τέλος, στις δραστηριότητες 12 και 13 οι μαθητές κατασκευάζουν τρίγωνα και επεξηγούν γιατί κάποιες ευθείες είναι άξονες συμμετρίας τους. Επιπλέον, στη δραστηριότητα 13 οι μαθητές επεξηγούν γιατί οι διάμεσοι ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι ταυτόχρονα και διχοτόμοι και ύψη του.

➤ **Παραλληλόγραμμο**

- Στη διερεύνηση (1) οι μαθητές ανακαλούν τις γνώσεις τους γύρω από το παραλληλόγραμμο. Συγκεκριμένα, αναγνωρίζουν επίπεδα σχήματα (τρίγωνο, παραλληλόγραμμο, τετράγωνο), παρατηρώντας τα 7 κομμάτια ενός Κινέζικου τετραγώνου και κατασκευάζουν παραλληλόγραμμο με τα κομμάτια αυτά. Οι μαθητές ανακαλύπτουν τον ορισμό του παραλληλογράμμου, έννοια που κατείχαν εμπειρικά από προηγούμενες τάξεις.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές κατανοούν τον ορισμό του παραλληλογράμμου και ανακαλύπτουν τις ιδιότητές του. Η πλήρης κατανόηση του ορισμού γίνεται μέσα από την κατασκευή ενός παραλληλογράμμου είτε σε ένα φύλλο χαρτί είτε με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού γεωμετρίας. Ακολούθως, οι μαθητές χρησιμοποιούν το προτεινόμενο εφαρμογίδιο, για να ανακαλύψουν τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου.

- Στις δραστηριότητες 1, 2, και 3 οι μαθητές υπολογίζουν τα μήκη ευθύγραμμων τμημάτων και τα μέτρα γωνιών σε παραλληλόγραμμο, χρησιμοποιώντας τον ορισμό και τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου.

Στη δραστηριότητα 4 οι μαθητές αποδεικνύουν την ισότητα δύο γωνιών, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη ιδιότητα του παραλληλογράμμου.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές χρησιμοποιούν τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου, για να συμπληρώσουν ένα σχήμα.

Στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές υπολογίζουν το εμβαδόν και την περίμετρο ενός παραλληλογράμμου, όταν είναι γνωστό το μήκος της βάσης και του ύψους του.



Στις δραστηριότητες 7 και 8 οι μαθητές εφαρμόζουν τους τύπους της περιμέτρου και του εμβαδού παραλληλογράμμου, για να υπολογίσουν είτε το μήκος της βάσης είτε το μήκος του ύψους του.

Τέλος, στη δραστηριότητα 9 οι μαθητές εφαρμόζουν τον ορισμό και τις ιδιότητες ενός παραλληλογράμμου στα πλαίσια της αναλυτικής γεωμετρίας.

➤ **Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο**

- Στη διερεύνηση (1) οι μαθητές ανακαλούν τις γνώσεις τους για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Συγκεκριμένα, οι μαθητές γνωρίζουν τον ορισμό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου εμπειρικά από προηγούμενες τάξεις και ανακαλύπτουν τις ιδιότητές του.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές κατανοούν τον ορισμό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και ανακαλύπτουν τις ιδιότητές του. Η πλήρης κατανόηση του ορισμού γίνεται μέσα από την κατασκευή ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είτε σε ένα φύλλο χαρτί είτε με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού γεωμετρίας. Ακολούθως, οι μαθητές χρησιμοποιούν το προτεινόμενο εφαρμογίδιο, για να ανακαλύψουν τις ιδιότητες του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

- Στις δραστηριότητες 1 και 2 οι μαθητές υπολογίζουν την τιμή μιας μεταβλητής (δραστηριότητα 1) και τα μέτρα γωνιών (δραστηριότητα 2), χρησιμοποιώντας ιδιότητες του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Στις δραστηριότητες 3 και 4 οι μαθητές κάνουν μετρήσεις σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (υπολογισμός εμβαδού, περιμέτρου, μήκους πλευρών και διαγωνίων) και αναφέρονται στο κέντρο συμμετρίας του (δραστηριότητα 3), στα πλαίσια της αναλυτικής γεωμετρίας.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές δίνουν ένα αντιπαράδειγμα, για να δείξουν ότι ο ισχυρισμός που προβάλλεται είναι λανθασμένος.

Στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές υπολογίζουν τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με γνωστό εμβαδόν.



Οι δραστηριότητες 7 και 8 αναφέρονται στην έννοια της ισοδυναμίας επίπεδων σχημάτων. Στις δραστηριότητες αυτές οι μαθητές υπολογίζουν τα μήκη ευθύγραμμων τμημάτων σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Τέλος, στη δραστηριότητα 9 οι μαθητές υπολογίζουν το εμβαδόν ενός σκιασμένου χωρίου, χρησιμοποιώντας το εμβαδόν τετραπλεύρων και τριγώνων.

➤ **Ρόμβος**

- Οι μαθητές στη διερεύνηση (1) ανακαλύπτουν τον ορισμό του ρόμβου, έννοια την οποία κατέχουν εμπειρικά.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές κατανοούν τον ορισμό του ρόμβου και ανακαλύπτουν τις ιδιότητές του. Η πλήρης κατανόηση του ορισμού γίνεται μέσα από την κατασκευή ενός ρόμβου είτε σε ένα φύλλο χαρτί είτε με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού γεωμετρίας. Ακολούθως, οι μαθητές χρησιμοποιούν το προτεινόμενο εφαρμογίδιο, για να ανακαλύψουν τις ιδιότητες του ρόμβου.

Στη διερεύνηση (3) οι μαθητές ανακαλύπτουν έναν τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού του ρόμβου, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο.

- Στις δραστηριότητες 1 και 2 οι μαθητές υπολογίζουν τα μήκη ευθύγραμμων τμημάτων και τα μέτρα γωνιών σε ρόμβους, χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα, τον ορισμό και τις ιδιότητες του ρόμβου.

Στις δραστηριότητες 3, 4, 5 και 6 οι μαθητές κάνουν μετρήσεις, χρησιμοποιώντας τον ορισμό και τις ιδιότητες του ρόμβου

Στη δραστηριότητα 7 οι μαθητές υπολογίζουν το μήκος της μιας διαγωνίου και την περίμετρο του ρόμβου, όταν είναι γνωστό ότι ο ρόμβος είναι ισοδύναμος με ένα ορθογώνιο.

Τέλος, στη δραστηριότητα 8 οι μαθητές συνδυάζουν τις γνώσεις που έχουν για το παραλληλόγραμμο, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και τον ρόμβο, για να υπολογίσουν το εμβαδόν σκιασμένων σχημάτων.



➤ **Τετράγωνο**

- Στη διερεύνηση (1) οι μαθητές αναγνωρίζουν βασικά είδη τετραπλεύρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο), χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές κατανοούν τον ορισμό του τετραγώνου και ανακαλύπτουν τις ιδιότητές του. Η πλήρης κατανόηση του ορισμού γίνεται μέσα από την κατασκευή ενός τετραγώνου είτε σε ένα φύλλο χαρτί είτε με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού γεωμετρίας. Ακολούθως, οι μαθητές χρησιμοποιούν το προτεινόμενο εφαρμογίδιο, για να ανακαλύψουν τις ιδιότητες του τετραγώνου.

- Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές υπολογίζουν την τιμή μεταβλητών, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του τετραγώνου.

Στις δραστηριότητες 2 και 4 οι μαθητές υπολογίζουν γωνίες και ευθύγραμμα τμήματα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του τετραγώνου και το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές επεξηγούν ότι ένα τετράγωνο είναι και ορθογώνιο και ρόμβος.

Στις δραστηριότητες 5 και 6 οι μαθητές ανακαλούν τις γνώσεις τους στα ειδικά παραλληλόγραμμα, για να βρουν σχέσεις μεταξύ τους ή σχέσεις μεταξύ των στοιχείων τους.

Στη δραστηριότητα 7 οι μαθητές κατασκευάζουν ένα τετράγωνο στα πλαίσια της συμμετρίας ως προς κέντρο.

Στις δραστηριότητες 8 και 10 οι μαθητές υπολογίζουν το εμβαδόν και την περίμετρο παραλληλογράμμων και τριγώνων, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Τέλος, στη δραστηριότητα 9 οι μαθητές εξετάζουν πως μεταβάλλεται το εμβαδόν και η περίμετρος ενός τετραγώνου σε σχέση με την μεταβολή του μήκους της πλευράς του.



➤ **Τραπεζίο**

- Στη διερεύνηση (1) οι μαθητές κατανοούν τον ορισμό του τραπεζίου και ανακαλύπτουν τις ιδιότητές του. Η πλήρης κατανόηση του ορισμού γίνεται μέσα από την κατασκευή ενός τραπεζίου είτε σε ένα φύλλο χαρτί είτε με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού γεωμετρίας. Ακολούθως, οι μαθητές χρησιμοποιούν το προτεινόμενο εφαρμογίδιο, για να ανακαλύψουν τις ιδιότητες του τραπεζίου. Τέλος, οι μαθητές θα ανακαλύψουν τον ορισμό και τις ιδιότητες του ορθογωνίου τραπεζίου και του ισοσκελούς τραπεζίου.

Στόχος της διερεύνησης (2) είναι οι μαθητές να ανακαλύψουν έναν τύπο υπολογισμού του εμβαδού ενός τραπεζίου, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο.

- Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές υπολογίζουν τα μέτρα των γωνιών ισοσκελών τραπεζίων.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές ελέγχουν την ορθότητα προτάσεων που αναφέρονται σε τραπέζια, με τη βοήθεια του ορισμού και των ιδιοτήτων του τραπεζίου.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές εξετάζουν τα είδη της συμμετρίας που εμφανίζεται στα παραλληλόγραμμα και στο ισοσκελές τραπέζιο.

Στη δραστηριότητα 4 οι μαθητές επεξηγούν ένα τρόπο κατασκευής ενός ισοσκελούς τραπεζίου, με βάση ένα ισοσκελές τρίγωνο.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές εξετάζουν το είδος ενός τετραπλεύρου, όταν είναι γνωστό ένα μέρος του.

Στις δραστηριότητες 6, 7, 9 και 10 οι μαθητές υπολογίζουν το εμβαδόν και την περίμετρο ενός τραπεζίου, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του τραπεζίου και το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Τέλος, στις δραστηριότητες 8 και 11 οι μαθητές υπολογίζουν το μήκος του ύψους ή τα μήκη των βάσεων ενός τραπεζίου αντίστοιχα, με τη βοήθεια του τύπου του εμβαδού.



➤ **Μήκος Κύκλου**

- Στην προτεινόμενη εξερεύνηση οι μαθητές χρησιμοποιούν το προτεινόμενο εφαρμογίδιο, για να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκε ο Ερατοσθένης για να υπολογίσει την περιφέρεια της Γης. Αρχικά, οι μαθητές μετακινούν το σημείο A, για να «πετύχουν» γωνία $7,20^\circ$. Έτσι, αντιλαμβάνονται ότι η γωνιακή απόσταση Σύνης-Αλεξάνδρειας είναι ίση με $7,20^\circ$. Στη συνέχεια, γίνεται η αντιστοίχιση γωνιακής απόστασης-απόστασης Σύνης-Αλεξάνδρειας, γεγονός που τους οδηγεί εύκολα στον υπολογισμό της περιφέρειας της Γης.

- Στόχος της διερεύνησης (1) είναι οι μαθητές να ανακαλύψουν τον τύπο για τον υπολογισμό του μήκους του κύκλου. Συγκεκριμένα, οι μαθητές παρατηρούν τις τιμές που παίρνει ο λόγος του μήκους του κύκλου προς το μήκος του διαμέτρου του κύκλου.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές ανακαλύπτουν τον τύπο υπολογισμού του μήκους ενός τόξου κύκλου, συναρτήσει της ακτίνας του κύκλου και του μέτρου της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.

- Στις δραστηριότητες 1, 3 και 7 οι μαθητές υπολογίζουν το μήκος κύκλου.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές συνδέουν την $14^{\text{η}}$ Μαρτίου με τον αριθμό π .

Στις δραστηριότητες 4 και 5 οι μαθητές υπολογίζουν την ακτίνα κύκλου με συγκεκριμένο μήκος.

Στις δραστηριότητες 6 και 8 οι μαθητές υπολογίζουν το μήκος κύκλου, για να αντιμετωπίσουν προβλήματα της καθημερινότητας.

Στη δραστηριότητα 9 οι μαθητές υπολογίζουν το μήκος κύκλου, γνωρίζοντας το μήκος συγκεκριμένου τόξου.

Στη δραστηριότητα 10 οι μαθητές υπολογίζουν το μήκος τόξων κύκλου.

Στη δραστηριότητα 11 οι μαθητές υπολογίζουν την περίμετρο μεικτόγραμμων σχημάτων με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου Θεωρήματος, του τύπου υπολογισμού του μήκους τόξου κύκλου κ.ά.



Τέλος, στις δραστηριότητες 12 και 13 οι μαθητές εφαρμόζουν τον τύπο υπολογισμού του μήκους κύκλου, για να απαντήσουν ερωτήματα σε προβλήματα της καθημερινότητας.

➤ **Εμβαδόν Κυκλικού Δίσκου**

- Στη διερεύνηση (1) οι μαθητές διερευνούν ένα πρόβλημα της καθημερινότητας και ανακαλύπτουν τον τύπο του εμβαδού κυκλικού δίσκου, με τη βοήθεια του προτεινόμενου εφαρμογίδιου.

Στη διερεύνηση (2) οι μαθητές ανακαλύπτουν τον τύπο του εμβαδού ενός κυκλικού τομέα, συναρτήσει της ακτίνας του κύκλου και του μέτρου της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.

- Στις δραστηριότητες 1 και 5 οι μαθητές υπολογίζουν εμβαδά κυκλικών δίσκων.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές υπολογίζουν το μήκος της ακτίνας κύκλου, γνωρίζοντας το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές υπολογίζουν το μήκος κύκλου, γνωρίζοντας το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.

Στη δραστηριότητα 4 οι μαθητές υπολογίζουν το μήκος της ακτίνας κύκλου, γνωρίζοντας το εμβαδόν συγκεκριμένου κυκλικού τομέα και το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.

Στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές υπολογίζουν το μήκος τόξου κύκλου, γνωρίζοντας το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου και το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.

Στη δραστηριότητα 7 οι μαθητές εξετάζουν πως η μεταβολή του της ακτίνας ενός κύκλου επηρεάζει το μήκος του και το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.

Στις δραστηριότητες 8 και 10 οι μαθητές υπολογίζουν το εμβαδόν κυκλικού δίσκου και κυκλικού τομέα σε προβλήματα καθημερινότητας.



Στις δραστηριότητες 9 και 11 οι μαθητές εφαρμόζουν τους τύπους υπολογισμού εμβαδού κυκλικού δίσκου και τετραγώνου, για να απαντήσουν σε προβλήματα της καθημερινότητας.

Τέλος, στη δραστηριότητα 12 οι μαθητές υπολογίζουν το εμβαδόν μεικτόγραμμων σχημάτων, με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου Θεωρήματος, του τύπου υπολογισμού του εμβαδού κυκλικού δίσκου, του τύπου υπολογισμού του εμβαδού κυκλικού τομέα κ.ά.

➤ **Δραστηριότητες Ενότητας**

Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές υπολογίζουν τα μέτρα γωνιών σε παραλληλόγραμμο.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές εφαρμόζουν τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου, για να υπολογίσουν την περίμετρό του.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές εφαρμόζουν τις ιδιότητες του ρόμβου και το Πυθαγόρειο Θεώρημα, για να υπολογίσουν τα μέτρα γωνιών και ευθύγραμμων τμημάτων.

Στις δραστηριότητες 4 και 6 οι μαθητές ανακαλούν τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές εξετάζουν το είδος ενός τετραπλεύρου, αν είναι γνωστό ένα μέρος του.

Στη δραστηριότητα 7 οι μαθητές σχεδιάζουν το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς άξονα και ως προς κέντρο συμμετρίας.

Στις δραστηριότητες 8 και 10 οι μαθητές υπολογίζουν τα εμβαδά γνωστών επίπεδων σχημάτων. Επιπλέον, στη δραστηριότητα 10 οι μαθητές υπολογίζουν την περίμετρο ενός ρόμβου με τη βοήθεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Στις δραστηριότητες 9 και 11 οι μαθητές υπολογίζουν τα μήκη ευθύγραμμων τμημάτων με τη βοήθεια των τύπων του εμβαδού τετραγώνου και τραπεζίου.

Στις δραστηριότητες 12 και 13 οι μαθητές κάνουν μετρήσεις στον κύκλο.



Στη δραστηριότητα 14 οι μαθητές υπολογίζουν λόγους μήκους κύκλων και λόγους εμβαδών κυκλικών δίσκων με ακτίνες ρ , 2ρ και 3ρ .

Στη δραστηριότητα 15 οι μαθητές υπολογίζουν το μήκος ακτίνας κύκλου, χρησιμοποιώντας μια δεδομένη σχέση.

Τέλος, στις δραστηριότητες 16 και 17 οι μαθητές υπολογίζουν το εμβαδόν και την περίμετρο μεικτόγραμμων σχημάτων.

➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα με τη βοήθεια των ιδιοτήτων τους.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές υπολογίζουν τα μήκη πλευρών και διαγωνίων ορθογωνίου παραλληλογράμμου και τετραγώνου στα πλαίσια της αναλυτικής γεωμετρίας.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές αποδεικνύουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα με τη βοήθεια γεωμετρικών σχημάτων.

Στη δραστηριότητα 4 οι μαθητές υπολογίζουν το εμβαδόν ενός τετραγώνου με τη βοήθεια μεταβλητής και των ιδιοτήτων του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Στις δραστηριότητες 5, 6, 7 και 9 οι μαθητές ανακαλούν τις γνώσεις τους για τη συμμετρία ως προς άξονα και ως προς κέντρο.

Στη δραστηριότητα 8 οι μαθητές παρατηρούν τα εμβαδά κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο ακτίνας 1, για να προσεγγίσουν τον αριθμό π .

Τέλος, στη δραστηριότητα 10 οι μαθητές υπολογίζουν το εμβαδόν κυκλικού δίσκου, γνωρίζοντας το εμβαδόν ενός τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο αυτό.

Σημείωση:

Η ενότητα αυτή μπορεί να αξιολογηθεί με γραπτό τελικό διαγώνισμα.



ΕΝΟΤΗΤΑ 4: Εξισώσεις-Ανισώσεις α' Βαθμού**Δείκτες επιτυχίας:**

- Επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις πρώτου βαθμού αλγεβρικά και γραφικά, χρησιμοποιώντας ποικιλία μεθόδων, με ή χωρίς τεχνολογία και χρησιμοποιούν τις εξισώσεις και ανισώσεις στην επίλυση προβλημάτων.Α4.12.
- Επιλύουν και κατασκευάζουν αριθμητικά και αλγεβρικά προβλήματα ρουτίνας και διαδικασίας.Α4.14.
- Επιλύουν και διερευνούν γραμμικές εξισώσεις και ανισώσεις μιας μεταβλητής, αναπαριστούν γραφικά τις λύσεις τους και αναγνωρίζουν τις ιδιότητές τους.Α5.10.
- Μετασχηματίζουν αλγεβρικές παραστάσεις ως προς μια μεταβλητή.Α5.12.
- Επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις στο σύνολο των ρητών αριθμών.Αρ5.22.

Τι θα μάθουμε:

- Να διερευνούμε εξισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής και να εξετάζουμε το πλήθος των λύσεών τους.
- Να μετασχηματίζουμε τύπους ως προς μια μεταβλητή.
- Να επιλύουμε ανισώσεις πρώτου βαθμού αλγεβρικά και γραφικά, χρησιμοποιώντας ποικιλία μεθόδων με ή χωρίς τεχνολογία και να χρησιμοποιούμε τις ανισώσεις στην επίλυση προβλημάτων.
- Να παρουσιάζουμε το σύνολο των λύσεων μιας ανίσωσης και σε διάστημα πραγματικών αριθμών.
- Να βρίσκουμε τις κοινές λύσεις δύο ή περισσότερων ανισώσεων πρώτου βαθμού.

Περιεχόμενα ενότητας:

- **Διερεύνηση Εξίσωσης α' Βαθμού με μία Μεταβλητή**
- **Μετασχηματισμός Τύπου**
- **Ιδιότητες Ανισοτήτων**
- **Ανισώσεις α' Βαθμού**
- **Συναλήθευση Ανισώσεων-Διαστήματα**



Εισηγήσεις:

Οι μαθητές στην ενότητα αυτή ανακαλούν τις γνώσεις που απέκτησαν από την Α΄ Γυμνασίου στην επίλυση εξισώσεων πρώτου βαθμού. Οι μαθητές μελετούν το πλήθος των λύσεων μίας εξίσωσης και κάνουν απλές διερευνήσεις εξισώσεων. Μετασχηματίζουν τύπους και ανακαλύπτουν τις ιδιότητες των ανισοτήτων, τις οποίες εφαρμόζουν στην επίλυση ανισώσεων. Παρουσιάζουν το σύνολο των λύσεων μιας ανίσωσης σε διάστημα πραγματικών αριθμών. Οι μαθητές επιλύουν ανισώσεις πρώτου βαθμού και γραφικά, χρησιμοποιώντας τες στην επίλυση προβλημάτων. Τέλος, υπολογίζουν τις κοινές λύσεις δύο ή περισσότερων ανισώσεων.

Η ενότητα αυτή μπορεί να οργανωθεί ως εξής:

➤ **Διερεύνηση Εξίσωσης α΄ βαθμού με μία Μεταβλητή**

- Στόχος της προτεινόμενης διερεύνησης είναι να ταξινομήσουν οι μαθητές τις εξισώσεις πρώτου βαθμού ανάλογα με το πλήθος των λύσεων που έχουν, με τη βοήθεια των εννοιών του συνόλου και του πληθικού αριθμού συνόλου.
- Στις δραστηριότητες 1 και 2 οι μαθητές ανακαλούν τις γνώσεις τους στην επίλυση εξισώσεων πρώτου βαθμού, για να εξετάσουν το πλήθος των λύσεών τους.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές αναγνωρίζουν το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης.

Στις δραστηριότητες 4, 5, 6 και 7 οι μαθητές διερευνούν εξισώσεις.

➤ **Μετασχηματισμός Τύπου**

- Στόχος της διερεύνησης είναι να αντιληφθούν οι μαθητές την ανάγκη να επιλύσουν μια σχέση ως προς μια μεταβλητή, για να απαντήσουν ερωτήματα που τίθενται πιο εύκολα.
- Στις δραστηριότητες 1, 2 και 5 οι μαθητές μετασχηματίζουν τύπους ως προς συγκεκριμένη μεταβλητή.

Στις δραστηριότητες 3 και 4 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, με τη βοήθεια της διαδικασίας μετασχηματισμού τύπου.



➤ **Ιδιότητες Ανισοτήτων**

- Στόχος της διερεύνησης είναι να ανακαλύψουν οι μαθητές τις ιδιότητες των ανισοτήτων και να τις επιβεβαιώσουν, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο.
- Στις δραστηριότητες 1, 2, 3 και 4 οι μαθητές εφαρμόζουν τις ιδιότητες των ανισοτήτων.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές αποδεικνύουν σχέσεις μεταξύ πραγματικών αριθμών, με τη χρήση ιδιοτήτων των ανισοτήτων.

➤ **Ανισώσεις α΄ Βαθμού**

- Στόχος της εξερεύνησης είναι να οδηγηθούν οι μαθητές στην ανάγκη χρήσης ανισοτικών σχέσεων, μελετώντας τέσσερις πινακίδες.
- Στόχος της διερεύνησης είναι να κατασκευάσουν οι μαθητές μια ανίσωση α΄ βαθμού και να την επιλύσουν, μέσα από ένα πρόβλημα της καθημερινότητας.
- Στις δραστηριότητες 1, 3, 5 και 6 οι μαθητές ερμηνεύουν την έννοια της λύσης ανίσωσης με διάφορους τρόπους.

Στις δραστηριότητες 2, 4 και 7 οι μαθητές επιλύουν ανισώσεις. Επιπλέον, στη δραστηριότητα 7 οι μαθητές παραστούν γραφικά τη λύση στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Στις δραστηριότητες 8, 9 και 10 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια ανισώσεων.

➤ **Συναλήθευση Ανισώσεων-Διαστήματα**

- Στόχος της διερεύνησης (1) είναι να αντιληφθούν οι μαθητές την έννοια της συναλήθευσης ανισώσεων και να την περιγράψουν, με τη χρήση μαθηματικών συμβόλων.

Στόχος της διερεύνησης (2) είναι να κατασκευάσουν οι μαθητές ανισώσεις, να τις επιλύσουν και να διατυπώσουν τα συμπεράσματά τους για τις κοινές τους λύσεις. Στη συνέχεια, θα επιβεβαιώσουν τα συμπεράσματά τους και θα τα γενικεύσουν, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο.



- Στις δραστηριότητες 1 και 2 οι μαθητές εκφράζουν τη γραφική αναπαράσταση ενός διαστήματος στη συμβολική του μορφή.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές εκφράζουν τα διαστήματα τιμών μιας μεταβλητής σε μορφή ανισώσεων και ακολούθως τα παρουσιάζουν γραφικά στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Στις δραστηριότητες 4, 5, 10 και 12 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια ανισώσεων.

Στις δραστηριότητες 6, 7, 8 και 9 οι μαθητές υπολογίζουν τις κοινές λύσεις ανισώσεων.

Στη δραστηριότητα 11 οι μαθητές συμπληρώνουν τη δεύτερη ανίσωση με κατάλληλο αριθμό, ώστε οι δύο ανισώσεις να έχουν συγκεκριμένο διάστημα συναλήθευσης.

➤ **Δραστηριότητες Ενότητας**

Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές εκφράζουν τη γραφική αναπαράσταση ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών σε μορφή διαστήματος.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές εκφράζουν τα διαστήματα τιμών μιας μεταβλητής σε μορφή ανισώσεων και τα παρουσιάζουν γραφικά στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές εξετάζουν το πλήθος των λύσεων των εξισώσεων.

Στις δραστηριότητες 4, 5, 7 και 9 οι μαθητές επιλύουν ανισώσεις.

Στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές μετασχηματίζουν τύπους.

Στις δραστηριότητες 8 και 12 οι μαθητές βρίσκουν τα διαστήματα για τα οποία οι ανισώσεις συναληθεύουν.

Στις δραστηριότητες 10 και 11 οι μαθητές υπολογίζουν την τιμή παραμέτρου, ώστε οι εξισώσεις να έχουν συγκεκριμένο πλήθος λύσεων.



Στις δραστηριότητες 13, 14 και 15 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, με τη βοήθεια ανισώσεων.

➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Στις δραστηριότητες 1, 4 και 7 οι μαθητές βρίσκουν τις κοινές λύσεις ανισώσεων.

Στις δραστηριότητες 2, 5 και 6 οι μαθητές εφαρμόζουν ιδιότητες των ανισοτήτων, για να αποδείξουν σχέσεις ή να βρουν ελάχιστη και μέγιστη τιμή αλγεβρικών παραστάσεων.

Τέλος, στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές επιλύουν ανισώσεις.

Σημείωση:

Η ενότητα αυτή μπορεί να αξιολογηθεί και με γραπτό τελικό διαγώνισμα.



ΈΝΘΕΤΟ: Επίπεδοι Μετασχηματισμοί

Δείκτες επιτυχίας:

- Αναλύουν και συνθέτουν μοτίβα γεωμετρικών σχημάτων που καλύπτουν πλήρως μια επιφάνεια.Γ3.15.
- Σχεδιάζουν και περιγράφουν το αποτέλεσμα μετασχηματισμών, όπως μεταφοράς, περιστροφής, ανάκλασης, μεγέθυνσης και σμίκρυνσης.Γ3.16.
- Προβλέπουν και αιτιολογούν τα αποτελέσματα του διαχωρισμού, της σύνθεσης και του μετασχηματισμού δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων.Γ3.17.
- Περιγράφουν και εκτελούν μετασχηματισμούς (περιστροφή υπό συγκεκριμένη γωνία, μεταφορά, ανάκλαση ως προς ένα ή περισσότερους άξονες) δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων.Γ4.17.
- Διαχωρίζουν και συνθέτουν δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα.Γ4.19.
- Αναγνωρίζουν και περιγράφουν μετασχηματισμούς σχημάτων μέσω της ανάκλασης, της περιστροφής και της μεταφοράς.Γ5.21.

Τι θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε τον επίπεδο μετασχηματισμό.
- Να διακρίνουμε το πρότυπο και την εικόνα ενός σχήματος σε ένα μετασχηματισμό.
- Να ορίζουμε και να περιγράφουμε ειδικούς μετασχηματισμούς, όπως η παράλληλη μεταφορά, η επίπεδη στροφή και η συμμετρία ως προς σημείο και ως προς άξονα.

Περιεχόμενα ενότητας:

- **Μετασχηματισμοί στο επίπεδο**
- **Παράλληλη Μεταφορά**
- **Επίπεδη Στροφή**



Εισηγήσεις:

Βασικός στόχος της ενότητας είναι οι μαθητές να ορίζουν τον επίπεδο μετασχηματισμό και να τον κατανοούν ως αντιστοιχίση σημείων στο επίπεδο, όπου το αρχικό σχήμα (πρότυπο) αντιστοιχίζεται στο τελικό σχήμα (εικόνα). Οι μαθητές είναι ήδη εξοικειωμένοι με τις έννοιες της αντιστοιχίας, της συνάρτησης και με τις συμμετρίες ως προς άξονα και σημείο, που είναι ειδικές περιπτώσεις επίπεδων μετασχηματισμών. Στη συνέχεια, οι μαθητές θα γνωρίσουν και θα εφαρμόσουν σε προβλήματα ακόμη δύο επίπεδους μετασχηματισμούς, την παράλληλη μεταφορά και την επίπεδη στροφή.

Η ενότητα αυτή μπορεί να οργανωθεί ως εξής:

➤ **Μετασχηματισμοί στο επίπεδο**

- Η προτεινόμενη εξερεύνηση φέρνει τους μαθητές σε μια πρώτη επαφή με την «μετακίνηση» σχημάτων σε κατάλληλη θέση, μέσα από ένα πάζλ.
- Η διερεύνηση υποδεικνύει την κατάλληλη μετακίνηση των κομματιών στην ορθή θέση, έτσι ώστε οι μαθητές να παρατηρήσουν το είδος της κίνησής τους και στη συνέχεια να το περιγράψουν.

➤ **Παράλληλη Μεταφορά**

- Στις δραστηριότητες 1, 2 και 6 οι μαθητές αναγνωρίζουν και περιγράφουν τον μετασχηματισμό της παράλληλης μεταφοράς σε δεδομένα σχήματα, δίνοντας έμφαση στα χαρακτηριστικά του μετασχηματισμού (κατεύθυνση, απόσταση).

Στις δραστηριότητες 3 και 4 οι μαθητές κατασκευάζουν την εικόνα συγκεκριμένων μεταφορών και υπολογίζουν σε κάποιες περιπτώσεις την απόσταση μεταξύ προτύπου και εικόνας.

Στις δραστηριότητες 4 και 7 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα παράλληλης μεταφοράς σχημάτων.

➤ **Επίπεδη Στροφή**

- Στις δραστηριότητες 1, 2, 4 και 5 οι μαθητές αναγνωρίζουν και περιγράφουν τον μετασχηματισμό της επίπεδης στροφής, δίνοντας έμφαση στα χαρακτηριστικά του μετασχηματισμού (κέντρο, γωνία στροφής).



Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές εκτελούν συγκεκριμένους μετασχηματισμούς επίπεδης στροφής. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν και κατάλληλο λογισμικό για την ίδια δραστηριότητα.

➤ **Δραστηριότητες Ενότητας**

Στις δραστηριότητες 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9 και 10 οι μαθητές περιγράφουν συγκεκριμένους μετασχηματισμούς σχημάτων (παράλληλη μεταφορά, επίπεδη στροφή, συμμετρίες).

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές εκτελούν επίπεδη στροφή 180° σχήματος γύρω από συγκεκριμένο σημείο του.

➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές αναφέρουν το είδος του τετραπλεύρου που σχηματίζεται, όταν ένα ευθύγραμμο τμήμα μεταφέρεται παράλληλα σε συγκεκριμένη απόσταση.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές βρίσκουν το πρότυπο σχήμα όταν δίνεται η εικόνα και περιγράφουν το συγκεκριμένο μετασχηματισμό.

Στις δραστηριότητες 3 και 4 οι μαθητές αναγνωρίζουν και περιγράφουν συγκεκριμένους μετασχηματισμούς.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές σχεδιάζουν συμμετρικά σχήματα ως προς συγκεκριμένο άξονα.

Στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές υπολογίζουν την απόσταση μετακίνησης ενός σχήματος που μεταφέρεται παράλληλα προς συγκεκριμένη κατεύθυνση.

Στη δραστηριότητα 7 οι μαθητές εφαρμόζουν διάφορους μετασχηματισμούς σε ένα τρίγωνο και βρίσκουν αναλλοίωτα σημεία στους μετασχηματισμούς (σημεία τα οποία δεν αλλάζουν θέση στο μετασχηματισμό).

Στη δραστηριότητα 8 δίνεται ένας μετασχηματισμός επίπεδης στροφής και ζητούνται το κέντρο και η γωνία στροφής.



Στη δραστηριότητα 9 οι μαθητές περιγράφουν ένα μετασχηματισμό που απεικονίζει ένα αρχικό σχήμα σε ένα τελικό σχήμα, μετά από δύο διαδοχικές στροφές με το ίδιο κέντρο και διαφορετική γωνία στροφής.

Στη δραστηριότητα 10 οι μαθητές υπολογίζουν τις συντεταγμένες στο επίπεδο ενός σημείου που μετασχηματίζεται μετά από επίπεδη στροφή και αναγνωρίζουν το είδος συγκεκριμένου τετραπλεύρου που σχηματίζεται.

Στη δραστηριότητα 11 οι μαθητές εκτελούν συγκεκριμένους μετασχηματισμούς σε δοσμένη γραφική παράσταση. Προαιρετικά μπορούν να χρησιμοποιήσουν το προτεινόμενο εφαρμογίδιο.

Στη δραστηριότητα 12 δίνεται ένα «άγνωστος» μετασχηματισμός και οι μαθητές αναφέρουν βασικές σχέσεις μεταξύ του προτύπου και της εικόνας.

Στις δραστηριότητες 13 και 14 οι μαθητές περιγράφουν συγκεκριμένους μετασχηματισμούς σχημάτων.

Στη δραστηριότητα 15 δίνονται διάφοροι μετασχηματισμοί και οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν εκείνον που δεν μπορεί να είναι στροφή.

Σημείωση:

Στην ενότητα αυτή μπορεί να γίνει μια μικρή άσκηση αξιολόγησης.



ΕΝΟΤΗΤΑ 5: Συναρτήσεις

Δείκτες επιτυχίας:

- Περιγράφουν, αναπαριστούν, επεξηγούν και βρίσκουν το γενικό τύπο συναρτήσεων.A3.6.
- Κατανοούν την έννοια της συνάρτησης και επεξηγούν τη διαδικασία απεικόνισης ενός στοιχείου του πεδίου ορισμού στο πεδίο τιμών και διακρίνουν την έννοια της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής.A4.4.
- Κατασκευάζουν διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις, για να αναπαραστήσουν τύπους συναρτήσεων, με ή χωρίς τεχνολογία, σχεδιάζοντας σημεία σε σύστημα αξόνων.A4.6.
- Κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση ευθείας, υπολογίζοντας τις συντεταγμένες δύο σημείων της και ελέγχουν αλγεβρικά και γραφικά κατά πόσο ένα σημείο ανήκει στην ευθεία.A4.7.
- Κατανοούν την έννοια της κλίσης ευθείας με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών και την εφαρμόζουν σε προβλήματα.A4.8.
- Μοντελοποιούν και περιγράφουν μεγέθη που μεταβάλλονται σε πραγματικές καταστάσεις και τα αναπαριστούν σε πίνακα τιμών ή σε γραφική παράσταση.A4.9.
- Αναγνωρίζουν και επεξηγούν πότε μια

Τι θα μάθουμε:

- Να διακρίνουμε πότε μια αντιστοιχία είναι συνάρτηση.
- Να αναπαριστούμε μια συνάρτηση με διαφορετικούς τρόπους (πίνακα τιμών, γραφική παράσταση, βελοειδές διάγραμμα κ.λπ.) και να μεταφράζουμε από ένα είδος αναπαράστασης μιας συνάρτησης σε άλλο.
- Να αναγνωρίζουμε και να επεξηγούμε πότε μια λεκτική έκφραση, ένας πίνακας τιμών ή μια γραφική παράσταση αναπαριστούν γραμμική σχέση.
- Να κατασκευάζουμε και να ερμηνεύουμε γραφικές παραστάσεις γραμμικών συναρτήσεων.
- Να ελέγχουμε αλγεβρικά και γραφικά κατά πόσο ένα σημείο ανήκει σε μία ευθεία.
- Να διερευνούμε και να ερμηνεύουμε τη σημασία των παραμέτρων a και β της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$.
- Να κατανοούμε την έννοια της κλίσης ευθείας με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών και να την εφαρμόζουμε στην επίλυση προβλημάτων.

λεκτική έκφραση, ένας πίνακας τιμών ή μια γραφική παράσταση αναπαριστούν γραμμική σχέση.A5.3.

- Κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις γραμμικών συναρτήσεων και διερευνούν τη σημασία των παραμέτρων α και β της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$ (χρήση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας).A5.4.
- Βρίσκουν την εξίσωση της ευθείας και την αναπαριστούν γραφικά, όταν δίνεται η κλίση και ένα σημείο ή όταν δίνονται δύο σημεία της ευθείας.A5.6.
- Επιλύουν γραφικά ή με άλλο κατάλληλο τρόπο προβλήματα με γραμμικές συναρτήσεις, εξισώσεις και ανισώσεις.A5.8.
- Επιλύουν και διερευνούν γραμμικά συστήματα εξισώσεων και ανισώσεων δύο μεταβλητών (αλγεβρικά ή με τη χρήση δυναμικών λογισμικών) και τα εφαρμόζουν στη λύση προβλημάτων καθημερινής ζωής.A5.15.
- Κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις και υπολογίζουν την ταχύτητα ή την απόσταση κινητών σε ορισμένο χρονικό διάστημα.M4.9.
- Ερμηνεύουν και χρησιμοποιούν πληροφορίες μεταβολής μεγεθών σε προβλήματα που παρουσιάζονται λεκτικά, αριθμητικά, συμβολικά, γραφικά ή σε πίνακες (γεωμετρικά προβλήματα, φόρος εισοδήματος, πληθωρισμός, συνάλλαγμα, κτλ.).M5.10.

➤ Να αναπαριστούμε γραφικά την ευθεία, όταν δίνεται η κλίση και ένα σημείο ή όταν δίνονται δύο σημεία της ευθείας.

➤ Να επιλύουμε γραμμικά συστήματα εξισώσεων (αλγεβρικά ή με τη χρήση δυναμικών λογισμικών).



- Κατασκευάζουν και χρησιμοποιούν γραφικές παραστάσεις σε προβλήματα κίνησης.Μ5.11.

Περιεχόμενα ενότητας:

- **Η Έννοια της Αντιστοιχίας-Συνάρτησης**
- **Γραμμική Συνάρτηση-Ευθεία**
- **Ειδικές Περιπτώσεις Ευθειών**
- **Κλίση Γραμμικής Συνάρτησης-Ευθείας**
- **Γραμμικά Συστήματα δύο Εξισώσεων με δύο Αγνώστους**

Εισηγήσεις:

Στην ενότητα αυτή οι μαθητές αναπαριστούν μια συνάρτηση με διαφορετικούς τρόπους και μεταφράζουν από ένα είδος αναπαράστασης σε άλλο. Οι μαθητές μελετούν τη γραμμική συνάρτηση και τη γραφική της παράσταση και ερμηνεύουν τη σημασία των παραμέτρων a και β της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$. Στόχος της ενότητας είναι να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια της κλίσης ευθείας και να την εφαρμόσουν στην επίλυση προβλήματος. Τέλος, οι μαθητές αναπαριστούν γραφικά μία ευθεία, όταν δίνεται η κλίση και ένα σημείο της.

Η ενότητα αυτή μπορεί να οργανωθεί ως εξής:

- **Η Έννοια της Αντιστοιχίας-Συνάρτησης**
 - Στόχος της διερεύνησης (1) είναι να μελετήσουν και να ερμηνεύσουν οι μαθητές μιαν αντιστοιχία, χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασής της.
 - Στόχος της διερεύνησης (2) είναι να ανακαλέσουν οι μαθητές την έννοια της συνάρτησης και να οδηγηθούν στο πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών μιας συνάρτησης.
 - Στις δραστηριότητες 1, 4, 6, και 7 οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο αντιστοιχίες που δίνονται με διάφορους τρόπους αναπαράστασης ορίζουν συναρτήσεις.



Στις δραστηριότητες 2 και 3 οι μαθητές μεταφράζουν μια συνάρτηση από ένα είδος αναπαράστασης σε άλλο.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές συμπληρώνουν το βελοειδές διάγραμμα με δύο διαφορετικούς τρόπους, έτσι ώστε η αντιστοιχία να ορίζει συνάρτηση.

Στη δραστηριότητα 8 οι μαθητές ασχολούνται με πολλαπλές αναπαραστάσεις αντιστοιχίας και συνάρτησης, μέσα από ένα ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο.

➤ **Γραμμική Συνάρτηση-Ευθεία**

- Στόχος της διερεύνησης (1) είναι να αντιληφθούν οι μαθητές ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = ax + \beta$ είναι ευθεία. Στη συνέχεια, θα εξετάσουν πότε ένα σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

Στόχος της διερεύνησης (2) είναι να ερμηνεύσουν οι μαθητές το ρόλο των παραμέτρων a και β της ευθείας $y = ax + \beta$. Στη συνέχεια, θα αποδείξουν ότι το σημείο $(0, \beta)$ είναι το σημείο τομής της ευθείας $y = ax + \beta$ με τον άξονα των τεταγμένων.

- Στις δραστηριότητες 1 και 6 οι μαθητές κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις ευθειών.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο τα δεδομένα που δίνονται συνδέονται με γραμμική σχέση.

Στις δραστηριότητες 3 οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο συγκεκριμένα σημεία ανήκουν στη γραφική παράσταση συγκεκριμένης συνάρτησης.

Στις δραστηριότητες 4 και 5 οι μαθητές υπολογίζουν τις τιμές της παραμέτρου a ή β , με δεδομένο ότι η ευθεία περνά από συγκεκριμένο σημείο.

Στις δραστηριότητες 7 και 10 οι μαθητές βρίσκουν σημεία τομής ευθειών με τον άξονα των τετμημένων ή των τεταγμένων.

Στις δραστηριότητες 8 και 12 οι μαθητές βρίσκουν την εξίσωση ευθείας που περνά από δύο σημεία.



Στη δραστηριότητα 9 οι μαθητές κατασκευάζουν ευθείες που περνούν από συγκεκριμένο σημείο, με τη βοήθεια του δυναμικού λογισμικού γεωμετρίας *Geogebra*.

Στη δραστηριότητα 11 οι μαθητές μελετούν τις γραφικές παραστάσεις γραμμικών συναρτήσεων και απαντούν σε ερωτήματα.

Στη δραστηριότητα 13 οι μαθητές επιλύουν ένα πρόβλημα, σχηματίζοντας μια γραμμική συνάρτηση.

➤ **Ειδικές Περιπτώσεις Ευθειών**

- Στόχος της διερεύνησης (1) είναι να μελετήσουν οι μαθητές την ειδική περίπτωση της ευθείας της μορφής $y = ax$, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο.

Στόχος της διερεύνησης (2) είναι να μελετήσουν οι μαθητές τις δύο ειδικές περιπτώσεις ευθειών της μορφής $y = \beta$ και $x = k$, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο.

- Στις δραστηριότητες 1, 7 και 9 οι μαθητές βρίσκουν τις εξισώσεις ειδικών περιπτώσεων ευθειών.

Στις δραστηριότητες 2 και 3 οι μαθητές κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις ειδικών περιπτώσεων ευθειών.

Στις δραστηριότητες 4 και 5 οι μαθητές απαντούν ερωτήματα που αναφέρονται στην ειδική περίπτωση ευθείας της μορφής $y = ax$.

Στις δραστηριότητες 6 και 8 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, αφού σχηματίσουν μια συνάρτηση της μορφής $y = ax$.

➤ **Κλίση Γραμμικής Συνάρτησης-Ευθείας**

- Στόχος της εξερεύνησης είναι να αντιληφθούν διαισθητικά οι μαθητές την έννοια της κλίσης, παρατηρώντας ράμπες και απαντώντας στο ερώτημα για το ποια είναι η λιγότερο «ανηφορική».

- Στόχος της διερεύνησης είναι να αντιληφθούν οι μαθητές την έννοια της κλίσης ευθείας, ως το σταθερό λόγο της κατακόρυφης προς την οριζόντια μεταβολή. Στη



συνέχεια, οι μαθητές ανακαλύπτουν ότι η κλίση μιας ευθείας της μορφής $y = ax + \beta$ είναι ίση με την τιμή της παραμέτρου a , χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο.

- Στις δραστηριότητες 1, 2, 4 και 7 οι μαθητές υπολογίζουν την κλίση ευθείας. Επιπλέον, στη δραστηριότητα 7 υπολογίζουν την τιμή της παραμέτρου β .

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές βρίσκουν εξίσωση ευθείας, όταν είναι γνωστή η κλίση της και ένα σημείο της.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές υπολογίζουν την τιμή της παραμέτρου, όταν δίνεται η κλίση μιας ευθείας.

Στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές ερμηνεύουν το ρόλο του πρόσημου της κλίσης ευθείας σε πρόβλημα.

➤ **Γραμμικά Συστήματα δύο Εξισώσεων με δύο Αγνώστους**

- Στόχος της διερεύνησης (1) είναι να αντιληφθούν οι μαθητές τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, μέσα από ένα πρόβλημα της καθημερινότητας.

Η διερεύνηση (2) καθοδηγεί τους μαθητές στο να κατασκευάσουν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και να το επιλύσουν, για να απαντήσουν σε διάφορα ερωτήματα.

- Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο συγκεκριμένα διατεταγμένα ζεύγη της μορφής (x, y) αποτελούν λύσεις ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Στις δραστηριότητες 2, 3 και 4 οι μαθητές επιλύουν γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Επιπλέον, στη δραστηριότητα 4 οι μαθητές αναφέρουν το πλήθος των λύσεων του καθενός από τα συστήματα και σχολιάζουν τα αποτελέσματα.

Οι δραστηριότητες 5-9 είναι προβλήματα που λύνονται με τη βοήθεια γραμμικών συστημάτων δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.



➤ **Δραστηριότητες Ενότητας**

Στις δραστηριότητες 1, 2, 3 και 4 οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο αντιστοιχίες ορίζουν συναρτήσεις. Επιπλέον, στη δραστηριότητα 2 θα βρουν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης και θα κατασκευάσουν τη γραφική της παράσταση.

Στις δραστηριότητες 5 και 7 οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο συγκεκριμένα διατεταγμένα ζεύγη της μορφής (x, y) αποτελούν λύσεις ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Επιπλέον, στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές επιλύουν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές βρίσκουν την τιμή παραμέτρου, ώστε ένα σημείο να ανήκει σε συγκεκριμένη ευθεία.

Στη δραστηριότητα 8 οι μαθητές επιλύουν πρόβλημα, κατασκευάζοντας την ανάλογη συνάρτηση.

Στις δραστηριότητες 9, 12 και 13 οι μαθητές υπολογίζουν κλίσεις ευθειών.

Στις δραστηριότητες 10, 11 και 14 οι μαθητές βρίσκουν εξισώσεις ευθειών και απαντούν σε διάφορα ερωτήματα (σημεία τομής με άξονες, εμβαδόν σχηματιζόμενου τριγώνου, κτλ.).

Στη δραστηριότητα 15 οι μαθητές επιλύουν γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Στη δραστηριότητα 16 οι μαθητές μεταφράζουν μια μορφή αναπαράστασης γραμμικής συνάρτησης σε άλλη και ερμηνεύουν το ρόλο της κλίσης.

Τέλος, στις δραστηριότητες 17 και 18 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα, με τη βοήθεια γραμμικών συστημάτων δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Στις δραστηριότητες 1, 2, 7, 9 και 10 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές βρίσκουν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών μιας συνάρτησης, χρησιμοποιώντας τη γραφική της παράσταση.



Στις δραστηριότητες 4, 6, 8 και 11 οι μαθητές βρίσκουν τιμές της παραμέτρου, ώστε να ισχύουν συγκεκριμένες μαθηματικές προτάσεις.

Τέλος, στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο μία εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ έχει ακέραιες λύσεις.

Σημείωση:

Η ενότητα αυτή μπορεί να αξιολογηθεί και με γραπτό τελικό διαγώνισμα.



ΕΝΟΤΗΤΑ 6: Ευθέως-Αντιστρόφως Ανάλογα Ποσά**Δείκτες επιτυχίας:**

- Διακρίνουν πότε δύο ποσά είναι ευθέως ανάλογα και πότε αντιστρόφως ανάλογα, με τη χρήση της αναλογίας και του ποσοστού και εφαρμόζουν τα ανάλογα ποσά στην επίλυση προβλημάτων.Αρ5.6.
- Επιλύουν προβλήματα με ευθέως ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα ποσά και προβλήματα ποσοστών (τόκου, φορολογίας, κέρδους και ζημιάς, κτλ.).Αρ5.24.
- Ερμηνεύουν και χρησιμοποιούν πληροφορίες μεταβολής μεγεθών σε προβλήματα που παρουσιάζονται λεκτικά, αριθμητικά, συμβολικά, γραφικά ή σε πίνακες (γεωμετρικά προβλήματα, φόρος εισοδήματος, πληθωρισμός, συνάλλαγμα, κτλ.).Μ5.10.

Τι θα μάθουμε:

- Να διακρίνουμε πότε δύο ποσά είναι ευθέως ανάλογα και πότε αντιστρόφως ανάλογα.
- Να εφαρμόζουμε τις σχέσεις των ευθέως/αντιστρόφως ανάλογων ποσών στην επίλυση προβλημάτων.

Περιεχόμενα ενότητας:

- **Ευθέως Ανάλογα Ποσά**
- **Αντιστρόφως Ανάλογα Ποσά**

Εισηγήσεις:

Στην ενότητα αυτή οι μαθητές διακρίνουν πότε δύο ποσά είναι ευθέως ανάλογα και πότε αντιστρόφως ανάλογα. Η διάκριση αυτή θα γίνει μέσα από τη σχέση που συνδέει δύο ποσά ευθέως ή αντιστρόφως ανάλογα, από πίνακα τιμών και από τις γραφικές τους παραστάσεις. Τέλος, οι μαθητές επιλύουν προβλήματα με ευθέως και με αντιστρόφως ανάλογα ποσά.



Η ενότητα αυτή μπορεί να οργανωθεί ως εξής:

➤ **Ευθέως Ανάλογα Ποσά**

- Στόχος της διερεύνησης (1) είναι να αντιληφθούν οι μαθητές ότι η ταυτόχρονη αύξηση δύο ποσών δεν είναι αρκετή, για να είναι τα ποσά αυτά ευθέως ανάλογα, μελετώντας δύο γραφικές παραστάσεις. Επίσης, θα αντιληφθούν ότι δύο ευθέως ανάλογα ποσά αναπαριστούνται με μια ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων.
- Στόχος της διερεύνησης (2) είναι να αντιληφθούν οι μαθητές ότι ο λόγος δύο τιμών του ενός ποσού είναι ίσος με τον λόγο των αντίστοιχων τιμών του άλλου ποσού, καταλήγοντας έτσι στη σχέση που συνδέει δύο ευθέως ανάλογα ποσά. Στη συνέχεια, θα κατασκευάσουν δύο γραφικές παραστάσεις που αναφέρονται στα ποσά αυτά και θα τις συγκρίνουν.
- Στις δραστηριότητες 1 και 3 οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο τα ζεύγη ποσών που δίνονται είναι ευθέως ανάλογα.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές συμπληρώνουν ένα πίνακα τιμών, γνωρίζοντας ότι τα δύο ποσά είναι ανάλογα.

Στις δραστηριότητες 4-10 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα με ευθέως ανάλογα ποσά.

➤ **Αντιστρόφως Ανάλογα Ποσά**

- Στόχος της εξερεύνησης είναι να αντιληφθούν οι μαθητές την έννοια των αντιστρόφως αναλόγων ποσών και να αναγνωρίσουν ποια γραφική παράσταση εκφράζει τη σχέση που τα συνδέει.
- Στόχος της διερεύνησης είναι να αντιληφθούν οι μαθητές τη σχέση που συνδέει τα δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο εφαρμογίδιο. Στη συνέχεια, θα αναγνωρίσουν την υπερβολή ως το είδος της γραφικής παράστασης που προκύπτει από δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά.
- Στις δραστηριότητες 1 και 4 οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο τα ποσά που παρουσιάζονται είναι αντιστρόφως ανάλογα.



Στις δραστηριότητες 2, 5 και 6 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές συμπληρώνουν έναν πίνακα τιμών, γνωρίζοντας ότι τα δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

➤ **Δραστηριότητες Ενότητας**

Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές συμπληρώνουν έναν πίνακα τιμών και κατασκευάζουν γραφική παράσταση για δύο ευθέως ανάλογα ποσά.

Στις δραστηριότητες 2 και 7-10 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα με ευθέως ανάλογα ποσά.

Στις δραστηριότητες 3 και 4 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Στη δραστηριότητα 5 οι μαθητές επιλύουν ένα πρόβλημα που συνδυάζει ευθέως και αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Στη δραστηριότητα 6 οι μαθητές εξετάζουν κατά πόσο δύο ποσά είναι ευθέως ανάλογα.

➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές εξηγούν γιατί δύο ποσά είναι ευθέως ανάλογα, παρατηρώντας μια ημιευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων. Στη συνέχεια, γράφουν τη σχέση που τα συνδέει και κατασκευάζουν τη γραφική τους παράσταση.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές επιλύουν ένα πρόβλημα με ευθέως ανάλογα ποσά.

Σημείωση:

Στην ενότητα αυτή μπορεί να γίνει μια μικρή άσκηση αξιολόγησης.



ΕΝΟΤΗΤΑ 7 : Στατιστική-Πιθανότητες

Δείκτες επιτυχίας:

- Συγκρίνουν σύνολα δεδομένων χρησιμοποιώντας μέτρα θέσης (π.χ. διάμεσος, μέσος όρος, επικρατούσα τιμή) και διασποράς (π.χ. μέγιστο, ελάχιστο εύρος) και αξιολογούν την καταλληλότητα και τους περιορισμούς της χρήσης των πιο πάνω μέτρων.ΣΠ4.1.
- Αναπαριστούν το δειγματικό χώρο πειραμάτων με πολλαπλούς τρόπους συμπεριλαμβανομένων δενδροδιαγραμμάτων.ΣΠ4.4.
- Υπολογίζουν τη θεωρητική πιθανότητα ενός ενδεχομένου, τη χρησιμοποιούν στην πρόβλεψη αποτελεσμάτων σε πειράματα τύχης και κατανοούν τη διαφορά μεταξύ ανεξάρτητων και εξαρτημένων ενδεχομένων.ΣΠ4.5.
- Περιγράφουν στατιστικά δεδομένα (για διακριτές μη ομαδοποιημένες μεταβλητές), υπολογίζοντας μέτρα θέσης και διασποράς (μέση τιμή, διάμεσος, επικρατούσα τιμή, εύρος, τυπική απόκλιση) και συζητούν για την καταλληλότητα χρήσης του κάθε μέτρου (με ή και χωρίς τη χρήση λογισμικού).ΣΠ5.4.
- Συγκρίνουν χαρακτηριστικά δύο ή περισσότερων πληθυσμών με βάση τα

Τι θα μάθουμε:

- Να περιγράψουμε στατιστικά δεδομένα υπολογίζοντας μέτρα θέσης (μέση τιμή, διάμεσος, επικρατούσα τιμή).
- Να εξετάζουμε πώς μεταβάλλονται τα μέτρα θέσης με την προσθήκη ή αφαίρεση τιμών.
- Να συγκρίνουμε χαρακτηριστικά δύο ή περισσότερων πληθυσμών με βάση τα μέτρα θέσης.
- Να αναπαριστούμε τον δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης και να βρίσκουμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος αυτού.
- Να αναπαριστούμε με δενδροδιάγραμμα τον δειγματικό χώρο ενός πειράματος που εκτελείται σε δύο ή περισσότερες φάσεις.
- Να υπολογίζουμε τη πιθανότητα ενός ενδεχομένου.



μέτρα θέσης και διασποράς δεδομένων.ΣΠ5.5.

- Κατανοούν μέσα από πραγματικές καταστάσεις και χρησιμοποιούν τις έννοιες πείραμα τύχης, ενδεχόμενο, δειγματικός χώρος.ΣΠ5.6.
- Υπολογίζουν την πιθανότητα απλού ενδεχομένου (κλασσικός ορισμός πιθανότητας, Laplace) δειγματικού χώρου ισοπίθανων στοιχειωδών ενδεχομένων ενός πειράματος τύχης.ΣΠ5.7.
- Διακρίνουν τα ενδεχόμενα σε τυχαία, απλά, βέβαια, αδύνατα.ΣΠ5.8.
- Κατανοούν και εφαρμόζουν την αρχή της απαρίθμησης (πολλαπλασιαστική αρχή) σε πειράματα τύχης.ΣΠ6.10.

Περιεχόμενα ενότητας:

- **Μέτρα Θέσης**
- **Στατιστική με Χρήση Λογιστικού Φύλλου στον Υπολογιστή**
- **Πείραμα Τύχης-Αρχή της Απαρίθμησης**

Εισηγήσεις:

Βασικός στόχος της ενότητας είναι η περιγραφή στατιστικών δεδομένων με χρήση μέτρων θέσης. Οι μαθητές υπολογίζουν και ερμηνεύουν τα βασικά μέτρα θέσης (μέση τιμή, διάμεσος και επικρατούσα τιμή), ώστε να συγκρίνουν δύο ή και περισσότερους πληθυσμούς. Επίσης, οι μαθητές θα πρέπει να εξοικειωθούν με την εύρεση του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης που εκτελείται σε δύο ή περισσότερες φάσεις, αναπαριστώντας τον με δενδροδιάγραμμα. Τέλος, οι μαθητές υπολογίζουν πιθανότητες ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου.



Η ενότητα αυτή μπορεί να οργανωθεί ως εξής:

➤ **Μέτρα Θέσης**

- Στην εξερεύνηση οι μαθητές θα προβληματιστούν για την ανάγκη περιγραφής ενός συνόλου με τιμές, αντικαθιστώντας τις μόνο με μία αντιπροσωπευτική τιμή για όλο το δείγμα.
- Στη διερεύνηση οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι σε ένα σύνολο τιμών ενός δείγματος υπάρχουν τιμές που είναι χαρακτηριστικές και μπορούν να το περιγράψουν. Είναι σημαντικό να διαπιστώσουν στη συνέχεια ότι η προσθαφαίρεση κάποιων τιμών στο δείγμα ενδέχεται να επηρεάσει ή όχι κάποιες από τις προηγούμενες χαρακτηριστικές τιμές.
- Στις δραστηριότητες 1-4 και 7 οι μαθητές υπολογίζουν τα τρία βασικά μέτρα θέσης.

Στις δραστηριότητες 5, 6 και 9 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα με μέτρα θέσης.

Στη δραστηριότητα 8 οι μαθητές υπολογίζουν μέτρα θέσης, όταν προσθαφαιρεθούν τιμές από το δείγμα.

Στη δραστηριότητα 10 οι μαθητές υπολογίζουν μέτρα θέσης από ένα ραβδόγραμμα.

Στη δραστηριότητα 11 οι μαθητές αναφέρουν πιθανά δείγματα που να έχουν μέτρα θέσης συγκεκριμένες τιμές.

➤ **Στατιστική με Χρήση Λογιστικού Φύλλου στον Υπολογιστή**

- Στην υποενότητα αυτή δίνονται οδηγίες στους μαθητές για τη δημιουργία διαγραμμάτων και για την καταχώρηση δεδομένων σε λογιστικό φύλλο, για τον υπολογισμό στατιστικών περιγραφικών μέτρων.
- Στις ομαδικές εργασίες 1 και 2 οι μαθητές επεξεργάζονται δεδομένα ερευνών, κατασκευάζοντας στον υπολογιστή κατάλληλα διαγράμματα ή υπολογίζοντας μέτρα θέσης. Ακολούθως, σχολιάζουν τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επεξεργασία των δεδομένων και προβαίνουν σε εισηγήσεις.



➤ **Πείραμα Τύχης-Αρχή της Απαρίθμησης**

- Στη διερεύνηση οι μαθητές βλέπουν την ανάγκη να καταγράψουν όλα τα πιθανά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, για να υπολογίσουν τη πιθανότητα ενός ενδεχομένου.
- Στη δραστηριότητα 1 οι μαθητές χρησιμοποιούν την αρχή της απαρίθμησης, για να υπολογίσουν όλους τους δυνατούς τρόπους σύνθεσης μίας επιτροπής.

Στις δραστηριότητες 2-4 οι μαθητές καταγράφουν τους δειγματικούς χώρους των αντίστοιχων πειραμάτων τύχης και υπολογίζουν πιθανότητες ενδεχομένων.

Στις δραστηριότητες 5-9 οι μαθητές υπολογίζουν πιθανότητες ενδεχομένων, των οποίων ο δειγματικός τους χώρος προέρχεται από πειράματα που εκτελούνται σε δύο φάσεις.

➤ **Δραστηριότητες Ενότητας**

Στις δραστηριότητες 1 και 2 οι μαθητές μελετούν πίνακες και υπολογίζουν μέτρα θέσης.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές υπολογίζουν μέτρα θέσης και ποσοστά, μελετώντας ένα ραβδόγραμμα.

Στις δραστηριότητες 4-6 οι μαθητές χρησιμοποιούν την αρχή της απαρίθμησης, για τον υπολογισμό του πληθάριθμου δειγματικών χώρων.

Στις δραστηριότητες 7-9 και 15 οι μαθητές καταγράφουν τον αντίστοιχο δειγματικό χώρο πειραμάτων που εκτελούνται σε δύο φάσεις και υπολογίζουν πιθανότητες ενδεχομένων.

Στη δραστηριότητα 10 οι μαθητές υπολογίζουν τη μέση τιμή από ένα πίνακα συχνοτήτων.

Στις δραστηριότητες 11-14 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα με μέτρα θέσης.



➤ **Δραστηριότητες Εμπλουτισμού**

Στις δραστηριότητες 1 και 6 οι μαθητές εξηγούν πώς μεταβάλλονται τα μέτρα θέσης, αν αλλάξουν κάποιες τιμές στο σύνολο των δεδομένων ενός πειράματος τύχης.

Στη δραστηριότητα 2 οι μαθητές παρουσιάζουν και συγκρίνουν δύο δείγματα, αναφέροντας τα κατάλληλα διαγράμματα και μέτρα θέσης.

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές συλλέγουν δεδομένα για ένα θέμα που ενδιαφέρει τους ίδιους. Στη συνέχεια, αποφασίζουν τον κατάλληλο τρόπο παρουσίασής τους, ώστε να μπορούν να εξάγουν συμπεράσματα (ομαδική εργασία).

Στις δραστηριότητες 4 και 5 οι μαθητές επιλύουν προβλήματα πιθανοτήτων, καταγράφοντας τους αντίστοιχους δειγματικούς χώρους και υπολογίζοντας πιθανότητες ενδεχομένων.

Σημείωση:

Η ενότητα αυτή μπορεί να αξιολογηθεί και με γραπτό τελικό διαγώνισμα.

