
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΝΟΤΗΤΑ 1
Μαθηματική Λογική
Μέθοδοι Απόδειξης

Εισαγωγή στη Μαθηματική Λογική – Μέθοδοι απόδειξης

- **Μαθηματική Λογική**
  - Λογική Πρόταση-Προτασιακός Τύπος (1 περίοδος)
  - Ποσοδείκτες (1 περίοδος)
  - Πράξεις μεταξύ Λογικών Προτάσεων (2 περίοδοι)

- **Μέθοδοι απόδειξης**
  - Ευθεία Απόδειξη (1 περίοδος)
  - Μέθοδος της εις “ Άτοπον Απαγωγής” (1 περίοδος)
  - Μέθοδος της Τέλειας Επαγωγής (2 περίοδοι)

Λογική Πρόταση

- Η πρόταση p_1: «**Ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο**» είναι μια απλή (λογική) πρόταση.
- Η πρόταση p_2: «**Ο αριθμός 3 είναι άρτιος και περιττός**» είναι μια σύνθετη πρόταση.
- Η πρόταση p_3: «**Αν ο αριθμός $\mathbf{x^2}$ είναι άρτιος αριθμός, τότε και ο $\boldsymbol{x}$ είναι άρτιος**» είναι σύνθετη πρόταση.
- Η πρόταση p_4: «**Ο αριθμός $\boldsymbol{\alpha}$ είναι ρητός ή άρρητος**» είναι σύνθετη πρόταση.

Προτασιακός τύπος

- Η έκφραση $p(x)$: $''$ *ο αριθμός x είναι πολλαπλάσιο του 5* $''$, $x \in \mathbb{N}$ είναι **προτασιακός τύπος** μιας μεταβλητής και με σύνολο αναφοράς τους φυσικούς αριθμούς.

- Η έκφραση $p(x, y)$: $''x + y{=}5''$, με $x, y \epsilon \mathbb{R}$ είναι **προτασιακός τύπος** δύο μεταβλητών.

ΠΟΣΟΔΕΙΚΤΕΣ

Δ Ι Ε Ρ Ε Υ Ν Η Σ Η

Ένα περίεργο σημειωματάριο είχε γραμμένες εκατό προτάσεις.

Οι προτάσεις έλεγαν:

«Υπάρχει **μια ακριβώς** ψευδής πρόταση σε τούτο το σημειωματάριο»

«Υπάρχουν **δύο ακριβώς** ψευδείς προτάσεις σε τούτο το σημειωματάριο»

.

«Υπάρχουν **εκατό ακριβώς** ψευδείς προτάσεις σε τούτο το σημειωματάριο»

Ποια από αυτές τις προτάσεις είναι αληθής;

(Περιοδικό Quantum)

ΠΟΣΟΔΕΙΚΤΕΣ

- Ο ποσοδείκτης « υπάρχει (τουλάχιστον) ένα » ή « υπάρχουν μερικά» ονομάζεται **υπαρξιακός ποσοδείκτης** και συμβολίζεται με $\exists$
- Ο ποσοδείκτης « για κάθε » ή « για όλα » ονομάζεται **καθολικός ποσοδείκτης** και συμβολίζεται με $\forall$

❖ Το τριώνυμο $\varphi(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 - 4\chi + 3$ είναι αρνητικό στο διάστημα $(1,3) \subset \mathbb{R}$, και έτσι μπορούμε να γράψουμε:

$\exists\, x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4x + 3 < 0$ ή $\forall\, x \in (1,3),\ x^2 - 4x + 3 < 0$

❖ Το τριώνυμο $\varphi(x) = x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα αρνητική και $\alpha = 1 > 0$, άρα είναι πάντοτε θετικό και έτσι μπορούμε να γράψουμε :

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΛΟΓΙΚΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

Δ Ι Ε Ρ Ε Υ Ν Η Σ Η

Πλειοψηφία

Εκατό άνθρωποι – Χημικοί και Αλχημιστές – συμμετείχαν σε ένα συνέδριο. Τους τέθηκε το εξής ερώτημα : Ποια ομάδα είναι πολυπληθέστερη σε αυτή τη συνάντηση (χωρίς να συμπεριλαμβάνεται ο εαυτό σας), οι Χημικοί ή οι Αλχημιστές; Οι πρώτοι πενήντα απάντησαν ότι περισσότεροι ήταν οι Αλχημιστές. Γνωρίζουμε ότι οι Αλχημιστές λένε πάντοτε ψέματα ενώ οι Χημικοί λένε πάντοτε την αλήθεια.

Πόσοι Χημικοί και πόσοι Αλχημιστές συμμετείχαν στο συνέδριο;

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΛΟΓΙΚΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

		Σύζευξη	*Διάζευξη*	*Αποκλειστική Διάζευξη*	*Συνεπαγωγή*	*Ισοδυναμία*	*Άρνηση*	
p	q	$p \wedge q$	p∨q	$p \veebar q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$
α	α	α	α	ψ	α	α	ψ	ψ
α	ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	α	α	α	ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α	α	α	α

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

- ΕΥΘΕΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ
- ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΙΣ ΑΤΟΠΟΝ ΑΠΑΓΩΓΗΣ
- ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

ΕΥΘΕΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί α, β είναι πολλαπλάσια του 3, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha^2 + \beta^2$ διαιρείται με το 9.

Απόδειξη:

Οι αριθμοί α, β είναι πολλαπλάσια του 3, άρα υπάρχουν αριθμοί $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$ ώστε: $\alpha = 3\kappa \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \beta = 3\lambda$ Υπόθεση-δεδομένο

Επομένως θα έχουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (3\kappa)^2 + (3\lambda)^2$$ προσθέτουμε κατά μέλη

$$= 9\kappa^2 + 9\lambda^2$$ ιδιότητα δυνάμεων

$$= 9\underbrace{(\kappa^2 + \lambda^2)}_{\rho}$$ κοινός παράγοντας- επιμεριστική ιδιότητα

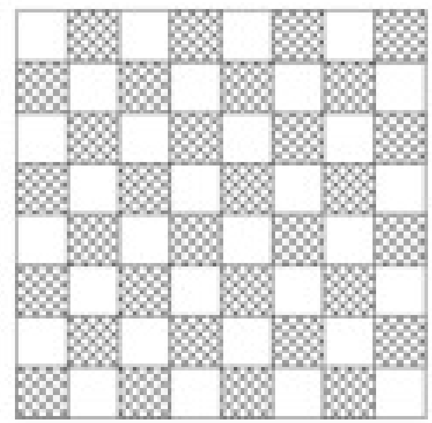
$$= 9\rho, \ \rho \in \mathbb{N}$$

Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός 9 διαιρεί τον $\alpha^2 + \beta^2$, αφού είναι πολλαπλάσιο του 9. (Συμπέρασμα)

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΙΣ ΑΤΟΠΟΝ ΑΠΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

Ένα ντόμινο είναι ένα ορθογώνιο της μορφής το οποίο καλύπτει δύο διαδοχικά κελιά μιας 8×8 σκακιέρας όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν από την 8×8 σκακιέρα αφαιρέσουμε το πάνω αριστερά και το κάτω δεξιά κελί, να διερευνήσετε αν είναι δυνατό να καλύψουμε τα υπόλοιπα 62 κελιά της σκακιέρας που απομένουν με 31 ντόμινο.



ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

Αν $p(\nu)$ μια πρόταση με σύνολο αναφοράς το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών και οι ακόλουθες δύο συνθήκες ικανοποιούνται

- $p(1)$ είναι αληθής, δηλαδή η πρόταση ισχύει για $\nu = 1$ και
- αν η $p(\kappa)$ είναι αληθής, τότε και η $p(\kappa+1)$ είναι αληθής $\forall \kappa \in \mathbb{N}$,

  δηλαδή η αλήθεια της $p(\kappa)$ συνεπάγεται την αλήθεια της $p(\kappa+1), \forall \kappa \in \mathbb{N}$,

τότε η πρόταση $p(\nu)$ **είναι αληθής για όλους τους θετικούς ακέραιους** ν.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

- Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $\nu \geq 2$ ισχύει:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + \nu(\nu - 1) = \frac{\nu(\nu^2 - 1)}{3}$$

Σας ευχαριστώ