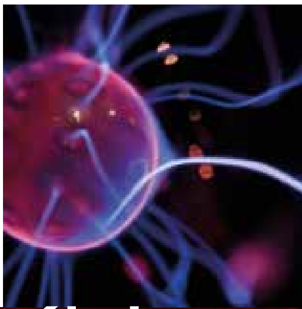
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ | ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ



ΦΥΣΙΚΗ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΦΥΣΙΚΗ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Συγγραφή: **Γεώργιος Αρχοντής**, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Φώτιος Πτωχός, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Νικόλαος Τούμπας, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Ζαχαρίας Ζαχαρία, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Μιχάλης Ιωάννου, Φυσικός, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
Ιωάννης Καρμιώτης, Φυσικός, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
Σάββας Πολυδωρίδης, Φυσικός, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
Δημήτριος Φιλίππου, Φυσικός, Βοηθός Διευθυντής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
Παναγιώτης Ελευθερίου, Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης Φυσικής
Γιαννάκης Χατζηκωστής, Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης Φυσικής

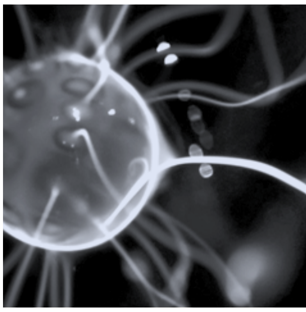
Επιμέλεια σχημάτων: **Αντώνης Τσάκωνας**, Φυσικός, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Σχεδιασμός έκδοσης: Έλενα Ηλιάδου, Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων
Επιμέλεια έκδοσης: Μαρίνα Άστρα-Ιωάννου, Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων
Συντονισμός έκδοσης: Χρίστος Παρπούνας, Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων

Α΄ Έκδοση 2017
Ανατύπωση 2018 (Με μικροδιορθώσεις)
Εκτύπωση: Printco Manufacturing & Trading Ltd

ISBN: 978-9963-54-123-2

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

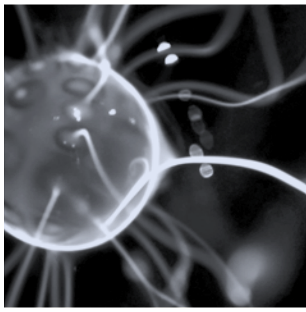
Η διασφάλιση της ποιότητας ζωής στον αιώνα που διανύουμε, βασίζεται ολοένα και περισσότερο στην επιστημονική και τεχνολογική πρόοδο. Η απόκτηση εκπαίδευσης και δεξιοτήτων στην επιστήμη είναι απαραίτητη για την επίτευξη βιώσιμης ανάπτυξης και εδραίωσης της πραγματικής δημοκρατίας.

Με ιδιαίτερη χαρά προλογίζω την έκδοση του βιβλίου «Φυσική Β΄ Λυκείου». Το βιβλίο αυτό γράφτηκε με τη σκέψη ότι εσείς, οι σημερινοί μαθητές και οι αυριανοί πολίτες, θα πρέπει να δομήσετε ένα συνεκτικό σώμα γνώσεων, να αναπτύξετε τις αναγκαίες δεξιότητες και ικανότητες για συμμετοχή σε μια κοινωνία ενεργών και κριτικά σκεπτόμενων ανθρώπων και να διαμορφώσετε θετικές στάσεις και συμπεριφορές έναντι της επιστήμης. Γι' αυτό τον λόγο σε αυτό το βιβλίο τα θέματα της Φυσικής συνδέονται με την καθημερινή ζωή, τη φύση και την εξέλιξη της επιστήμης.

Επιθυμώ να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους πανεπιστημιακούς Γεώργιο Αρχοντή, Ζαχαρία Ζαχαρία, Φώτιο Πτωχό, Νικόλαο Τούμπα, στους εκπαιδευτικούς Μιχάλη Ιωάννου, Ιωάννη Καρμιώτη, Σάββα Πολυδωρίδη και Δημήτριο Φιλίππου, και στους Επιθεωρητές Φυσικής Παναγιώτη Ελευθερίου και Γιαννάκη Χατζηκωστή, που ασχολήθηκαν με τη συγγραφή του βιβλίου.

Τέλος, ευχαριστώ την Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων που είχε την ευθύνη για την έκδοση του βιβλίου αυτού.

Δρ Κυπριανός Λούης
Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης



ΛΙΓΑ ΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΝΕΟ ΒΙΒΛΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ ΤΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Αγαπητοί και αγαπητές μαθήτριες και μαθητές,

Σας καλωσορίζουμε στη νέα σχολική χρονιά, και σας ευχόμαστε, με αφετηρία αυτό το βιβλίο, να κάνετε ένα συναρπαστικό ταξίδι στον θαυμαστό κόσμο της Φυσικής.

Από τα βάθη της αρχαιότητας, οι άνθρωποι προσπαθούν να ερμηνεύσουν τα φαινόμενα του φυσικού κόσμου. Τον 6ο αιώνα π.Χ. οι αρχαίοι Έλληνες φυσικοί φιλόσοφοι της Ιωνίας βασίσθηκαν σε λογικά επιχειρήματα και διατύπωσαν τις πρώτες θεωρίες για την αρχή των όντων. Η σύγχρονη επιστημονική μεθοδολογία θεμελιώθηκε τον 17ο αιώνα από τον Γαλιλαίο (Galileo Galilei) και θέτει ως προϋπόθεση τη διεξαγωγή και ερμηνεία κατάλληλα σχεδιασμένων πειραμάτων. Σε συνδυασμό με την πειραματική μεθοδολογία, ο Γαλιλαίος τόνιζε ότι για την ερμηνεία των νόμων της Φύσης είναι απαραίτητη η χρήση των μαθηματικών (“το βιβλίο της Φύσης είναι γραμμένο με μαθηματικούς χαρακτήρες”). Τον ίδιο αιώνα, ο Ισαάκ Νεύτωνας διατύπωσε τους νόμους της κίνησης και τον νόμο της παγκόσμιας έλξης, στο φημισμένο έργο του *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

Οι σύγχρονες Φυσικές θεωρίες και πειράματα μελετούν και ερμηνεύουν σε μεγάλο βαθμό φαινόμενα που παρατηρούνται τόσο σε υποατομική, όσο και σε αστρονομική κλίμακα, από τη συμπεριφορά των στοιχειωδών σωματιδίων μέχρι τη δημιουργία αστέρων και την εξέλιξη του Σύμπαντος.

Σε συνδυασμό με την κατανόηση της συμπεριφοράς του Φυσικού κόσμου, η Φυσική έχει αναρίθμητες **πρακτικές εφαρμογές**. Η λειτουργία των συσκευών που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή ζωή για την παραγωγή φωτός, την παραγωγή και χρήση ηλεκτρικής ενέργειας, την απορρόφηση ηλιακής ενέργειας, την κίνηση, την επικοινωνία και την ψυχαγωγία, βασίζεται σε φυσικές αρχές.

Στα μέσα του 20ου αιώνα, ο φημισμένος Αυστριακός Φυσικός Erwin Schroedinger, διατύπωσε στο βιβλίο του “*What is Life*” την άποψη ότι η Φυσική μπορεί να συνεισφέρει και στην κατανόηση των φαινομένων που παρατηρούνται σε ζωντανούς οργανισμούς (**έμβια** ύλη). Η

αλματώδης ανάπτυξη όλων των Φυσικών Επιστημών, ιδιαίτερα από τις αρχές του εικοστού αιώνα, καθιστά δυνατή τη μελέτη και την ερμηνεία της συμπεριφοράς της έμβιας ύλης με μία **διεπιστημονική προσέγγιση**, στην οποία συνδυάζονται μέθοδοι από πολλές επιστημονικές περιοχές (Φυσική, Χημεία, Βιολογία, κλάδοι Μηχανικής). Πειραματικές συσκευές που βασίζονται σε φυσικές αρχές, όπως το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο, το μικροσκόπιο φθορισμού, το μικροσκόπιο ατομικής δύναμης και το σύγχροτρο προσφέρουν λεπτομερείς εικόνες της δομής του κυττάρου και των βιολογικών μορίων. Οι εικόνες αυτές, μαζί με θεωρητικά φυσικά μοντέλα για τη δομή και τις δυνάμεις μεταξύ μορίων, χρησιμοποιούνται στο στοχευμένο σχεδιασμό φαρμάκων. Ταυτόχρονα, η Φυσική συνεισφέρει ουσιαστικά σε πολλές διαγνωστικές και θεραπευτικές τεχνικές της σύγχρονης Ιατρικής, όπως η χρήση υπερήχων, ο πυρηνικός μαγνητικός συντονισμός (MRI), η τομογραφία ποζιτρονίου-ηλεκτρονίου (PET scan), η ακτινοβόληση καρκινικών όγκων.

Οι αλματώδεις εξελίξεις που περιγράψαμε υποδεικνύουν ότι η Φυσική είναι ένας εξαιρετικά υποσχόμενος τομέας απασχόλησης για τους νέους ανθρώπους, που θα συνεισφέρουν στην πρόοδο της ανθρωπότητας, παίρνοντας τη σκυτάλη από τους παλαιότερους.

Το βιβλίο που έχετε στα χέρια σας αποτελεί ένα περιεκτικό και πλήρες κείμενο αναφοράς, που συμβαδίζει πιστά με το Αναλυτικό Πρόγραμμα.

Κάθε κεφάλαιο περιλαμβάνει:

- Αρχική σύνοψη των διδακτικών στόχων,
- Ανάπτυξη της αντίστοιχης θεωρίας με συνδυασμό αναπαραστάσεων (κείμενο και εικόνες, διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις, πίνακες).
- Ερωτήσεις ελέγχου κατανόησης εννοιών
- Πολυάριθμα λυμένα παραδείγματα
- Τελικές ερωτήσεις ανακεφαλαίωσης και κατανόησης
- Άλυτες ασκήσεις.

Η **σύνοψη των διδακτικών στόχων** συνιστά έναν οδηγό για το τι πρέπει να γνωρίζετε με την ολοκλήρωση της μελέτης του κεφαλαίου. Οι συνοδευτικές αναπαραστάσεις (εικόνες, διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις, πίνακες) επεξηγούν πτυχές της θεωρίας και πρέπει να μελετώνται σε συνδυασμό με το γραπτό κείμενο.

Η **μελέτη των λυμένων παραδειγμάτων** είναι **απαραίτητη** προϋπόθεση για την κατανόηση της θεωρίας και πρέπει να προηγείται της επίλυσης των άλυτων ασκήσεων στο τέλος του βιβλίου. Ο στόχος των παραδειγμάτων είναι διπλός: **(1)** παρουσιάζουν τη μεθοδολογία επί-

λυσης μίας κατηγορίας προβλημάτων. **(2)** αναδεικνύουν λεπτομερώς τον τρόπο γραφής και τον χειρισμό μαθηματικών συμβόλων, εξισώσεων και μονάδων μέτρησης, που υιοθετείται στη διεθνή πρακτική.

Οι **ερωτήσεις ελέγχου κατανόησης** αναφέρονται σε επιλεγμένα σημεία του κειμένου, και αποσκοπούν στον έλεγχο της κατανόησης βασικών εννοιών. Εάν διαπιστώνετε έλλειψη κατανόησης, πρέπει να αφιερώνετε επιπλέον χρόνο πριν προχωρήσετε στα επόμενα σημεία του κειμένου.

Οι **τελικές ερωτήσεις κατανόησης** ελέγχουν την κατανόηση του συνολικού περιεχομένου του κεφαλαίου, και βοηθούν στην ανακεφαλαίωση. Σε περίπτωση που εντοπίζετε δυσκολίες, πρέπει να μελετήσετε ξανά το σχετικό περιεχόμενο και τα συνοδευτικά παραδείγματα.

Η **επίλυση προβλημάτων** είναι **απαραίτητο και αναντικατάστατο στοιχείο** της εκπαίδευσης στη Φυσική. Τόσο η Πειραματική, όσο και η Θεωρητική Φυσική έχουν σημαντική ποσοτική συνιστώσα. Μαζί με την ανάπτυξη ικανοτήτων διερεύνησης και διατύπωσης συμπερασμάτων, είναι απαραίτητη και η σταδιακή ωρίμανση σας στην ποσοτική επεξεργασία δεδομένων. Γι΄ αυτό το λόγο έχουμε συμπεριλάβει στο βιβλίο πολυάριθμα λυμένα παραδείγματα και ασκήσεις κλιμακούμενης δυσκολίας. Επίσης, είναι σημαντικό να γνωρίζετε ότι φροντίσαμε ώστε το κείμενο να βασίζεται στις ήδη αποκτηθείσες γνώσεις Μαθηματικών σας, χωρίς να τις υπερβαίνει.

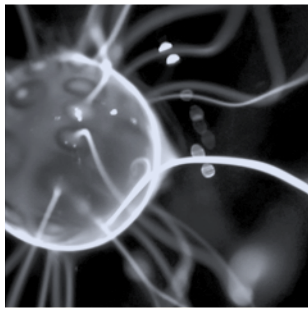
Για να επιτύχετε το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα, σας εισηγούμαστε όπως μελετάτε πρώτα το επιστημονικό περιεχόμενο μίας ενότητας, τα αντίστοιχα λυμένα παραδείγματα και τις ερωτήσεις ελέγχου κατανόησης εννοιών, πριν προχωρήσετε στο επόμενο μέρος. Στο τέλος, ασχοληθείτε με την επίλυση των άλυτων ασκήσεων. Οι άλυτες ασκήσεις βασίζονται στη θεωρία και τα λυμένα παραδείγματα. **Μην** προσπαθείτε να λύσετε τις ασκήσεις πριν συμβουλευτείτε το κείμενο, γιατί θα δυσκολευτείτε πολύ περισσότερο.

Το βιβλίο αποτελεί οδηγό μελέτης, αλλά το βασικό και αναντικατάστατο σημείο αναφοράς είναι ο/η εκπαιδευτικός σας. Πρέπει να δίνετε εξαιρετική προσοχή στις διαλέξεις, να συμμετέχετε ενεργά, και να συμβουλεύεστε εγκαίρως τον/την εκπαιδευτικό σας για σημεία στα οποία εντοπίζετε έλλειψη κατανόησης.

Ευχόμαστε να βρείτε το βιβλίο χρήσιμο, και σας ευχόμαστε **Καλή Νέα Σχολική Χρονιά**.

Η Συγγραφική Ομάδα


USA
NASA



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ: ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στο Κεφάλαιο 1:

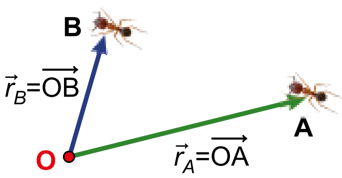
- **Εισάγουμε** τις έννοιες της θέσης, μετατόπισης, ταχύτητας και επιτάχυνσης για κινήσεις στο επίπεδο.
- **Αποδεικνύουμε** ότι σε μία γενική καμπυλόγραμμη κίνηση, το διάνυσμα της ταχύτητας είναι εφαπτομενικό στην τροχιά.
- **Αποδεικνύουμε** ότι το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό όταν τα διανύσματα της ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι κάθετα μεταξύ τους.
- **Εισάγουμε** την Αρχή της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων.
- **Αποδεικνύουμε** την Αρχή της Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για κινήσεις στο επίπεδο.

Στην Α΄ Λυκείου περιγράψαμε την κίνηση ενός σώματος σε ευθεία γραμμή, χρησιμοποιώντας τα φυσικά μεγέθη της θέσης, της μετατόπισης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Στο Κεφάλαιο 1 γενικεύουμε τους ορισμούς αυτών των μεγεθών για κίνηση **στο επίπεδο.** Παραδείγματα τέτοιων κινήσεων είναι οι βολές και η κυκλική κίνηση, που θα μελετήσουμε σε επόμενα κεφάλαια.

1.1. Θέση ενός Σώματος στο Επίπεδο

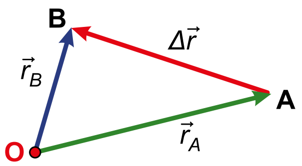
Εικόνα 1-1
(α) Οι θέσεις **Α** και **Β** περιγράφονται ως προς το σημείο αναφοράς **Ο** με τα διανύσματα θέσης $\vec{r}_A$ και $\vec{r}_B$. **(β)** Η μετατόπιση από το **Α** στο **Β** αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$.

(α)



(β)

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \Rightarrow \vec{r}_A + \Delta\vec{r} = \vec{r}_B$



Για να περιγράψουμε τη θέση ενός σώματος στο επίπεδο, επιλέγουμε αυθαίρετα ένα **σταθερό σημείο Ο** του επιπέδου ως **σημείο αναφοράς**. Έστω ότι το μυρμήγκι της Εικόνας **1-1(α)** βρίσκεται στο σημείο **Α** του επιπέδου. Η **θέση** του μυρμηγκιού περιγράφεται από το διάνυσμα $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$, με αρχή το σημείο αναφοράς **Ο** και τέλος το σημείο **Α**. Το **διάνυσμα θέσης** $\vec{r}_A$ καθορίζει πλήρως **τον προσανατολισμό** του σημείου **Α** ως προς το σημείο **Ο** και την μεταξύ τους απόσταση.

1.2. Μετατόπιση ενός Σώματος στο Επίπεδο

Εάν το μυρμήγκι της **Εικόνας 1-1(α)** μετακινηθεί στο σημείο **Β**, η νέα του θέση περιγράφεται από το διάνυσμα $\vec{r}_B = \overrightarrow{OB}$. Ως **μετατόπιση** $\Delta\vec{r}$ του μυρμηγκιού ορίζεται η μεταβολή της θέσης του:

Μετατόπιση = Τελική Θέση − Αρχική Θέση:

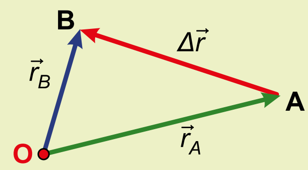
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

Από τον ορισμό της μετατόπισης προκύπτει:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \Rightarrow \vec{r}_B = \vec{r}_A + \Delta\vec{r}$$

Συνεπώς, **εάν προσθέσουμε τη μετατόπιση $\Delta\vec{r}$ στην αρχική θέση $\vec{r}_A$ παίρνουμε την τελική θέση $\vec{r}_B$.** Η παρατήρηση αυτή οδηγεί σε έναν άμεσο **γραφικό** τρόπο υπολογισμού της μετατόπισης $\Delta\vec{r}$ με τον κανόνα του **πολυγώνου**, η οποία απεικονίζεται στην **Εικόνα 1-1(β)**.

Το διάνυσμα της **μετατόπισης** $\Delta\vec{r}$ ξεκινά από την αιχμή του βέλους της **αρχικής** θέσης και καταλήγει στην αιχμή του βέλους της **τελικής** θέσης.



1.3. Η Έννοια του Συστήματος Αναφοράς

Στη μελέτη της κίνησης σε ευθεία γραμμή, αντιστοιχίσαμε κάθε θέση της ευθείας με μία αλγεβρική τιμή. Για να προσδιορίσουμε τις τιμές των θέσεων, χρησιμοποιήσαμε ένα σημείο αναφοράς και έναν άξονα, στον οποίο ορίσαμε τη θετική κατεύθυνση και την κλίμακα. Το σημείο αναφοράς και ο άξονας συνιστούν ένα **σύστημα αναφοράς**.

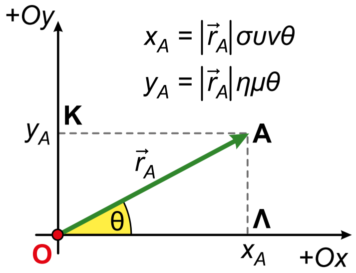
Στην περίπτωση της κίνησης στο επίπεδο, κάθε διάνυσμα θέσης συνδέεται με **δύο** αλγεβρικές τιμές, οι οποίες ονομάζονται **συνιστώσες** του διανύσματος θέσης. Οι τιμές αυτές προσδιορίζονται με ανάλυση του διανύσματος θέσης ως προς **δύο** βαθμονομημένους άξονες **Ox** και **Oy**, οι οποίοι επιλέγονται συνήθως κάθετοι μεταξύ τους (**Εικόνα 1-2**). Το σημείο αναφοράς κάθε άξονα είναι το σημείο τομής **O** των αξόνων.

Υπολογισμός των Συνιστωσών του Διανύσματος Θέσης ως προς Σύστημα Αναφοράς

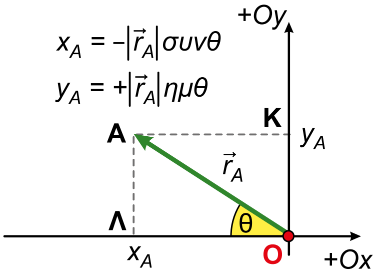
Στην **Εικόνα 1-2**, αναλύουμε το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_A$ του σημείου **A** σε συνιστώσες ως προς τους άξονες **Ox** και **Oy**. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία όπως για τα διανύσματα δύναμης: Από την αιχμή του βέλους $\vec{r}_A$ φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες **Ox** και **Oy**, και σχηματίζουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΟΛΑΚ. Το σημείο **Λ** αντιστοιχεί στην τιμή x_A του άξονα **Ox** και το σημείο **K** στην τιμή y_A του άξονα **Oy**. Οι συνιστώσες x_A και y_A του διανύσματος $\vec{r}_A$ είναι γνωστές και ως **συντεταγμένες** του σημείου **A** ως προς τους άξονες **Ox** και **Oy**.

Εικόνα 1-2
Ανάλυση της θέσης $\vec{r}_A$ σε συνιστώσες x_A και y_A ως προς το σύστημα αξόνων Ox και Oy. Οι συνιστώσες ονομάζονται επίσης **συντεταγμένες** του σημείου Α στο επίπεδο ως προς το σύστημα αξόνων Ox και Oy.

(α)



(β)



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΛΑ της **Εικόνας 1-2(α)**, προκύπτει:

$$x_A = +ΟΛ = +ΟΑσυνθ = +|\vec{r}_A|συνθ\,,$$

$$y_A = +ΑΛ = +ΟΑημθ = +|\vec{r}_A|ημθ$$

Στο παράδειγμα της **Εικόνας 1-2(β)**, προκύπτει:

$$x_A = -ΟΛ = -ΟΑσυνθ = -|\vec{r}_A|συνθ\,,$$

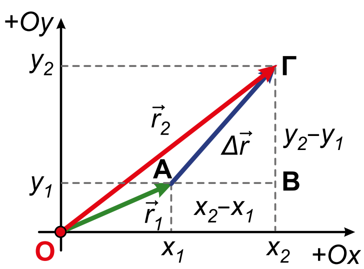
$$y_A = +ΑΛ = +ΟΑημθ = +|\vec{r}_A|ημθ$$

Το **μέτρο** $|\vec{r}_A|$ του διανύσματος θέσης $\vec{r}_A$ εκφράζει την απόσταση του σημείου **Α** από το σημείο αναφοράς **Ο**, και συνδέεται με τις συνιστώσες x_A και y_A με τη σχέση:

$$|\vec{r}_A| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

Υπολογισμός των Συνιστωσών του Διανύσματος Μετατόπισης ως προς Σύστημα Αναφοράς

Εικόνα 1-3
Οι συνιστώσες του διανύσματος μετατόπισης υπολογίζονται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων θέσης.



Στην **Εικόνα 1-3**, ένα σώμα μετατοπίζεται από το σημείο **Α** στο σημείο **Γ**. Το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_1$ του σημείου Α έχει συνιστώσες x_1 και y_1, και το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_2$ του Γ έχει συνιστώσες x_2 και y_2. Το διάνυσμα της μετατόπισης, $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, έχει συνιστώσες $\Delta x = x_2 - x_1$ και $\Delta y = y_2 - y_1$. Οι συνιστώσες αυτές εκφράζουν τις μετατοπίσεις του σώματος **κατά μήκος των αξόνων Ox** και **Oy**, αντίστοιχα.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ της **Εικόνας 1-3** προκύπτει ότι το μέτρο $|\Delta\vec{r}|$ της μετατόπισης συνδέεται με τις συνιστώσες Δx και Δy με τη σχέση:

Μέτρο της Μετατόπισης

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Το **μέτρο** $\left|\Delta\vec{r}\right|$ ισούται με την απόσταση ανάμεσα στην αρχική και στην τελική θέση του σώματος.

1.4. Ταχύτητα της Κίνησης σε Επίπεδο

Όπως και για την κίνηση σε ευθεία γραμμή, ο **ρυθμός μεταβολής της θέσης** ενός σώματος στο επίπεδο εκφράζεται από το φυσικό μέγεθος της **ταχύτητας**. Εάν το σώμα μετατοπίζεται κατά $\Delta\vec{r}$ σε χρονικό διάστημα Δt, η **μέση διανυσματική του ταχύτητα** ορίζεται ως:

Μέση Διανυσματική Ταχύτητα: $\vec{\upsilon}_\mu = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

Το διάνυσμα της μέσης διανυσματικής ταχύτητας ενός σώματος είναι *παράλληλο* με το διάνυσμα της μετατόπισης του σώματος στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt.

Εάν το χρονικό διάστημα, στο οποίο υπολογίζεται η μετατόπιση, είναι πολύ μικρό, προκύπτει η *στιγμιαία ταχύτητα* του σώματος:

Στιγμιαία Ταχύτητα τη χρονική στιγμή t:

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

όπου Δt πολύ μικρό χρονικό διάστημα γύρω από τη χρονική στιγμή t.

1.5. Ανάλυση της Ταχύτητας σε Συνιστώσες

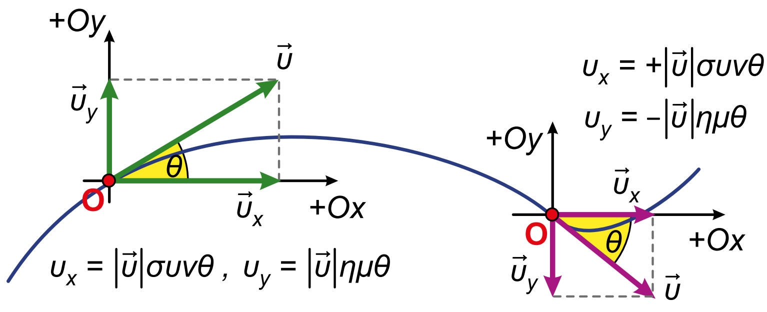
Γραφική Μέθοδος

Εάν γνωρίζουμε **το μέτρο** και **τη γωνία** του διανύσματος της ταχύτητας με μία διεύθυνση, επιλέγουμε τον έναν άξονα του συστήματος αναφοράς παράλληλα σε αυτή τη διεύθυνση. Ακολουθούμε την ίδια μέθοδο, που εφαρμόσαμε στην ανάλυση δυνάμεων. Η μέθοδος παρουσιάζεται γραφικά στην **Εικόνα 1-4(α)**.

Εικόνα 1-4

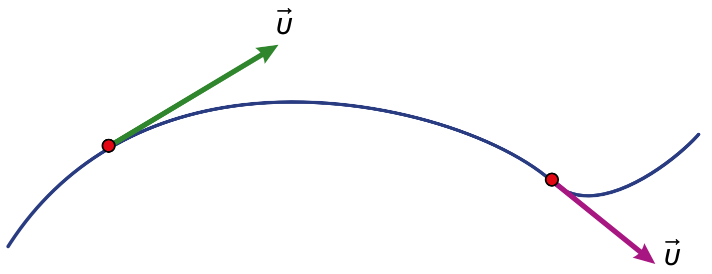
(α) Ανάλυση της ταχύτητας σε συνιστώσες ως προς σύστημα αξόνων, εάν είναι γνωστά το μέτρο και η γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με έναν άξονα.

(α)



(β) Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας ενός σώματος, που κινείται σε καμπυλόγραμμη τροχιά, είναι συνεχώς εφαπτομενικό στην τροχιά του σώματος.

(β)



Αλγεβρική Μέθοδος

Εκτός από τον πιο πάνω **γραφικό** τρόπο, μπορούμε να εκφράσουμε **αλγεβρικά** το διάνυσμα της ταχύτητας χρησιμοποιώντας τις συνιστώσες της μετατόπισης:

Μέση Διανυσματική Ταχύτητα:

$$\vec{\upsilon}_\mu = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} \upsilon_{\mu x} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\[2ex] \upsilon_{\mu y} = \dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta t} \end{cases}$$

Στιγμιαία Ταχύτητα:

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} \upsilon_x(t) = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\[2ex] \upsilon_y(t) = \dfrac{\Delta y}{\Delta t} \end{cases}$$

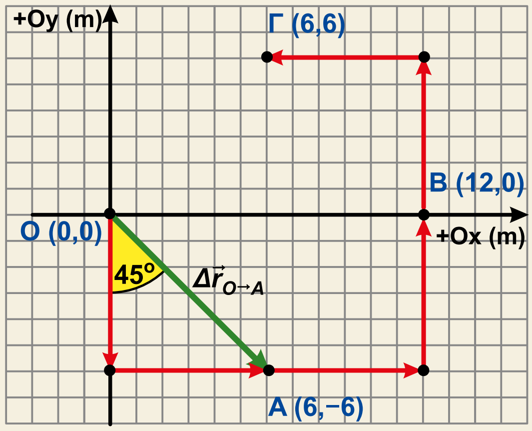
όπου Δt **πολύ μικρό** χρονικό διάστημα γύρω από τη χρονική στιγμή t.

Το **μέτρο της ταχύτητας** συνδέεται με τις συνιστώσες της με τη σχέση:

$$|\vec{\upsilon}|^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 \Rightarrow |\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$$

Παράδειγμα 1

Στο επόμενο σχήμα, ένα αυτοκινητάκι ακολουθεί την κόκκινη τροχιά και μετακινείται από το σημείο Ο στα σημεία Α, Β και Γ. Το χρονικό διάστημα της μετακίνησης μεταξύ διαδοχικών σημείων είναι $\Delta t = 5$ s. Θα υπολογίσουμε τη μέση διανυσματική ταχύτητα για τη μετατόπιση $\mathrm{O} \rightarrow \mathrm{A}$.



Από το σχήμα προκύπτει ότι το διάνυσμα της μετατόπισης έχει συνιστώσες:

$$\Delta x_{\mathrm{O}\rightarrow\mathrm{A}} = x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{O}} = +6\ \mathrm{m}$$
$$\Delta y_{\mathrm{O}\rightarrow\mathrm{A}} = y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{O}} = -6\ \mathrm{m}$$

Άρα, το μέτρο της μετατόπισης είναι

$$\left|\Delta\vec{r}_{\mathrm{O}\rightarrow\mathrm{A}}\right| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(6\ \mathrm{m})^2 + (-6\ \mathrm{m})^2} = 8{,}5\ \mathrm{m}$$

και το μέτρο της αντίστοιχης μέσης διανυσματικής ταχύτητας είναι

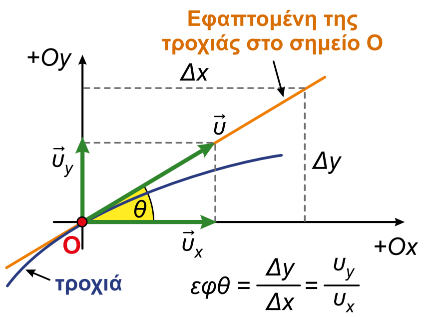
$$\left|\vec{\upsilon}_{\mu}\right| = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} = \frac{8{,}5}{5}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Το διάνυσμα της μέσης διανυσματικής ταχύτητας είναι παράλληλο με το $\Delta\vec{r}_{\mathrm{O}\rightarrow\mathrm{A}}$ και σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα Oy.

Εργαζόμενοι με παρόμοιο τρόπο, να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα για τις μετατοπίσεις $\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}$, $\mathrm{O}\rightarrow\mathrm{B}$, $\mathrm{B}\rightarrow\Gamma$ και $\mathrm{A}\rightarrow\Gamma$.

1.6. Το Διάνυσμα της Στιγμιαίας Ταχύτητας είναι Εφαπτομενικό στην Τροχιά

Ένα σώμα κινείται στο επίπεδο και η θέση του περιγράφεται από ένα σύστημα αξόνων **Ox** και **Oy**. Έστω ότι σε κάποια χρονική στιγμή το σώμα έχει στιγμιαία ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, με συνιστώσες υ_x και υ_y. Σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt γύρω από αυτή τη στιγμή, το σώμα μετατοπίζεται στον άξονα **Ox** κατά $\Delta x = \upsilon_x \Delta t$, και στον άξονα **Oy** κατά $\Delta y = \upsilon_y \Delta t$. Ο λόγος των συνιστωσών της ταχύτητας ισούται με τον λόγο των μετατοπίσεων:



$$\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{\upsilon_y \Delta t}{\upsilon_x \Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, ο λόγος υ_y/υ_x ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας θ, που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ με τον άξονα **Ox.** Ταυτόχρονα, ο λόγος $\Delta y/\Delta x$ είναι η κλίση της ευθείας, που εφάπτεται στην τροχιά στο ίδιο σημείο:

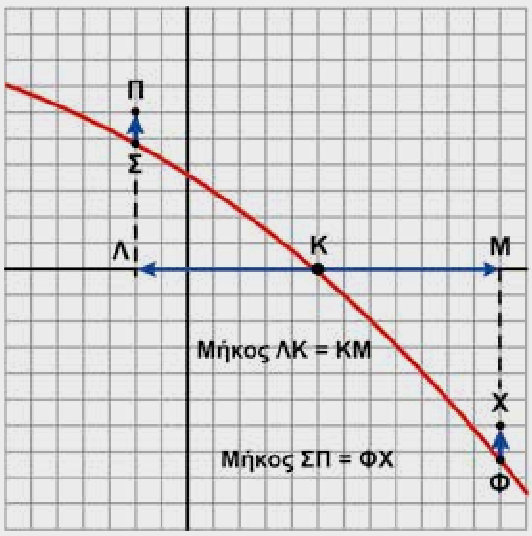
$$\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \varepsilon\varphi\theta$$

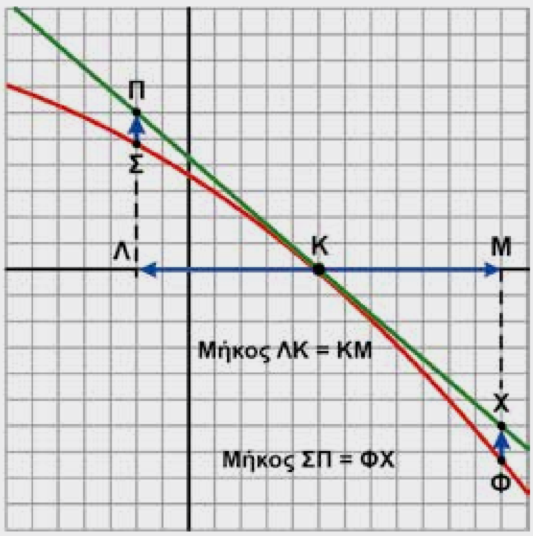
Άρα:

Το διάνυσμα της **στιγμιαίας ταχύτητας** $\vec{\upsilon}$ του σώματος, σε ένα σημείο της τροχιάς, είναι **παράλληλο με την εφαπτομένη ευθεία** της τροχιάς στο ίδιο σημείο.

Προτεινόμενη Δραστηριότητα

Στο επόμενο σχήμα εξηγούμε έναν απλό και **γενικό** τρόπο, με τον οποίο μπορούμε να σχεδιάσουμε την εφαπτομένη σε κάποιο σημείο μίας καμπύλης. Χρησιμοποιούμε αυτόν τον τρόπο για να χαράξουμε το διάνυσμα της ταχύτητας σε διάφορα σημεία της τροχιάς.





Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε την εφαπτομένη ευθεία στο **σημείο Κ** της **κόκκινης καμπύλης**. Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

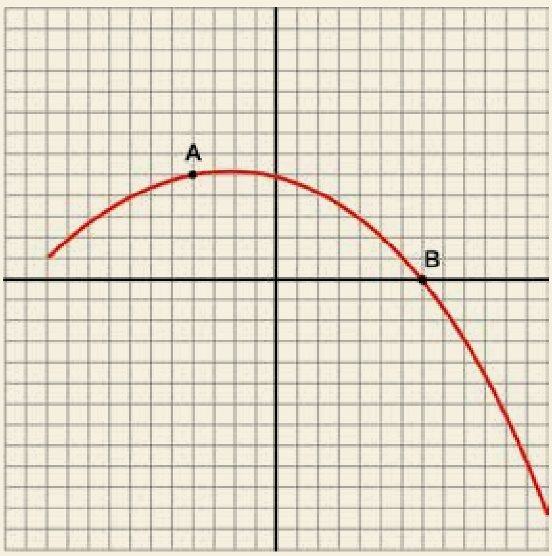
1. Από τις δύο πλευρές του σημείου **Κ** φέρουμε ίσα οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα **ΚΛ** και **ΚΜ** (με αυθαίρετο, αλλά μικρό μήκος).

2. Από το σημείο **Λ** φέρουμε μία κάθετη ευθεία στο τμήμα **ΛΚ**, η οποία τέμνει την κόκκινη καμπύλη στο σημείο **Σ**. Προεκτείνουμε το τμήμα **ΛΣ** πέρα από την καμπύλη, μέχρι κάποιο (αυθαίρετο) σημείο **Π**. Σημειώνουμε το **μήκος ΣΠ**.

3. Ομοίως, από το σημείο **Μ** σχεδιάζουμε μία κάθετη ευθεία στο τμήμα **ΚΜ**, η οποία τέμνει την κόκκινη καμπύλη στο σημείο **Φ**. Πάνω στο τμήμα **ΜΦ** επιλέγουμε ένα σημείο **Χ**, **έτσι ώστε το μήκος ΦΧ να ισούται με το μήκος ΣΠ (ΦΧ = ΣΠ).** Τα σημεία **Π** και **Χ** πρέπει να βρίσκονται από την ίδια πλευρά της κόκκινης καμπύλης.

4. Χαράσσουμε την ευθεία **ΠΚΧ**. **Η ευθεία αυτή είναι η ζητούμενη εφαπτομένη**.

Άσκηση
Ένα βλήμα κινείται κατά μήκος της τροχιάς του πιο κάτω σχήματος, με κατεύθυνση από το σημείο Α στο σημείο Β. Να σχεδιάσετε τη *διεύθυνση* του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας στα σημεία Α και Β της τροχιάς.



1.7. Επιτάχυνση της Κίνησης σε Επίπεδο

Όπως για την κίνηση σε ευθεία γραμμή, ορίζουμε ως (στιγμιαία) επιτάχυνση ενός σώματος, που κινείται σε επίπεδο, τον ρυθμό μεταβολής της στιγμιαίας ταχύτητας:

Στιγμιαία Επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t:

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$$

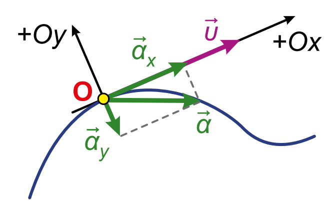
όπου Δt πολύ μικρό χρονικό διάστημα γύρω από τη χρονική στιγμή t.

Προσδιορίζουμε **γραφικά** το διάνυσμα της μεταβολής της στιγμιαίας ταχύτητας από τη διαφορά $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1$. Η επιτάχυνση είναι παράλληλη με τη μεταβολή $\Delta\vec{\upsilon}$, όταν το αντίστοιχο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ είναι πολύ μικρό.

1.8. Γραφική Ανάλυση της Επιτάχυνσης σε Συνιστώσες

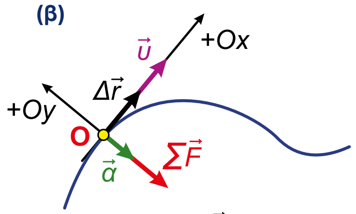
Εικόνα 1-5
(α) Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δεν είναι γενικά παράλληλο με το διάνυσμα της ταχύτητας.
(β) Εάν τα διανύσματα της επιτάχυνσης και της ταχύτητας είναι κάθετα μεταξύ τους (σε κάποιο μικρό χρονικό διάστημα Δt), το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό και μεταβάλλεται μόνο η διεύθυνσή της (στο ίδιο χρονικό διάστημα).

(α)



ό

(β)



$\vec{\alpha} \perp \vec{\upsilon} \Rightarrow \Sigma\vec{F} \perp \Delta\vec{r} \Leftrightarrow W_{\Sigma\vec{F}} = 0 \Leftrightarrow$
$E_{\kappa\iota\nu}$ = σταθερή $\Leftrightarrow |\vec{\upsilon}|$= σταθερό

Η επιτάχυνση ενός σώματος σε κάποιο σημείο μπορεί να αναλυθεί σε συνιστώσες ως προς κάποιο σύστημα αξόνων, όπως αναλύεται και το διάνυσμα της ταχύτητας.

Στην **Εικόνα 1-5** απεικονίζεται ένα σώμα, που κινείται στο επίπεδο. Επιλέγουμε το σύστημα αξόνων με σημείο αναφοράς το σώμα, έτσι ώστε ο ένας από τους δύο άξονες (ο **Οx**) να είναι **παράλληλος με το διάνυσμα της ταχύτητας**.

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης του σώματος **γενικά δεν είναι παράλληλο** με το διάνυσμα της ταχύτητας. Η **Εικόνα 1-5(β)** απεικονίζει την ειδική περίπτωση, όπου το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι **κάθετο** στο διάνυσμα της ταχύτητας ($\vec{\alpha} \perp \vec{\upsilon}$). Η περίπτωση αυτή εμφανίζεται στην ομαλή κυκλική κίνηση, που θα μελετήσουμε αργότερα.

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα γνωρίζουμε ότι η επιτάχυνση του σώματος είναι παράλληλη με τη συνισταμένη δύναμη, που δρα στο σώμα, ($\vec{\alpha} \,/\!/ \sum\vec{F}$). Επιπρόσθετα, η ταχύτητα είναι παράλληλη με τη μετατόπιση του σώματος, ($\vec{\upsilon} \,/\!/ \Delta\vec{r}$). Συνεπώς, εάν η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα, η συνισταμένη δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση του σώματος:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\upsilon} \Rightarrow \sum\vec{F} \perp \Delta\vec{r}$$

Σε αυτή την περίπτωση, το έργο της συνισταμένης δύναμης είναι ίσο με μηδέν, και η κινητική ενέργεια του σώματος παραμένει σταθερή:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\upsilon} \Rightarrow \sum\vec{F} \perp \Delta\vec{r} \Leftrightarrow W_{\sum\vec{F}} = 0 \Leftrightarrow E_{\kappa\iota\nu}^{\tau\varepsilon\lambda} = E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi} \Leftrightarrow |\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda}| = |\vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}|$$

Συμπεραίνουμε ότι:

- Όταν η επιτάχυνση ενός σώματος είναι κάθετη στην ταχύτητά του, το μέτρο της ταχύτητας του σώματος παραμένει σταθερό:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\upsilon} \Leftrightarrow \left|\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda}\right| = \left|\vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}\right|$$

Να παρατηρήσετε ότι οι πιο πάνω σχέσεις αποτελούν ισοδυναμίες. Συνεπώς, ισχύει και το **αντίστροφο** συμπέρασμα:

- Όταν το μέτρο της ταχύτητας του σώματος δεν μεταβάλλεται (αλλά αλλάζει η διεύθυνσή της), το σώμα κινείται με επιτάχυνση κάθετη στην ταχύτητά του.

1.9. Αρχή της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων

Έστω ότι ένα σώμα κινείται κατά μήκος μίας γενικής καμπυλόγραμμης τροχιάς στο επίπεδο. Όπως γνωρίζουμε, η **επιτάχυνση** του σώματος συνδέεται μέσω του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα με τη **συνισταμένη δύναμη**, που δρα σε αυτό. Εάν αναλύσουμε την κίνηση του σώματος ως προς κάποιο αυθαίρετο σύστημα αξόνων, προκύπτει ότι οι **συνιστώσες** της επιτάχυνσης και της δύναμης ικανοποιούν αντίστοιχες εξισώσεις:

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{m}\sum\vec{F} \Leftrightarrow \alpha_x = \frac{\sum F_x}{m}, \ \alpha_y = \frac{\sum F_y}{m}$$

Οι συνιστώσες α_x και α_y περιγράφουν την κίνηση της **προβολής** του σώματος στις διευθύνσεις «x» και «y». Οι τελευταίες σχέσεις δείχνουν ότι η συνιστώσα της επιτάχυνσης σε οποιαδήποτε από τις διευθύνσεις «x» και «y» εξαρτάται **μόνο**, και προσδιορίζεται **πλήρως** από τις συνιστώσες των δυνάμεων **στην ίδια διεύθυνση. Δεν επηρεάζεται** από τις συνιστώσες των δυνάμεων, που δρουν στο σώμα στην κάθετη διεύθυνση.

Το πιο πάνω αποτέλεσμα οδηγεί στην **Αρχή της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων:**

Αρχή της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων

Μία γενική καμπυλόγραμμη κίνηση ενός σώματος στο επίπεδο μπορεί να αναλυθεί σε δύο ανεξάρτητες ευθύγραμμες κινήσεις, εξετάζοντας την προβολή του σώματος κατά μήκος δύο κάθετων μεταξύ τους διευθύνσεων «x» και «y».

- Η ταχύτητα της προβολής του σώματος **στη διεύθυνση «x»** εξαρτάται μόνο από τις συνιστώσες των δυνάμεων στην **ίδια διεύθυνση**, και **δεν επηρεάζεται** από τις συνιστώσες των δυνάμεων στη διεύθυνση «y». Ομοίως,

- Η ταχύτητα της προβολής του σώματος **στη διεύθυνση «y»** εξαρτάται μόνο από τις συνιστώσες των δυνάμεων στην **ίδια διεύθυνση**, και **δεν επηρεάζεται** από τις συνιστώσες των δυνάμεων στη διεύθυνση «x».

Από την Αρχή της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων προκύπτουν αμέσως τα εξής συμπεράσματα:

- Εάν η συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης σε μία διεύθυνση είναι ίση με μηδέν, η αντίστοιχη συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι επίσης μηδενική. Άρα, η προβολή του σώματος σε αυτή τη διεύθυνση εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση:

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow \alpha_x = 0 \Leftrightarrow \upsilon_x = \sigma\tau\alpha\theta$$
$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow \alpha_y = 0 \Leftrightarrow \upsilon_y = \sigma\tau\alpha\theta$$

- Εάν η συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης σε μία διεύθυνση είναι μη μηδενική και σταθερή, η αντίστοιχη συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι επίσης σταθερή. Η προβολή του σώματος σε αυτή τη διεύθυνση εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

$$\sum F_x = \sigma\tau\alpha\theta \Leftrightarrow \alpha_x = \sigma\tau\alpha\theta$$
$$\sum F_y = \sigma\tau\alpha\theta \Leftrightarrow \alpha_y = \sigma\tau\alpha\theta$$

Παράδειγμα 1

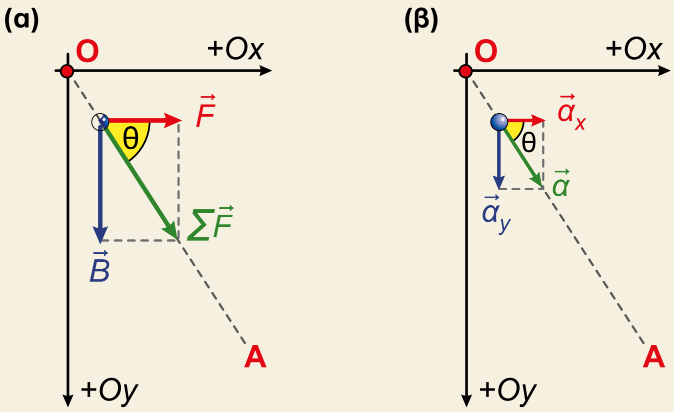
Μία σφαίρα μάζας m κινείται υπό την επίδραση μίας σταθερής οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ και του βάρους της $\vec{B}$. Η σφαίρα ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0$ από το σημείο **O**, με μηδενική αρχική ταχύτητα (**Εικόνα 1-6**). Θα περιγράψουμε την τροχιά της σφαίρας.

Α. Μελετούμε πρώτα την κίνηση από τη σκοπιά της **συνισταμένης δύναμης** $\sum \vec{F} = \vec{F} + \vec{B}$. Η δύναμη αυτή έχει σταθερό μέτρο, και διεύθυνση κατά μήκος της ευθείας **ΟΑ**, όπως προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αφού η σφαίρα ήταν αρχικά ακίνητη, θα κινηθεί κατά μήκος της ευθείας **ΟΑ** με σταθερή επιτάχυνση

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{m}\sum \vec{F} = \frac{1}{m}(\vec{F} + \vec{B})$$

Η γωνία θ ανάμεσα στην ευθεία **ΟΑ** και την οριζόντια διεύθυνση ικανοποιεί τη σχέση

$$\varepsilon\varphi\theta = |\vec{B}| / |\vec{F}| = (mg) / |\vec{F}|$$



Εικόνα 1-6
Στη σφαίρα δρά η σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ και το βάρος της $\vec{B}$.
(α) Η σφαίρα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση κατά μήκος της ευθείας **ΟΑ**, που έχει τη διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης.
(β) Η κίνηση αναλύεται σε δύο ευθύγραμμες, ομαλά επιταχυνόμενες κινήσεις, κατά μήκος της οριζόντιας διεύθυνσης **Ox** και της κατακόρυφης διεύθυνσης **Oy**. Οι αντίστοιχες επιταχύνσεις είναι $\vec{\alpha}_x = \vec{F}/m$ και $\vec{\alpha}_y = \vec{B}/m = \vec{g}$.

Β. Μελετούμε **ανεξάρτητα** την κίνηση της σφαίρας στην οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση, χρησιμοποιώντας το σύστημα αξόνων **Ox** και **Oy**. Επιλέγουμε τη θετική φορά του άξονα **Ox** κατά μήκος της $\vec{F}$ και τη θετική φορά του άξονα **Oy** κατά μήκος του βάρους $\vec{B}$. Η προβολή της σφαίρας στην οριζόντια διεύθυνση εκτελεί **ομαλά επιταχυνόμενη** κίνηση, με οριζόντια επιτάχυνση

$$\alpha_x = +\frac{|\vec{F}|}{m}$$

Η θέση x της προβολής περιγράφεται από την εξίσωση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{1}{2}\alpha_x t^2 \Rightarrow x = +\frac{1}{2}\frac{|\vec{F}|}{m} t^2$$

όπου θέσαμε $x_0 = 0$ m και $\upsilon_{0x} = 0$ m/s.
Ομοίως, η προβολή της σφαίρας στη διεύθυνση **Oy** κινείται με σταθερή κατακόρυφη επιτάχυνση

$$\alpha_y = +\frac{|\vec{B}|}{m} = g$$

και η θέση της περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y = y_0 + \upsilon_{0y} t + \frac{1}{2}\alpha_y t^2 \Rightarrow y = +\frac{1}{2} g t^2$$

όπου θέσαμε $y_0 = 0$ m και $\upsilon_{0y} = 0$ m/s.
Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις για τις θέσεις x και y, συμπεραίνουμε:

$$\frac{y}{x} = \frac{mg}{|\vec{F}|} = \varepsilon\varphi\theta$$

Συνεπώς, η σφαίρα κινείται κατά μήκος της ευθείας ΟΑ, σε συμφωνία με το συμπέρασμα Α.

Σημείωση

Εάν η αρχική ταχύτητα της σφαίρας είναι μη μηδενική και παράλληλη με τη συνισταμένη δύναμη $\sum\vec{F}$, η τροχιά της σφαίρας είναι επίσης ευθεία παράλληλη με τη συνισταμένη δύναμη. Εάν η αρχική ταχύτητα έχει διαφορετική διεύθυνση από τη συνισταμένη δύναμη, η σφαίρα ακολουθεί καμπυλόγραμμη τροχιά.

Στο **Κεφάλαιο 2** θα εφαρμόσουμε την Αρχή Ανεξαρτησίας των Κινήσεων στη μελέτη της ελεύθερης πτώσης σωμάτων (βολών).

1.10. Θεώρημα Έργου Δύναμης - Κινητικής Ενέργειας για Επίπεδη Κίνηση υπό Σταθερή Συνισταμένη Δύναμη

Από την Αρχή της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων, προκύπτει αμέσως ότι το θεώρημα Έργου Δύναμης - Κινητικής Ενέργειας ισχύει και για την περίπτωση κίνησης ενός σώματος μάζας m στο επίπεδο, υπό τη δράση σταθερής συνισταμένης δύναμης $\sum\vec{F}$. Οι συνιστώσες της συνισταμένης δύναμης στις δύο κάθετες διευθύνσεις «x» και «y» είναι επίσης σταθερές. Άρα, η κίνηση αναλύεται σε δύο ευθύγραμμες, ομαλά επιταχυνόμενες κινήσεις. Εφαρμόζουμε τη σχέση ταχύτητας - μετατόπισης στις διευθύνσεις «x» και «y»:

$$\upsilon_{x\,\tau\varepsilon\lambda}^2 - \upsilon_{x\,\alpha\rho\chi}^2 = 2\alpha_x \Delta x \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_{x\,\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{x\,\alpha\rho\chi}^2 = \left(\sum F_x\right)\Delta x$$

$$\upsilon_{y\,\tau\varepsilon\lambda}^2 - \upsilon_{y\,\alpha\rho\chi}^2 = 2\alpha_y \Delta y \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_{y\,\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{y\,\alpha\rho\chi}^2 = \left(\sum F_y\right)\Delta y$$

Εάν αθροίσουμε τις τελευταίες σχέσεις κατά μέλη, παίρνουμε:

$$\left(\sum F_x\right)\Delta x + \left(\sum F_y\right)\Delta y = \frac{1}{2}m\underbrace{(\upsilon_{x\,\tau\varepsilon\lambda}^2 + \upsilon_{y\,\tau\varepsilon\lambda}^2)}_{=\left|\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda}\right|^2} - \frac{1}{2}m\underbrace{(\upsilon_{x\,\alpha\rho\chi}^2 + \upsilon_{y\,\alpha\rho\chi}^2)}_{=\left|\vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}\right|^2} \Rightarrow$$

$$\left(\sum F_x\right)\Delta x + \left(\sum F_y\right)\Delta y = \frac{1}{2}m\left|\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda}\right|^2 - \frac{1}{2}m\left|\vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}\right|^2$$

Στο αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης εμφανίζεται το συνολικό έργο της **σταθερής συνισταμένης** δύναμης $\sum\vec{F}$ σε ένα σώμα που κινείται στο επίπεδο.

Έργο Σταθερής Συνισταμένης Δύναμης, για Κίνηση στο Επίπεδο

$$W_{\sum\vec{F}} = \left(\sum F_x\right)\Delta x + \left(\sum F_y\right)\Delta y$$

Στην ειδική περίπτωση που το σώμα κινείται σε ευθεία γραμμή, μπορούμε να επιλέξουμε τον έναν άξονα, έστω τον **Ox**, κατά μήκος αυτής της ευθείας. Τότε, καταλήγουμε στην ίδια έκφραση για το έργο σταθερής συνισταμένης δύναμης της ευθύγραμμης κίνησης, που μελετήσαμε στην Α΄ Λυκείου:

$$\Delta y = 0 \Rightarrow W_{\sum\vec{F}} = \left(\sum F_x\right)\Delta x$$

Στο δεξί μέλος εμφανίζεται η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του σώματος.

Κινητική Ενέργεια Σώματος μάζας *m*, για Κίνηση στο Επίπεδο

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}m(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2) = \frac{1}{2}m\left|\vec{\upsilon}\right|^2$$

Από τον ορισμό Έργου και Κινητικής Ενέργειας, συμπεραίνουμε:

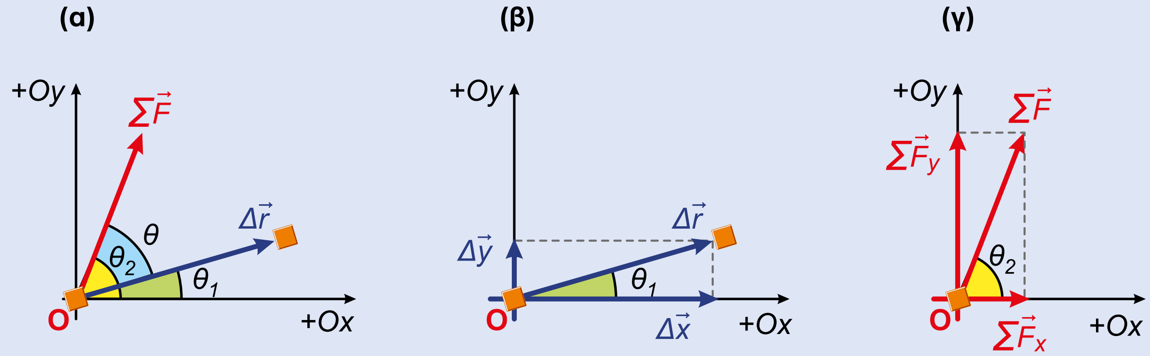
Θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας για Κίνηση Σώματος στο Επίπεδο, υπό τη Δράση Σταθερής Συνισταμένης Δύναμης

$$W_{\sum\vec{F}} = \Delta E_{\kappa\iota\nu} = E_{\kappa\iota\nu}^{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi}$$

ΕΝΘΕΤΗ ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Μπορούμε να εκφράσουμε το έργο μίας σταθερής συνισταμένης δύναμης $\sum\vec{F}$ για μετατόπιση $\Delta\vec{r}$ συναρτήσει των μέτρων των δύο διανυσμάτων και της γωνίας που σχηματίζουν μεταξύ τους. Μεταφέρουμε παράλληλα τα διανύσματα $\sum\vec{F}$ και $\Delta\vec{r}$, έτσι ώστε να αποκτήσουν κοινή αρχή. Έστω ότι το διάνυσμα $\Delta\vec{r}$ σχηματίζει γωνία θ_1 με τον άξονα Ox, και το διάνυσμα $\sum\vec{F}$ σχηματίζει γωνία θ_2 με τον ίδιο άξονα (**σχήμα α**).

Οι συνιστώσες του διανύσματος $\Delta\vec{r}$ είναι $\Delta x = \left|\Delta\vec{r}\right|\sigma\upsilon\nu\theta_1$, $\Delta y = \left|\Delta\vec{r}\right|\eta\mu\theta_1$ (**σχήμα β**). Ομοίως, οι συνιστώσες του διανύσματος $\sum\vec{F}$ είναι $\sum F_x = \left|\sum\vec{F}\right|\sigma\upsilon\nu\theta_2$, $\sum F_y = \left|\sum\vec{F}\right|\eta\mu\theta_2$ (**σχήμα γ**).



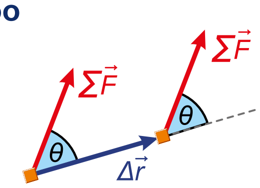
Συνεπώς, το έργο της συνισταμένης δύναμης γράφεται:

$$W_{\Sigma\vec{F}} = \left|\sum\vec{F}\right|\left|\Delta\vec{r}\right| (\sigma\upsilon\nu\theta_2\, \sigma\upsilon\nu\theta_1 + \eta\mu\theta_2\, \eta\mu\theta_1)$$

Με βάση την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sigma\upsilon\nu\theta_2\, \sigma\upsilon\nu\theta_1 + \eta\mu\theta_2\, \eta\mu\theta_1 = \sigma\upsilon\nu\ (\theta_2 - \theta_1)$, καταλήγουμε **στην ισοδύναμη σχέση**:

Έργο Σταθερής Συνισταμένης Δύναμης για Κίνηση στο Επίπεδο

$$W_{\Sigma\vec{F}} = \left|\sum\vec{F}\right|\left|\Delta\vec{r}\right| \sigma\upsilon\nu\ (\theta_2 - \theta_1) = \left|\sum\vec{F}\right|\left|\Delta\vec{r}\right| \sigma\upsilon\nu\theta$$



όπου $\theta = \theta_2 - \theta_1$ η γωνία ανάμεσα στα διανύσματα της σταθερής συνισταμένης δύναμης και της μετατόπισης (**σχήμα α**). Σημειώνουμε τα εξής:

- Εάν η γωνία θ είναι οξεία, το έργο της συνισταμένης δύναμης είναι **θετικό**, αφού το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας μικρότερης των 90^O είναι θετικό.
- Εάν η γωνία είναι αμβλεία, το έργο είναι αρνητικό αφού το συνημίτονο μιας γωνίας με μέτρο μεγαλύτερο των 90^o και μικρότερο των 180^o είναι αρνητικό.
- Εάν η γωνία είναι ίση με 90^o, δηλαδή η συνισταμένη δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση, το έργο της συνισταμένης δύναμης είναι μηδενικό, αφού $\sigma\upsilon\nu\ 90^o = 0$.

Γενικά, σε εφαρμογές της Αρχής της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων είναι συνήθως γνωστές οι συνιστώσες της δύναμης και της μετατόπισης, οπότε η έκφραση

$$W_{\Sigma\vec{F}} = \left(\sum F_x\right)\Delta x + \left(\sum F_y\right)\Delta y$$

για το έργο είναι πιο εύχρηστη. Με βάση αυτή την έκφραση, το θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας γενικεύεται για κινήσεις στο επίπεδο υπό τη δράση μη σταθερών δυνάμεων.

1.11. Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας, όταν το Βάρος είναι η μοναδική δύναμη με μη μηδενικό Έργο

Εάν η μόνη δύναμη με μη μηδενικό έργο είναι το βάρος του σώματος, το Θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας οδηγεί στο συμπέρασμα:

$$W_{\vec{B}} = E_{\kappa\iota\nu}^{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi}$$

Στην Α΄ Λυκείου αποδείξαμε ότι το έργο του βάρους ενός σώματος ισούται με την αρνητική μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος σώματος - Γης:

$$W_{\vec{B}} = -\Delta U_{\beta\alpha\rho} = -U_{\beta\alpha\rho}^{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\beta\alpha\rho}^{\alpha\rho\chi} = -mg(y_{\tau\varepsilon\lambda} - y_{\alpha\rho\chi})$$

όπου y είναι το ύψος του σώματος από το έδαφος. Συνδυάζοντας τις τελευταίες δύο σχέσεις, συμπεραίνουμε ότι η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης διατηρείται σταθερή για οποιαδήποτε κίνηση του σώματος (εάν η μόνη δύναμη με μή μηδενικό έργο είναι το βάρος του σώματος):

Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας για Κίνηση υπό τη Δράση του Βάρους

$$W_{\vec{B}} = \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow -U_{\beta\alpha\rho}^{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\beta\alpha\rho}^{\alpha\rho\chi} = E_{\kappa\iota\nu}^{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi} \Rightarrow E_{\kappa\iota\nu}^{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\beta\alpha\rho}^{\tau\varepsilon\lambda} = E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi} + U_{\beta\alpha\rho}^{\alpha\rho\chi} \Rightarrow E_{\mu\eta\chi}^{\tau\varepsilon\lambda} = E_{\mu\eta\chi}^{\alpha\rho\chi}$$

Εφαρμόζοντας την πιο πάνω αρχή για δύο οποιαδήποτε ύψη, προκύπτει η σχέση:

$$\frac{1}{2}m|\vec{\upsilon}_1|^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}m|\vec{\upsilon}_2|^2 + mgy_2$$

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Για να είναι το διάνυσμα της ταχύτητας ενός κινούμενου σώματος εφαπτομενικό με την τροχιά, πρέπει η επιτάχυνση του σώματος να είναι μηδενική.	
2	Το διάνυσμα της ταχύτητας ενός κινούμενου σώματος είναι πάντοτε εφαπτομενικό με την τροχιά του σώματος.	

3	Ένα σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά. Η ταχύτητα του σώματος είναι παράλληλη με το διάνυσμα της θέσης του ως προς το κέντρο του κύκλου.	
4	Το διάνυσμα της επιτάχυνσης ενός κινούμενου σώματος είναι πάντοτε παράλληλο με το διάνυσμα της ταχύτητάς του.	
5	Όταν ένα σώμα κινείται σε **καμπυλόγραμμη** τροχιά με ταχύτητα σταθερού **μέτρου**, η επιτάχυνση του σώματος:	
α	Είναι μηδενική.	
β	Είναι παράλληλη με την ταχύτητα του σώματος.	
γ	Είναι κάθετη στην ταχύτητα του σώματος.	
δ	Μπορεί να σχηματίζει οποιαδήποτε γωνία με την ταχύτητα του σώματος.	
6	Ένα σώμα κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά, με ταχύτητα μεταβαλλόμενου μέτρου. Η επιτάχυνση του σώματος:	
α	Είναι κάθετη στην ταχύτητα του σώματος.	
β	Είναι παράλληλη με την ταχύτητα του σώματος.	
γ	Σχηματίζει οποιαδήποτε γωνία με την ταχύτητα του σώματος.	
7	Όταν η συνισταμένη δύναμη που δρα σε ένα σώμα είναι σταθερή, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη, ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.	

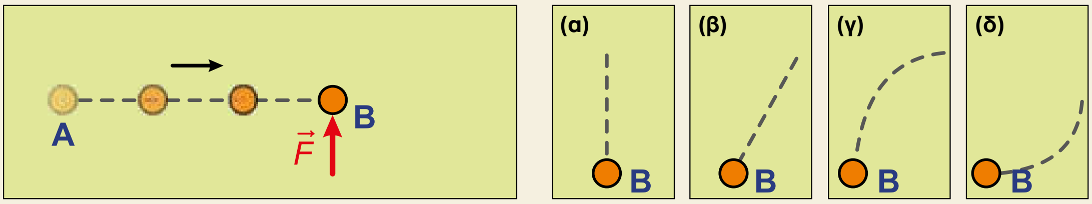
Ασκήσεις

1 **Α.** Να αναφέρετε παραδείγματα κίνησης, όπου η διεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας είναι **(α)** παράλληλη, **(β)** κάθετη στη διεύθυνση του διανύσματος θέσης του σώματος.

Β. Είναι δυνατόν ένα σώμα, που κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου, να επιταχύνεται; Τι γωνία σχηματίζουν τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης, σε αυτή την περίπτωση;

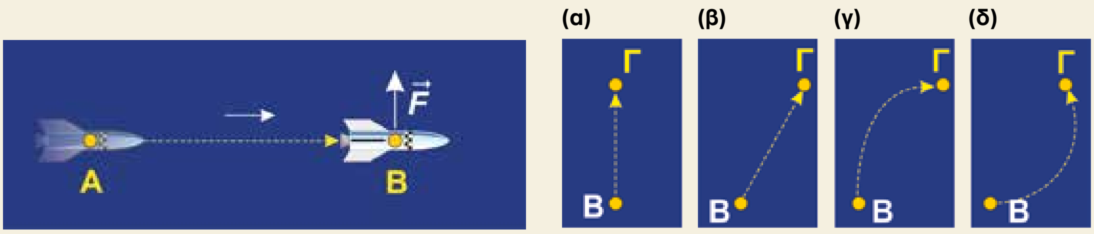
2 Ένας δίσκος κινείται χωρίς τριβές κατά μήκος της ευθείας ΑΒ πάνω σε οριζόντια αεροτράπεζα, όπως δείχνει σε κάτοψη το πιο κάτω σχήμα. Στο σημείο Β δρα στο δίσκο μία στιγμιαία οριζόντια δύναμη κατά την κατεύθυνση του κόκκινου βέλους. Εάν ο δίσκος ήταν ακίνητος στο Β, η δύναμη θα του είχε προσδώσει μία οριζόντια ταχύτητα κατά την κατεύθυνσή της.

Ποιά από τις τροχιές (α) - (δ) περιγράφει την τροχιά κίνησης του δίσκου μετά την επίδραση της δύναμης; Να **δικαιολογήσετε** την απάντησή σας με βάση την Αρχή της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων.

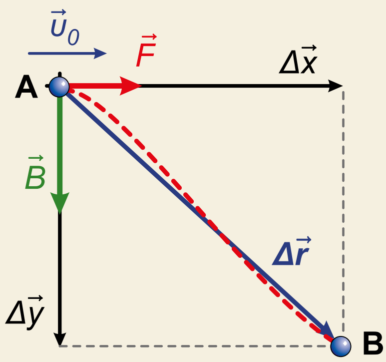


❸ Ένας πύραυλος κινείται στο απομακρυσμένο διάστημα, όπου δεν δρουν δυνάμεις σε αυτόν, κατά μήκος της ευθείας ΑΒ. Στο σημείο Β, ένας πλευρικός εκτοξευτήρας αερίου δίνει μία **σταθερή** ώθηση στον πύραυλο κάθετα στη διεύθυνση ΑΒ, η οποία διατηρείται μέχρι το Γ.

Ποιά από τις τροχιές (α) - (δ) περιγράφει την τροχιά κίνησης του πυραύλου μεταξύ των Β και Γ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με βάση την Αρχή της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων.



❹ Μία σφαίρα μάζας $m = 10^{-2}$ kg αρχίζει να κινείται από το σημείο **Α** του πιο κάτω σχήματος, με οριζόντια αρχική ταχύτητα μέτρου $|\vec{\upsilon}_0| = 0{,}5$ m/s. Η σφαίρα υφίσταται το βάρος της $\vec{B}$ και μία σταθερή οριζόντια δύναμη με μέτρο $|\vec{F}| = |\vec{B}|/2$. Η σφαίρα μετατοπίζεται κατά 85,0 cm στην οριζόντια διεύθυνση, και κατά 120,0 cm στην κατακόρυφη.



Α. Να περιγράψετε την κίνηση της προβολής της σφαίρας στην οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση, χρησιμοποιώντας την Αρχή της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων.

Β. Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης δύναμης και το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας στο σημείο Β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΒΟΛΕΣ

Στο Κεφάλαιο 2:

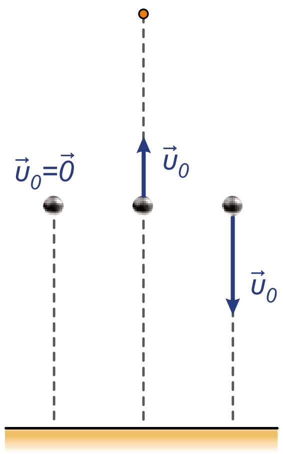
- **Εφαρμόζουμε** την την Αρχή της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων στη μελέτη της οριζόντιας και της πλάγιας βολής.
- **Συνδέουμε** τον χρόνο πτήσης ενός σώματος με το μέγιστο ύψος της τροχιάς του και με την κατακόρυφη συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας.
- **Συνδέουμε** τη μέγιστη οριζόντια μετατόπιση της οριζόντιας βολής με το αρχικό ύψος και την αρχική ταχύτητα.
- **Εξάγουμε** και χρησιμοποιούμε την εξίσωση τροχιάς της οριζόντιας βολής.
- **Συνδέουμε** το βεληνεκές της πλάγιας βολής με το μέτρο της αρχικής ταχύτητας και τη γωνία εκτόξευσης.
- **Εξάγουμε** και χρησιμοποιούμε την εξίσωση τροχιάς της πλάγιας βολής.
- **Μελετούμε** τις βολές με την Αρχή της Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας.

Στα Κεφάλαια που ακολουθούν, εφαρμόζουμε την **Αρχή Ανεξαρτησίας των Κινήσεων** σε διάφορες περιπτώσεις κινήσεων στο επίπεδο. Στο Κεφάλαιο 2 μελετούμε τη γενική περίπτωση της **ελεύθερης πτώσης** ενός σώματος, δηλαδή της κίνησης υπό την επίδραση του βάρους του.

Υπενθύμιση

Με τον όρο **«ελεύθερη πτώση»** περιγράφουμε κάθε κίνηση, που γίνεται υπό την επίδραση του βάρους ενός σώματος. Παραδείγματα ελεύθερης πτώσης είναι η οριζόντια, η κατακόρυφη και η πλάγια βολή (εάν η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα), η κίνηση του διεθνούς διαστημικού σταθμού, και η περιφορά της Σελήνης γύρω από τη Γη.

Εικόνα 2-1
Όταν η αρχική ταχύτητα της ελεύθερης πτώσης έχει **μηδενική οριζόντια συνιστώσα**, η τροχιά είναι κατακόρυφη.



Οι μικρές μεταλλικές σφαίρες της **Εικόνας 2-1** εκτελούν ελεύθερη πτώση. Η συνισταμένη δύναμη σε κάθε σφαίρα είναι το βάρος της, με μηδενική οριζόντια συνιστώσα. Από την Αρχή της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων προκύπτει ότι η οριζόντια ταχύτητα κάθε σφαίρας παραμένει σταθερή. Εάν οι σφαίρες έχουν μηδενική αρχική οριζόντια ταχύτητα, κινούνται κατακόρυφα.

Συνεπώς:

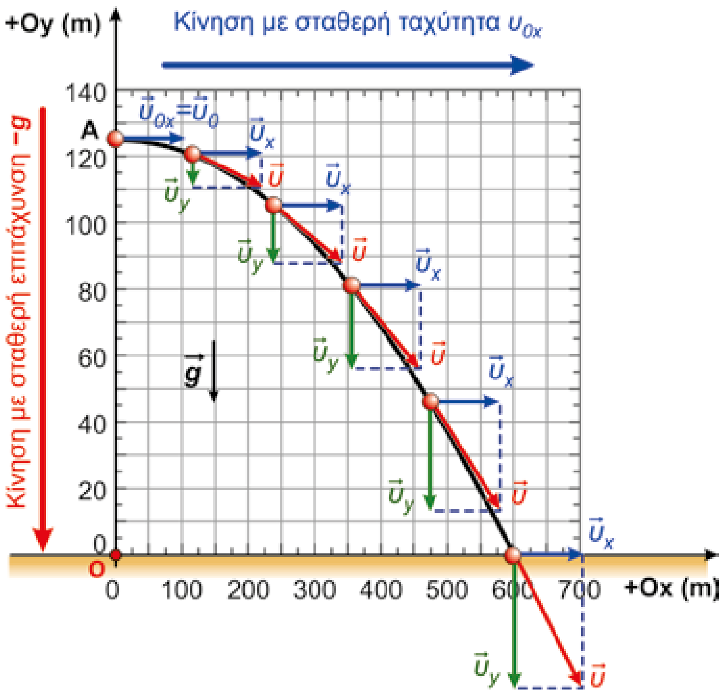
Ένα σώμα, που εκτελεί ελεύθερη πτώση με μηδενική οριζόντια αρχική ταχύτητα, διαγράφει κατακόρυφη τροχιά.

Εάν η αρχική οριζόντια ταχύτητα του σώματος δεν είναι μηδενική, το σώμα διαγράφει καμπυλόγραμμη τροχιά. Θα μελετήσουμε δύο παραδείγματα κινήσεων: την οριζόντια βολή και την πλάγια βολή.

2.1. Οριζόντια Βολή

Ένα σώμα που εκτοξεύεται από κάποιο ύψος με **οριζόντια αρχική ταχύτητα**, πραγματοποιεί οριζόντια βολή.

Το βλήμα της **Εικόνας 2-2** εκτοξεύεται από το σημείο **Α**, σε αρχικό ύψος h από το έδαφος, με οριζόντια αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$.



Εικόνα 2-2
Τροχιά βλήματος, που εκτοξεύεται με **οριζόντια** ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ από το σημείο Α, και κινείται υπό την επίδραση του βάρους του.

Το βλήμα κινείται στο **κατακόρυφο** επίπεδο που διέρχεται από το σημείο **Α.** Θα αναλύσουμε την κίνηση του βλήματος ως προς το σύστημα αξόνων **Οx** και **Oy**. O άξονας **Οx** είναι οριζόντιος, στο ύψος του εδάφους, με θετική φορά προς τα δεξιά. Ο άξονας **Oy** είναι κατακόρυφος, με θετική φορά προς τα πάνω, και διέρχεται από το σημείο **Α.** Το σημείο αναφοράς βρίσκεται στο έδαφος, ακριβώς κάτω από το **Α.**

Η αρχική ταχύτητα του σώματος έχει συνιστώσες $\upsilon_{0x} = \upsilon_0$ και $\upsilon_{0y} = 0$. Υποθέτουμε ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, οπότε η συνισταμένη δύναμη στο βλήμα είναι **το βάρος του.** Εφαρμόζοντας **ανεξάρτητα** τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στους άξονες **Οx** και **Oy**, βρίσκουμε:

$$\sum\vec{F} = \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow \alpha_x = 0 \\ \sum F_y = -mg \Rightarrow \alpha_y = -g \end{cases}$$

Άρα:

(i) Η **προβολή** του βλήματος στην οριζόντια διεύθυνση εκτελεί **ευθύγραμμη ομαλή κίνηση**. Η θέση x της προβολής περιγράφεται από την εξίσωση της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης:

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t \Rightarrow x = \upsilon_0 t$$

όπου θέσαμε $x_0 = 0$, $\upsilon_{0x} = \upsilon_0$.

Η οριζόντια ταχύτητα του σώματος είναι σταθερή και ίση με $\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0$.

(ii) Η **προβολή** του βλήματος στην κατακόρυφη διεύθυνση εκτελεί **ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση** με αρχική ταχύτητα $\upsilon_{0y} = 0$, και επιτάχυνση $\alpha_y = -g$.

Η θέση y της προβολής περιγράφεται από την εξίσωση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης:

$$y = y_0 + \upsilon_{0y} t + \frac{1}{2}\alpha_y t^2 \Rightarrow y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

όπου θέσαμε $y_0 = h$, $\upsilon_{0y} = 0$, $\alpha_y = -g$.

Η κατακόρυφη ταχύτητα περιγράφεται από την αντίστοιχη εξίσωση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης:

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + \alpha_y t = -g t$$

2.1.1. Εξίσωση της Τροχιάς της Οριζόντιας Βολής

Από τη χρονική εξάρτηση των συντεταγμένων x και y μπορούμε να εξαγάγουμε μία σχέση ανάμεσά τους, ως ακολούθως.

(i) Λύνουμε ως προς τη μεταβλητή t του χρόνου στην εξίσωση της συντεταγμένης x:

$$x = \upsilon_0 t \Rightarrow t = x/\upsilon_0$$

(ii) Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της συντεταγμένης y, οπότε στη θέση του χρόνου εμφανίζεται η μεταβλητή x:

Εξίσωση Τροχιάς της Οριζόντιας Βολής

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y = h - \frac{g}{2\upsilon_0^2} x^2$$

Η τελευταία εξίσωση συνδέει τις συντεταγμένες x και y της θέσης του βλήματος, κατά τη διάρκεια της κίνησής του, δηλαδή περιγράφει την καμπύλη της τροχιάς του βλήματος. **Παρατηρήστε** ότι η εξίσωση της τροχιάς είναι της μορφής $y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$ με $\lambda_0 = h$, $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = -g/2\upsilon_0^2$. Άρα, η γραφική παράσταση της τροχιάς έχει τη μορφή της γραφικής παράστασης **πολυωνύμου δευτέρου βαθμού**. Όπως γνωρίζετε από τα Μαθηματικά, η γραφική παράσταση πολυωνύμου δευτέρου βαθμού ονομάζεται **παραβολή**.

Προσοχή

- Γενικά, η μορφή της τροχιάς ενός βλήματος, που εκτελεί ελεύθερη πτώση, εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες (ταχύτητα και ύψος εκτόξευσης). Αργότερα θα μελετήσουμε περιπτώσεις **πλάγιας** βολής, στις οποίες η τροχιά περιγράφεται από διαφορετικές παραβολικές εξισώσεις. Γι αυτό τον λόγο, σας συστήνουμε να **μην απομνημονεύσετε** την πιο πάνω εξίσωση.
- Σε όλες τις περιπτώσεις βολών, για να βρούμε την εξίσωση της τροχιάς (σχέση μεταξύ συντεταγμένων x και y), γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης στην οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση, και **απαλείφουμε** τον χρόνο.

Σημείωση

Θα μπορούσαμε να είχαμε επιλέξει το σημείο αναφοράς στο αρχικό ύψος και τη θετική φορά του άξονα **Oy** προς τα κάτω. Με αυτή τη σύμβαση, η εξίσωση της κίνησης στη διεύθυνση y γίνεται:

$$y = y_0 + \upsilon_{0y} t + \frac{1}{2}\alpha_y t^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} g t^2$$

όπου θέσαμε $y_0 = 0$, $\upsilon_{0y} = 0$, $\alpha_y = g$. Θέτοντας $t = x/\upsilon_0$, βρίσκουμε την εξίσωση της τροχιάς:

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y = \frac{g}{2\upsilon_0^2} x^2$$

2.1.2. Εφαρμογή της Εξίσωσης της Τροχιάς σε Επίλυση Προβλημάτων Οριζόντιας Βολής

Η εξίσωση της τροχιάς παρέχει ένα γενικό εργαλείο για τη μελέτη της οριζόντιας βολής.

Παράδειγμα 1

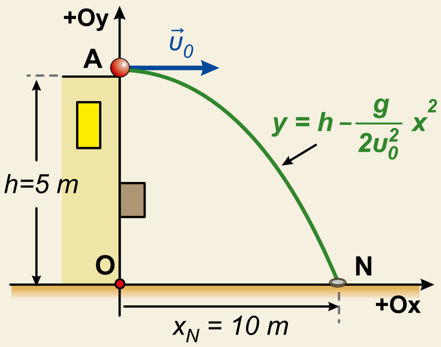
Από την εξίσωση της τροχιάς, θα υπολογίσουμε τη **μέγιστη οριζόντια μετατόπιση** $x_{\mu\varepsilon\gamma}$ του βλήματος, όταν φθάνει στο έδαφος.

Όταν το βλήμα φθάσει στο έδαφος, η θέση του θα έχει y-συντεταγμένη $y = 0$. Από την εξίσωση της τροχιάς, παίρνουμε:

$$0 = h - \frac{g}{2\upsilon_0^2} x_{\mu\varepsilon\gamma}^2 \Rightarrow x_{\mu\varepsilon\gamma} = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Παράδειγμα 2

Ένα παιδί ρίχνει μία πέτρα από την οροφή ενός κτηρίου ύψους 5,0 m, με αρχική οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_0. Το παιδί προσπαθεί να πετύχει ένα νόμισμα, που βρίσκεται στο έδαφος, σε απόσταση 10,0 m από τη βάση του κτηρίου. Θα υπολογίσουμε την ταχύτητα με την οποία πρέπει να φύγει η πέτρα, για να πετύχει το νόμισμα.



Θα χρησιμοποιήσουμε το σύστημα αξόνων του σχήματος, με σημείο αναφοράς το **Ο**. Η εξίσωση της τροχιάς της πέτρας δίνεται από τη σχέση που αποδείξαμε προηγουμένως:

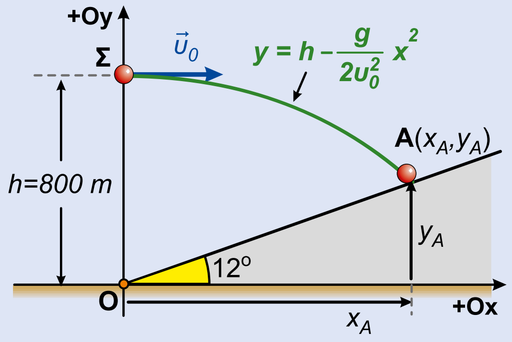
$$y = h - \frac{g}{2\upsilon_0^2} x^2$$

Οι συντεταγμένες της θέσης του νομίσματος είναι $x_N = +10{,}0$ m, $y_N = 0$ m. Η πέτρα θα πετύχει το νόμισμα, εάν η τροχιά της πέτρας διέρχεται από το νόμισμα. Για να συμβεί αυτό, πρέπει **οι συντεταγμένες του νομίσματος να ικανοποιούν την εξίσωση της τροχιάς**:

$$y_N = h - \frac{g}{2\upsilon_0^2} x_N^2 \Rightarrow \frac{g}{2\upsilon_0^2} x_N^2 = h - y_N \Rightarrow \upsilon_0 = x_N \sqrt{\frac{g}{2(h-y_N)}} = (10{,}0\ \text{m}) \times \sqrt{\frac{9{,}81}{2 \times (5{,}0)} \times \frac{\text{m/s}^2}{\text{m}}} = 9{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ΕΝΘΕΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Ένα βομβαρδιστικό αεροπλάνο, που πετά με οριζόντια ταχύτητα μέτρου 175 m/s σε ύψος 800,0 m, προσπαθεί να πλήξει ένα στόχο που βρίσκεται σε μία κεκλιμένη πλαγιά. Η πλαγιά σχηματίζει γωνία 12° με την οριζόντια διεύθυνση. Θα υπολογίσουμε από ποια οριζόντια απόσταση από τον στόχο πρέπει να αφεθεί η βόμβα, έτσι ώστε να πλήξει τον στόχο.



Λόγω αδράνειας, η βόμβα εγκαταλείπει το αεροπλάνο στο σημείο Σ με την ίδια οριζόντια ταχύτητα, μέτρου υ_0 ως προς το έδαφος, και εκτελεί οριζόντια βολή, ακολουθώντας την πράσινη τροχιά. Χρησιμοποιώντας το σύστημα αξόνων του σχήματος, με σημείο αναφοράς το Ο, η εξίσωση της τροχιάς της βόμβας δίνεται από τη σχέση:

$$y = h - \frac{g}{2\upsilon_0^2}x^2$$

Οι συντεταγμένες του στόχου, (x_A , y_A), ικανοποιούν τη σχέση:

$$\varepsilon\varphi 12^o = \frac{y_A}{x_A} \Rightarrow y_A = x_A\, \varepsilon\varphi 12^o$$

Επειδή η τροχιά της βόμβας διέρχεται από τον στόχο, οι συντεταγμένες του στόχου ικανοποιούν επίσης την εξίσωση της τροχιάς. Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, συμπεραίνουμε:

$$\left.\begin{aligned} y_A &= h - \frac{g}{2\upsilon_0^2}x_A^2 \\ y_A &= x_A\, \varepsilon\varphi 12^o \end{aligned}\right\} \Rightarrow h - \frac{g}{2\upsilon_0^2}x_A^2 = x_A\, \varepsilon\varphi 12^o \Rightarrow \frac{g}{2\upsilon_0^2}x_A^2 + x_A\, \varepsilon\varphi 12^o - h = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι **δευτεροβάθμια** ως προς την άγνωστη συντεταγμένη x_A, της μορφής $\alpha x_A^2 + \beta x_A + \gamma = 0$ με $\alpha = g/(2\upsilon_0^2)$, $\beta = \varepsilon\varphi 12^o$ και $\gamma = -h$. **Θυμίζουμε ότι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι**:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Από τις δύο ρίζες **επιλέγουμε τη θετική**. Αντικαθιστώντας $\alpha = g/(2\upsilon_0^2)$, $\beta = \varepsilon\varphi 12^o$ και $\gamma = -h$ παίρνουμε:

$$x_A = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-\varepsilon\varphi 12^o + \sqrt{\varepsilon\varphi^2 12^o - 4(g/2\upsilon_0^2)(-h)}}{2(g/2\upsilon_0^2)} = \frac{-\upsilon_0^2\varepsilon\varphi 12^o + \upsilon_0^2\sqrt{\varepsilon\varphi^2 12^o + 2(gh/\upsilon_0^2)}}{g}$$

Τέλος, αντικαθιστούμε τα δεδομένα και βρίσκουμε:

$$x_A = \frac{-(175\ \text{m/s})^2 \times \varepsilon\varphi 12^\circ + (175\ \text{m/s})^2 \sqrt{\varepsilon\varphi^2 12^\circ + 2 \times (9{,}81\ \text{m/s}^2) \times (800{,}0\ \text{m})/(175\ \text{m/s})^2}}{9{,}81\ \text{m/s}^2} \Rightarrow$$

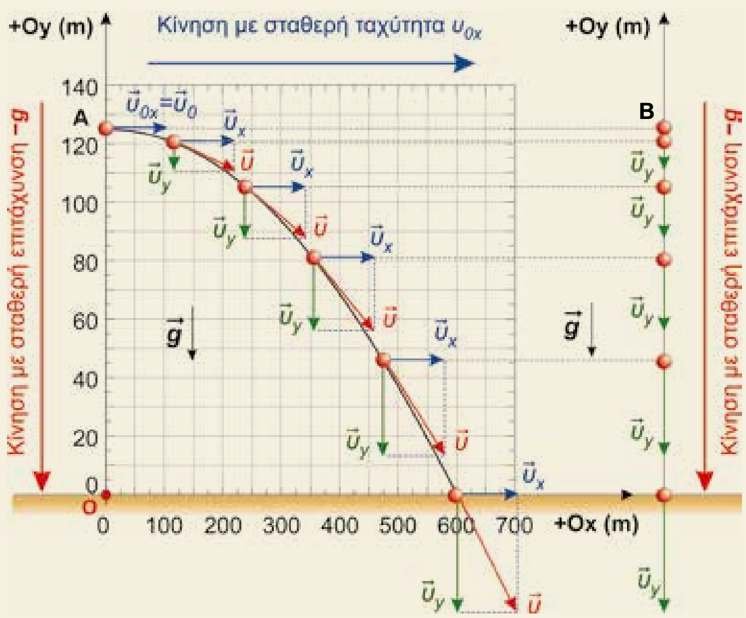
$$x_A = \frac{-6509{,}5 + 175^2 \sqrt{0{,}213^2 + 0{,}513}}{9{,}81}\ \text{m} \cong 1670\ \text{m}$$

2.1.3. Εξαγωγή Συμπερασμάτων για την Οριζόντια Βολή από την Αρχή της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων

Μελετώντας ξεχωριστά την κίνηση του σώματος στην οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση, καταλήγουμε σε συμπεράσματα για την οριζόντια βολή **χωρίς να χρησιμοποιούμε την εξίσωση της τροχιάς**. Η μεθοδολογία αυτή είναι πολύ χρήσιμη, γιατί βοηθά στην καλύτερη κατανόηση της Αρχής της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων.

Ερώτηση 1

Δύο βλήματα **Α** και **Β** ξεκινούν ταυτόχρονα από το ίδιο ύψος h και κινούνται με την επίδραση του βάρους τους. Το βλήμα **Α** εκτοξεύεται με οριζόντια ταχύτητα υ_0 και το βλήμα **Β** αφήνεται από ηρεμία. Ποιο βλήμα φθάνει **πρώτο** στο έδαφος;



Απάντηση

Εστιάζουμε την προσοχή μας στην **κατακόρυφη κίνηση** των δύο βλημάτων. Και για τα δύο βλήματα, η κατακόρυφη κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη από το ίδιο αρχικό ύψος, με μηδενική αρχική κατακόρυφη ταχύτητα και κοινή επιτάχυνση $a = -g$. Άρα, η κατακόρυφη θέση των βλημάτων περιγράφεται από την ίδια εξίσωση:

$$y^{A} = y^{B} = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Συμπέρασμα

Σε κάθε χρονική στιγμή τα βλήματα **Α** και **Β** βρίσκονται **στο ίδιο ύψος**, και φθάνουν **ταυτόχρονα** στο έδαφος.

Το χρονικό διάστημα, που μεσολαβεί από τη στιγμή της εκτόξευσης μέχρι τη στιγμή που το βλήμα φθάνει στο έδαφος, ονομάζεται **χρόνος πτήσης** $t_{\text{πτήσης}}$.

Ερώτηση 2

Πώς εξαρτάται ο **χρόνος πτήσης** της οριζόντιας βολής από την **αρχική ταχύτητα** του βλήματος;

Απάντηση

Για να προσδιορίσουμε τον χρόνο πτήσης, θέτουμε $y = 0$ στην εξίσωση που περιγράφει τη χρονική εξάρτηση της συντεταγμένης y:

$$0 = h - \frac{1}{2}gt^2_{\text{πτήσης}} \Rightarrow t_{\text{πτήσης}} = \sqrt{(2h/g)} \propto \sqrt{h}$$

Συμπεράσματα

- Ο χρόνος πτήσης της οριζόντιας βολής **δεν** εξαρτάται από την αρχική οριζόντια ταχύτητα του βλήματος.
- Ο χρόνος πτήσης καθορίζεται μόνο από την **κατακόρυφη** κίνηση, και είναι ανάλογος με την **τετραγωνική ρίζα** του αρχικού ύψους.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

2.1.3.1. Δύο βλήματα **Α** και **Β** εκτοξεύονται από το ίδιο αρχικό ύψος, με οριζόντιες ταχύτητες μέτρου υ_{A} και $2\upsilon_{A}$. Να συγκρίνετε τους χρόνους πτήσης των βλημάτων.

2.1.3.2. Δύο βλήματα **Α** και **Β** εκτοξεύονται από αρχικά ύψη h και $4h$. Να συγκρίνετε τους χρόνους πτήσης των βλημάτων.

Ερώτηση 3

Πώς εξαρτάται η μέγιστη οριζόντια απομάκρυνση της οριζόντιας βολής από την αρχική ταχύτητα του βλήματος;

Απάντηση

Επειδή η κίνηση κατά την οριζόντια διεύθυνση είναι ευθύγραμμη ομαλή, η οριζόντια μετατόπιση x ενός βλήματος ισούται με $x = \upsilon_0 t$. Η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση προκύπτει για $t = t_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma}$:

$$x_{\mu\varepsilon\gamma} = \upsilon_0 t_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma} = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \propto \upsilon_0 \sqrt{h}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα είχαμε καταλήξει στην **Ενότητα 2.1.2.**, χρησιμοποιώντας την εξίσωση της τροχιάς.

Συμπεράσματα

Η μέγιστη οριζόντια απομάκρυνση ενός βλήματος, που εκτελεί οριζόντια βολή, είναι:

- **Ανάλογη** με την αρχική ταχύτητα του βλήματος.
- **Ανάλογη** με την τετραγωνική ρίζα του αρχικού ύψους.

Προσοχή

Είναι **χρήσιμο** και **επιθυμητό** να μπορείτε να εφαρμόζετε τα προηγούμενα συμπεράσματα στην ανάλυση οριζόντιων βολών, **χωρίς να ανατρέχετε σε εξισώσεις**, όπως δείχνουμε στις επόμενες ερωτήσεις ελέγχου κατανόησης.

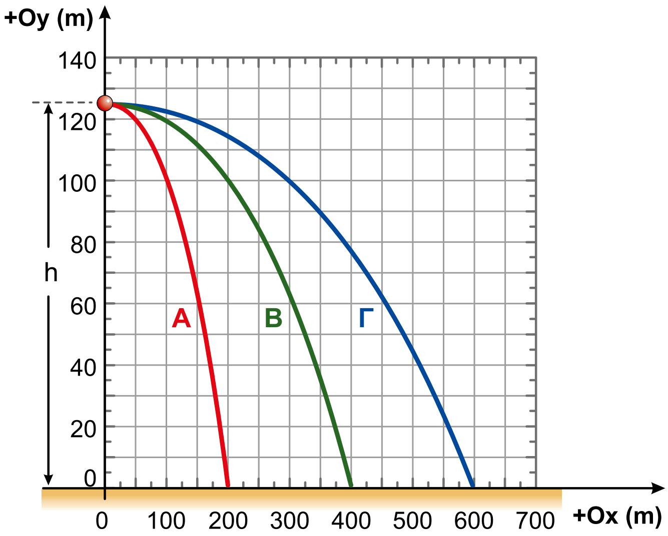
Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

2.1.3.3. Τα βλήματα **Α**, **Β** και **Γ** του επόμενου σχήματος εκτοξεύονται ταυτόχρονα από το ίδιο ύψος h με διαφορετικές οριζόντιες ταχύτητες, και κινούνται μόνο υπό την επίδραση του βάρους τους.

Παρατηρώντας τις τροχιές των βλημάτων, να καθορίσετε:

Α. Ποιό βλήμα φθάνει πρώτο στο έδαφος;

Β. Ποιό βλήμα εκτοξεύεται με τη μεγαλύτερη αρχική ταχύτητα;

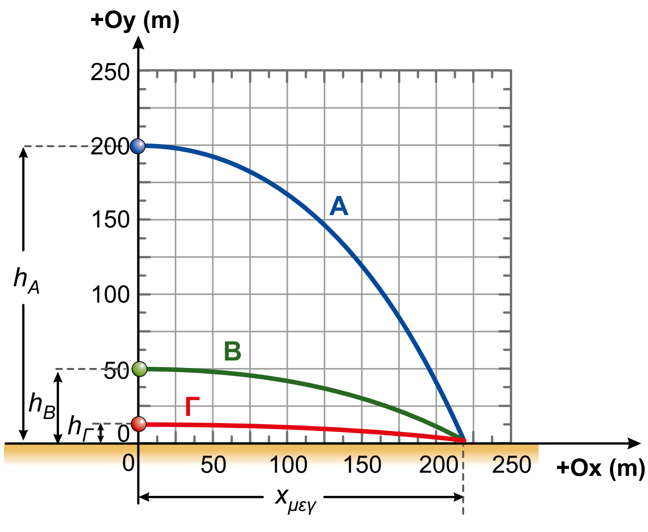


2.1.3.4. Τα βλήματα Α, Β και Γ του πιο κάτω σχήματος εκτοξεύονται σε οριζόντια διεύθυνση από διαφορετικό αρχικό ύψος, και κινούνται μόνο υπό την επίδραση του βάρους τους.

Παρατηρώντας τις τροχιές των βλημάτων, να καθορίσετε:

Α. Ποιό βλήμα φθάνει πρώτο στο έδαφος;

Β. Ποιό βλήμα εκτοξεύεται με μεγαλύτερη αρχική ταχύτητα;



2.2. Πλάγια Βολή από την Επιφάνεια του Εδάφους

Ένα σώμα εκτελεί **πλάγια βολή**, όταν η αρχική ταχύτητα του σώματος έχει **μη μηδενική οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα.** Θα μελετήσουμε την πλάγια βολή από ένα αρχικό σημείο στην επιφάνεια του εδάφους.

Το βλήμα της **Εικόνας 2-3** εκτοξεύεται από το σημείο **O**, σε αρχικό ύψος $y_0 = 0$, με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ που σχηματίζει γωνία $0^o < \theta < 180^o$ με την οριζόντια διεύθυνση. Η ταχύτητα αναλύεται στις συνιστώσες $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta$ και $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \eta\mu\theta$, όπου υ_0 το μέτρο της ταχύτητας. Υποθέτουμε ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, οπότε η συνισταμένη δύναμη στο βλήμα είναι **το βάρος του.**

Εικόνα 2-3
Βλήμα που εκτοξεύεται υπό γωνία $0^o < \theta < 180^o$ και αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$. Το βλήμα διαγράφει την πράσινη καμπυλόγραμμη τροχιά. Η μέγιστη οριζόντια απομάκρυνση από το σημείο εκτόξευσης είναι το βεληνεκές.

Εφαρμόζοντας **ανεξάρτητα** τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στους δύο άξονες, προκύπτουν τα ίδια συμπεράσματα με την οριζόντια βολή:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow a_x = 0$$
$$\sum F_y = -mg \Rightarrow a_y = -g$$

(i) Η **προβολή** του βλήματος στην οριζόντια διεύθυνση εκτελεί **ευθύγραμμη ομαλή κίνηση** με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_x = \upsilon_{0x}$. Η θέση x της προβολής μεταβάλλεται με τον χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης:

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t \Rightarrow x = (\upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta) t$$

όπου θέσαμε $x_0 = 0$, $\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta$.

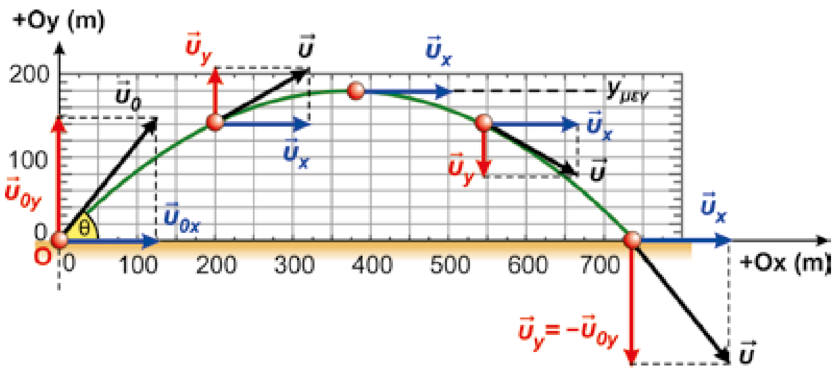
(ii) Η **προβολή** του βλήματος στην κατακόρυφη διεύθυνση εκτελεί **ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση** από την αρχική θέση $y_0 = 0$, με αρχική ταχύτητα $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \eta\mu\theta$ και επιτάχυνση $a_y = -g$. Η θέση y της προβολής περιγράφεται από την εξίσωση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης:

$$y = y_0 + \upsilon_{0y} t + \frac{1}{2} \alpha_y t^2 \Rightarrow y = (\upsilon_0 \eta\mu\theta) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας περιγράφεται από την αντίστοιχη εξίσωση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης:

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + \alpha_y t \Rightarrow \upsilon_y = \upsilon_0 \eta\mu\theta - gt$$

Συνεπώς, η μόνη διαφορά από την οριζόντια βολή είναι ότι το βλήμα έχει **μη μηδενική** αρχική κατακόρυφη ταχύτητα. Οι οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες της ταχύτητας σε διάφορα σημεία της τροχιάς απεικονίζονται στην Εικόνα 2-4.



Εικόνα 2-4
Σε μία πλάγια βολή, η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας του βλήματος παραμένει συνεχώς σταθερή. Η κατακόρυφη συνιστώσα μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, με επιτάχυνση μέτρου *g*.

2.2.1. Εξίσωση Τροχιάς της Πλάγιας Βολής

Ακολουθώντας την ίδια μέθοδο με την περίπτωση της οριζόντιας βολής, μπορούμε να εξαγάγουμε μία σχέση ανάμεσα στις συντεταγμένες x και y της τροχιάς της πλάγιας βολής:

(i) Λύνουμε ως προς το χρόνο στην εξίσωση της συντεταγμένης x:

$$x = \upsilon_{0x} t \Rightarrow t = x/\upsilon_{0x}$$

(ii) Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της συντεταγμένης y:

$$y = \upsilon_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y = \frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_{0x}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{\upsilon_{0x}^2} x^2$$

Η εξίσωση της τροχιάς μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως συνάρτηση του **μέτρου** υ_0 της αρχικής ταχύτητας του βλήματος, και της γωνίας θ. Οι συνιστώσες της ταχύτητας ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_{0x}} = \varepsilon\varphi\theta \quad \text{και} \quad \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta$$

Αντικαθιστούμε και καταλήγουμε στη μορφή:

Εξίσωση Τροχιάς της Πλάγιας Βολής:

$$y = (\varepsilon\varphi\theta)x - \frac{g}{2(\upsilon_0\,\sigma\upsilon\nu\theta)^2}x^2$$

Όπως και στην οριζόντια βολή, η εξίσωση της τροχιάς είναι της μορφής $y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$ με $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \varepsilon\varphi\theta$ και $\lambda_2 = -g/[2\ (\upsilon_0\,\sigma\upsilon\nu\theta)^2]$, δηλαδή πολυώνυμο δευτέρου βαθμού (παραβολή).

Προσοχή

- Όπως επισημάναμε στη μελέτη της οριζόντιας βολής, η μορφή της τροχιάς ενός βλήματος, που εκτελεί ελεύθερη πτώση, εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες (ταχύτητα και ύψος εκτόξευσης). Γι αυτό τον λόγο, σας συστήνουμε να **μην απομνημονεύσετε** την πιο πάνω εξίσωση.
- Είναι **πιο χρήσιμο** να κατανοήσετε την διαδικασία εξαγωγής της εξίσωσης τροχιάς, η οποία εφαρμόζεται σε όλες τις περιπτώσεις: Για να βρούμε την εξίσωση της τροχιάς γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης στην οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση, και **απαλείφουμε** το χρόνο.

2.2.2. Μελέτη Προβλημάτων Πλάγιας Βολής με την Εξίσωση της Τροχιάς

Παράδειγμα 1

Υπολογισμός του Βεληνεκούς Βλήματος

Η οριζόντια μετατόπιση του βλήματος, όταν επιστρέφει στο έδαφος, ονομάζεται **βεληνεκές**. Για να υπολογίσουμε το βεληνεκές, θέτουμε $y = 0$ στην εξίσωση της τροχιάς:

$$0 = (\varepsilon\varphi\theta)x_{\mu\varepsilon\gamma} - \frac{g}{2(\upsilon_0\,\sigma\upsilon\nu\theta)^2}x_{\mu\varepsilon\gamma}^2 \Rightarrow x_{\mu\varepsilon\gamma}\left(\varepsilon\varphi\theta - \frac{g}{2(\upsilon_0\,\sigma\upsilon\nu\theta)^2}x_{\mu\varepsilon\gamma}\right) = 0 \Rightarrow x_{\mu\varepsilon\gamma} = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{\upsilon_0^2}{g}(2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta) \end{cases}$$

Η τετριμμένη λύση $x_{\mu\varepsilon\gamma} = 0$ αντιστοιχεί στο αρχικό σημείο εκτόξευσης στο οποίο ισχύει επίσης $y = 0$ (αφού το βλήμα εκτοξεύεται από το έδαφος). Η λύση $x_{\mu\varepsilon\gamma} = \dfrac{\upsilon_0^2}{g}(2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta)$ είναι το ζητούμενο βεληνεκές.

Σημείωση

Στην τριγωνομετρία θα μάθετε ότι το γινόμενο $2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$ ισούται με το ημίτονο της γωνίας 2θ:

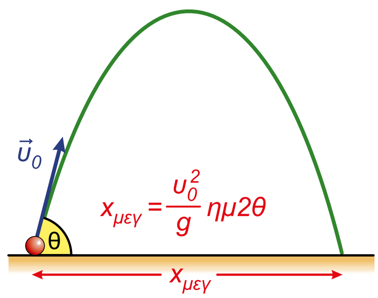
$$2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu 2\theta$$

Για παράδειγμα: $2\eta\mu 45^o \sigma\upsilon\nu 45^o = 2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2\times 2}{2\times 2} = 1 = \eta\mu 90^o$

Χρησιμοποιώντας αυτή την **τριγωνομετρική ταυτότητα**, γράφουμε:

Βεληνεκές πλάγιας βολής:

$$x_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{\upsilon_0^2}{g}\,\eta\mu 2\theta$$



Το βεληνεκές της **πλάγιας βολής** εξαρτάται από το τετράγωνο του μέτρου υ_0 της αρχικής ταχύτητας **και** από τη γωνία εκτόξευσης θ.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

2.2.2.1. Ένα βλήμα εκτοξεύεται από την επιφάνεια του εδάφους υπό γωνία $\theta = 30^o$, με αρχική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 120$ m/s. Να υπολογίσετε το βεληνεκές του βλήματος.

Εξάρτηση του Βεληνεκούς της Πλάγιας Βολής από τη Γωνία Εκτόξευσης θ.

Έστω ότι μεταβάλλουμε τη γωνία εκτόξευσης θ, διατηρώντας **σταθερό το μέτρο** υ_0 της αρχικής ταχύτητας του βλήματος.

- Εάν η γωνία εκτόξευσης είναι ίση με $\theta = 0^o$, το βλήμα ξεκινά με μηδενική κατακόρυφη ταχύτητα από μηδενικό ύψος και αγγίζει αμέσως στο έδαφος. Το βεληνεκές είναι μηδενικό.

- Εάν η γωνία εκτόξευσης είναι ίση με $\theta = 90^o$, το βλήμα έχει συνεχώς μηδενική οριζόντια ταχύτητα, και διαγράφει κατακόρυφη τροχιά. Το βεληνεκές είναι επίσης μηδενικό.

- Δύο βλήματα που εκτοξεύονται με το ίδιο μέτρο ταχύτητας υπό **συμπληρωματικές** γωνίες θ και $90^o - \theta$, έχουν το ίδιο βεληνεκές:

$$x_{\mu\varepsilon\gamma}(\theta) = \frac{\upsilon_0^2}{g}\,\eta\mu 2\theta = \frac{\upsilon_0^2}{g}\,\eta\mu(180^o - 2\theta) = x_{\mu\varepsilon\gamma}(90^o - \theta)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\eta\mu(180^o - \varphi) = \eta\mu\varphi$$

- Από τη σχέση του βεληνεκούς προκύπτει ότι:

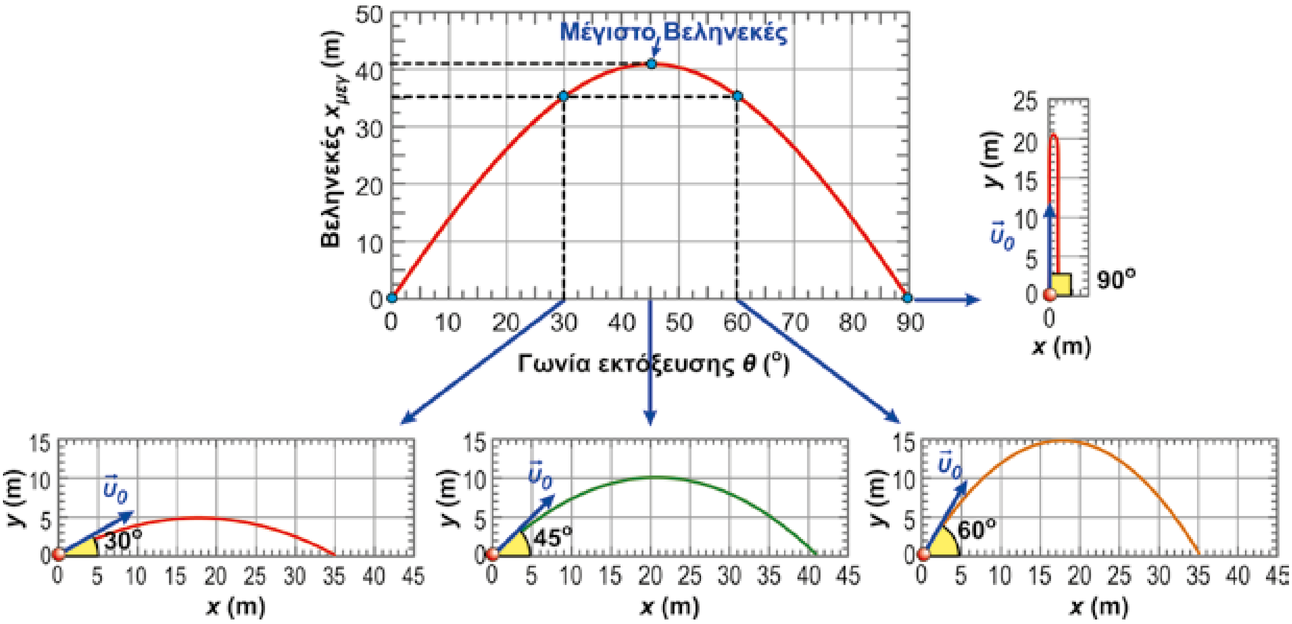
$$\left.\begin{aligned} x_{\mu\varepsilon\gamma} &= \frac{\upsilon_0^2}{g}\,\eta\mu 2\theta \\ \eta\mu 2\theta &\le 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_{\mu\varepsilon\gamma} \le \frac{\upsilon_0^2}{g}$$

Το βεληνεκές αποκτά τη μέγιστη τιμή του (για δεδομένο μέτρο της αρχικής ταχύτητας), όταν η γωνία εκτόξευσης γίνει $\theta = 45^o$:

$$\theta = 45^o \Rightarrow \eta\mu 2\theta = \eta\mu 90^o = 1 \Rightarrow x_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{\upsilon_0^2}{g}$$

Η επόμενη **Εικόνα 2-5** απεικονίζει τη μεταβολή του βεληνεκούς $x_{\mu\varepsilon\gamma}$ (κατακόρυφος άξονας) με τη γωνία εκτόξευσης θ (οριζόντιος άξονας), για βλήμα που εκτοξεύεται από το έδαφος σε διάφορες γωνίες, με αρχική ταχύτητα **σταθερού μέτρου**.

Εικόνα 2-5
Σχέση γωνίας εκτόξευσης - βεληνεκούς, για βλήμα που εκτελεί πλάγια βολή από αρχικό ύψος $h = 0$. Το μέτρο της αρχικής ταχύτητας του βλήματος είναι σταθερό. Το βεληνεκές γίνεται μέγιστο για γωνία εκτόξευσης $\theta = 45^o$. Συμπληρωματικές γωνίες (θ και $90^o - \theta$) αντιστοιχούν στο ίδιο βεληνεκές. Τα κάτω σχήματα δείχνουν παραδείγματα τροχιών για αρχική ταχύτητα μέτρου 20 m/s σε γωνίες 30^o, 45^o και 60^o.



Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

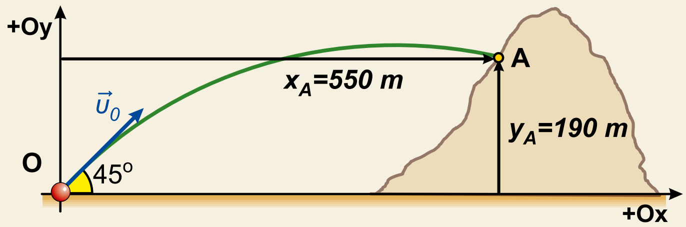
2.2.2.2. Δύο βλήματα **Α** και **Β** εκτοξεύονται από την επιφάνεια του εδάφους, με ταχύτητες ίσου μέτρου. Η αρχική ταχύτητα του βλήματος **Α** σχηματίζει γωνία 25^o με το έδαφος. Υπό ποια γωνία πρέπει να εκτοξευθεί το βλήμα **Β**, για να έχει το ίδιο βεληνεκές με το **Α**;

2.2.2.3. Τέσσερα βλήματα εκτοξεύονται με ταχύτητες ίσου μέτρου από την επιφάνεια οριζόντιου εδάφους, υπό γωνίες 10^o, 30^o, 50^o και 75^o. Να κατατάξετε τα βλήματα κατά αύξουσα σειρά ως προς το βεληνεκές (από το μικρότερο στο μεγαλύτερο).

2.2.2.4. Δύο βλήματα εκτοξεύονται από την επιφάνεια οριζόντιου εδάφους υπό γωνίες 75^o και 45^o. Είναι σωστό να συμπεράνουμε ότι το βλήμα με γωνία εκτόξευσης 45^o έχει μεγαλύτερο βεληνεκές;

Παράδειγμα 2

Ένα κανόνι σκοπεύει υπό γωνία 45^o έναν στόχο **Α**, που βρίσκεται στην πλαγιά ενός βουνού, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να προσδιορίσετε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας, με την οποία πρέπει να εκτοξευθεί το βλήμα για να πετύχει το στόχο.



Χρησιμοποιούμε το σύστημα αξόνων του σχήματος, με σημείο αναφοράς το **Ο**. Οι συντεταγμένες του στόχου είναι $x_A = 550$ m και $y_A = 190$ m. Για να πληγεί ο στόχος, οι συντεταγμένες του πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση της τροχιάς. Άρα:

$$y_A = (\varepsilon\varphi\theta)x_A - \frac{g}{2(\upsilon_0\sigma\upsilon\nu\theta)^2}x_A^2 \Rightarrow \frac{g}{2(\upsilon_0\sigma\upsilon\nu\theta)^2}x_A^2 = (\varepsilon\varphi\theta)x_A - y_A \Rightarrow$$

$$(\upsilon_0\sigma\upsilon\nu\theta)^2 = \frac{gx_A^2}{2\left[(\varepsilon\varphi\theta)x_A - y_A\right]} \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{1}{|\sigma\upsilon\nu\theta|}\sqrt{\frac{gx_A^2}{2\left[(\varepsilon\varphi\theta)x_A - y_A\right]}}$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$\upsilon_0 = \frac{1}{|\sigma\upsilon\nu 45^o|}\sqrt{\frac{(9{,}81\ \text{m/s}^2)\times(550\ \text{m})^2}{2\left[(\varepsilon\varphi 45^o)\times(550\ \text{m}) - (190\ \text{m})\right]}} = \frac{1}{0{,}7071}\sqrt{4121{,}56\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \cong 90{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2.2.3. Μελέτη Προβλημάτων Πλάγιας Βολής με την Αρχή της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων

Με βάση την Αρχή της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων και τη **μορφή της τροχιάς** μίας πλάγιας βολής, είναι δυνατόν να εξαγάγουμε διάφορα συμπεράσματα **χωρίς να χρησιμοποιούμε την εξίσωση της τροχιάς**. Η ανάλυση αυτή είναι πολύ χρήσιμη, γιατί εμπεδώνει βασικές έννοιες της Αρχής της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων.

Χρόνος Πτήσης της Πλάγιας Βολής

Θυμίζουμε ότι ο **χρόνος πτήσης** ισούται με το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από τη στιγμή της εκτόξευσης μέχρι τη στιγμή που το βλήμα φθάνει στο έδαφος. Μπορούμε να υπολογίσουμε τον χρόνο πτήσης της πλάγιας βολής, χρησιμοποιώντας την Αρχή της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων:

1. Μελετούμε την κίνηση στην **οριζόντια διεύθυνση**. Το βλήμα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά με σταθερή οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta$. Σε χρονικό διάστημα $\Delta t = t_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma}$ μετατοπίζεται κατά $x_{\mu\varepsilon\gamma}$. Άρα:

$$x_{\mu\varepsilon\gamma} = \upsilon_{0x}\, t_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma} \Rightarrow$$

$$t_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma} = \frac{x_{\mu\varepsilon\gamma}}{\upsilon_{0x}} = \frac{2\upsilon_0^2}{g}\frac{\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{\upsilon_{0x}} = \frac{2}{g}\frac{\upsilon_{0x}\upsilon_{0y}}{\upsilon_{0x}} = \frac{2\upsilon_{0y}}{g}$$

2. Μελετούμε την κίνηση στην **κατακόρυφη διεύθυνση**. Η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη από αρχικό ύψος $y_0 = 0$, με αρχική κατακόρυφη ταχύτητα $\upsilon_{0y} = \upsilon_0\, \eta\mu\theta$ και σταθερή επιτάχυνση $-g$. Η εξίσωση κίνησης είναι:

$$y = y_0 + \upsilon_{0y} t + \frac{1}{2}\alpha_y t^2 = \upsilon_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Ο χρόνος πτήσης ισούται με τη χρονική στιγμή, στην οποία μηδενίζεται το ύψος του βλήματος:

$$0 = \upsilon_{0y}\, t_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma} - \frac{1}{2} g t^2_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma} \Rightarrow$$

$$t_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma}\left(\upsilon_{0y} - \frac{1}{2} g t_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma}\right) = 0 \Rightarrow t_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma} = \begin{cases} 0 \\ (2\upsilon_{0y})/g \end{cases}$$

Η πρώτη ρίζα αντιστοιχεί στη στιγμή της εκτόξευσης, κατά την οποία το βλήμα βρίσκεται στο έδαφος. Η δεύτερη ρίζα είναι ο ζητούμενος χρόνος πτήσης.

Να παρατηρήσετε ότι:

Ο χρόνος πτήσης της **πλάγιας βολής** είναι ανάλογος με την **αρχική κατακόρυφη ταχύτητα**, και **δεν** εξαρτάται από την αρχική **οριζόντια** ταχύτητα του βλήματος.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

2.2.3.1. Δύο βλήματα **Α** και **Β** εκτοξεύονται από την επιφάνεια του οριζόντιου εδάφους, και οι αρχικές τους ταχύτητες έχουν ίσες **κατακόρυφες** συνιστώσες. Πώς συγκρίνονται οι χρόνοι πτήσης τους;

2.2.3.2. Δύο βλήματα **Α** και **Β** εκτοξεύονται από την επιφάνεια του οριζόντιου εδάφους, και οι αρχικές τους ταχύτητες έχουν ίσες **οριζόντιες** συνιστώσες. Πώς συγκρίνονται οι χρόνοι πτήσης τους;

2.2.3.3. Ένα βλήμα εκτελεί πλάγια βολή από την επιφάνεια του εδάφους. Εάν διπλασιασθεί η **κατακόρυφη** συνιστώσα της αρχικής του ταχύτητας, πώς μεταβάλλεται ο χρόνος πτήσης του;

2.2.3.4. Ένα βλήμα εκτελεί πλάγια βολή από την επιφάνεια του εδάφους. Εάν διπλασιασθεί η **οριζόντια** συνιστώσα της αρχικής του ταχύτητας, πώς μεταβάλλεται ο χρόνος πτήσης του;

Χρόνος Ανόδου της Πλάγιας Βολής

Ο **χρόνος ανόδου** είναι το χρονικό διάστημα από τη στιγμή της εκτόξευσης μέχρι τη στιγμή που μηδενίζεται η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας του βλήματος. Η χρονική εξάρτηση της **κατακόρυφης** ταχύτητας περιγράφεται από τη σχέση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης:

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + \alpha_y t \Rightarrow \upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt$$

Θέτοντας $\upsilon_y = 0$ στην τελευταία σχέση, βρίσκουμε τον χρόνο ανόδου:

$$0 = \upsilon_{0y} - gt_{\text{ανόδου}} \Rightarrow t_{\text{ανόδου}} = \frac{\upsilon_{0y}}{g}$$

Να παρατηρήσετε ότι ο χρόνος ανόδου ισούται με το μισό του χρόνου πτήσης. Άρα, **ο χρόνος καθόδου** του βλήματος ισούται με τον χρόνο ανόδου:

$$t_{\text{καθόδου}} = t_{\text{πτήσης}} - t_{\text{ανόδου}} = \frac{\upsilon_{0y}}{g} = t_{\text{ανόδου}}$$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

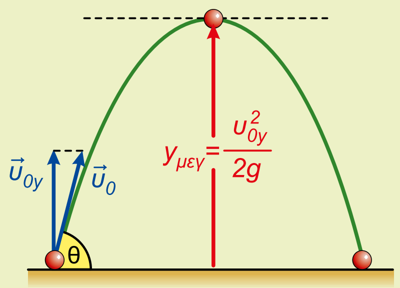
2.2.3.5. Ένα βλήμα εκτελεί πλάγια βολή από την επιφάνεια οριζόντιου εδάφους. Εάν ο χρόνος ανόδου του είναι 15,0 s, ποιός είναι ο χρόνος καθόδου και ο συνολικός χρόνος πτήσης;

2.2.3.6. Δύο βλήματα εκτελούν πλάγια βολή από την επιφάνεια οριζόντιου εδάφους. Είναι δυνατόν να έχουν τον ίδιο χρόνο ανόδου, χωρίς να έχουν την ίδια κατακόρυφη συνιστώσα αρχικής ταχύτητας;

Μέγιστο Ύψος της Πλάγιας Βολής

Το βλήμα φθάνει στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του τη χρονική στιγμή $t = t_{\text{ανόδου}}$ στην οποία μηδενίζεται η κατακόρυφη ταχύτητα. Από την εξίσωση κίνησης στην **κατακόρυφη** διεύθυνση, βρίσκουμε:

$$y_{\mu\varepsilon\gamma} = \upsilon_{0y} t_{\text{ανόδου}} - \frac{1}{2} g t_{\text{ανόδου}}^2 = \upsilon_{0y}\frac{\upsilon_{0y}}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{\upsilon_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g}$$



Μέγιστο Ύψος Πλάγιας Βολής:

$$y_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g}$$

Το μέγιστο ύψος είναι ανάλογο με το τετράγωνο της **κατακόρυφης** αρχικής ταχύτητας.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

2.2.3.7. Ένα βλήμα εκτελεί πλάγια βολή από την επιφάνεια οριζόντιου εδάφους. Εάν **διπλασιασθεί** η κατακόρυφη συνιστώσα της αρχικής του ταχύτητας, πώς επηρεάζεται το μέγιστο ύψος;

2.2.3.8. Ένα βλήμα εκτελεί πλάγια βολή από την επιφάνεια οριζόντιου εδάφους. Εάν διπλασιασθεί η **οριζόντια** συνιστώσα της αρχικής του ταχύτητας, πώς επηρεάζεται το μέγιστο ύψος;

2.2.4. Εξαγωγή Συμπερασμάτων για την Πλάγια Βολή από τη Μορφή της Τροχιάς

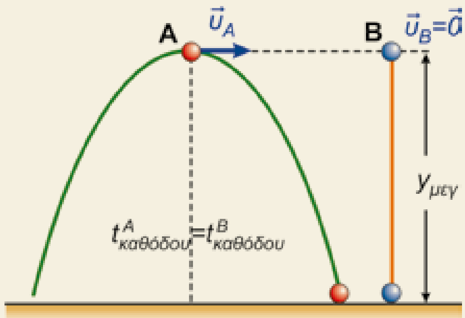
Προσοχή

Είναι **χρήσιμο** και **επιθυμητό** να μπορείτε να εφαρμόζετε τα προηγούμενα συμπεράσματα στην ανάλυση πλάγιων βολών **χωρίς να ανατρέχετε σε εξισώσεις**, όπως δείχνουμε στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1

Πώς μεταβάλλεται ο χρόνος πτήσης με το μέγιστο ύψος της τροχιάς;

Ο χρόνος πτήσης είναι διπλάσιος από τον χρόνο καθόδου του βλήματος, $t_{\pi\tau\eta\sigma\eta\varsigma} = 2t_{\kappa\alpha\theta\acute{o}\delta o\upsilon}$. Γι΄ αυτό, θα ερευνήσουμε πώς μεταβάλλεται ο χρόνος καθόδου με το μέγιστο ύψος.



Θεωρούμε το βλήμα **A**, τη στιγμή που βρίσκεται στο **ανώτατο ύψος** της τροχιάς του **(σημείο A)**. Από αυτή τη στιγμή και μετά, το βλήμα **A** εκτελεί **οριζόντια βολή**. Άρα, ο χρόνος καθόδου του **A** είναι ίδιος με τον χρόνο καθόδου ενός βλήματος **B**, που αφήνεται με μηδενική ταχύτητα από το ίδιο ύψος $y_{\mu\varepsilon\gamma}$.

Όσο μεγαλύτερο είναι το ύψος $y_{\mu\varepsilon\gamma}$, τόσο περισσότερο χρόνο χρειάζονται τα δύο βλήματα για να φθάσουν στο έδαφος. Άρα:

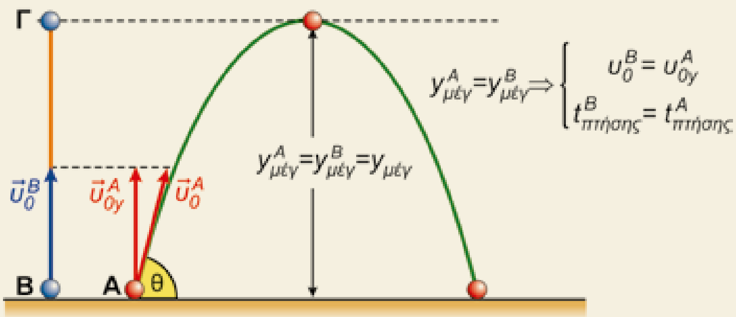
Ο χρόνος καθόδου και ο χρόνος πτήσης της πλάγιας βολής **αυξάνεται** με το μέγιστο ύψος.

Παράδειγμα 2

Το βλήμα **A** εκτοξεύεται με πλάγια ταχύτητα μέτρου υ_0^A και διαγράφει την πράσινη καμπυλόγραμμη τροχιά του πιο κάτω σχήματος. Το βλήμα **B** εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος, διαγράφει την κατακόρυφη τροχιά ΒΓ, και φθάνει στο **ίδιο μέγιστο ύψος** $y_{μεγ}$ με το βλήμα **Α.**

Α. Θα συγκρίνουμε τις αρχικές ταχύτητες των Α και Β.

Β. Εάν τα βλήματα εκτοξεύονται ταυτόχρονα, θα προσδιορίσουμε ποιό βλήμα φθάνει **πρώτο** στο ανώτατο ύψος της τροχιάς του, και ποιο επιστρέφει **πρώτο** στο έδαφος.



Απάντηση

Α. (i) Το βλήμα **Β** διαγράφει κατακόρυφη τροχιά, οπότε η αρχική του ταχύτητα, $\vec{υ}^{B}_{0}$, είναι **κατακόρυφη.**

(ii) Επειδή οι τροχιές των **Α** και **Β** έχουν το **ίδιο μέγιστο ύψος** $y_{μεγ}$ συμπεραίνουμε ότι τα δύο βλήματα έχουν την **ίδια αρχική κατακόρυφη ταχύτητα**: $\vec{υ}^{A}_{0y} = \vec{υ}^{B}_{0}$.

Β. Ο χρόνος ανόδου και ο συνολικός χρόνος πτήσης εξαρτάται από την κατακόρυφη συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας. Άρα, τα βλήματα έχουν ίσους χρόνους ανόδου, $t^{A}_{ανόδου} = t^{B}_{ανόδου}$, και ίσους χρόνους πτήσης: $t^{A}_{πτήσης} = t^{B}_{πτήσης}$. Συνεπώς, φθάνουν ταυτόχρονα στο ανώτατο ύψος και στο έδαφος.

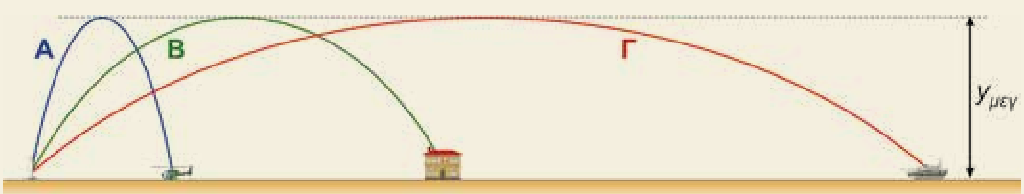
Παράδειγμα 3

Παρατηρώντας τις πιο κάτω τροχιές των βλημάτων **Α**, **Β** και **Γ**, μπορείτε να συμπεράνετε:

Α. Αν τα βλήματα εκτοξευθούν ταυτόχρονα, ποιό φθάνει **πρώτο** στον προορισμό του;

Β. Ποιό βλήμα έχει μεγαλύτερη **κατακόρυφη** συνιστώσα της αρχικής του ταχύτητας;

Γ. Ποιό βλήμα έχει μεγαλύτερη **οριζόντια** συνιστώσα της αρχικής του ταχύτητας;



Απάντηση

Α. Παρατηρούμε ότι και οι τρείς τροχιές έχουν **το ίδιο μέγιστο ύψος** $y_{μεγ}$. Συνεπώς, οι χρόνοι πτήσης των τριών βλημάτων είναι ίσοι μεταξύ τους.

Β. Ο χρόνος πτήσης εξαρτάται από την κατακόρυφη συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας. Αφού τα βλήματα έχουν ίσους χρόνους πτήσης, θα έχουν ίσες κατακόρυφες συνιστώσες αρχικής ταχύτητας: $\upsilon_{0y}^{\mathrm{A}} = \upsilon_{0y}^{\mathrm{B}} = \upsilon_{0y}^{\Gamma}$.

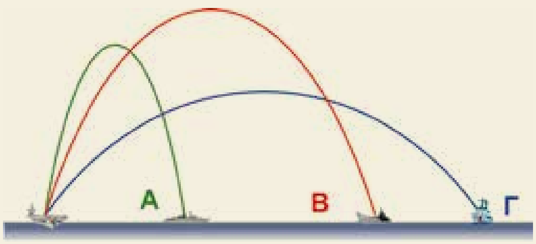
Γ. Τα βλήματα κινούνται στην οριζόντια διεύθυνση με σταθερή ταχύτητα, ίση με την οριζόντια συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας. Αφού τα βλήματα έχουν τον **ίδιο χρόνο πτήσης**, όσο μεγαλύτερη η οριζόντια ταχύτητα, τόσο μεγαλύτερο το βεληνεκές του βλήματος. Επειδή $x_{\mu\varepsilon\gamma}^{\Gamma} > x_{\mu\varepsilon\gamma}^{\mathrm{B}} > x_{\mu\varepsilon\gamma}^{\mathrm{A}}$, συμπεραίνουμε ότι $\upsilon_{0x}^{\Gamma} > \upsilon_{0x}^{\mathrm{B}} > \upsilon_{0x}^{\mathrm{A}}$.

Παράδειγμα 4

Παρατηρώντας τις τροχιές των βλημάτων **Α**, **Β** και **Γ**, μπορείτε να συμπεράνετε:

Α. Αν τα βλήματα εκτοξευτούν ταυτόχρονα, ποιό φθάνει **πρώτο** στον προορισμό του;

Β. Ποιό βλήμα έχει μεγαλύτερη **κατακόρυφη** συνιστώσα αρχικής ταχύτητας;



Απάντηση

Α. Τα μέγιστα ύψη των τροχιών ικανοποιούν τις ανισότητες $y_{\mu\varepsilon\gamma}^{\Gamma} < y_{\mu\varepsilon\gamma}^{\mathrm{A}} < y_{\mu\varepsilon\gamma}^{\mathrm{B}}$. Συνεπώς, οι χρόνοι πτήσης ικανοποιούν τις αντίστοιχες ανισότητες $t_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma}^{\Gamma} < t_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma}^{\mathrm{A}} < t_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma}^{\mathrm{B}}$. Το πλοίο Γ θα βληθεί πρώτο.

Β. Ο χρόνος πτήσης είναι ανάλογος με την κατακόρυφη συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας. Συνεπώς, οι κατακόρυφες συνιστώσες ικανοποιούν τις ίδιες ανισότητες: $\upsilon_{0y}^{\Gamma} < \upsilon_{0y}^{\mathrm{A}} < \upsilon_{0y}^{\mathrm{B}}$.

Να παρατηρήσετε ότι:

- Το βλήμα Γ φθάνει πρώτο, αν και έχει μεγαλύτερο βεληνεκές. Γι΄ αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το Γ έχει τη μεγαλύτερη **οριζόντια** συνιστώσα ταχύτητας.
- Επειδή το βλήμα Α έχει μικρότερο χρόνο πτήσης και μικρότερο βεληνεκές από το Β, δεν μπορούμε να συγκρίνουμε μεταξύ τους τις οριζόντιες ταχύτητες των Α και Β.

Τονίζουμε ότι **δεν χρειάζεται** να γνωρίζουμε τις ταχύτητες των βλημάτων, για να καταλήξουμε στα συμπεράσματα των παραδειγμάτων 1 - 4.

2.2.5. Μελέτη της Οριζόντιας και Πλάγιας Βολής με την Αρχή της Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας

Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας, μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας ενός σώματος, που εκτελεί ελεύθερη πτώση, σαν συνάρτηση του ύψους του σώματος από το έδαφος. Έστω ότι το σώμα μετακινείται από αρχικό ύψος h, με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$, σε ύψος y. Επειδή ισχύει η αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, και η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας του σώματος είναι σταθερή, προκύπτει:

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = 0 \Rightarrow -\Delta U_{\beta\alpha\rho} = \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow -mg\,(y-h) = \frac{1}{2}m\upsilon_y^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{0y}^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_y^2 = \upsilon_{0y}^2 - 2g\,(y-h) \Rightarrow \upsilon_y = \pm\sqrt{\upsilon_{0y}^2 - 2g\,(y-h)}$$

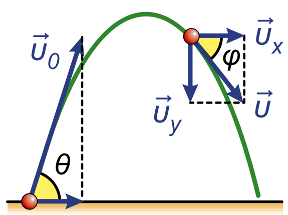
Τα δύο πρόσημα αντιστοιχούν στις δύο δυνατές κατευθύνσεις της συνιστώσας υ_y, όταν ανέρχεται και κατέρχεται το σώμα.

Εφαρμογές:

- Αν απαιτήσουμε να μηδενιστεί η κατακόρυφη ταχύτητα στην πιο πάνω σχέση, υπολογίζουμε αμέσως το μέγιστο ύψος, στο οποίο φθάνει το σώμα:

$$0 = \sqrt{\upsilon_{0y}^2 - 2g\,(y_{\mu\varepsilon\gamma} - h)} \Rightarrow y_{\mu\varepsilon\gamma} - h = \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g} \Rightarrow y_{\mu\varepsilon\gamma} = h + \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g}$$

- Αν διαιρέσουμε με τη (σταθερή) οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας του βλήματος, $\upsilon_x = \upsilon_{0x}$, υπολογίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ϕ, που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας του σώματος με την οριζόντια διεύθυνση, σε οποιοδήποτε ύψος y:



$$\varepsilon\varphi\phi = \frac{|\upsilon_y|}{|\upsilon_x|} = \sqrt{\frac{\upsilon_{0y}^2}{\upsilon_{0x}^2} - \frac{2g\,(y-h)}{\upsilon_{0x}^2}} = \sqrt{\varepsilon\varphi^2\theta + \frac{2g\,(h-y)}{\upsilon_0^2\,\sigma\upsilon\nu^2\theta}}$$

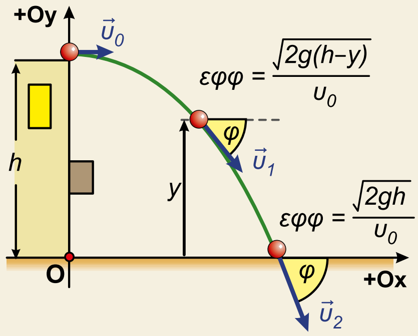
Η γωνία θ είναι η αρχική γωνία εκτόξευσης.

Η τελευταία σχέση ισχύει γενικά, τόσο για οριζόντια όσο και για πλάγια βολή.

Παράδειγμα

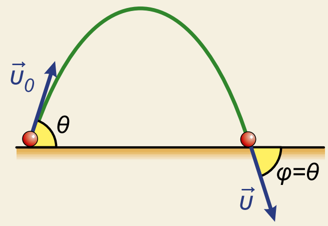
- Έστω ότι ένα βλήμα εκτοξεύεται οριζόντια από αρχικό ύψος h. Αντικαθιστώντας $y = 0$ και $\theta = 0$, βρίσκουμε τη γωνία της ταχύτητας με την οριζόντια διεύθυνση, όταν το σώμα φθάνει στο έδαφος:

$$\varepsilon\varphi\phi = \frac{\sqrt{2gh}}{\upsilon_0}$$



- Έστω ότι το βλήμα εκτοξεύεται από το ύψος του εδάφους, υπό γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση. Αντικαθιστώντας $h = y = 0$, βρίσκουμε ότι επιστρέφει στο έδαφος υπό γωνία ϕ ίση με τη γωνία εκτόξευσης θ:

$$\varepsilon\varphi\phi = \sqrt{\varepsilon\varphi^2\theta + 0} = \varepsilon\varphi\theta \Rightarrow \phi = \theta$$



Γενικότερα, σε **συμμετρικές θέσεις** της τροχιάς, στο **ίδιο ύψος** από το έδαφος, η ταχύτητα σχηματίζει την **ίδια γωνία** με την οριζόντια διεύθυνση.

2.2.6. ΕΝΘΕΤΟ: ΠΛΑΓΙΑ ΒΟΛΗ ΑΠΟ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΑΡΧΙΚΟ ΥΨΟΣ

Η **Εικόνα 2-6** απεικονίζει μία μπάλα του τένις, που κινείται μόνο υπό την επίδραση του βάρους της. Η μπάλα ξεκινά από το σημείο Α με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$ και διαγράφει την κόκκινη καμπυλόγραμμη τροχιά του σχήματος.

Όπως προηγουμένως, η προβολή της μπάλας εκτελεί **ευθύγραμμη ομαλή κίνηση** στην οριζόντια διεύθυνση, με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_x = \upsilon_{0x}$. Η θέση x της μπάλας περιγράφεται από την εξίσωση της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης:

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t$$

Ομοίως, η προβολή της μπάλας εκτελεί **ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση** στην κατακόρυφη διεύθυνση, με την επιτάχυνση της βαρύτητας. Η θέση y της μπάλας περιγράφεται από την εξίσωση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης:

$$y = y_0 + \upsilon_{0y} t + \frac{1}{2}\alpha_y t^2 \Rightarrow y = h + \upsilon_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Απαλείφοντας τον χρόνο, καταλήγουμε στην εξής σχέση ($x_0 = 0$):

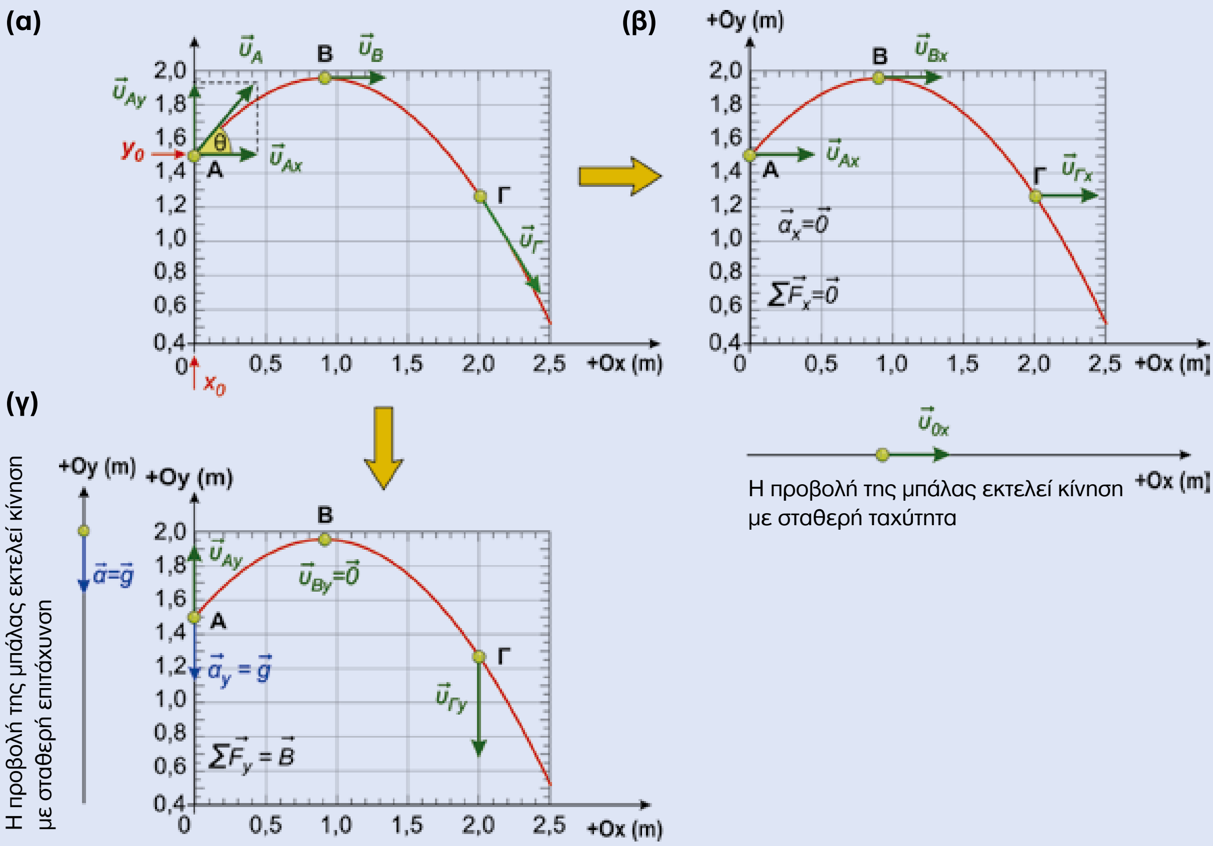
$$y = h + \upsilon_{0y}\frac{x}{\upsilon_{0x}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{\upsilon_{0x}}\right)^2$$

Αντικαθιστώντας $\upsilon_{0y}/\upsilon_{0x} = \varepsilon\varphi\theta$, $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta$, καταλήγουμε στην εξίσωση της τροχιάς:

Εξίσωση της Τροχιάς για Πλάγια Βολή από Αρχικό Ύψος:

$$y = h + (\varepsilon\varphi\theta)x - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{\upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta}\right)^2$$

Εικόνα 2-6
(α) Μία μπάλα του τένις ξεκινά από το σημείο Α και διαγράφει την κόκκινη τροχιά. **(β)** Η προβολή της μπάλας στην οριζόντια διεύθυνση κινείται με σταθερή ταχύτητα. **(γ)** Η προβολή της μπάλας στην κατακόρυφη διεύθυνση κινείται με την επιτάχυνση της βαρύτητας.



Παράδειγμα 1

Ένας αθλητής του ακοντισμού ρίχνει το ακόντιό του υπό γωνία 35^o, με αρχική ταχύτητα μέτρου 25,0 m/s. Το ακόντιο φεύγει από ύψος $h = 1{,}55$ m. Εάν υποθέσουμε ότι το ακόντιο είναι υλικό σημείο, και εκτελεί ελεύθερη πτώση, τι επίδοση θα έχει ο αθλητής;

Στο πρόβλημα αυτό πρέπει να υπολογίσουμε τη μέγιστη οριζόντια μετατόπιση του ακοντίου, υπό την προϋπόθεση ότι εκτελεί πλάγια βολή από μη μηδενικό αρχικό ύψος h. Θέτουμε $y = 0$ στην εξίσωση της τροχιάς, και λύνουμε ως προς την απόσταση $x_{μεγ}$:

$$0 = h + (εφθ)x_{μεγ} - \frac{g}{2(υ_0 συνθ)^2} x_{μεγ}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{g}{2(υ_0 συνθ)^2} x_{μεγ}^2 - (εφθ)x_{μεγ} - h = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι δευτροβάθμια ως προς τη μεταβλητή $x_{μεγ}$, της μορφής $αx_{μεγ}^2 + βx_{μεγ} + γ = 0$ με $α = g/2(υ_0 συνθ)^2$, $β = -\ εφθ$ και $γ = -h$.

Από τις ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης επιλέγουμε τη θετική:

$$x_{μεγ} = \frac{-β + \sqrt{β^2 - 4αγ}}{2α} = \frac{-(-εφθ) + \sqrt{(-εφθ)^2 - 4\left[g/(2υ_0^2 συν^2θ)\right](-h)}}{2\left[g/(2υ_0^2 συν^2θ)\right]} =$$

$$\frac{εφθ + \sqrt{εφ^2θ + 2gh/(υ_0^2 συν^2θ)}}{g/(υ_0^2 συν^2θ)}$$

Τελικά, καταλήγουμε στη σχέση:

Μέγιστη Οριζόντια Μετατόπιση Πλάγιας Βολής από Αρχικό Ύψος h:

$$x_{μεγ} = \frac{υ_0^2 συν^2θ}{g}\left[εφθ + \sqrt{εφ^2θ + 2gh/(υ_0^2 συν^2θ)}\right]$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε:

$$x_{μεγ} = \frac{(25{,}0\ \text{m/s})^2 συν^2 35^o}{9{,}81\ \text{m/s}^2} \times \left[εφ35^o + \sqrt{εφ^2 35^o + 2(9{,}81\ \text{m/s}^2) \times (1{,}55\ \text{m})/\left[(25{,}0\ \text{m/s})^2 \times συν^2 35^o\right]}\right]$$

$$\Rightarrow x_{μεγ} = 62{,}0\ \text{m}$$

Διερεύνηση

Είναι **χρήσιμο** να μελετήσουμε την προηγούμενη σχέση, για κατάλληλα επιλεγμένες τιμές του αρχικού ύψους ή της γωνίας εκτόξευσης:

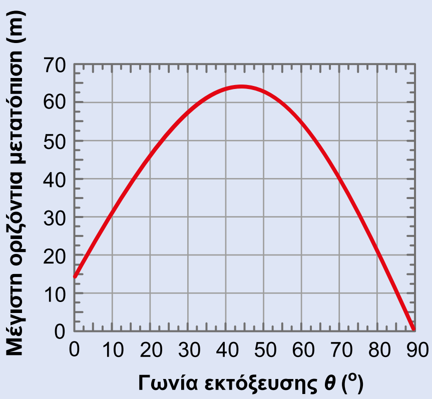
(1) Για μηδενικό αρχικό ύψος $h = 0$, παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα με το βεληνεκές της πλάγιας βολής από το έδαφος:

$$x_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{\upsilon_0^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta}{g}\left[\varepsilon\varphi\theta + \sqrt{\varepsilon\varphi^2\theta}\right] = \frac{\upsilon_0^2}{g} 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\upsilon_0^2}{g}\eta\mu 2\theta$$

(2) Για μηδενική γωνία εκτόξευσης ($\theta = 0^o$), η βολή γίνεται οριζόντια από αρχικό ύψος h. Η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση ισούται με αυτή της οριζόντιας βολής:

$$x_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{\upsilon_0^2}{g}\sqrt{2gh/\upsilon_0^2} = \upsilon_0\sqrt{2h/g}$$

Εικόνα 2-7
Εξάρτηση της μέγιστης οριζόντιας μετατόπισης του ακοντίου (**Παράδειγμα 1**) από τη γωνία εκτόξευσης. Για μηδενική γωνία εκτόξευσης, $\theta = 0$, το μέγεθος $x_{\mu\varepsilon\gamma}$ δεν **μηδενίζεται**, επειδή το σώμα εκτελεί οριζόντια βολή από μη μηδενικό ύψος.



(3) Στην **Εικόνα 2-7** απεικονίζεται η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση $x_{\mu\varepsilon\gamma}$ του βλήματος (κατακόρυφος άξονας) σαν συνάρτηση της γωνίας εκτόξευσης θ (οριζόντιος άξονας). Στη γραφική παράσταση έχει χρησιμοποιηθεί η σχέση με τις αρχικές συνθήκες του **Παραδείγματος 1**.

Παρατηρήστε ότι για γωνία εκτόξευσης $\theta = 90^o$, η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση μηδενίζεται. Αυτό είναι αναμενόμενο, επειδή η βολή γίνεται κατακόρυφη.

Άσκηση
Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση, να αποδείξετε ότι ο **χρόνος πτήσης** της **πλάγιας βολής** από αρχικό ύψος h ισούται με:

$$t_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma} = \frac{\upsilon_{0y} + \sqrt{\upsilon_{0y}^2 + 2gh}}{g}$$

Παράδειγμα 2
Ένας καλαθοσφαιριστής προσπαθεί να πετύχει καλάθι από απόσταση 7,50 m έξω από τη γραμμή των τριπόντων. Το στεφάνι του καλαθιού βρισκεται σε ύψος 3,05 m από το έδαφος.

Α. Εάν η μπάλα εγκαταλείπει τα χέρια του παίκτη από ύψος 2,10 m και υπό γωνία 35^o, να υπολογίσετε την αρχική ταχύτητα που πρέπει να έχει για να μπει στο καλάθι.

Οι συντεταγμένες του καλαθιού πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση της τροχιάς της μπάλας. Συνεπώς:

$$y = h + (\varepsilon\varphi\theta)x - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{\upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{\upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta}\right)^2 = (\varepsilon\varphi\theta)x + h - y \Rightarrow$$

$$(\upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = \frac{gx^2}{2\left[(\varepsilon\varphi\theta)x + h - y\right]} \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{1}{|\sigma\upsilon\nu\theta|}\sqrt{\frac{gx^2}{2\left[(\varepsilon\varphi\theta)x + h - y\right]}}$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε:

$$\upsilon_0 = \frac{1}{|0,866|}\sqrt{\frac{(9,81\ \text{m/s}^2) \times (7,50\ \text{m})^2}{2 \times \left[7,50 \times 0,577 + 2,10 - 3,05\right]\text{m}}} = 10,4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Β. Ο παίκτης πραγματοποιεί άλμα για να αποφύγει έναν αντίπαλό του, οπότε η μπάλα εγκαταλείπει τα χέρια του από ύψος 2,80 m και υπό γωνία 80^o. Να υπολογίσετε το μέτρο που χρειάζεται να έχει η αρχική της ταχύτητα σε αυτή την περίπτωση, για να μπει στο καλάθι.

$$\upsilon_0 = \frac{1}{|0,174|}\sqrt{\frac{(9,81\ \text{m/s}^2) \times (7,50\ \text{m})^2}{2 \times \left[7,50 \times 5,671 + 2,80 - 3,05\right]\text{m}}} = 14,7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Για να είναι **ευθύγραμμη** η τροχιά ενός σώματος, που εκτελεί ελεύθερη πτώση, πρέπει η αρχική ταχύτητα του σώματος:	
α	Να είναι μηδενική.	
β	Να έχει μηδενική οριζόντια συνιστώσα.	
γ	Να έχει μηδενική κατακόρυφη συνιστώσα.	
2	Για ένα σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση:	

α	Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητάς του είναι συνεχώς μηδενική.	
β	Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητάς του είναι σταθερή.	
γ	Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητάς του μεταβάλλεται, εάν η τροχιά είναι καμπυλόγραμμη.	
δ	Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητάς του μεταβάλλεται συνεχώς.	
3	Στην **πλάγια βολή** ενός σώματος, που εκτελεί ελεύθερη πτώση, μεταβάλλεται τόσο η οριζόντια όσο και η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας.	
4	Ένα σώμα εκτελεί **οριζόντια βολή** από κάποιο αρχικό ύψος. Ο **χρόνος πτήσης** του σώματος εξαρτάται:	
α	Από την αρχική του ταχύτητα.	
β	Από το αρχικό ύψος.	
γ	Τόσο από την αρχική ταχύτητα, όσο και από το αρχικό ύψος.	
5	Ένα σώμα εκτελεί οριζόντια βολή από κάποιο αρχικό ύψος. Η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση του σώματος εξαρτάται:	
α	Μόνο από την αρχική του ταχύτητα.	
β	Μόνο από το αρχικό ύψος.	
γ	Τόσο από την αρχική ταχύτητα, όσο και από το αρχικό ύψος.	
6	Ένα σώμα εκτελεί πλάγια βολή, ξεκινώντας από το έδαφος. Ο **χρόνος πτήσης** του σώματος εξαρτάται:	
α	Μόνο από την κατακόρυφη συνιστώσα της αρχικής του ταχύτητας.	
β	Μόνο από την οριζόντια συνιστώσα της αρχικής του ταχύτητας.	
γ	Τόσο από την κατακόρυφη, όσο και από την οριζόντια συνιστώσα της αρχικής του ταχύτητας.	
7	Ένα σώμα εκτελεί πλάγια βολή, ξεκινώντας από το έδαφος. Το **βεληνεκές** του σώματος εξαρτάται:	
α	Μόνο από την κατακόρυφη συνιστώσα της αρχικής του ταχύτητας.	

β	Μόνο από την οριζόντια συνιστώσα της αρχικής του ταχύτητας.	
γ	Τόσο από την κατακόρυφη, όσο και από την οριζόντια συνιστώσα της αρχικής του ταχύτητας.	

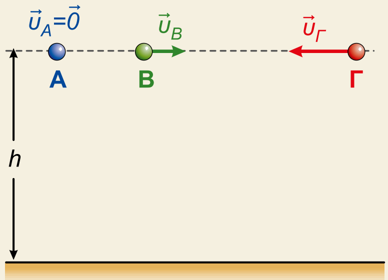
Ασκήσεις

Σημείωση

Σε όλες τις ασκήσεις, η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Οριζόντια Βολή

1 Οι σφαίρες Α, Β και Γ εκτοξεύονται από το ίδιο αρχικό ύψος *h*, με τις αρχικές ταχύτητες που σημειώνονται στο σχήμα.



Α. Ποια σφαίρα έχει τον μεγαλύτερο χρόνο πτήσης;

Β. Για ποια σφαίρα η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση είναι η μεγαλύτερη;

Να **δικαιολογήσετε** τις απαντήσεις σας.

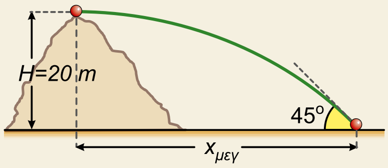
2 Μια σφαίρα εκτοξεύεται οριζόντια με αρχική ταχύτητα μέτρου 245 m/s. Η κάννη του όπλου βρισκεται σε ύψος 1,5 m από το οριζόντιο έδαφος. Να υπολογίσετε τη μέγιστη οριζόντια απομάκρυνση και τον χρόνο πτήσης της σφαίρας.

3 Σε κάποιο από τα πειράματά του από τον πύργο της Πίζας, ο Γαλιλαίος έριξε ταυτόχρονα δύο μεταλλικά σφαιρίδια. Το σφαιρίδιο Α είχε μηδενική αρχική ταχύτητα, και το σφαιρίδιο Β είχε οριζόντια αρχική ταχύτητα, μέτρου $υ$. Να εξηγήσετε:

Α. Ποιο σφαιρίδιο έφθασε πρώτο στο έδαφος.

Β. Ποιο σφαιρίδιο έφθασε στο έδαφος με μεγαλύτερη ταχύτητα.

4 Μια μπάλα εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $υ_0$ από την κορυφή ενός λοφίσκου ύψους *H*. Η μπάλα χτυπά το έδαφος υπό γωνία 45^o.



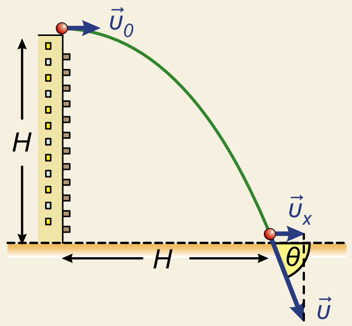
I. Να σχεδιάσετε το διάνυσμα ταχύτητας της μπάλας στο σημείο εκτόξευσης και στο σημείο πρόσκρουσης. Να εκφράσετε τα μέτρα της οριζόντιας και κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας στο σημείο πρόσκρουσης ως προς το μέτρο $υ_0$ της αρχικής ταχύτητας.

II. Θεωρείστε την κίνηση στην **κατακόρυφη** κατεύθυνση. Να εκφράσετε τον χρόνο πτήσης της μπάλας, και το αρχικό ύψος H, σαν συνάρτηση του μέτρου υ_0.

III. Θεωρείστε την κίνηση στην **οριζόντια** διεύθυνση. Να εκφράσετε τη μέγιστη οριζόντια απομάκρυνση της μπάλας σαν συνάρτηση του μέτρου υ_0.

IV. Από τα II και III, να εκφράσετε το μέτρο της ταχύτητας υ_0 και τη μέγιστη οριζόντια απομάκρυνση σαν συνάρτηση του αρχικού ύψους.

V. Εάν το αρχικό ύψος είναι $H = 20$ m, να υπολογίσετε το μέτρο υ_0 της αρχικής ταχύτητας, και τη μέγιστη οριζόντια απομάκρυνση $x_{μεγ}$.



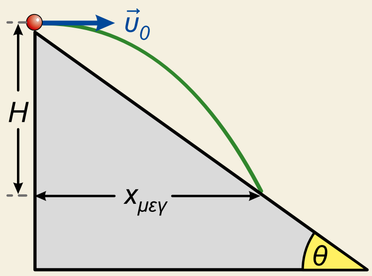
5 Ένα βλήμα εκτοξεύεται οριζόντια από την άκρη ενός ψηλού κτηρίου, όπως στο διπλανό σχήμα, με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0. Η μέγιστη οριζόντια απομάκρυνση του βλήματος είναι ίση με το ύψος H του κτηρίου.

I. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της τροχιάς, να εκφράσετε το μέτρο υ_0 σαν συνάρτηση των H και g.

II. Θεωρείστε την κίνηση στην **οριζόντια διεύθυνση**. Να εκφράσετε τον χρόνο πτήσης του βλήματος σαν συνάρτηση των H, υ_0.

III. Θεωρείστε την κίνηση στην **κατακόρυφη διεύθυνση**. Να εκφράστε την κατακόρυφη συνιστώσα υ_y της ταχύτητας, κατά τη στιγμή της πρόσκρουσης, σαν συνάρτηση των H, υ_0.

IV. Να δείξετε ότι η γωνία θ του διανύσματος της ταχύτητας με την οριζόντια διεύθυνση, κατά την πρόσκρουση, ικανοποιεί τη σχέση $εφ\theta = 2$.

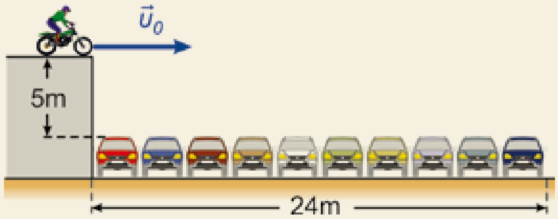


6 Μια πέτρα εκτοξεύεται οριζόντια από την κορυφή ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Όταν συναντήσει το επίπεδο, έχει μετατοπισθεί οριζόντια κατά $x_{μεγ}$ και κατακόρυφα κατά H.

Η αρχική ταχύτητα της πέτρας έχει μέτρο υ_0. Ποιά θα είναι η οριζόντια μετατόπιση $x_{μεγ}$ από το σημείο εκτόξευσης, όταν η σφαίρα θα αγγίξει το κεκλιμένο επίπεδο;

7 Ένας μοτοσυκλετιστής θέλει να εκτελέσει ένα άλμα πάνω από 10 αυτοκίνητα, τα οποία είναι σταθμευμένα το ένα δίπλα στο άλλο, όπως στο επόμενο σχήμα.

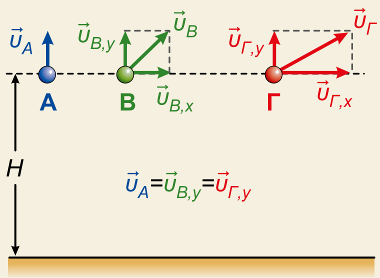
Το συνολικό μήκος των σταθμευμένων οχημάτων είναι 24 m. Ο μοτοσυκλετιστής θέλει να επιχειρήσει το άλμα του από **οριζόντια** πλατφόρμα, που βρίσκεται σε ύψος 5 m από την οροφή των αυτοκινήτων.



Ποιά είναι η ελάχιστη οριζόντια ταχύτητα, με την οποία θα πρέπει να εγκαταλείψει την πλατφόρμα, ώστε να περάσει ακριβώς πάνω από την οροφή του τελευταίου αυτοκινήτου;

Πλάγια Βολή

8 Οι σφαίρες Α, Β και Γ εκτελούν ελεύθερη πτώση από το ίδιο αρχικό ύψος H με τις αρχικές ταχύτητες που σημειώνονται στο σχήμα. Από αυτές τις πληροφορίες, είναι δυνατόν να απαντήσετε:

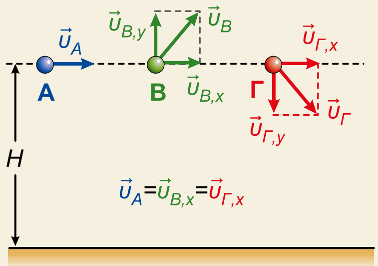


A. Ποια σφαίρα έχει το μεγαλύτερο **χρόνο πτήσης**;

B. Ποια σφαίρα έχει τη μεγαλύτερη οριζόντια απομάκρυνση, όταν φθάνει στο έδαφος;

Να **δικαιολογήσετε** τις απαντήσεις σας.

9 Οι σφαίρες Α, Β και Γ εκτελούν ελεύθερη πτώση από το ίδιο αρχικό ύψος H με τις αρχικές ταχύτητες που σημειώνονται στο σχήμα. Από αυτές τις πληροφορίες, είναι δυνατόν να απαντήσετε:

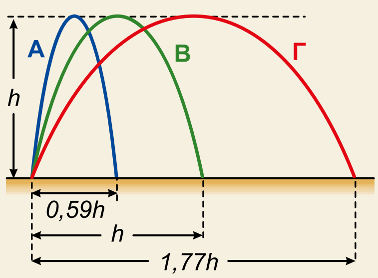


A. Ποια σφαίρα έχει το μεγαλύτερο χρόνο πτήσης;

B. Ποια σφαίρα έχει τη μεγαλύτερη οριζόντια απομάκρυνση, όταν φθάνει στο έδαφος;

Να **δικαιολογήσετε** τις απαντήσεις σας.

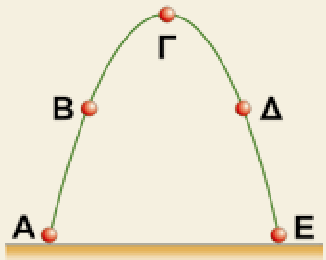
10 Το επόμενο σχήμα απεικονίζει τις τροχιές τριών βλημάτων Α, Β και Γ, που ξεκινούν από το έδαφος με διαφορετικές ταχύτητες, αλλά φθάνουν στο ίδιο μέγιστο ύψος h.



A. Παρατηρώντας τις τροχιές, να συγκρίνετε: **(i)** τον χρόνο πτήσης των τριών βλημάτων, **(ii)** τις κατακόρυφες συνιστώσες, και **(iii)** τις οριζόντιες συνιστώσες των αρχικών τους ταχυτήτων.

B. Να εξαγάγετε σχέσεις για την κατακόρυφη συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας των βλημάτων και το βεληνεκές.

Γ. Από τα δεδομένα για το βεληνεκές των βλημάτων, να υπολογίσετε τις γωνίες εκτόξευσης.



11 Μια μπάλα κινείται από το σημείο εκτόξευσης Α στο σημείο πρόσπτωσης Ε, κατά μήκος της παραβολικής τροχιάς του πιο κάτω σχήματος.

Να κατατάξετε σε φθίνουσα σειρά (από μεγαλύτερη προς μικρότερη τιμή):

Α. Την **κατακόρυφη** συνιστώσα της ταχύτητας της μπάλας στα σημεία Α - Ε.

Β. Την **οριζόντια** συνιστώσα της ταχύτητας της μπάλας στα ίδια σημεία.

Γ. Το μέτρο της ταχύτητας της μπάλας στα ίδια σημεία.

12 Ένα βλήμα βάλλεται με αρχική ταχύτητα μέτρου 30 m/s υπό γωνία 60^o ως προς την οριζόντια διεύθυνση.

Α. Ποια η ταχύτητα του βλήματος στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του; Ποια η διεύθυνση της ταχύτητας στο ίδιο σημείο;

Β. Ποια η επιτάχυνση του βλήματος στο ψηλότερο σημείο (μέτρο και διεύθυνση);

13 Ένα βλήμα εκτοξεύεται από αρχικό ύψος 40 m προς τα πάνω, υπό γωνία 60^o ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Η ταχύτητα του βλήματος έχει αρχικό μέτρο υ_0, και μέτρο 1,2 υ_0, όταν προσκρούει στο έδαφος. Να υπολογίσετε το μέτρο υ_0 της αρχικής ταχύτητας.

14 Δύο μπάλες ρίχνονται ταυτόχρονα από το **ίδιο ύψος** προς τα πάνω, και εκτελούν ελεύθερη πτώση. Η αρχική ταχύτητα της μπάλας Α έχει μέτρο υ_{A0}= 20 m/s και σχηματίζει γωνία 30^o με την οριζόντια διεύθυνση. Η αρχική ταχύτητα της μπάλας Β έχει μέτρο υ_{B0}= 10 m/s και σχηματίζει γωνία 60^o με την οριζόντια διεύθυνση. Ποια από τις δύο μπάλες φθάνει στο έδαφος πιο γρήγορα;

15 Ρίχνετε μια μπάλα προς τα πάνω από την επιφάνεια του εδάφους, με αρχική ταχύτητα μέτρου 10 m/s και υπό γωνία 45^o ως προς το έδαφος.

Α. Να προσδιορίσετε την κατακόρυφη και την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της.

Β. Να υπολογίσετε το βεληνεκές της μπάλας.

Γ. Έστω ότι ρίχνετε τη μπάλα με αρχική ταχύτητα του ίδιου μέτρου, υπό γωνία 30^o ως προς το έδαφος. Πώς συγκρίνεται το βεληνεκές της μπάλας με αυτό του ερωτήματος Β;

16 Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη έκφραση για τη μέγιστη οριζόντια απομάκρυνση, να υπολογίσετε πόσο μακριά μπορείτε να ρίξετε μια μπάλα στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) από το έδαφος, υπό γωνία 45^o,

(β) οριζόντια, από την κορυφή ενός κτηρίου ύψους 12m,

(γ) υπό γωνία 45^o από την κορυφή του ίδιου κτηρίου.

Σε όλες τις περιπτώσεις, η μπάλα έχει αρχική ταχύτητα μέτρου 40 m/s.

17 Ένας ταλαντούχος ποδοσφαιριστής κλωτσά μία μπάλα με ταχύτητα μέτρου υ_0 υπό γωνία 45^o από το έδαφος, και της προσδίδει βεληνεκές 40 m. Ποιό είναι το μέγιστο ύψος, στο οποίο μπορεί να ρίξει ο ποδοσφαιριστής την ίδια μπάλα, εάν την κλωτσήσει κατακόρυφα με ταχύτητα του ίδιου μέτρου υ_0;

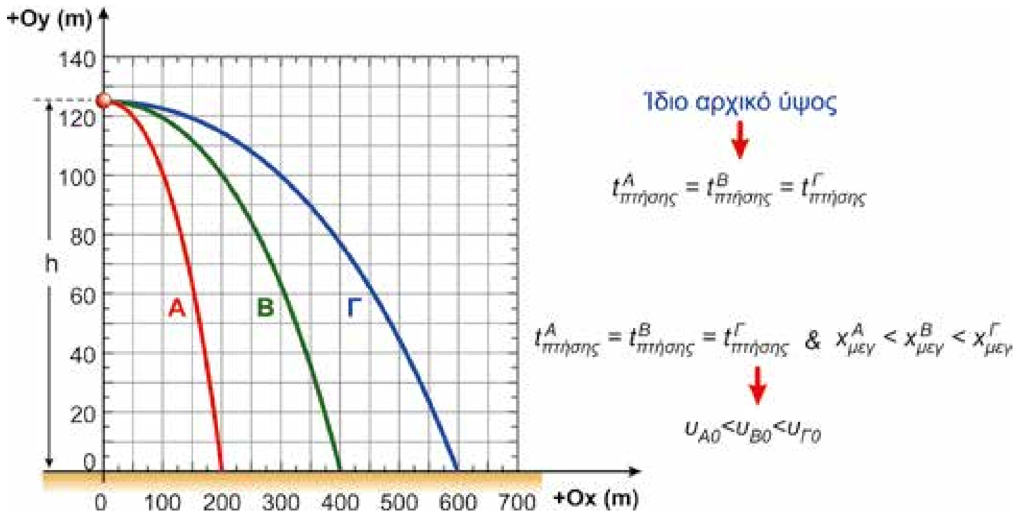
18 Έστω ότι εκτοξεύετε από το έδαφος σε πλάγια διεύθυνση μια βεντούζα, με την χρήση ενός εκτοξευτήρα. Σε ποιά γωνία πρέπει να προσανατολίσετε τον εκτοξευτήρα, έτσι ώστε το μέγιστο ύψος, στο οποίο φθάνει η βεντούζα, να είναι ίσο με το μισό του βεληνεκούς της;

Απαντήσεις Ελέγχου Κατανόησης Εννοιών

2.1.3.1. Τα βλήματα έχουν τους ίδιους χρόνους πτήσης, επειδή εκτελούν οριζόντια βολή από το ίδιο ύψος.

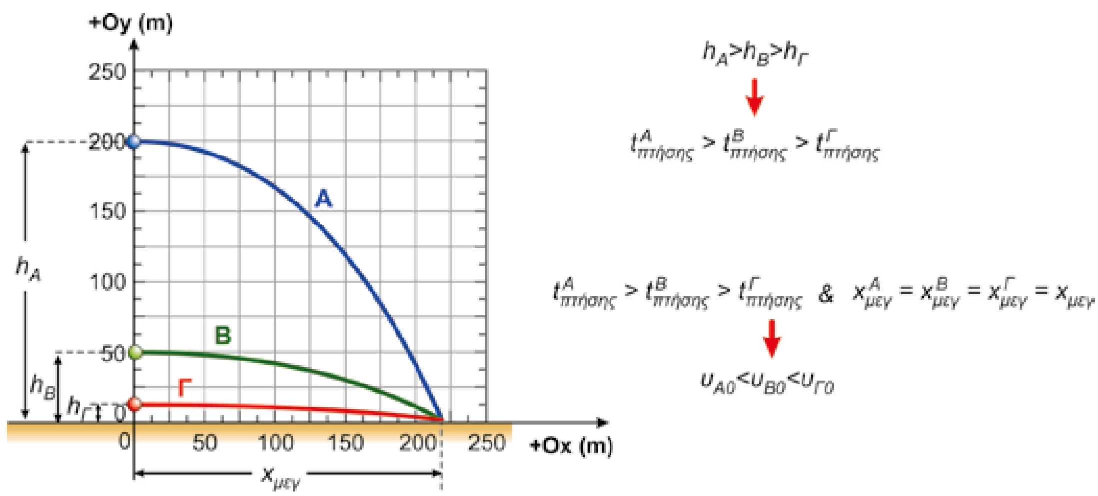
2.1.3.2. Το βλήμα **Β** έχει διπλάσιο χρόνο πτήσης, επειδή εκτοξεύεται από τετραπλάσιο ύψος.

2.1.3.3. **Α.** Τα βλήματα εκτοξεύονται ταυτόχρονα από το ίδιο ύψος και σε **οριζόντια** διεύθυνση, οπότε έχουν μηδενική αρχική κατακόρυφη ταχύτητα. Επειδή τα βλήματα κινούνται με την ίδια κατακόρυφη επιτάχυνση, θα έχουν συνεχώς την ίδια κατακόρυφη ταχύτητα. Συνεπώς, θα βρίσκονται συνεχώς στο ίδιο ύψος και θα φθάσουν **ταυτόχρονα** στο έδαφος: $t^{\mathrm{A}}_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma} = t^{\mathrm{B}}_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma} = t^{\Gamma}_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma}$.



Β. Κατά τη στιγμή που τα τρία βλήματα αγγίζουν το έδαφος, το βλήμα Α έχει μετατοπισθεί λιγότερο στην οριζόντια διεύθυνση από ότι τα Β και Γ. Επειδή οι οριζόντιες ταχύτητες των βλημάτων είναι σταθερές (και ίσες με τις αρχικές τους ταχύτητες), συμπεραίνουμε ότι ικανοποιούν τη σχέση $\upsilon_{\mathrm{A}0} < \upsilon_{\mathrm{B}0} < \upsilon_{\Gamma 0}$.

2.1.3.4. **Α.** Ο χρόνος πτήσης των βλημάτων μεγαλώνει με το αρχικό ύψος.
Συνεπώς, θα ισχύει $t^{\mathrm{A}}_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma} > t^{\mathrm{B}}_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma} > t^{\Gamma}_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma}$.



Β. Τα τρία βλήματα έχουν την ίδια μέγιστη οριζόντια απομάκρυνση, αν και έχουν διαφορετικούς χρόνους πτήσης. Οι οριζόντιες ταχύτητες των βλημάτων είναι σταθερές (και ίσες με τις αρχικές τους ταχύτητες). Επειδή $t^{\mathrm{A}}_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma} > t^{\mathrm{B}}_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma} > t^{\Gamma}_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma}$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\upsilon_{\mathrm{A}0} < \upsilon_{\mathrm{B}0} < \upsilon_{\Gamma 0}$.

2.2.2.1. $x_{\mu\varepsilon\gamma} = \dfrac{\upsilon_0^2}{g}\,\eta\mu 60^o = \dfrac{(120\ \mathrm{m/s})^2}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}} \times 0{,}866 \cong 1\,270\ \mathrm{m}$

2.2.2.2. 65^o

2.2.2.3. 10^o, 75^o, 30^o, 50^o.

2.2.2.4. Όχι, διότι δεν γνωρίζουμε εάν τα βλήματα έχουν ταχύτητες ίσου μέτρου.

2.2.3.1. Οι χρόνοι πτήσης είναι ίσοι.

2.2.3.2. Δεν μπορούμε να απαντήσουμε, διότι δεν γνωρίζουμε τις κατακόρυφες ταχύτητες.

2.2.3.3. Διπλασιάζεται.

2.2.3.4. Δεν μεταβάλλεται.

2.2.3.5. 15,0 s και 30,0 s .

2.2.3.6. Όχι (εφόσον η αντίσταση του αέρα είνα αμελητέα).

2.2.3.7. Τετραπλασιάζεται.

2.2.3.8. Δεν επηρεάζεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Στο Κεφάλαιο 3:

I. Μελετούμε τη σχετική κίνηση σωμάτων:

- **Συζητούμε** την εξάρτηση της ταχύτητας ενός σώματος από το **σύστημα αναφοράς**.
- **Υπολογίζουμε** τη σχετική ταχύτητα ενός σώματος **Β** ως προς ένα σώμα **Α**.
- **Αναλύουμε** την τροχιά κίνησης ενός σώματος ως προς συστήματα αναφοράς σε σχετική κίνηση.

II. Διαχωρίζουμε τα αδρανειακά από τα μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς:

- **Κατανοούμε** ότι ένα σύστημα αναφοράς λέγεται **αδρανειακό**, όταν ισχύουν σε αυτό οι νόμοι του Νεύτωνα.
- **Αναφέρουμε** ότι δύο **αδρανειακά** συστήματα αναφοράς κινούνται με **σταθερή ταχύτητα**, το ένα ως προς το άλλο.
- **Αναφέρουμε** ότι ένα **μη αδρανειακό** σύστημα αναφοράς **επιταχύνεται** ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς.
- **Αναλύουμε** ένα παράδειγμα μη αδρανειακού συστήματος, τον επιταχυνόμενο ανελκυστήρα σε ελεύθερη πτώση.

Όπως εξηγήσαμε στο **Κεφάλαιο 1**, περιγράφουμε την κίνηση ενός σώματος με ένα **σύστημα αναφοράς**, που αποτελείται από ένα *ακίνητο* σημείο αναφοράς και έναν βαθμονομημένο άξονα (για κίνηση σε ευθεία) ή δύο κάθετους μεταξύ τους βαθμονομημένους άξονες (για κίνηση σε επίπεδο).

Στη γενικότερη περίπτωση, μπορούμε να ορίσουμε συστήματα αναφοράς που *κινούνται* το ένα ως προς το άλλο (βρίσκονται σε **σχετική κίνηση**). Κάθε σύστημα αναφοράς είναι συνδεδεμένο με έναν **παρατηρητή**, που κινείται μαζί του. Παρατηρητές σε **διαφορετικά συστήματα** καταλήγουν σε **διαφορετικά συμπεράσματα** για τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση του *ίδιου σώματος*.

Για Παράδειγμα

- Ένα αυτοκίνητο κινείται ως προς έναν τροχονόμο, αλλά φαίνεται ακίνητο ως προς τον οδηγό του.

- Ένα δέντρο φαίνεται ακίνητο ως προς τον ίδιο τροχονόμο, αλλά κινείται ως προς τον οδηγό του αυτοκινήτου.

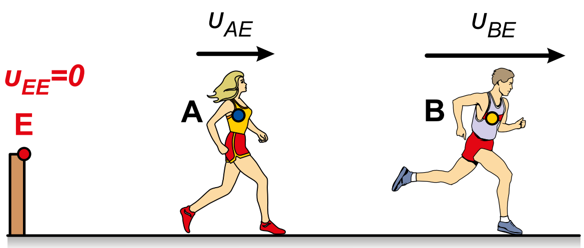
- Ως προς έναν παρατηρητή στη Γη, η Σελήνη περιφέρεται γύρω από τη Γη, αλλά η Γη είναι ακίνητη. Ως προς έναν αστροναύτη στη Σελήνη, η Γη περιφέρεται γύρω από τη Σελήνη, αλλά η Σελήνη είναι ακίνητη.

Ο Γαλιλαίος είχε καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η Γη κινείται γύρω από τον Ήλιο. Επειδή αυτό το συμπέρασμα ερχόταν σε αντίθεση με τις θρησκευτικές αντιλήψεις της εποχής του, υποχρεώθηκε να το αποκηρύξει. Σύμφωνα με ένα ιστορικό ανέκδοτο, ο Γαλιλαίος τότε είπε τη φράση «*E pur si muove*» («και όμως κινείται»).

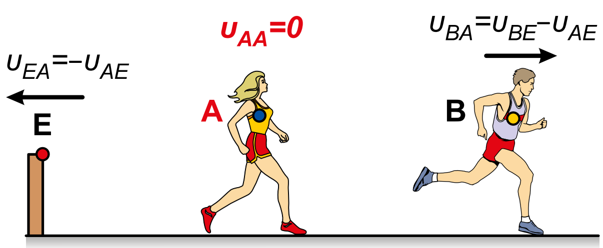
3.1. Σχετική Κίνηση σε ευθεία

Οι αθλητές Α και Β της **Εικόνας 3-1** κινούνται κατά μήκος ενός ευθύγραμμου δρόμου.

(α) Ως προς το έδαφος (σημείο Ε)



(β) Ως προς την αθλήτρια Α



Εικόνα 3-1
Ταχύτητες των αθλητών **Α** και **Β** και του εδάφους (σημείο **Ε**) **(α)** ***ως προς το έδαφος*** (σημείο **Ε**) και **(β)** ***ως προς την αθλήτρια Α***.

Τα μεγέθη υ_{AE} και υ_{BE} της **Εικόνας 3-1(α)** συμβολίζουν τις ταχύτητες των **Α** και **Β** ***ως προς το ακίνητο σημείο Ε του εδάφους***.

Σημείωση

- Στο **Κεφάλαιο 3** δηλώνουμε με το σύμβολο $\upsilon_{\Sigma\Pi}$ την **σχετική ταχύτητα** ενός σώματος **Σ** ως προς τον παρατηρητή (ή σύστημα αναφοράς) **Π.**
- Ομοίως, δηλώνουμε ως $\upsilon_{\Pi\Pi}$ τη (μηδενική) ταχύτητα ενός παρατηρητή **Π** ***ως προς τον εαυτό του***.

Στην **Εικόνα 3-1(β)** απεικονίζονται οι ταχύτητες των **Α**, **Β** και **Ε** ως προς το σύστημα αναφοράς **της αθλήτριας Α**.

Έστω ότι γνωρίζουμε τις ταχύτητες υ_{AE} και υ_{BE} των **Α** και **Β**, ως προς το **ίδιο** σύστημα αναφοράς (το σημείο **Ε**). Η **σχετική ταχύτητα** υ_{BA} του αθλητή **Β** ως προς την αθλήτρια **Α**, υπολογίζεται από **τη διαφορά** των ταχυτήτων των **Β** και **Α** ως προς το **κοινό** σύστημα αναφοράς **Ε**.

Σχετική Ταχύτητα **Β** ως προς το Σύστημα Αναφοράς **Α**	=	Ταχύτητα **Β** ως προς το Σύστημα Αναφοράς **Ε**	−	Ταχύτητα **Α** ως προς το Σύστημα Αναφοράς **Ε**
υ_{BA}	=	υ_{BE}	−	υ_{AE}

Προσοχή
Στην σχέση εισέρχονται οι **αλγεβρικές τιμές** των ταχυτήτων.

Παράδειγμα

Έστω ότι οι αθλητές **Α** και **Β** κινούνται με ταχύτητες $\upsilon_{\mathrm{AE}} = +3$ m/s και $\upsilon_{\mathrm{BE}} = +9$ m/s ως προς το έδαφος. Η σχετική ταχύτητα του **Β** ως προς την **Α** ισούται με $\upsilon_{\mathrm{BA}} = \upsilon_{\mathrm{BE}} - \upsilon_{\mathrm{AE}} = (9\ \mathrm{m/s}) - (3\ \mathrm{m/s}) = +6\ \mathrm{m/s}$.

Έλεγχος

Για να βεβαιωθείτε ότι έχετε γράψει σωστά την πιο πάνω σχέση, θα υπολογίζετε την ταχύτητα ενός παρατηρητή ή σώματος **ως προς τον εαυτό του.** Για να είναι σωστή η σχέση, θα πρέπει να βρίσκετε μηδενική ταχύτητα.

Παράδειγμα

(I) Υπολογίζουμε την ταχύτητα της αθλήτριας **Α** ως προς τον εαυτό της, βάζοντας $\mathrm{B} = \mathrm{A}$:

$$\upsilon_{\mathrm{AA}} = \upsilon_{\mathrm{AE}} - \upsilon_{\mathrm{AE}} = 0$$

(II) Υπολογίζουμε την ταχύτητα του αθλητή **Β** ως προς τον εαυτό του, βάζοντας $\mathrm{A} = \mathrm{B}$:

$$\upsilon_{\mathrm{BB}} = \upsilon_{\mathrm{BE}} - \upsilon_{\mathrm{BE}} = 0$$

Η πιο πάνω σχέση ισχύει για οποιαδήποτε τρία σώματα ή συστήματα αναφοράς **Α**, **Β** και **Ε.** Έτσι:

1. Από τις ταχύτητες των **Ε** και **Α** ως προς το **Ε**, βρίσκουμε τη σχετική ταχύτητα του εδάφους **Ε** ως προς την αθλήτρια **Α**:

$$\upsilon_{\mathrm{EA}} = \upsilon_{\mathrm{EE}} - \upsilon_{\mathrm{AE}} = 0 - \upsilon_{\mathrm{AE}} = -\upsilon_{\mathrm{AE}}$$

2. Από τις ταχύτητες των **Β** και **Ε** ***ως προς την αθλήτρια*** **Α**, βρίσκουμε τη σχετική ταχύτητα του αθλητή **Β** ως προς το **Ε:**

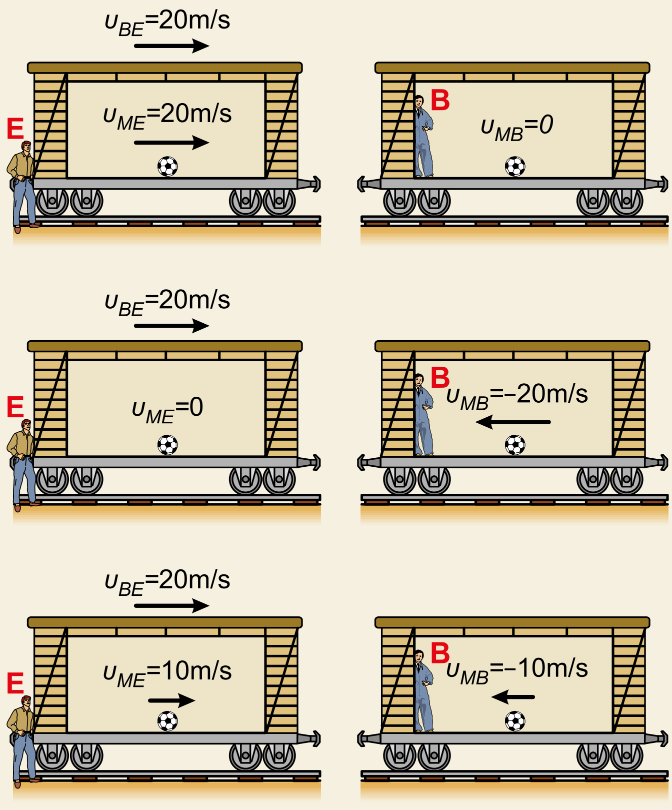
$$\upsilon_{\mathrm{BE}} = \upsilon_{\mathrm{BA}} - \upsilon_{\mathrm{EA}}$$

Παράδειγμα

Κίνηση Βαγονιού σε Ευθεία Γραμμή

- Η μπάλα και το βαγόνι κινούνται με την ίδια ταχύτητα ***ως προς το έδαφος*** ($\upsilon_{\mathrm{ME}} = \upsilon_{\mathrm{BE}}$). Η σχετική ταχύτητα της μπάλας ***ως προς το βαγόνι*** είναι ίση με μηδέν: $\upsilon_{\mathrm{MB}} = \upsilon_{\mathrm{ME}} - \upsilon_{\mathrm{BE}} = 0$.

- Η μπάλα είναι ακίνητη ***ως προς το έδαφος*** ($\upsilon_{\mathrm{ME}} = 0$). Η σχετική ταχύτητα της μπάλας ***ως προς*** *το βαγόνι* ισούται με: $\upsilon_{MB} = \upsilon_{ME} - \upsilon_{BE} = 0 - \upsilon_{BE} = -\upsilon_{BE}$.



Ως προς το έδαφος (Ε) **Ως προς το βαγόνι (Β)**

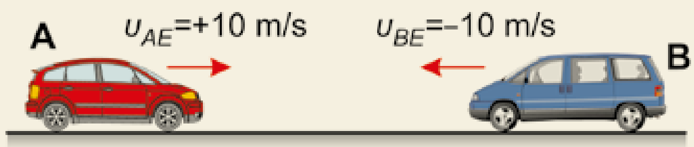
- Εάν η μπάλα κινείται με μικρότερη ταχύτητα από το βαγόνι ***ως προς το έδαφος***, φαίνεται να κινείται προς την **αντίθετη κατεύθυνση** *ως προς το βαγόνι*. Π.χ. εάν η μπάλα και το βαγόνι κινούνται με ταχύτητες $\upsilon_{ME} = 10$ m/s και $\upsilon_{BE} = 20$ m/s ***ως προς το έδαφος***, η μπάλα φαίνεται να κινείται με ταχύτητα $\upsilon_{MB} = \upsilon_{ME} - \upsilon_{BE} = -10$ m/s ***ως προς το βαγόνι***.

Παράδειγμα

Κίνηση Αυτοκινήτων σε Ευθύγραμμο Δρόμο

Δύο αυτοκίνητα **Α** και **Β** κινούνται με ταχύτητες $\upsilon_{AE} = +10$ m/s και $\upsilon_{BE} = -10$ m/s ως προς το έδαφος.

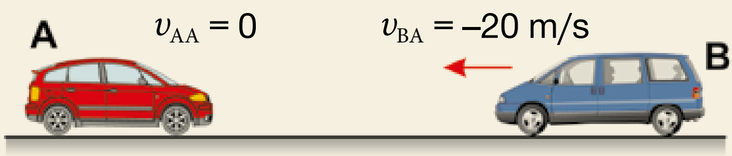
Ως προς το έδαφος (Ε)



Α. Ποιά είναι η σχετική ταχύτητα του **Β** ως προς το **Α**;

$$\upsilon_{BA} = \upsilon_{BE} - \upsilon_{AE} = (-10 \text{ m/s}) - (+10 \text{ m/s}) = -20 \text{ m/s}$$

Ως προς το αυτοκίνητο A



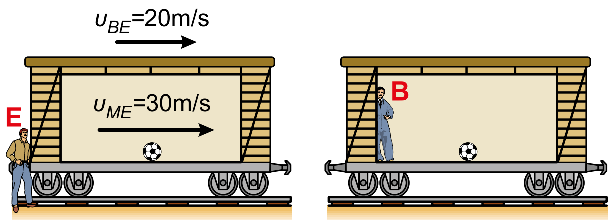
B. Ποια είναι η σχετική ταχύτητα του **A** ως προς το **B**;

$$\upsilon_{AB} = \upsilon_{AE} - \upsilon_{BE} = (10 \text{ m/s}) - (-10 \text{ m/s}) = +20 \text{ m/s} = -\upsilon_{BA}$$

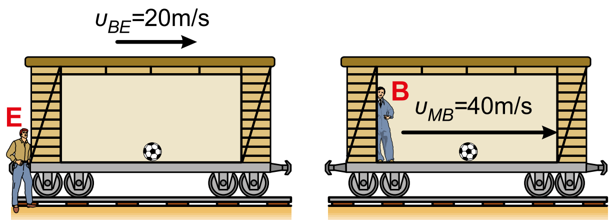
Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

3.1.1. Το βαγόνι **B** κινείται σε ευθύγραμμη σιδηροτροχιά. Μέσα στο βαγόνι βρίσκεται μία μπάλα **M**, που κινείται παράλληλα προς τη σιδηροτροχιά.

(α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα υ_{MB} της μπάλας ως προς το βαγόνι.



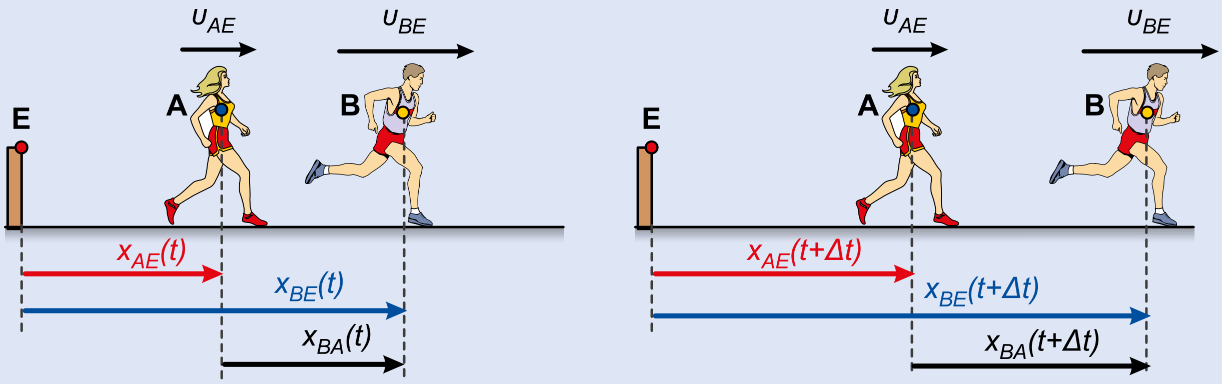
(β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα υ_{ME} της μπάλας ως προς το έδαφος.



ΕΝΘΕΤΟ: Απόδειξη της Σχέσης για τη Σχετική Ταχύτητα

Οι αθλητές **A** και **B** της **Εικόνας 3-2** κινούνται κατά μήκος ενός ευθύγραμμου δρόμου. Θα προσδιορίσουμε τις θέσεις των αθλητών **(i)** ως προς το ακίνητο σημείο αναφοράς του εδάφους **E**, και **(ii)** ως προς το σημείο αναφοράς της αθλήτριας, **A**.

Στο **αριστερό** σχήμα απεικονίζονται οι αθλητές τη χρονική στιγμή *t*. *Ως προς το ακίνητο σημείο* **E**, η



Εικόνα 3-2
Οι αθλητές **A** και **B** κινούνται σε ευθύγραμμο δρόμο. Οι θέσεις των **A** και **B** ***ως προς το σημείο*** **E** δηλώνονται από τις αλγεβρικές τιμές x_{AE} και x_{BE}. Η θέση του **B** ως προς την **A** εκφράζεται από τη διαφορά $x_{\mathrm{BA}} = x_{\mathrm{BE}} - x_{\mathrm{AE}}$. **Αριστερά:** Χρονική στιγμή t. **Δεξιά:** Χρονική στιγμή $t + \Delta t$.

θέση της **A** περιγράφεται από το βέλος με αρχή το σημείο E και τέλος το σημείο A, ή ισοδύναμα από την αλγεβρική τιμή $x_{\mathrm{AE}}(t)$. Όμοια, η θέση του B εκφράζεται από την αλγεβρική τιμή $x_{\mathrm{BE}}(t)$. Η θέση του **B** ***ως προς την*** **A** περιγράφεται από το βέλος με αρχή το σημείο **A** και τέλος το **B**, ή **ισοδύναμα** από τη διαφορά αλγεβρικών τιμών:

$$x_{\mathrm{BA}}(t) = x_{\mathrm{BE}}(t) - x_{\mathrm{AE}}(t)$$

Σημείωση

- Όπως και για την ταχύτητα, το σύμβολο $x_{\Sigma\Pi}$ θα δηλώνει τη θέση του σώματος **Σ** ως προς τον παρατηρητή (ή σύστημα αναφοράς) **Π.**

Οι θέσεις x_{AE}, x_{BE} και x_{BA} μεταβάλλονται γενικά με τον χρόνο, αλλά η προηγούμενη σχέση ισχύει για **κάθε χρονική στιγμή.** Για παράδειγμα, στο **δεξί** σχήμα της **Εικόνας 3-2** απεικονίζονται οι αθλητές τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$. Από το σχήμα προκύπτει ότι:

$$x_{\mathrm{BA}}(t+\Delta t) = x_{\mathrm{BE}}(t+\Delta t) - x_{\mathrm{AE}}(t+\Delta t)$$

Εάν οι χρονικές στιγμές t και $t + \Delta t$ απέχουν πολύ λίγο μεταξύ τους, καταλήγουμε σε μία σχέση για τις **στιγμιαίες** ταχύτητες του αθλητή **B** ως προς το σημείο αναφοράς **E** και την αθλήτρια **A**:

$$\left.\begin{aligned} x_{\mathrm{BA}}(t) &= x_{\mathrm{BE}}(t) - x_{\mathrm{AE}}(t) \\ x_{\mathrm{BA}}(t+\Delta t) &= x_{\mathrm{BE}}(t+\Delta t) - x_{\mathrm{AE}}(t+\Delta t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{x_{\mathrm{BA}}(t+\Delta t) - x_{\mathrm{BA}}(t)}_{=\Delta x_{\mathrm{BA}}} = \underbrace{x_{\mathrm{BE}}(t+\Delta t) - x_{\mathrm{BE}}(t)}_{=\Delta x_{\mathrm{BE}}} - \underbrace{\left[x_{\mathrm{AE}}(t+\Delta t) - x_{\mathrm{AE}}(t)\right]}_{=\Delta x_{\mathrm{AE}}}$$

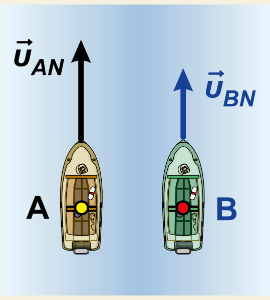
$$\Rightarrow \frac{\Delta x_{\mathrm{BA}}}{\Delta t} = \frac{\Delta x_{\mathrm{BE}}}{\Delta t} - \frac{\Delta x_{\mathrm{AE}}}{\Delta t} \Rightarrow \upsilon_{\mathrm{BA}} = \upsilon_{\mathrm{BE}} - \upsilon_{\mathrm{AE}}$$

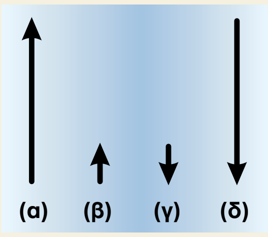
Τα μεγέθη υ_{BA} και υ_{BE} είναι οι ταχύτητες του αθλητή **B** ως προς την αθλήτρια **A** και το σημείο **E**, αντίστοιχα. Το μέγεθος υ_{AE} είναι ***η ταχύτητα της A ως προς το E***.

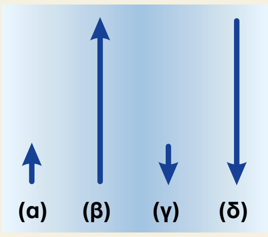
Ασκήσεις

1 Δύο βάρκες πλέουν σε έναν ήρεμο ποταμό, όπως στο πιο κάτω σχήμα. Οι ταχύτητες των βαρκών είναι υπολογισμένες *ως προς το νερό*.

Να επιλέξετε ποιό από τα βέλη **(α)** - **(δ)** αποδίδει σωστά τη σχετική ταχύτητα *της βάρκας* **A** *ως προς τη* **B** στο αριστερό σχήμα, και τη σχετική ταχύτητα *της* **B** *ως προς την* **A** στο δεξί σχήμα.

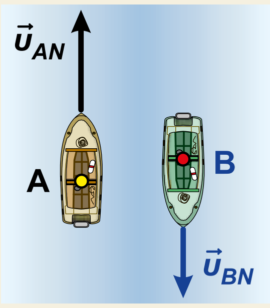


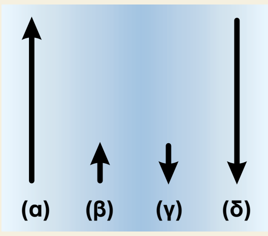


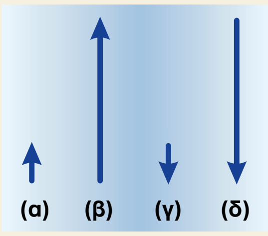


2 Οι βάρκες πλέουν τώρα, όπως στο πιο κάτω σχήμα. Οι ταχύτητες των βαρκών είναι υπολογισμένες *ως προς το νερό*.

Να επιλέξετε ποιό από τα βέλη **(α)** - **(δ)** αποδίδει σωστά τη σχετική ταχύτητα *της βάρκας* **A** *ως προς τη* **B** στο αριστερό σχήμα, και τη σχετική ταχύτητα *της* **B** *ως προς την A* στο δεξί σχήμα.



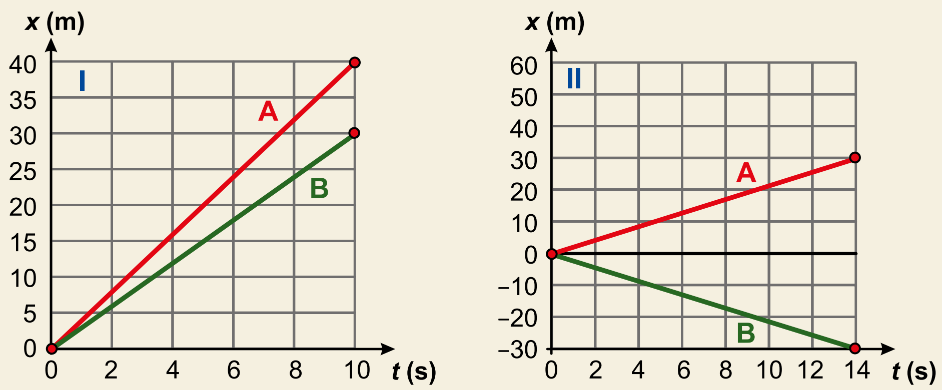




3 Ένας πεζός Α περπατά πάνω σε έναν κυλιόμενο ιμάντα, και ένας δεύτερος άνθρωπος Β στέκεται ακίνητος στον ιμάντα.

A. Στο γράφημα του σχήματος I απεικονίζονται οι θέσεις των **A** και **B** ως προς το έδαφος, σαν συναρτήσεις του χρόνου. Να σχεδιάσετε στο ίδιο γράφημα τη θέση του **A** *ως προς τον* **B**.

B. Δύο άνθρωποι **A** και **B** γυμνάζονται τρέχοντας χαλαρά σε έναν ευθύγραμμο δρόμο. Στο γράφημα του σχήματος **II** απεικονίζονται οι θέσεις των **A** και **B** ως προς *το έδαφος*, σαν συναρτήσεις του χρόνου. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σχήμα τη θέση του ανθρώπου **A** *ως προς τον* **B**.

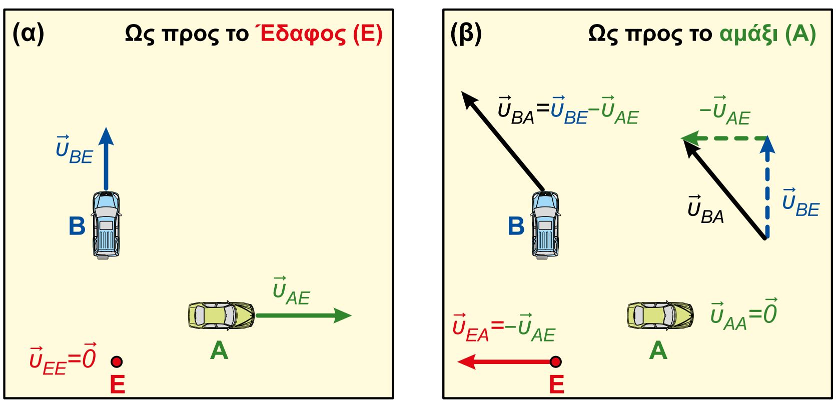


❹ Ένας ταξιδιώτης προσπαθεί να προλάβει την πτήση του στο αεροδρόμιο. Σε κάποια στιγμή συναντά έναν κυλιόμενο διάδρομο μήκους 100 m, που κινείται με ταχύτητα 2,5 m/s ως προς το έδαφος. Εάν περπατά στο έδαφος ***δίπλα στον διάδρομο***, ο ταξιδιώτης καλύπτει το μήκος του διαδρόμου σε 80 s. Σε πόσο χρόνο καλύπτει το ίδιο μήκος, αν περπατά ***πάνω στον διάδρομο***; Υποθέστε ότι περπατά στον κυλιόμενο διάδρομο με την ίδια ταχύτητα, που περπατά στο έδαφος.

❺ Ένα πλοιάριο πλέει σε ήρεμα νερά με ταχύτητα 5 m/s. Το πλοιάριο κινείται σε έναν ποταμό, και μεταφέρει επιβάτες ανάμεσα σε δύο λιμανάκια Α και Β, που απέχουν μεταξύ τους κατά 2 km. Η κοίτη του ποταμού ανάμεσα στα δύο λιμανάκια είναι ευθύγραμμη. Εάν το νερό του ποταμού ρέει με ταχύτητα 3 m/s στην κατεύθυνση $A \rightarrow B$ σε πόσο χρόνο θα κάνει το δρομολόγιο $A \rightarrow B \rightarrow A$ το πλοιάριο; Να υποθέσετε ότι το πλοιάριο αναστρέφει την πορεία του στο λιμάνι Β, χωρίς να σταματήσει.

3.2. Σχετική Κίνηση στο Επίπεδο

Τα παραπάνω συμπεράσματα γενικεύονται εύκολα για κίνηση στο επίπεδο. Στην Εικόνα **3-3(α)** απεικονίζονται οι ταχύτητες δύο αμαξιών **Α** και **Β** ως προς το σημείο **Ε** του εδάφους.



Εικόνα 3-3
(α) Ταχύτητες ***ως προς το*** **Ε**. **(β)** Αν από τις ταχύτητες ως προς το **Ε αφαιρέσουμε την ταχύτητα του Α *ως προς το* Ε**, βρίσκουμε τις ταχύτητες ***ως προς το*** **Α**.

Στην **Εικόνα 3-3(β)** απεικονίζονται οι ταχύτητες ως προς το σύστημα αναφοράς **του αυτοκινήτου Α.** Η **σχετική ταχύτητα** του αμαξιού **Β** ως προς το **Α** υπολογίζεται από τη **διαφορά των ταχυτήτων των Β και Α** ως προς το **κοινό** σύστημα αναφοράς **Ε**:

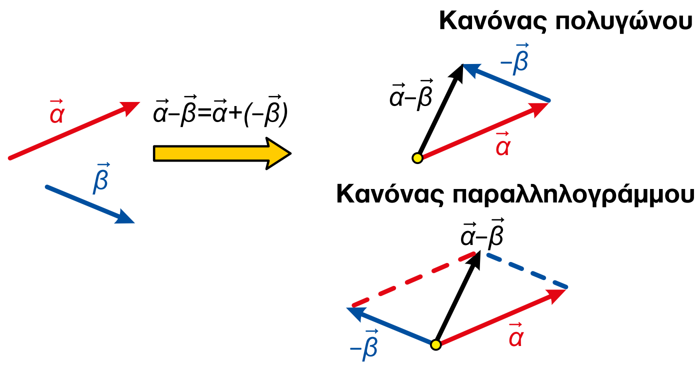
Σχετική Ταχύτητα **Β** ως προς το Σύστημα Αναφοράς **Α**	=	Ταχύτητα **Β** ως προς το Σύστημα Αναφοράς **Ε**	−	Ταχύτητα **Α** ως προς το Σύστημα Αναφοράς **Ε**
$\vec{\upsilon}_{\mathrm{BA}}$	=	$\vec{\upsilon}_{\mathrm{BE}}$	−	$\vec{\upsilon}_{\mathrm{AE}}$

Προσοχή

Η σχέση έχει την ίδια μορφή όπως για τη σχετική κίνηση σε ευθεία, αλλά είναι **διανυσματική.**

Υπενθύμιση

Για να υπολογίσουμε τη διαφορά $\vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, σχεδιάζουμε το διάνυσμα $-\vec{\beta}$ (το αντίθετο του διανύσματος $\vec{\beta}$) και υπολογίζουμε το άθροισμα $\vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$ με τον κανόνα του πολυγώνου ή του παραλληλογράμμου, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Έλεγχος

Για να βεβαιωθείτε ότι έχετε γράψει σωστά την πιο πάνω σχέση, θα υπολογίζετε την ταχύτητα ενός παρατηρητή ή σώματος **ως προς τον εαυτό του.** Για να είναι σωστή η σχέση, θα πρέπει να βρίσκετε μηδενική ταχύτητα.

Παράδειγμα

1. Υπολογίζουμε την ταχύτητα του αυτοκινήτου **Α** ως προς το ίδιο, βάζοντας $\mathrm{B} = \mathrm{A}$:

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{AA}} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{AE}} - \vec{\upsilon}_{\mathrm{AE}} = \vec{0}$$

2. Υπολογίζουμε την ταχύτητα του αυτοκινήτου **Β** ως προς το ίδιο, βάζοντας Α = Β:

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{BB}} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{BE}} - \vec{\upsilon}_{\mathrm{BE}} = \vec{0}$$

Η πιο πάνω σχέση ισχύει για οποιαδήποτε τρία σώματα ή συστήματα αναφοράς **Α**, **Β** και **Ε.**

3. Από τις ταχύτητες των **Ε** και **Α** ως προς το **Ε**, υπολογίζουμε τη σχετική ταχύτητα του εδάφους **Ε** ως προς το αυτοκίνητο **Α**:

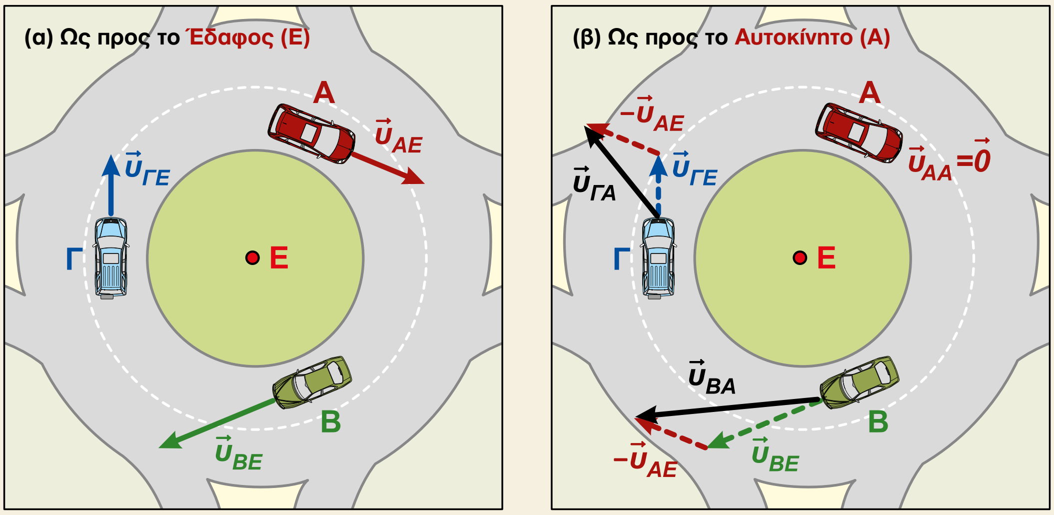
$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{EA}} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{EE}} - \vec{\upsilon}_{\mathrm{AE}} = \vec{0} - \vec{\upsilon}_{\mathrm{AE}} = -\,\vec{\upsilon}_{\mathrm{AE}}$$

4. Από τις ταχύτητες των **Β** και **Ε** *ως προς το αυτοκίνητο* **Α**, υπολογίζουμε τη σχετική ταχύτητα του **Β** ως προς το **Ε**:

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{BE}} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{BA}} - \vec{\upsilon}_{\mathrm{EA}}$$

Παράδειγμα 1

Στην **Εικόνα 3-4(α)** απεικονίζονται οι ταχύτητες τριών αυτοκινήτων **Α**, **Β** και **Γ** *ως προς το έδαφος* (**Ε**). Να σχεδιάσετε τις ταχύτητες των ίδιων αυτοκινήτων *ως προς το αυτοκίνητο* **Α.**



Εικόνα 3-4
(α) Ταχύτητες των αυτοκινήτων **Α** - **Γ** *ως προς το έδαφος* (**Ε**). **(β)** Ταχύτητες των ίδιων αυτοκινήτων *ως προς το αυτοκίνητο* (**Α**).

Οι σχετικές ταχύτητες των **Α - Γ ως προς το Α** απεικονίζονται στην **Εικόνα 3-4(β).** Για να υπολογίσουμε τη σχετική ταχύτητα οποιουδήποτε αυτοκινήτου **Χ** *ως προς το* **Α**, αφαιρούμε **από** την ταχύτητα του **Χ** ως προς το έδαφος, την ταχύτητα του **Α** ως προς το έδαφος:

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{XA}} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{XE}} - \vec{\upsilon}_{\mathrm{AE}}$$

Εφαρμογή της σχέσης στο αυτοκίνητο **Γ** δίνει:

$$\vec{\upsilon}_{\Gamma\mathrm{A}} = \vec{\upsilon}_{\Gamma\mathrm{E}} - \vec{\upsilon}_{\mathrm{AE}}$$

Ομοίως, για το αυτοκίνητο **Β** βρίσκουμε:

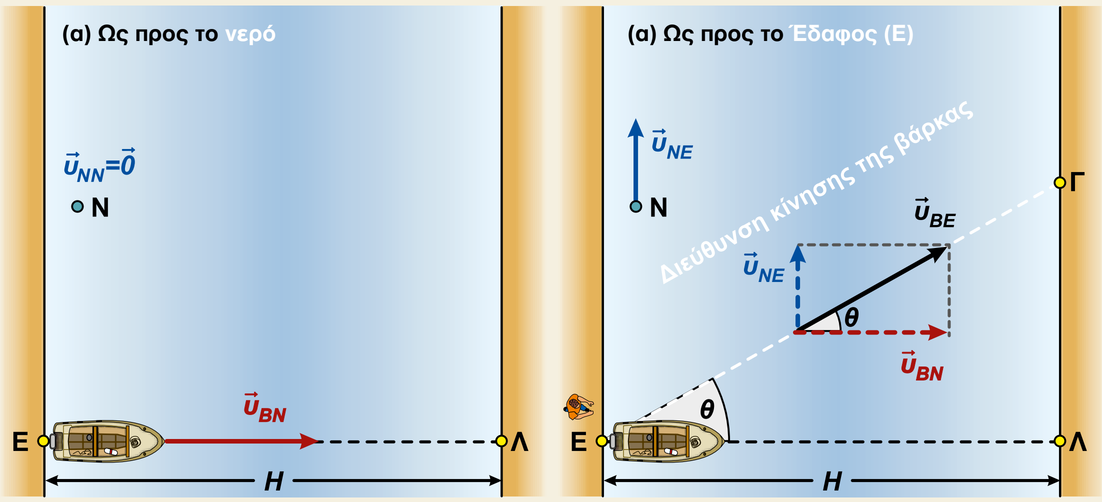
$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{BA}} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{BE}} - \vec{\upsilon}_{\mathrm{AE}}$$

Η εφαρμογή της σχέσης στο **Α** προβλέπει σωστά ότι η σχετική ταχύτητα του **Α** ως προς το **Α** είναι μηδενική:

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{AA}} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{AE}} - \vec{\upsilon}_{\mathrm{AE}} = \vec{0}$$

Παράδειγμα 2

Η βάρκα της **Εικόνας 3-5** διασχίζει έναν ποταμό πλάτους $H = 90{,}0$ m. Η μηχανή της βάρκας ασκεί δύναμη στο νερό κατά τη διεύθυνση **ΕΛ** (κάθετα προς τις όχθες), και δέχεται μία αντίθετη αντίσταση από το νερό. *Ως προς το νερό του ποταμού*, η βάρκα κινείται με ταχύτητα που έχει τη διεύθυνση **ΕΛ** και σταθερό μέτρο $|\vec{\upsilon}_{\mathrm{BN}}| = 15{,}0$ km/h. Ταυτόχρονα, το νερό του ποταμού ρέει παράλληλα προς τις όχθες, με σταθερή ταχύτητα μέτρου $|\vec{\upsilon}_{\mathrm{NE}}| = 10{,}0$ km/h ως προς το έδαφος. Να προσδιορίσετε τη διεύθυνση κίνησης της βάρκας, και το μέτρο της ως προς το έδαφος.



Εικόνα 3-5

(α) Η βάρκα πλέει με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\mathrm{BN}}$ *ως προς το νερό* του ποταμού. **(β)** *Ως προς το έδαφος*, το νερό ρέει με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\mathrm{NE}}$ και η ταχύτητα της βάρκας είναι το διανυσματικό άθροισμα $\vec{\upsilon}_{\mathrm{BE}} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{BN}} + \vec{\upsilon}_{\mathrm{NE}}$.

Απάντηση

Θεωρούμε **(i)** το σημείο **Ν**, που κινείται μαζί με το νερό του ποταμού, και **(ii)** το σημείο αναφοράς **Ε**, που είναι ακίνητο ως προς το έδαφος. Η βάρκα έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{ΒΝ}$ ***ως προς το σημείο*** **Ν (Εικόνα 3-5(α))**, και $\vec{\upsilon}_{ΒΕ}$ ***ως προς το σημείο*** **Ε (Εικόνα 3-5(β))**. Οι δύο ταχύτητες συνδέονται με τη σχέση

$$\vec{\upsilon}_{ΒΝ} = \vec{\upsilon}_{ΒΕ} - \vec{\upsilon}_{ΝΕ} \Rightarrow \vec{\upsilon}_{ΒΕ} = \vec{\upsilon}_{ΒΝ} + \vec{\upsilon}_{ΝΕ}$$

όπου $\vec{\upsilon}_{ΝΕ}$ είναι η ταχύτητα του νερού ως προς το έδαφος.

Τα διανύσματα $\vec{\upsilon}_{ΒΝ}$ και $\vec{\upsilon}_{ΝΕ}$ είναι **κάθετα** μεταξύ τους. Συνεπώς, το μέτρο της ταχύτητας της βάρκας ***ως προς το έδαφος*** ισούται με:

$$\left|\vec{\upsilon}_{ΒΕ}\right| = \sqrt{\left|\vec{\upsilon}_{ΒΝ}\right|^2 + \left|\vec{\upsilon}_{ΝΕ}\right|^2} = \sqrt{(15{,}0 \text{ km/h})^2 + (10{,}0 \text{ km/h})^2} = \sqrt{325} \text{ km/h} \cong 18{,}0 \text{ km/h}$$

Το διάνυσμα $\vec{\upsilon}_{ΒΕ}$ σχηματίζει γωνία θ με την κάθετη προς τις όχθες του ποταμού ευθεία **ΕΛ**. Η εφαπτομένη της γωνίας θ προσδιορίζεται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΛΓ:

$$\varepsilon\varphi\theta = \left|\vec{\upsilon}_{ΝΕ}\right| / \left|\vec{\upsilon}_{ΒΝ}\right| = 10{,}0/\ 15{,}0 \Rightarrow \theta = 33{,}8^o$$

Ερώτηση

Να υπολογίσετε **(i)** το χρονικό διάστημα, μέσα στο οποίο η βάρκα διασχίζει τον ποταμό. **(ii)** Το χρονικό διάστημα, μέσα στο οποίο η βάρκα θα διέσχιζε τον ποταμό, εάν το νερό ήταν ακίνητο.

Απάντηση

(i) Το μήκος της διαδρομής **ΕΓ** είναι:

$$ΕΓ = \frac{H}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{90{,}0 \text{ m}}{\sigma\upsilon\nu 33{,}8^o} \cong 108 \text{ m}$$

Η βάρκα κινείται κατά μήκος της διαδρομής **ΕΓ** με ταχύτητα μέτρου (ως προς το έδαφος):

$$\left|\vec{\upsilon}_{ΒΕ}\right| = 18{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 18{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \times \frac{1\text{h}}{3\,600 \text{ s}} = 5{,}00\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Συνεπώς, η βάρκα καλύπτει τη διαδρομή **ΕΓ** στο χρονικό διάστημα:

$$\Delta t_{ΕΓ} = \frac{ΕΓ}{\left|\vec{\upsilon}_{ΒΕ}\right|} = \frac{108 \text{ m}}{5{,}00 \text{ m/s}} = 21{,}6 \text{ s}$$

(ii) Αν το νερό του ποταμού ήταν ακίνητο, η βάρκα θα κινούνταν κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος **ΕΛ** με ταχύτητα μέτρου $\left|\vec{\upsilon}_{ΒΝ}\right|$. Το απαιτούμενο χρονικό διάστημα θα ήταν:

$$\Delta t_{ΕΛ} = H / \left|\vec{\upsilon}_{ΒΝ}\right|$$

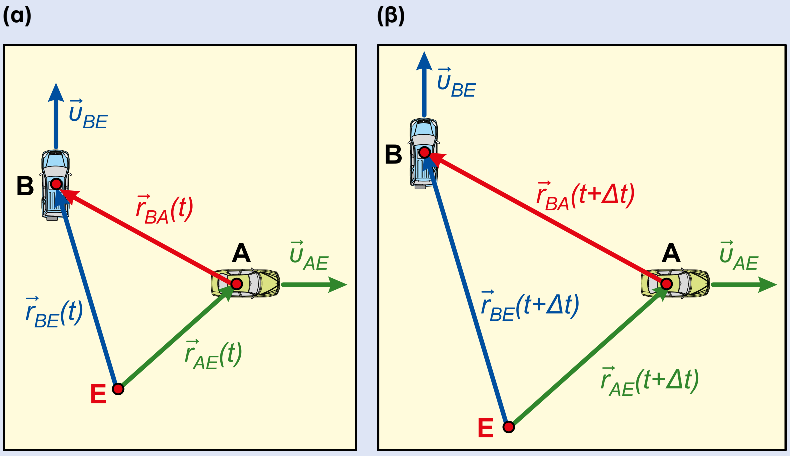
Επειδή ισχύει, $H = \mathrm{Ε\Gamma}\,\sigma\upsilon\nu\theta$ και $|\vec{\upsilon}_{\mathrm{BN}}| = |\vec{\upsilon}_{\mathrm{BE}}|\sigma\upsilon\nu\theta$, συμπεραίνουμε:

$$\Delta t_{\mathrm{E\Lambda}} = \frac{H}{|\vec{\upsilon}_{\mathrm{BN}}|} = \frac{\mathrm{E\Gamma}\,\sigma\upsilon\nu\theta}{|\vec{\upsilon}_{\mathrm{BE}}|\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\mathrm{E\Gamma}}{|\vec{\upsilon}_{\mathrm{BE}}|} = \Delta t_{\mathrm{E\Gamma}}$$

Άρα, η βάρκα θα διέσχιζε τον ποταμό στο **ίδιο** χρονικό διάστημα.

ΕΝΘΕΤΟ: Σχετική Ταχύτητα δύο Σωμάτων, που κινούνται σε Επίπεδο

Η **Εικόνα 3-6** απεικονίζει δύο αμαξάκια **Α** και **Β**, που κινούνται σε διαφορετικές διευθύνσεις πάνω σε επίπεδο έδαφος.



Εικόνα 3-6
Τα αμαξάκια **Α** και **Β** κινούνται σε επίπεδο έδαφος. **(α)** Ως προς το σημείο **Ε** του εδάφους βρίσκονται στις θέσεις $\vec{r}_{\mathrm{AE}}(t)$ και $\vec{r}_{\mathrm{BE}}(t)$, και έχουν ταχύτητες $\vec{\upsilon}_{\mathrm{AE}}$ και $\vec{\upsilon}_{\mathrm{BE}}$. Ως προς το αμαξάκι **Α**, η θέση του **Β** είναι $\vec{r}_{\mathrm{BA}}(t)$. **(β)** Θέσεις των **Α** και **Β** τη χρονική στιγμή $t+\Delta t$.

Όπως και στην κίνηση σε ευθεία, θα προσδιορίσουμε τις θέσεις των αμαξιών **Α** και **Β** ως προς δύο σημεία αναφοράς: **(i)** Το ακίνητο στο έδαφος σημείο **Ε**, και **(ii)** το σημείο **Α**, που κινείται μαζί με το αυτοκίνητο **Α.**

Οι θέσεις των σημείων **Α** και **Β** ως προς το ακίνητο σημείο **Ε** του εδάφους αντιστοιχούν στα βέλη $\vec{r}_{\mathrm{AE}}$ και $\vec{r}_{\mathrm{BE}}$ (**Εικόνα 3-6(α)**). Η θέση του **Β** ως προς το **Α** αντιστοιχεί στο βέλος $\vec{r}_{\mathrm{BA}}$. Από την **Εικόνα 3-6(α)** και τον κανόνα του πολυγώνου, συμπεραίνουμε ότι τα πιο πάνω διανύσματα συνδέονται με τη σχέση:

$$\vec{r}_{\mathrm{BE}} = \vec{r}_{\mathrm{AE}} + \vec{r}_{\mathrm{BA}} \Rightarrow \vec{r}_{\mathrm{BA}} = \vec{r}_{\mathrm{BE}} - \vec{r}_{\mathrm{AE}}$$

Τα διανύσματα $\vec{r}_{\mathrm{AE}}$, $\vec{r}_{\mathrm{BE}}$ και $\vec{r}_{\mathrm{BA}}$ μεταβάλλονται γενικά με τον χρόνο, αλλά η προηγούμενη σχέση ισχύει **για κάθε χρονική στιγμή.** Εάν την εφαρμόσουμε σε δύο χρονικές στιγμές t και $t+\Delta t$ (**Εικόνα 3-6(β)**), που απέχουν πολύ λίγο μεταξύ τους, καταλήγουμε σε μία σχέση για τις **στιγμιαίες** ταχύτητες του αυτοκινήτου **Β** ως προς τα σημεία αναφοράς **Ε** και **Α**:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}_{BA}(t)=\vec{r}_{BE}(t)-\vec{r}_{AE}(t)\\ \vec{r}_{BA}(t+\Delta t)=\vec{r}_{BE}(t+\Delta t)-\vec{r}_{AE}(t+\Delta t)\end{array}\right\}\Rightarrow \underbrace{\vec{r}_{BA}(t+\Delta t)-\vec{r}_{BA}(t)}_{=\Delta\vec{r}_{BA}}=\underbrace{\vec{r}_{BE}(t+\Delta t)-\vec{r}_{BE}(t)}_{=\Delta\vec{r}_{BE}}-\underbrace{\left[\vec{r}_{AE}(t+\Delta t)-\vec{r}_{AE}(t)\right]}_{=\Delta\vec{r}_{AE}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\vec{r}_{BA}}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{r}_{BE}}{\Delta t}-\frac{\Delta\vec{r}_{AE}}{\Delta t}\Rightarrow \vec{\upsilon}_{BA}=\vec{\upsilon}_{BE}-\vec{\upsilon}_{AE}$$

Τα μεγέθη $\vec{\upsilon}_{BA}$ και $\vec{\upsilon}_{BE}$ είναι οι ταχύτητες του αμαξιού Β ως προς τα σημεία **Α** και **Ε**, αντίστοιχα. Το μέγεθος $\vec{\upsilon}_{AE}$ είναι ***η ταχύτητα του Α ως προς το Ε***.

3.3. Άλλα Παραδείγματα Σχετικής Κίνησης στο Επίπεδο

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις προηγούμενες σχέσεις, για να μελετήσουμε την τροχιά ενός σώματος ως προς δύο παρατηρητές που βρίσκονται σε σχετική κίνηση. Παρουσιάζουμε δύο σχετικά παραδείγματα.

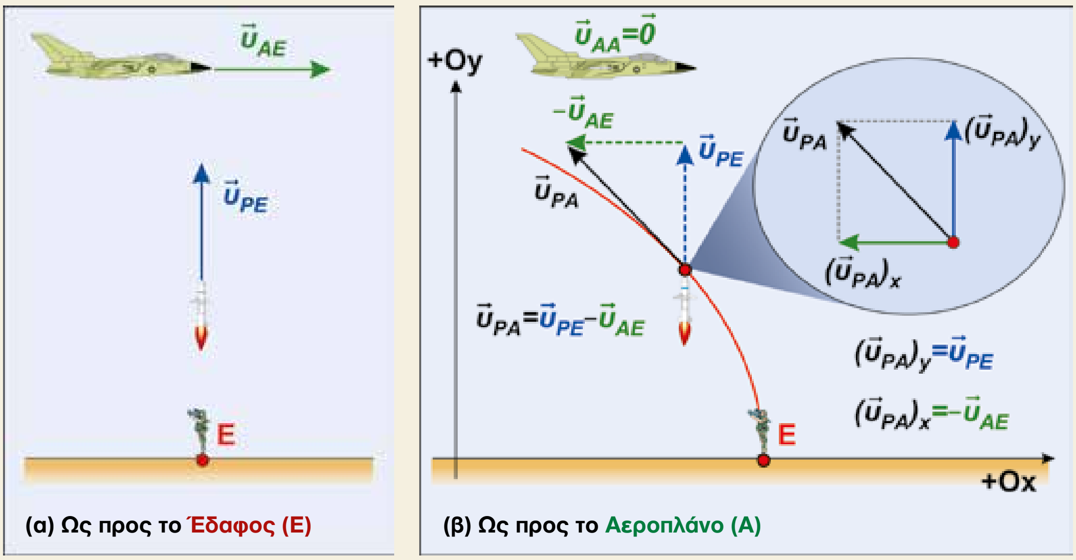
Παράδειγμα 1

Κατακόρυφη Βολή από τη σκοπιά του Εδάφους και από τη σκοπιά του Αεροπλάνου

Στο **σχήμα (α)** της επόμενης εικόνας, μία ρουκέτα εκτοξεύεται από το έδαφος με **κατακόρυφη** αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{PE}$. Θα εξηγήσουμε τι τροχιά φαίνεται ότι διαγράφει η ρουκέτα:

(i) ως προς το έδαφος,

(ii) ως προς ένα αεροπλάνο, που κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{AE}$ ***ως προς το έδαφος***.



(i) *Ως προς το έδαφος*, η ρουκέτα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση την επιτάχυνση της βαρύτητας. Επειδή η αρχική ταχύτητά της είναι κατακόρυφη, η ρουκέτα διαγράφει κατακόρυφη τροχιά.

(ii) Υπολογίζουμε την ταχύτητα της ρουκέτας *ως προς το αεροπλάνο* **σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή**, αφαιρώντας από την ταχύτητα της ρουκέτας *ως προς το έδαφος*, την ταχύτητα του αεροπλάνου *ως προς το έδαφος*:

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{PA}} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{PE}} - \vec{\upsilon}_{\mathrm{AE}}$$

Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\mathrm{AE}}$ έχει τη διεύθυνση του άξονα **Ox** και η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\mathrm{PE}}$ έχει τη διεύθυνση του άξονα **Oy**. Γι΄ αυτό, εάν αναλύσουμε την ταχύτητα της ρουκέτας ως προς το σύστημα αξόνων **Ox** και **Oy**, βρίσκουμε:

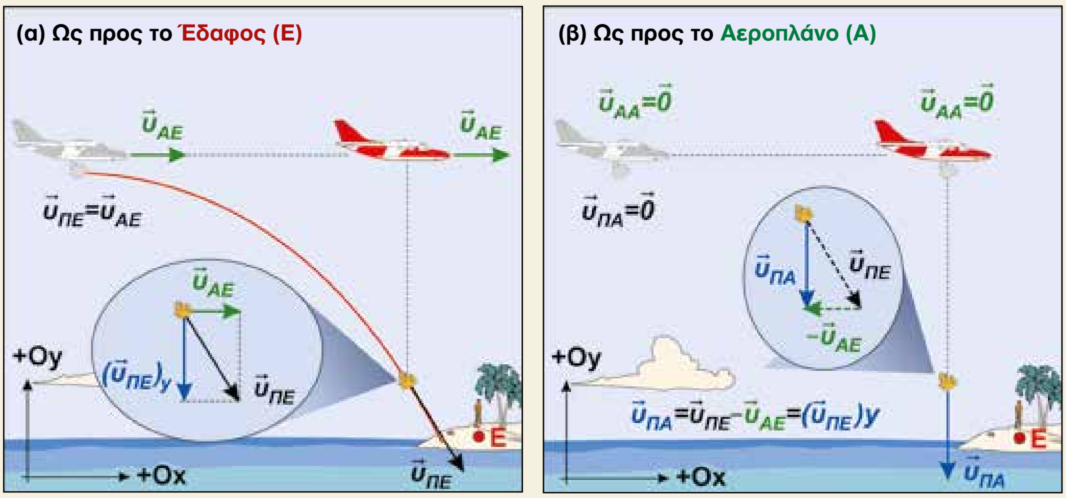
$$(\vec{\upsilon}_{\mathrm{PA}})_x = -\,\vec{\upsilon}_{\mathrm{AE}}\,,\ (\vec{\upsilon}_{\mathrm{PA}})_y = \vec{\upsilon}_{\mathrm{PE}}$$

Ως προς το αεροπλάνο η ρουκέτα μετατοπίζεται ευθύγραμμα και ομαλά στην οριζόντια διεύθυνση, και με την επιτάχυνση της βαρύτητας στην κατακόρυφη διεύθυνση. Η τροχιά της ρουκέτας είναι παραβολή, και αντιστοιχεί σε πλάγια βολή.

Παράδειγμα 2

Τροχιά Πακέτου Ανεφοδιασμού, όπως φαίνεται από το Αεροπλάνο και από το Έδαφος

Το αεροπλάνο της επόμενης εικόνας κινείται *ως προς το έδαφος* με **σταθερή οριζόντια** ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\mathrm{AE}}$, και ανεφοδιάζει ένα τροπικό νησάκι με ένα πακέτο.



Σχήμα (α)

Εξ΄αιτίας της αδράνειας, το πακέτο εγκαταλείπει το αεροπλάνο με αρχική οριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\mathrm{ΠΕ}}$ *ως προς το έδαφος*, ίση με την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\mathrm{AE}}$ του αεροπλάνου. Εάν η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, η οριζόντια διανυσματική συνιστώσα της ταχύτητας του πακέτου παραμένει σταθερή, $(\vec{\upsilon}_{\Pi E})_x = \vec{\upsilon}_{AE}$. Η κατακόρυφη διανυσματική συνιστώσα $(\vec{\upsilon}_{\Pi E})_y$ αυξάνεται ανάλογα με τον χρόνο, υπό την επίδραση του βάρους του πακέτου. Η κίνηση του πακέτου αντιστοιχεί σε οριζόντια βολή, με παραβολική τροχιά.

Σχήμα (β)

Για να προσδιορίσουμε **σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή** την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\Pi A}$ του πακέτου ***ως προς το αεροπλάνο***, αφαιρούμε από την ταχύτητα του πακέτου ***ως προς το έδαφος***, την ταχύτητα του ***αεροπλάνου ως προς το έδαφος***:

$$\vec{\upsilon}_{\Pi A} = \vec{\upsilon}_{\Pi E} - \vec{\upsilon}_{AE} = (\vec{\upsilon}_{\Pi E})_x + (\vec{\upsilon}_{\Pi E})_y - \vec{\upsilon}_{AE} = (\vec{\upsilon}_{\Pi E})_y$$

Στο τελικό αποτέλεσμα χρησιμοποιήσαμε την ισότητα $(\vec{\upsilon}_{\Pi E})_x = \vec{\upsilon}_{AE}$.

Άρα, η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\Pi A}$ είναι συνεχώς ίση με την κατακόρυφη συνιστώσα $(\vec{\upsilon}_{\Pi E})_y$ της ταχύτητας του πακέτου ***ως προς το έδαφος***. Ο πιλότος βλέπει ότι το πακέτο διαγράφει κατακόρυφη τροχιά, και βρίσκεται συνεχώς κάτω από το αεροπλάνο.

ΕΝΘΕΤΟ: Σχέση μεταξύ των Επιταχύνσεων ενός Σώματος, ως προς Διαφορετικά Συστήματα Αναφοράς σε Σχετική Κίνηση

Έστω ότι οι παρατηρητές **Ε** και **Α**, που κινούνται ο ένας ως προς τον άλλο, μελετούν το σώμα **Β** κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος Δt. Η σχέση, που γράψαμε προηγουμένως για τη σχετική ταχύτητα του Β ως προς το Α, ***ισχύει για κάθε χρονική στιγμή***:

$$\vec{\upsilon}_{BA}(t) = \vec{\upsilon}_{BE}(t) - \vec{\upsilon}_{AE}(t)$$

Εφαρμόζοντας αυτή τη σχέση για τις στιγμές t, $t + \Delta t$ προκύπτει:

$$\left.\begin{aligned}\vec{\upsilon}_{BA}(t+\Delta t) &= \vec{\upsilon}_{BE}(t+\Delta t) - \vec{\upsilon}_{AE}(t+\Delta t)\\ \vec{\upsilon}_{BA}(t) &= \vec{\upsilon}_{BE}(t) - \vec{\upsilon}_{AE}(t)\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\vec{\upsilon}_{BA}(t+\Delta t) - \vec{\upsilon}_{BA}(t)}_{=\Delta\vec{\upsilon}_{AB}} = \underbrace{\vec{\upsilon}_{BE}(t+\Delta t) - \vec{\upsilon}_{BE}(t)}_{=\Delta\vec{\upsilon}_{BE}} - \underbrace{\left[\vec{\upsilon}_{AE}(t+\Delta t) - \vec{\upsilon}_{AE}(t)\right]}_{=\Delta\vec{\upsilon}_{AE}} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta\vec{\upsilon}_{BA}}{\Delta t} = \frac{\Delta\,\vec{\upsilon}_{BE}}{\Delta t} - \frac{\Delta\vec{\upsilon}_{AE}}{\Delta t}$$

Στο όριο που το χρονικό διάστημα Δt είναι μικρό, τα κλάσματα της προηγούμενης σχέσης ισούνται με τις **στιγμιαίες επιταχύνσεις του σώματος Β ως προς τους Ε και Α.** Άρα:

Όπως στην περίπτωση των ταχυτήτων, για να υπολογίσουμε τη σχετική επιτάχυνση του **B** ως προς το **A**, **αφαιρούμε** από την επιτάχυνση του **B** ***ως προς το*** **E**, την επιτάχυνση του **A** ***ως προς το*** **E**.

Σχετική Επιτάχυνση **B** ως προς το Σύστημα Αναφοράς **A** = Επιτάχυνση **B** ως προς το Σύστημα Αναφοράς **E** − Επιτάχυνση **A** ως προς το Σύστημα Αναφοράς **E**

$$\vec{\alpha}_{BA} = \vec{\alpha}_{BE} - \vec{\alpha}_{AE}$$

Εφαρμόζοντας την προηγούμενη σχέση για $B = E$, βρίσκουμε:

$$\vec{\alpha}_{EA} = \vec{\alpha}_{EE} - \vec{\alpha}_{AE} = \vec{0} - \vec{\alpha}_{AE} = -\vec{\alpha}_{AE}$$

επειδή η επιτάχυνση του **E** ως προς τον εαυτό του είναι μηδενική. Η σχέση αυτή δηλώνει ότι δύο οποιαδήποτε σώματα **A** και **E** κινούνται με αντίθετες επιταχύνσεις, το ένα ως προς το άλλο.

Χρησιμοποιώντας τις τελευταίες δύο σχέσεις, βρίσκουμε:

$$\vec{\alpha}_{BA} = \vec{\alpha}_{BE} - \vec{\alpha}_{AE} \Rightarrow \vec{\alpha}_{BE} = \vec{\alpha}_{BA} + \vec{\alpha}_{AE} \Rightarrow \vec{\alpha}_{BE} = \vec{\alpha}_{BA} - \vec{\alpha}_{EA}$$

Δηλαδή, για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση του B ως προς το σύστημα αναφοράς E, **αφαιρούμε** από την επιτάχυνση του B ***ως προς το A***, την επιτάχυνση του E ***ως προς το A***.

Εάν τα συστήματα αναφοράς **E** και **A** κινούνται με **σταθερές ταχύτητες** το ένα ως προς το άλλο ($\vec{\alpha}_{AE} = -\vec{\alpha}_{EA} = \vec{0}$), οι πιο πάνω σχέσεις απλοποιούνται:

$$\vec{\alpha}_{BA} = \vec{\alpha}_{BE}$$

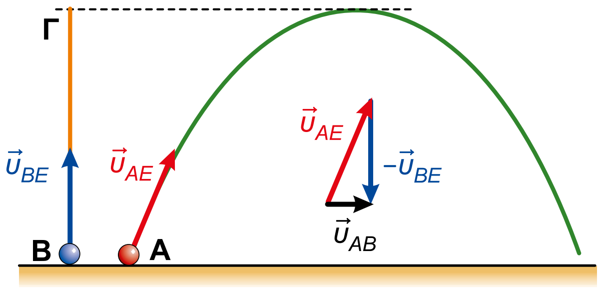
Συμπέρασμα

Ένα σώμα **B** έχει **την ίδια επιτάχυνση** ως προς διαφορετικά συστήματα αναφοράς **A** και **E**, όταν αυτά κινούνται **με σταθερές ταχύτητες** το ένα ως προς το άλλο.

Παράδειγμα

Τα βλήματα **A** και **B** του επόμενου σχήματος εκτοξεύονται ταυτόχρονα. Το βλήμα **A** διαγράφει την παραβολική τροχιά, και το βλήμα **B** την κατακόρυφη. Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα. Να υπολογίσετε τη σχετική επιτάχυνση του **A** ως προς το **B**.

Επειδή και τα δύο βλήματα κινούνται υπό την επίδραση του βάρους τους, η κίνησή τους είναι επιταχυνόμενη με επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{AE} = \vec{\alpha}_{BE} = \vec{g}$. Η σχετική επιτάχυνση του **A** ***ως προς το*** **B** είναι



$\vec{\alpha}_{AB} = \vec{\alpha}_{AE} - \vec{\alpha}_{BE} = \vec{g} - \vec{g} = \vec{0}$.

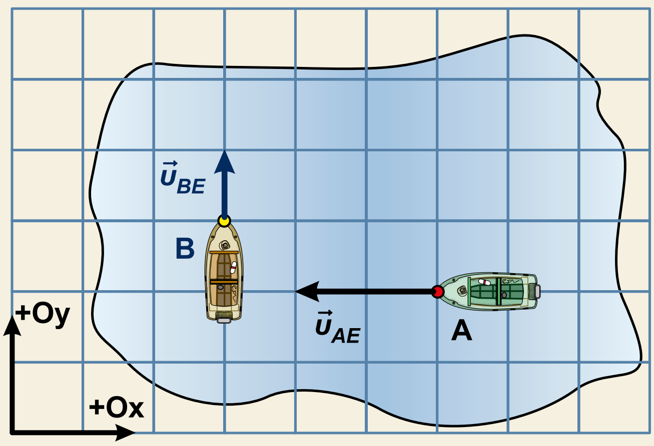
Το βλήμα **A** κινείται με **σταθερή ταχύτητα**, ***ως προς το*** **B**, η οποία είναι ίση με τη σχετική ταχύτητα τη στιγμή της εκτόξευσης:

$$\vec{\upsilon}_{AB}(t) = \vec{\upsilon}_{AE}(t) - \vec{\upsilon}_{BE}(t) = \vec{\upsilon}_{AE}(0) - \vec{\upsilon}_{BE}(0)$$

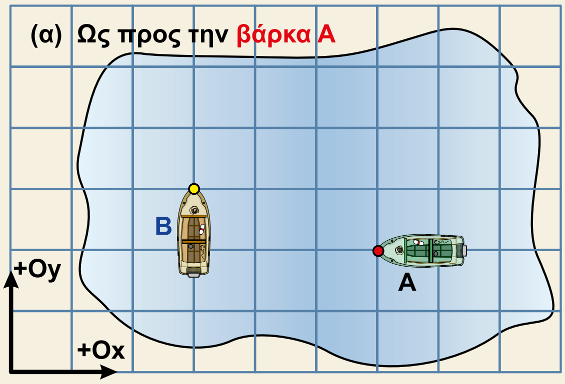
Εάν οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}_{AE}(0)$ και $\vec{\upsilon}_{BE}(0)$ έχουν την ίδια κατακόρυφη συνιστώσα (οι τροχιές φθάνουν στο ίδιο μέγιστο ύψος), η σχετική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{AB}(0)$ του **A** ως προς το **B** είναι οριζόντια. Δηλαδή, τα βλήματα βρίσκονται συνεχώς στο ίδιο ύψος, αλλά αυξάνεται ανάλογα με τον χρόνο η οριζόντια μετατόπιση του A ως προς το B.

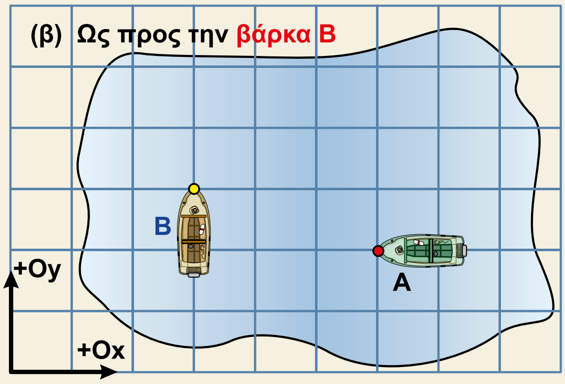
Ασκήσεις

1 Δύο βάρκες **A** και **B** πλέουν σε μία λίμνη, όπως στο επόμενο σχήμα. Οι ταχύτητές τους έχουν μέτρα $\upsilon_{AE} = 4$ m/s και $\upsilon_{BE} = 2$ m/s αντίστοιχα, ως προς το έδαφος.

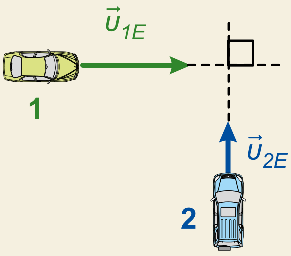


Στα πιο κάτω σχήματα να σχεδιάσετε τις ταχύτητες των δύο βαρκών στο σύστημα της **A** και στο σύστημα της **B**. Ποιό είναι το μέτρο της σχετικής ταχύτητας των βαρκών;



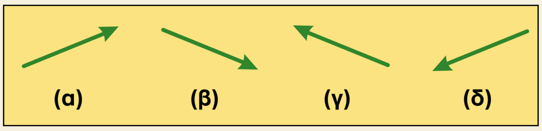


2 Τα αυτοκίνητα **1** και **2** κινούνται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Οι ταχύτητες των **1** και **2** είναι υπολογισμένες ως προς το έδαφος.

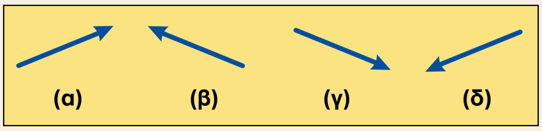


Να επιλέξετε ποιό από τα βέλη **(α)** - **(δ)** αποδίδει σωστά την ταχύτητα του **1** *ως προς το* **2** (**σχήμα Α**), και την ταχύτητα του **2** *ως προς το* **1** (**σχήμα Β**).

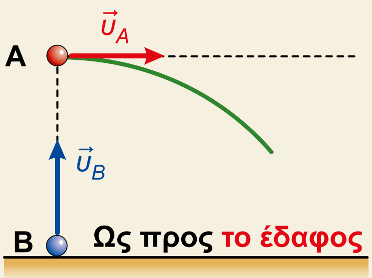
σχήμα Α



σχήμα Β



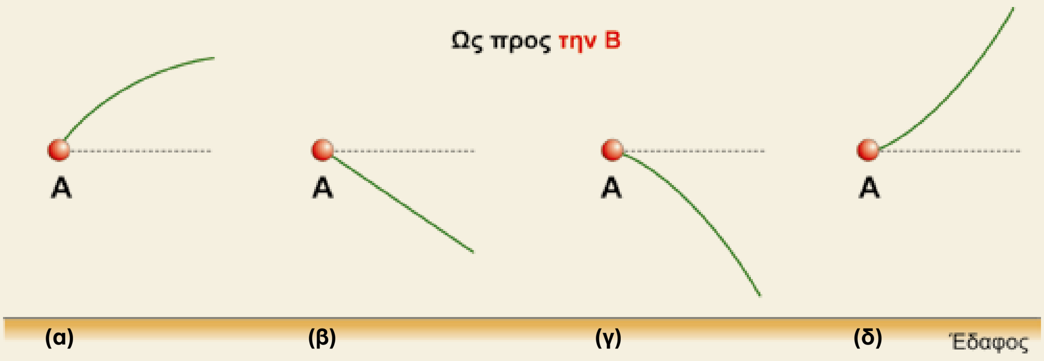
3 Δύο μπάλες **Α** και **Β** εκτοξεύονται την ίδια στιγμή, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



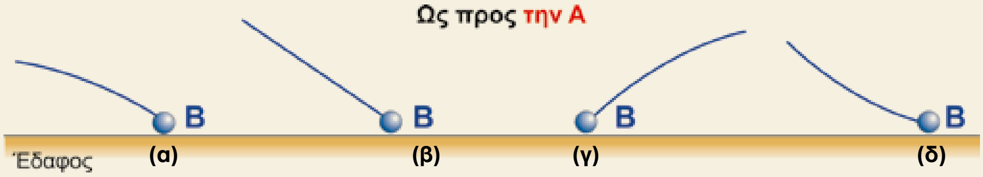
Α. Να επιλέξετε ποιό από τα επόμενα σχήματα **(α)** - **(δ)** απεικονίζει την *τροχιά της μπάλας Α, όπως φαίνεται στο σύστημα αναφοράς της Β*.

Β. Να επιλέξετε ποιό από τα επόμενα σχήματα **(α)** - **(δ)** απεικονίζει την τροχιά *της μπάλας Β ως προς την Α*.

Α.



Β.



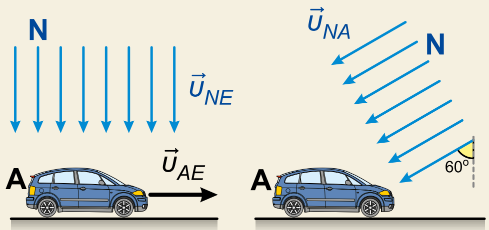
4 Ένα αεροπλάνο εκτελεί το δρομολόγιο Λάρνακας - Πάφου (κατεύθυνση Ανατολή - Δύση), με ταχύτητα μέτρου 360 km/h ως προς τον αέρα. Κατά τη διάρκεια της πτήσης φυσά αέρας με κατεύθυνση Βορρά - Νότου και ταχύτητα μέτρου 72 km/h.

Α. Σε ποια κατεύθυνση πρέπει να πετά το αεροπλάνο, ώστε να φθάσει στην Πάφο;

Β. Η απόσταση Λάρνακας - Πάφου είναι 120 km (στην ευθεία διαδρομή του αεροπλάνου). Ποιος είναι ο ελάχιστος χρόνος που χρειάζεται το αεροπλάνο, για να φθάσει στον προορισμό του;

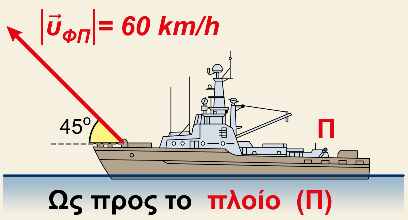
5 Μία βροχερή φθινοπωρινή μέρα χωρίς άνεμο, αρχίζουν να πέφτουν σταγόνες βροχής με κατακόρυφη κατεύθυνση, ***ως προς το έδαφος***. Ο οδηγός ενός αυτοκίνητου, που ταξιδεύει με οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_{AE} = 40$ m/s βλέπει τις σταγόνες να πέφτουν υπό γωνία $\theta = 60^o$ με την κατακόρυφη διεύθυνση. Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία πέφτουν οι σταγόνες ως προς το έδαφος.

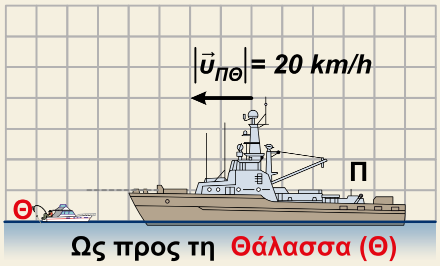
Ως προς το έδαφος (Ε)



Ως προς το αυτοκίνητο (Α)

6 Μία φωτοβολίδα εκτοξεύεται από το πλοίο **Α**, υπό γωνία 45^o και αρχική ταχύτητα μέτρου $|\vec{\upsilon}_{ΦΠ}| = 60$ km/h ***ως προς το πλοίο*** **Π**. Το πλοίο κινείται με ταχύτητα μέτρου $|\vec{\upsilon}_{ΠΘ}| = 20$ km/h ***ως προς την ήρεμη θάλασσα*** (**Θ**).





Α. Ποιά γωνία σχηματίζει η φωτοβολίδα *ως προς κάποιο ψαρά*, που βρίσκεται σε μια βάρκα ακίνητη στη θάλασσα;

Β. Ο οδηγός ενός αυτοκινήτου, που κινείται οριζόντια, βλέπει τη φωτοβολίδα να εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Ποια είναι η ταχύτητα του αυτοκινήτου *ως προς τη θάλασσα*;

3.4. Αδρανειακά Σύστήματα Αναφοράς

Στην Α΄ Λυκείου διατυπώσαμε τους Νόμους του Νεύτωνα, και τους χρησιμοποιήσαμε στη μελέτη της κίνησης σωμάτων. Θυμίζουμε ότι:

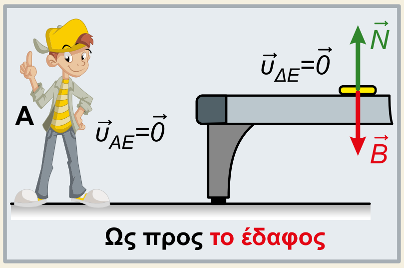
- Σύμφωνα με τον **Πρώτο Νόμο**, ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα ή ηρεμεί, όταν ασκείται σε αυτό μηδενική συνισταμένη δύναμη.

- Σύμφωνα με τον **Δεύτερο Νόμο**, ένα σώμα μάζας m κινείται με επιτάχυνση $\vec{\alpha} = \left(\sum \vec{F}\right)/m$ όταν δρα σε αυτό συνισταμένη δύναμη $\sum \vec{F}$.

Οι νόμοι του Νεύτωνα στην πιο πάνω μορφή **δεν ισχύουν σε όλα τα συστήματα αναφοράς**. Ας θεωρήσουμε το επόμενο παράδειγμα:

Παράδειγμα 1

Στον δίσκο του πιο κάτω σχήματος δρουν το βάρος του $\vec{B}$ και μία αντίθετη δύναμη $\vec{N} = -\vec{B}$ από τον αέρα της αεροτράπεζας. Η συνισταμένη δύναμη στο δίσκο είναι **μηδενική**.

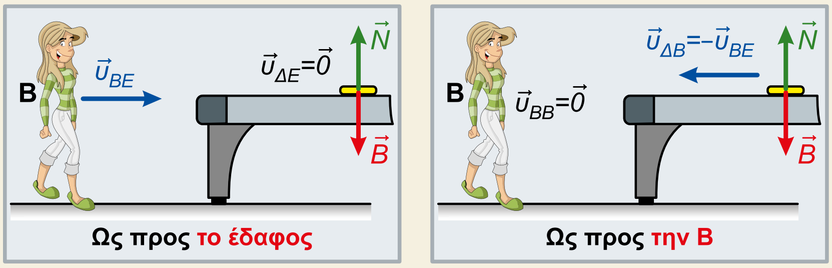


Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο, ο δίσκος πρέπει να ηρεμεί ή να κινείται με σταθερή ταχύτητα. Ένας παρατηρητής **Α** στέκεται ακίνητος στο έδαφος (**Ε**) και διαπιστώνει ότι ο δίσκος ηρεμεί ($\vec{\upsilon}_{\Delta A} = \vec{\upsilon}_{\Delta E} = \vec{0}$). Οι παρατηρήσεις του Α είναι σύμφωνες με τον πρώτο νόμο.

Μία δεύτερη παρατηρητής **Β** κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{BE}$ ως προς το έδαφος (**Ε**). **Ως προς την Β**, ο δίσκος (και η αεροτράπεζα) κινείται με **σταθερή** ταχύτητα

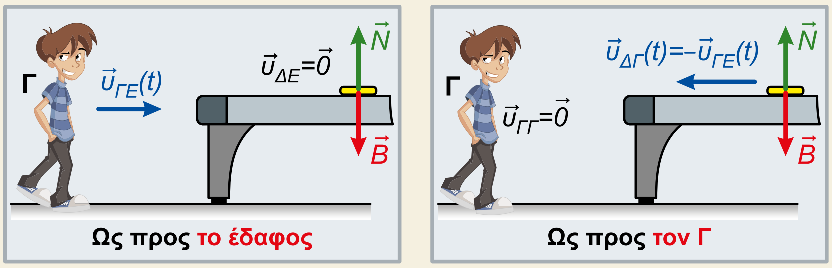
$$\vec{\upsilon}_{\Delta B} = \vec{\upsilon}_{\Delta E} - \vec{\upsilon}_{BE} = \vec{0} - \vec{\upsilon}_{BE} = -\vec{\upsilon}_{BE}$$

Οι παρατηρήσεις της Β είναι επίσης σύμφωνες με τον πρώτο νόμο.



Οι παρατηρητές **Α** και **Β**, για τους οποίους ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα, ονομάζονται **αδρανειακοί.**

Ένας τρίτος παρατηρητής **Γ** κινείται ως προς το έδαφος (**Ε**) με **μεταβαλλόμενη** ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\Gamma E}(t)$. Την ίδια χρονική στιγμή t η σχετική ταχύτητα του δίσκου ως προς τον **Γ** είναι $\vec{\upsilon}_{\Delta\Gamma}(t) = -\vec{\upsilon}_{\Gamma E}(t)$. Άρα, ο **Γ** αντιλαμβάνεται ότι **η ταχύτητα του δίσκου μεταβάλλεται**, ενώ ταυτόχρονα η συνισταμένη των δυνάμεων στον δίσκο είναι **μηδενική**. Οι νόμοι του Νεύτωνα **δεν** ισχύουν για τον παρατηρητή **Γ**: Η συνισταμένη των δυνάμεων στο δίσκο είναι μηδενική, αλλά ο δίσκος επιταχύνεται ως προς τον **Γ**.



Συμπεράσματα

- Οι νόμοι του Νεύτωνα **δεν εφαρμόζονται σε όλα τα συστήματα αναφοράς**. Συστήματα αναφοράς, όπως το **Γ**, στα οποία **δεν** ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα ονομάζονται **μη αδρανειακά.**

Στο **Παράδειγμα 1**, η παρατηρητής **Β** κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς τον **Α**. Γενικά:

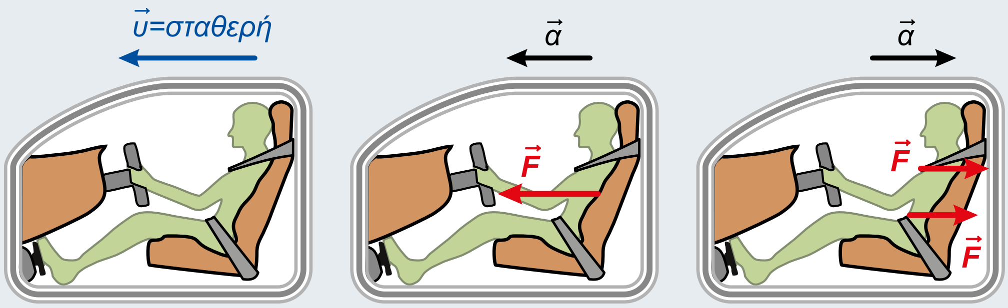
- Δύο **οποιαδήποτε αδρανειακά** συστήματα κινούνται με **σταθερή σχετική ταχύτητα**, το ένα ως προς το άλλο.

Αντίστοιχα, ο παρατηρητής **Γ** επιταχύνεται ως προς τον **Α**. Γενικά:

- Ένα **μη αδρανειακό** σύστημα αναφοράς **επιταχύνεται ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό** σύστημα αναφοράς.

Παράδειγμα 2

Ένα αυτοκίνητο κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα ***ως προς το έδαφος***. Ο οδηγός δέχεται μηδενική συνισταμένη δύναμη, και ηρεμεί ως προς το σύστημά του. **Ο οδηγός είναι αδρανειακός παρατηρητής**.



Ως προς το έδαφος

- Όταν πατάει το πετάλ της βενζίνης και επιταχύνει το αυτοκίνητο (ως προς το έδαφος), ο οδηγός νιώθει να δρα επάνω του μία οριζόντια δύναμη από το κάθισμα με κατεύθυνση προς τα εμπρός.
- Όταν πατάει το φρένο, νιώθει να δρα επάνω του μία δύναμη από τη ζώνη ασφαλείας με κατεύθυνση προς τα πίσω.
- Και στις δύο περιπτώσεις ο οδηγός ηρεμεί ως προς τον εαυτό του, αλλά δέχεται **μη μηδενική συνισταμένη δύναμη. Ο οδηγός δεν είναι αδρανειακός παρατηρητής**.

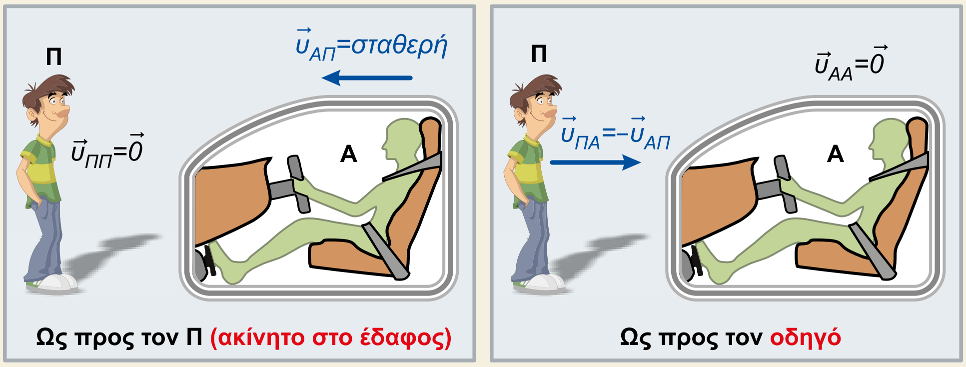
Συμπεράσματα

- Η κίνηση δύο παρατηρητών είναι **σχετική.** Όμως, ένας παρατηρητής μπορεί να αποφασίσει **εάν είναι μη αδρανειακός** (επιταχύνεται ως προς αδρανειακό), ελέγχοντας κατά πόσο στο σύστημά του ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα.

- Ένας **μή αδρανειακός** παρατηρητής νιώθει μία **μη μηδενική συνισταμένη δύναμη** να δρά επάνω του. Αντίθετα, σε έναν **αδρανειακό** παρατηρητή ασκείται **μηδενική συνισταμένη** δύναμη.

Παράδειγμα 3

Ένας πεζός **Π** στέκεται ακίνητος στο έδαφος και παρατηρεί ένα αυτοκίνητο **Α**, που κινείται με σταθερή ταχύτητα.



Ως προς τον πεζό **Π**, το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{ΑΠ}$, υπό την επίδραση μηδενικής συνισταμένης δύναμης. Ταυτόχρονα, ο πεζός διαπιστώνει ότι ηρεμεί υπό την επίδραση μηδενικής συνισταμένης δύναμης.

Ως προς τον οδηγό **Α**, ο πεζός **Π** κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{ΠΑ} = -\vec{\upsilon}_{ΑΠ}$ υπό την επίδραση μηδενικής συνισταμένης δύναμης. Ταυτόχρονα, ο ίδιος ηρεμεί υπό την επίδραση μηδενικής συνισταμένης δύναμης.

Συμπέρασμα

Δύο **αδρανειακοί** παρατηρητές, σε σχετική κίνηση μεταξύ τους, μπορούν να δηλώνουν ο καθένας ότι είναι *ακίνητος*, και ότι κινείται *ο άλλος*. **Δεν** υπάρχει κάποιο πείραμα με το οποίο να αποφασίσουν **ποιός κινείται πραγματικά**, επειδή ισχύουν και για τους δύο οι νόμοι του Νεύτωνα.

Σημείωση

Η Γη (το έδαφος) είναι **κατά προσέγγιση αδρανειακό** σύστημα αναφοράς, επειδή σε αυτήν ισχύουν κατά πολύ καλή προσέγγιση οι νόμοι του Νεύτωνα. Στην πραγματικότητα όμως, εξ΄ αιτίας της **περιστροφής** της Γης γύρω από τον άξονά της, και της **περιφοράς** της Γης γύρω από τον Ήλιο, τα διάφορα σημεία της Γης επιταχύνονται.

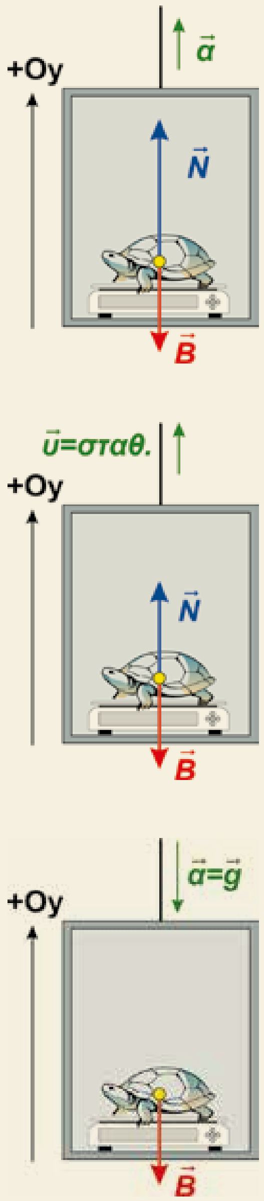
Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

3.4.1. Ένας μαθητής αρχίζει να βαδίζει με επιτάχυνση στο εσωτερικό της τάξης. Οι υπόλοιποι μαθητές κάθονται ακίνητοι στα καθίσματά τους. Μεταξύ τους διεξάγεται ο εξής διάλογος:

Μαθητής: «Βλέπω ότι εσείς επιταχύνεστε ως προς εμένα, κι εγώ παραμένω ακίνητος».

Υπόλοιποι Μαθητές: «Εμείς είμαστε ακίνητοι, και δεν νιώθουμε καμία δύναμη να μας σπρώχνει. Αντίθετα, εσύ επιταχύνεσαι, γιατί δρα σε σένα μία δύναμη από το έδαφος.»

Να συζητήσετε ποιός από τους δύο έχει δίκιο.



Παράδειγμα 4
Χελώνα σε ανελκυστήρα

Η διπλανή εικόνα απεικονίζει μία χελώνα, που στέκεται σε μία ζυγαριά στο δάπεδο ενός ανελκυστήρα. *Ως προς το έδαφος*, η χελώνα κινείται με την ταχύτητα του ανελκυστήρα. Στη χελώνα δρουν το βάρος της και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από τη ζυγαριά. Επιλέγουμε τη θετική φορά του κατακόρυφου άξονα προς τα πάνω. Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο, συμπεραίνουμε:

$$\vec{B} + \vec{N} = m\vec{\alpha} \Rightarrow -mg + N = m\alpha \Rightarrow N = m(\alpha + g)$$

όπου α η κατακόρυφη επιτάχυνση του ανελκυστήρα.
Άρα:

- Αν η επιτάχυνση του ανελκυστήρα είναι μηδενική, η χελώνα υφίσταται από τη ζυγαριά δύναμη ίση, κατά μέτρο, με το βάρος της:

  $$N = mg$$

  Ο παρατηρητής του ανελκυστήρα βλέπει ότι η χελώνα ηρεμεί και υφίσταται μηδενική συνισταμένη δύναμη.

- Αν ο ανελκυστήρας εκτελεί ελεύθερη πτώση ($\alpha = -g$) η χελώνα υφίσταται μηδενική δύναμη από τη ζυγαριά:

  $$N = 0$$

  Σε αυτή την περίπτωση, ο παρατηρητής του ανελκυστήρα βλέπει τη χελώνα να ηρεμεί, ενώ η συνισταμένη δύναμη σε αυτήν είναι μη μηδενική:

  $$\sum\vec{F} = \vec{B} + \vec{N} = \vec{B}$$

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Ένας **αδρανειακός** παρατηρητής είναι ακίνητος ή κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς.	
2	Η συνισταμένη δύναμη που δρα σε έναν **αδρανειακό** παρατηρητή είναι πάντα μηδενική.	
3	Δύο **αδρανειακά** συστήματα κινούνται το ένα ως προς το άλλο με σταθερή σχετική ταχύτητα.	
4	Ένας **μη αδρανειακός** παρατηρητής επιταχύνεται ως προς οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς.	
5	Η συνισταμένη δύναμη που δρα σε έναν **μη αδρανειακό** παρατηρητή είναι πάντοτε μη μηδενική.	
6	Ένας **αδρανειακός** παρατηρητής δεν μπορεί να αποφασίσει με κάποιο κατάλληλο πείραμα, εάν κινείται ή ηρεμεί.	
7	Ένας **μη αδρανειακός** παρατηρητής μπορεί πάντα με κάποιο κατάλληλο πείραμα να αποφασίσει ότι επιταχύνεται.	

Ασκήσεις

1 Ένα τρένο ηρεμεί στην οριζόντια πλατφόρμα του σταθμού. Στο εσωτερικό του τρένου βρίσκεται ένας ακίνητος επιβάτης. Στο έδαφος του σταθμού στέκεται ακίνητος ένας μηχανοδηγός.

I. Ο επιβάτης ακουμπά στο δάπεδο του τρένου έναν γυάλινο βόλο.

Α. Θεωρείστε τις δυνάμεις πάνω στον βόλο, και υπολογίστε τη συνισταμένη αυτών των δυνάμεων.

Β. Ο επιβάτης παρατηρεί ότι ο βόλος ηρεμεί. Είναι αυτή η παρατήρηση σε συμφωνία με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα; Είναι αδρανειακός παρατηρητής ο επιβάτης;

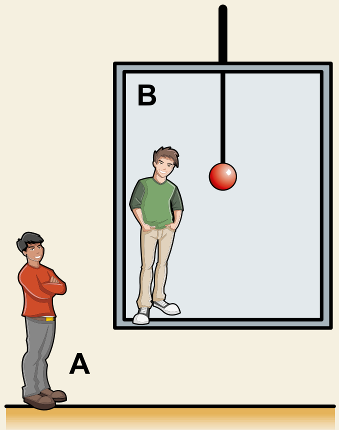
Γ. Ποια είναι η ταχύτητα του βόλου, ως προς τον μηχανοδηγό; Είναι αυτή η παρατήρηση σε συμφωνία με τον πρώτο νόμο; Είναι αδρανειακός παρατηρητής ο μηχανοδηγός;

II. Σε κάποια στιγμή το τρένο αρχίζει να κινείται με μεταβαλλόμενη ταχύτητα. Η τριβή ανάμεσα στον βόλο και το δάπεδο είναι αμελητέα.

Α. Πώς θα κινηθεί ο βόλος σε σχέση με τον μηχανοδηγό; Είναι η παρατήρηση του μηχανοδηγού σε συμφωνία με τον πρώτο νόμο;

Β. Πώς θα κινηθεί ο βόλος σε σχέση με τον επιβάτη; Είναι αδρανειακός παρατηρητής ο επιβάτης; Μπορεί ο επιβάτης με κάποιο συλλογισμό να συμπεράνει ότι το τρένο επιταχύνεται;

2 Μια μπάλα μάζας m είναι αναρτημένη μέσω αβαρούς νήματος από την οροφή ενός ανελκυστήρα. Στην μπάλα ασκείται το βάρος της $\vec{B}$ και μία δύναμη $\vec{T}$ από το νήμα.



Ι. Ο ανελκυστήρας ανέρχεται με **σταθερή** κατακόρυφη ταχύτητα. Μετρήσεις των δυνάμεων $\vec{B}$ και $\vec{T}$ δείχνουν ότι έχουν ίσα μέτρα, $|\vec{T}| = |\vec{B}|$, και είναι αντίθετες.

Πώς κινείται η μπάλα ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή **Α** του εδάφους και ως προς ένα παρατηρητή **Β**, που κινείται μαζί με τον ανελκυστήρα; Οι παρατηρήσεις των **Α** και **Β** είναι σε συμφωνία με τον πρώτο νόμο; Είναι οι **Α** και **Β** αδρανειακοί;

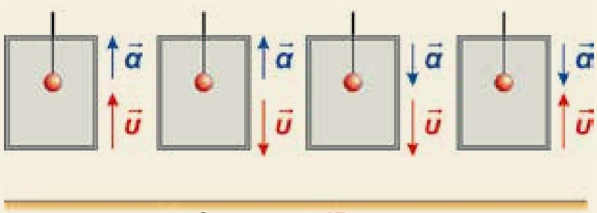
ΙΙ. Ο ανελκυστήρας ανέρχεται με **επιτάχυνση** $\vec{\alpha}$ ως προς το έδαφος. Μετρήσεις δείχνουν ότι τα μέτρα των δυνάμεων είναι άνισα, και $|\vec{T}| - |\vec{B}| = m|\vec{\alpha}| > 0$.

Α. Πώς κινείται η μπάλα ως προς τον παρατηρητή **Β** του ανελκυστήρα; Είναι οι παρατηρήσεις του **Β** σε συμφωνία με τον πρώτο νόμο; Μπορεί ο **Β** να συμπεράνει με κάποιο συλλογισμό ότι δεν είναι αδρανειακός;

Β. Πώς κινείται η μπάλα ως προς τον παρατηρητή **Α** του εδάφους; Είναι οι παρατηρήσεις του Α σε συμφωνία με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα;

3 Ένας ανελκυστήρας ανέρχεται ή κατέρχεται με επιτάχυνση ***ως προς το έδαφος***, όπως στα επόμενα σχήματα. Μία μπάλα είναι αναρτημένη μέσω αβαρούς νήματος από την οροφή του ανελκυστήρα.

Στην μπάλα ασκείται το βάρος της $\vec{B}$ και μία δύναμη $\vec{T}$ από το νήμα.



Ως προς το έδαφος

Να κατατάξετε τα σχήματα **(α) - (δ)** σε αύξουσα σειρά, ως προς το μέτρο της τάσης $\vec{T}$ του σχοινιού που δρα στη μπάλα.

4 Ένα κιβώτιο εφάπτεται στο ανώμαλο δάπεδο ενός ανελκυστήρα. Στο κιβώτιο εφαρμόζεται μία οριζόντια δύναμη, αλλά αυτό ισορροπεί εξ΄αιτίας της στατικής τριβής με το δάπεδο. Σε ποιά από τις ακόλουθες περιπτώσεις πρέπει να καταβληθεί μεγαλύτερη δύναμη, έτσι ώστε να αρχίσει να μετατοπίζεται στην οριζόντια διεύθυνση;

I. Ο ανελκυστήρας ανέρχεται και η ταχύτητά του ελαττώνεται.

II. Ο ανελκυστήρας κατέρχεται και η ταχύτητά του ελαττώνεται.

III. Ο ανελκυστήρας ανέρχεται με σταθερή ταχύτητα.

5 Ο πύραυλος Saturn-V χρησιμοποιήθηκε στις αποστολές Apollo, οι οποίες έστειλαν αστροναύτες στη Σελήνη.

Κατά τη διάρκεια της εκτόξευσης, ο πύραυλος είχε μέγιστη επιτάχυνση περίπου $4g$. Εάν σε αυτό το στάδιο κινούνταν κατακόρυφα, τι ένδειξη θα έδειχνε μία ζυγαριά στο εσωτερικό του πυραύλου, για έναν αστροναύτη μάζας 85 kg.

Φωτογραφία: NASA

6 Ένα κιβώτιο ισορροπεί στο δάπεδο ενός ακίνητου ανελκυστήρα. Σε κάποια στιγμή, ο ανελκυστήρας αρχίζει να πέφτει ελεύθερα. Ποιές από τις ακόλουθες δηλώσεις είναι αληθείς, κατά τη διάρκεια της πτώσης του ανελκυστήρα;

Α. Η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το δάπεδο στο κιβώτιο είναι μηδενική.

Β. Η επιτάχυνση του κιβωτίου ως προς τον ανελκυστήρα είναι μηδενική.

Γ. Το κιβώτιο ηρεμεί ως προς τον ανελκυστήρα.

Δ. Η συνισταμένη δύναμη στο κιβώτιο είναι μηδενική, επειδή ηρεμεί ως προς τον ανελκυστήρα.

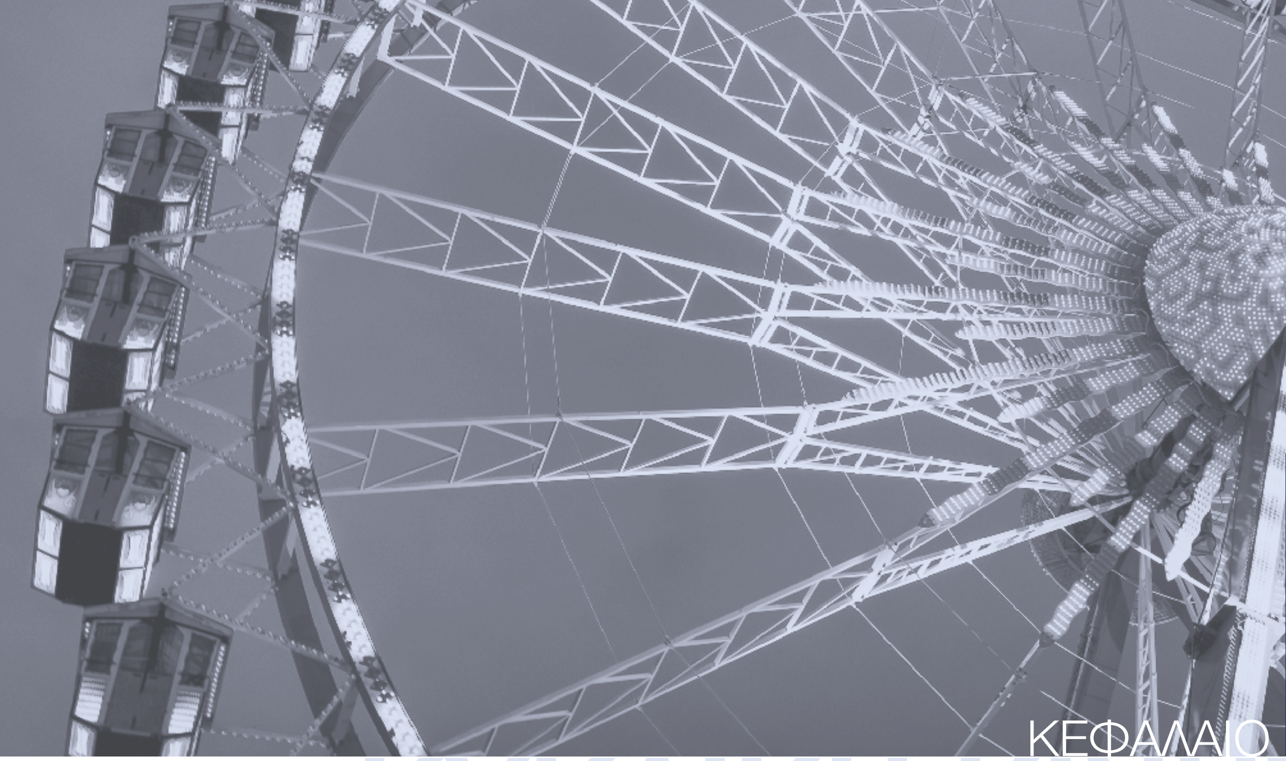
Απαντήσεις Ελέγχου Κατανόησης Εννοιών

3.1.1. **(α)** $\upsilon_{\mathrm{MB}} = \upsilon_{\mathrm{ME}} - \upsilon_{\mathrm{BE}} = +10$ m/s

(β) $\upsilon_{\mathrm{MB}} = \upsilon_{\mathrm{ME}} - \upsilon_{\mathrm{BE}} \Rightarrow \upsilon_{\mathrm{ME}} = \upsilon_{\mathrm{MB}} + \upsilon_{\mathrm{BE}} = +60$ m/s

---

3.4.1. Οι υπόλοιποι μαθητές είναι ακίνητοι (ως προς τους ίδιους) και υφίστανται μηδενική συνισταμένη δύναμη. Οι μαθητές αυτοί διαπιστώνουν ότι ισχύει ο πρώτος νόμος (είναι αδρανειακοί). Ο κινούμενος μαθητής γνωρίζει ότι η συνισταμένη δύναμη στους υπόλοιπους μαθητές είναι μηδενική, αλλά τους βλέπει να επιταχύνονται. Ως προς τον κινούμενο μαθητή δεν ισχύει ο πρώτος νόμος. Ο μαθητής αυτός δεν είναι αδρανειακός.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Στο Κεφάλαιο 4:

- **Περιγράφουμε** τη θέση ενός σώματος στον κύκλο με το διάνυσμα θέσης και τη γωνία θέσης.
- **Ορίζουμε** τα μεγέθη της γωνιακής μετατόπισης, της διανυόμενης απόστασης στον κύκλο (μήκος τόξου), της γωνιακής ταχύτητας και της γωνιακής επιτάχυνσης.
- **Συζητούμε** την αντιστοιχία αυτών των μεγεθών με μεγέθη της ευθύγραμμης κίνησης.
- **Ορίζουμε** την **ομαλή κυκλική** κίνηση και **εξάγουμε** την αντίστοιχη εξίσωση της γωνίας θέσης - χρόνου.
- **Συζητούμε** τη φυσική σημασία της **κλίσης** του γραφήματος γωνίας θέσης - χρόνου, και του **εμβαδού** του γραφήματος γωνιακής ταχύτητας - χρόνου.
- **Ορίζουμε** την περίοδο και τη συχνότητα, και εξάγουμε τη σχέση που τις συνδέει.
- **Υπολογίζουμε** το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της ομαλής κυκλικής κίνησης.
- **Αποδεικνύουμε** ότι η ομαλή κυκλική κίνηση έχει **ακτινική** επιτάχυνση (κεντρομόλο επιτάχυνση), και εξάγουμε το μέτρο της.
- **Συνδέουμε** την κεντρομόλο επιτάχυνση με τη συνισταμένη δύναμη, που δρα στο σώμα **(κεντρομόλο δύναμη)**.

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

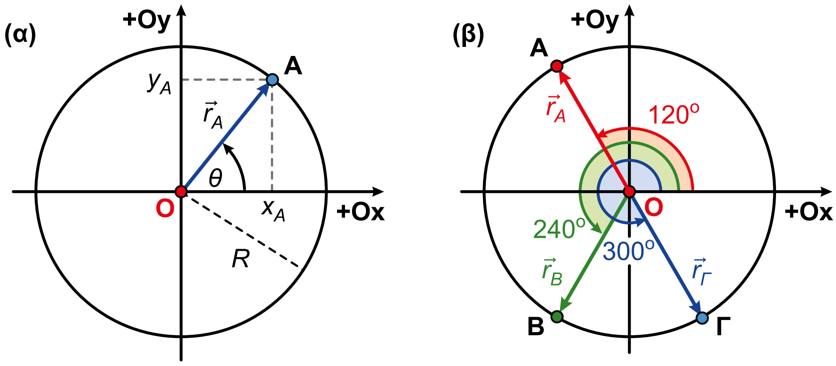
- **Επιλύουμε** αντιπροσωπευτικά παραδείγματα ομαλής κυκλικής κίνησης.
- **Διαφοροποιούμε** ανάμεσα στην ομαλή και τη **μεταβαλλόμενη** κυκλική κίνηση.
- **Μαθαίνουμε** ότι η επιτάχυνση ενός σώματος, που εκτελεί μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση, έχει **κεντρομόλο** και **επιτρόχιο** (εφαπτομενική) συνιστώσα.
- **Συνδέουμε** την κεντρομόλο επιτάχυνση με τη μεταβολή στη **διεύθυνση** και την επιτρόχιο επιτάχυνση με τη μεταβολή στο **μέτρο** της γραμμικής ταχύτητας.
- **Μαθαίνουμε** ότι η κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης έχει το ίδιο μέτρο, όπως στην ομαλή κυκλική κίνηση.
- **Επιλύουμε** αντιπροσωπευτικά παραδείγματα μεταβαλλόμενης κυκλικής κίνησης.

Ένα αυτοκίνητο που κινείται σε μία κυκλική πλατεία, ο τροχός ενός Λούνα-Πάρκ, ο έλικας ενός αεροπλάνου, η ρόδα ενός ποδηλάτου, οι δείκτες του ρολογιού, το λάσο του κάου-μπόυ, η σφύρα των Ολυμπιακών Αγώνων, είναι παραδείγματα σωμάτων που **κινούνται στην περιφέρεια ενός κύκλου**. Στο **Κεφάλαιο 4** θα μελετήσουμε αυτό το είδος κίνησης.

4.1. Εισαγωγικές Έννοιες

Θέση ενός Σώματος στον Κύκλο

Η Εικόνα **4-1(α)** απεικονίζει ένα υλικό σημείο **Α**, το οποίο κινείται στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας *R*.



Εικόνα 4-1
(α) Η θέση του σημείου **Α** στον κύκλο ακτίνας *R* περιγράφεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_A$ με συντεταγμένες x_A και y_A, ή ισοδύναμα από τη γωνία θ. **(β)** Για να προσδιορίσουμε τη γωνία θ ενός σημείου, περιστρέφουμε τον άξονα Οx **αριστερόστροφα**, μέχρι να συμπέσει με το διάνυσμα θέσης του σημείου.

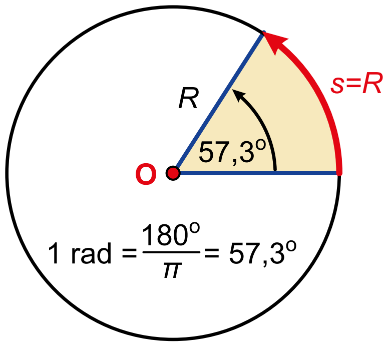
Η θέση του υλικού σημείου **Α** δηλώνεται από το ακτινικό διάνυσμα $\vec{r}_A$, με αρχή **το κέντρο Ο** του κύκλου και τέλος το Α. Ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων Οx και Οy, με αρχή στο σημείο Ο, το διάνυσμα $\vec{r}_A$ έχει συνιστώσες x_A και y_A. Το μέτρο του $\vec{r}_A$ ισούται με την ακτίνα του κύκλου, και εκφράζεται ως προς τις συνιστώσες:

$$|\vec{r}_A| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = R$$

Ισοδύναμα, δηλώνουμε τη θέση του Α με βάση τη γωνία θ του $\vec{r}_A$ με τον άξονα **Οx**.

Όπως φαίνεται στην **Εικόνα 4-1(β)**, για να προσδιορίσουμε τη **γωνία** θ της θέσης ενός σημείου στον κύκλο, περιστρέφουμε τον άξονα Οx **αντίθετα προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού**, μέχρι να συμπέσει με το διάνυσμα θέσης του σημείου. Με βάση αυτόν τον ορισμό, η γωνία θ παίρνει τιμές από 0^o ως 360^o [1].

[1] Γενικότερα η γωνία θ μπορεί να πάρει τιμές έξω από την περιοχή $[0^o, 360^o)$. Δύο γωνίες που διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο των 360^o αντιστοιχούν στην ίδια θέση.



Σημείωση
Στη μελέτη της κυκλικής κίνησης θα εκφράζουμε τη γωνία θ σε **ακτίνια** (rad).

Ένα ακτίνιο είναι η επίκεντρη γωνία, που τέμνει τον κύκλο σε τόξο **ίσο με την ακτίνα του κύκλου**, $s = R$.

Επειδή το **μισό της περιφέρειας** του κύκλου έχει μήκος $s = \pi R$, αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία π rad. Η ίδια επίκεντρη γωνία ισούται με 180^o. Συμπεραίνουμε ότι 1 rad αντιστοιχεί σε:

$$1 \text{ rad} = \frac{180^o}{\pi} = 57{,}3^o$$

Συμπέρασμα
Για να μετατρέψουμε μία γωνία **από ακτίνια σε μοίρες**, την **πολλαπλασιάζουμε** με τον παράγοντα $180/\pi$.

Παράδειγμα
Να εκφράσετε τη γωνία $\frac{\pi}{4}$ rad σε μοίρες.

Ένα ακτίνιο αντιστοιχεί σε $\frac{180}{\pi}$ μοίρες. Άρα, $\frac{\pi}{4}$ rad αντιστοιχούν σε $\frac{\pi}{4} \times \left(\frac{180^o}{\pi}\right) = 45^o$.

Επειδή η γωνία 180^o μοιρών ισούται με π rad, συμπεραίνουμε ότι 1^o αντιστοιχεί σε $1^o = \frac{\pi}{180}$ rad.

Συμπέρασμα
Για να μετατρέψουμε μία γωνία **από μοίρες σε ακτίνια**, την **πολλαπλασιάζουμε** με τον παράγοντα $\pi/180$.

Παράδειγμα
Να εκφράσετε τη γωνία 30^o σε ακτίνια.

Αφού μία μοίρα αντιστοιχεί σε $\frac{\pi}{180}$ ακτίνια, προκύπτει ότι μία γωνία 30^o αντιστοιχεί σε

$$30 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

4.1.1. Να μετατρέψετε τις γωνίες 60^o, 90^o, και 270^o σε ακτίνια.

4.1.2. Να μετατρέψετε τις γωνίες $\dfrac{2\pi}{3}$ rad, $\dfrac{3\pi}{4}$ rad, και $\dfrac{4\pi}{3}$ rad σε μοίρες.

Όπως φαίνεται στην **Εικόνα 4-1(α)**, οι συνιστώσες x_A και y_A του διανύσματος $\vec{r}_A$ (συντεταγμένες του σημείου **Α**) συνδέονται με τη γωνία θ με τις σχέσεις:

$$x_A = |\vec{r}_A|\, \sigma\upsilon\nu\theta = R\sigma\upsilon\nu\theta,\ \ y_A = |\vec{r}_A|\, \eta\mu\theta = R\eta\mu\theta$$

ΕΝΘΕΤΗ ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Χρησιμοποιώντας τις γνωστές τριγωνομετρικές ισότητες:

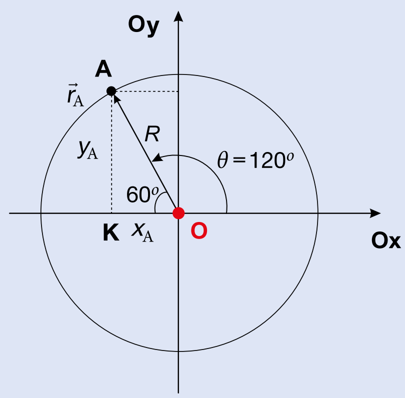
$$\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta,\ \ \eta\mu(\pi-\theta) = \eta\mu\theta$$
$$\sigma\upsilon\nu(\pi+\theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta,\ \ \eta\mu(\pi+\theta) = -\eta\mu\theta$$
$$\sigma\upsilon\nu(2\pi-\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta,\ \ \eta\mu(2\pi-\theta) = -\eta\mu\theta$$

μπορούμε να δείξουμε ότι οι προηγούμενες σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων x_A , y_A, και της γωνίας θ ισχύουν **για κάθε τιμή** της γωνίας θ.

Παράδειγμα

Το σημείο **Α** της **Εικόνας 4-1(β)** έχει γωνία θέσης $\theta = 120^o$. Οι συντεταγμένες του Α είναι:

$$x_A = R\sigma\upsilon\nu 120^o = R\sigma\upsilon\nu(\pi - 60^o) = -R\sigma\upsilon\nu 60^o$$
$$y_A = R\eta\mu 120^o = R\eta\mu(\pi - 60^o) = R\eta\mu 60^o$$



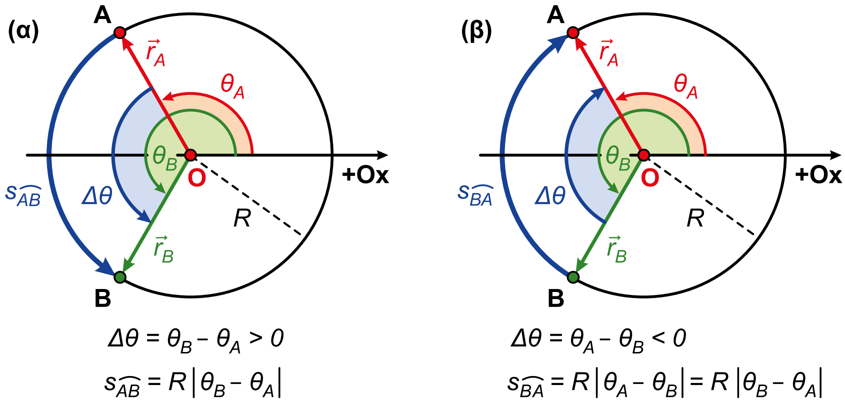
Από το ορθογώνιο τρίγωνο **ΟΚΑ** του διπλανού σχήματος, φαίνεται ότι οι πιο πάνω σχέσεις είναι σωστές:

$$x_A = -\mathrm{OK} = -R\sigma\upsilon\nu 60^o$$
$$y_A = +\mathrm{KA} = R\eta\mu 60^o$$

Γωνιακή Μετατόπιση Σώματος στον Κύκλο

Η **Εικόνα 4-2(α)** απεικονίζει μία σφαίρα, που κινείται σε κύκλο και μετατοπίζεται από το σημείο **Α** στο σημείο **Β**.

Εικόνα 4-2
(α) Η σφαίρα μετακινείται **αριστερόστροφα** από το **A** στο **B**. Η γωνιακή μετατόπιση ισούται με τη διαφορά $\Delta\theta = \theta_B - \theta_A > 0$. Το μήκος τόξου που διαγράφεται ισούται με $s_{\widehat{AB}} = R|\theta_B - \theta_A|$. **(β)** Εάν η σφαίρα μετακινηθεί **δεξιόστροφα** από το **B** στο **A**, η γωνιακή μετατόπιση αντιστρέφεται, $\Delta\theta = \theta_A - \theta_B < 0$, αλλά το μήκος τόξου παραμένει το ίδιο $s_{\widehat{BA}} = s_{\widehat{AB}} = R|\theta_B - \theta_A|$.



Αντίστοιχα, **η γωνία θέσης** της σφαίρας μεταβάλλεται από μία αρχική τιμή θ_A σε μία τελική τιμή θ_B. Η διαφορά $\Delta\theta = \theta_B - \theta_A$ ονομάζεται **γωνιακή μετατόπιση**.

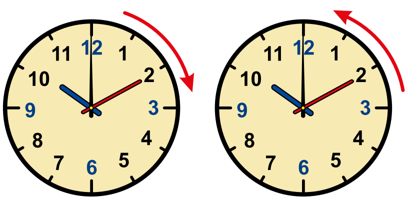
Γωνιακή Μετατόπιση

$$\Delta\theta = \theta_{\tau\varepsilon\lambda} - \theta_{\alpha\rho\chi}$$

Η **γωνιακή μετατόπιση** στην κυκλική κίνηση είναι το αντίστοιχο μέγεθος της **μετατόπισης** στην ευθύγραμμη κίνηση.

Έστω ότι ένα σώμα κινείται στην περιφέρεια ενός κύκλου. Φανταζόμαστε ότι κοιτάμε τους δείκτες ενός ρολογιού, που είναι τοποθετημένο επάνω στο επίπεδο του κύκλου.

Δεξιόστροφη φορά **Αριστερόστροφη φορά**



Έαν το σώμα κινείται πάνω στον κύκλο **κατά τη φορά των δεικτών** του ρολογιού, η κίνησή του ονομάζεται **δεξιόστροφη**.

Εάν το σώμα κινείται **αντίθετα από τη φορά των δεικτών** του ρολογιού, η κίνησή του ονομάζεται **αριστερόστροφη**.

Η γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$ μπορεί να παίρνει θετικές ή αρνητικές τιμές. Εάν η σφαίρα μετακινείται **αριστερόστροφα** από το **A** στο **B**, όπως στην **Εικόνα 4-2(α)**, η γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$ είναι **θετική**. Αντίθετα, εάν η σφαίρα μετακινείται **δεξιόστροφα**, όπως στην **Εικόνα 4-2(β)**, η γωνιακή μετατόπιση είναι **αρνητική**.

Σημείωση
Όταν το σώμα διασχίζει τον **θετικό** άξονα **Ox**, η γωνία θ μεταβάλλεται κατά 360°. Γι΄ αυτό, ο υπολογισμός της γωνιακής μετατόπισης απαιτεί προσοχή:

Α. Όταν το σώμα μετακινείται **αριστερόστροφα**, προσθέτουμε 360^o στην τιμή της $\theta_{\tau\varepsilon\lambda}$:

$$\Delta\theta = (360^o + \theta_{\tau\varepsilon\lambda}) - \theta_{\alpha\rho\chi}$$

Β. Όταν το σώμα μετακινείται **δεξιόστροφα**, προσθέτουμε 360^o στην τιμή της $\theta_{\alpha\rho\chi}$:

$$\Delta\theta = \theta_{\tau\varepsilon\lambda} - (360^o + \theta_{\alpha\rho\chi})$$

Παράδειγμα

Εάν το σώμα μετακινηθεί αριστερόστροφα από $\theta_{\alpha\rho\chi} = 350^o$ σε $\theta_{\tau\varepsilon\lambda} = 10^o$, η γωνιακή μετατόπιση είναι

$$\Delta\theta = (360^o + 10^o) - 350^o = 20^o.$$

Εάν το σώμα μετακινηθεί δεξιόστροφα από $\theta_{\alpha\rho\chi} = 20^o$ σε $\theta_{\tau\varepsilon\lambda} = 340^o$, η γωνιακή μετατόπιση είναι

$$\Delta\theta = 340^o - (360^o + 20^o) = -40^o.$$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

4.1.3. Να υπολογίσετε τη γωνιακή μετατόπιση, εαν το σώμα μετακινηθεί:

Α. Αριστερόστροφα, από $\theta_{\alpha\rho\chi} = 285^o$ σε $\theta_{\tau\varepsilon\lambda} = 45^o$.

Β. Από $\theta_{\alpha\rho\chi} = 285^o$ σε $\theta_{\tau\varepsilon\lambda} = 285^o$ (διαγράφοντας **αριστερόστροφα** έναν πλήρη κύκλο).

Γ. Δεξιόστροφα, από $\theta_{\alpha\rho\chi} = 60^o$ σε $\theta_{\tau\varepsilon\lambda} = 320^o$.

Δ. Από $\theta_{\alpha\rho\chi} = 60^o$ σε $\theta_{\tau\varepsilon\lambda} = 60^o$ (διαγράφοντας **δεξιόστροφα** έναν πλήρη κύκλο).

Διανυόμενη Απόσταση στον Κύκλο

Στο παράδειγμα της **Εικόνας 4-2(α)**, η σφαίρα μετακινείται συνεχώς αριστερόστροφα, διαγράφοντας το **κυκλικό τόξο** $\widehat{AB}$. Το **μήκος του τόξου** ισούται με τη **διανυόμενη απόσταση**. *Όταν το σώμα κινείται συνεχώς με την ίδια φορά*, το μήκος τόξου συνδέεται με τη γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$ και την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς με τη σχέση:

Σχέση Διανυόμενης Απόστασης - Γωνιακής Μετατόπισης για Κυκλική Κίνηση με Σταθερή Φορά

$$s_{\widehat{AB}} = R\left|\theta_B - \theta_A\right| = R\left|\Delta\theta\right|$$

Προσοχή

Στην εφαρμογή αυτής της σχέσης πρέπει να εκφράσουμε τη γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$ σε **ακτίνια** (rad).

Στο **σχήμα 4-2(β)** η σφαίρα μετακινείται **δεξιόστροφα** από το σημείο Β στο σημείο Α. Η γωνιακή μετατόπιση της σφαίρας είναι αρνητική, αλλά το διαγραφόμενο τόξο είναι το ίδιο:

$$s_{\widehat{BA}} = R\left|\theta_A - \theta_B\right| = R\left|\theta_B - \theta_A\right| = s_{\widehat{AB}}$$

Η διανυόμενη απόσταση στον κύκλο (μήκος τόξου) είναι **μονόμετρο** μέγεθος.

Παράδειγμα

Ένας κύκλος έχει ακτίνα $R = 1$ m. Εάν ένα σώμα διαγράψει **αριστερόστροφα** μία ολόκληρη περιφέρεια κύκλου, η γωνιακή μετατόπιση είναι $\Delta\theta = 360^o = 2\pi$ rad. Το αντίστοιχο μήκος τόξου (και η διανυόμενη απόσταση) είναι $s = 2\pi R = (6{,}28 \text{ rad}) \times (1 \text{ m}) = 6{,}28$ m.

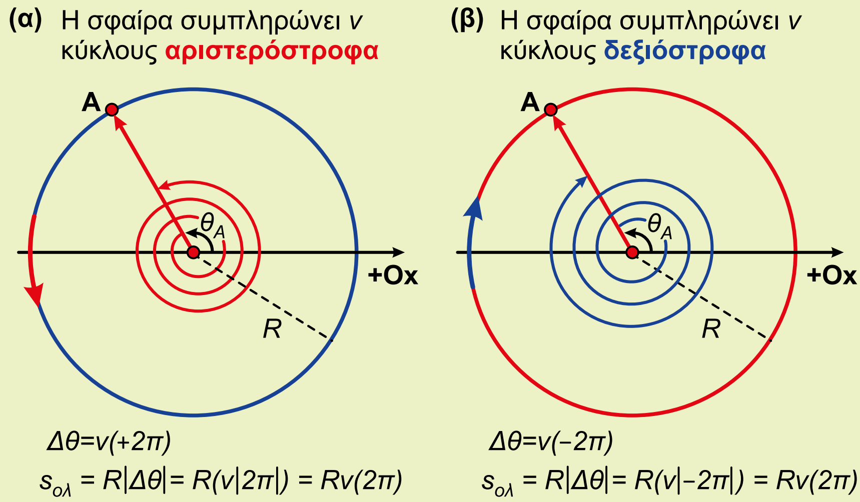
Εάν διαγράψει **δεξιόστροφα** την περιφέρεια, η γωνιακή μετατόπιση είναι αρνητική ($\Delta\theta = -360^o = -2\pi$ rad). Η διανυόμενη απόσταση είναι θετική: $s = \left|-2\pi\right| \times (1 \text{ m}) = 6{,}28$ m.

Να παρατηρήσετε ότι τα ακτίνια αγνοούνται στον καθορισμό της τελικής μονάδας μέτρησης: το γινόμενο **(γωνία** × **μήκος)** εκφράζεται σε μονάδες μήκους.

Γωνιακή Μετατόπιση και Διανυόμενη Απόσταση, όταν το Σώμα διαγράφει περισσότερους από έναν πλήρεις Κύκλους

Εάν το σώμα διαγράψει περισσότερους από έναν πλήρεις κύκλους (με οποιαδήποτε φορά), υπολογίζουμε το **συνολικό μήκος τόξου** προσθέτοντας συνεισφορά $2\pi R$ **για κάθε πλήρη κύκλο (ανε-**

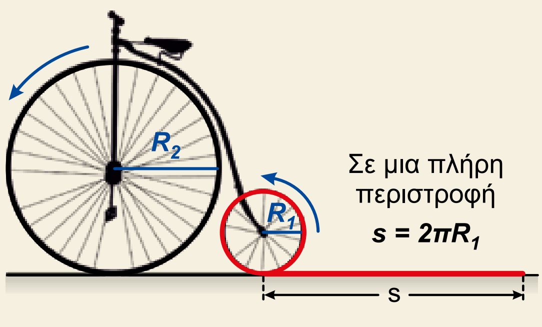
ξάρτητα από τη φορά διαγραφής του κύκλου). Για ν πλήρεις κύκλους, το συνολικό μήκος τόξου που διαγράφεται ισούται με $s_{ολ} = \nu(2\pi R)$.



Για να υπολογίσουμε τη **συνολική γωνιακή μετατόπιση** του σώματος σε ακτίνια (rad), προσθέτουμε συνεισφορά $+2\pi$ (αριστερόστροφη μετατόπιση) ή -2π (δεξιόστροφη μετατόπιση) **για κάθε πλήρη κύκλο.** Εάν το σώμα διαγράψει ν πλήρεις κύκλους αριστερόστροφα, η γωνιακή μετατόπιση είναι ίση με $\nu(2\pi)$. Ομοίως, εάν το σώμα διαγράψει ν πλήρεις κύκλους δεξιόστροφα, η γωνιακή μετατόπιση είναι ίση με $-\nu(2\pi)$.

Παράδειγμα

Ένα ποδήλατο της παλιάς εποχής κινείται στο δρόμο. Σε κάποια στιγμή η μικρή του ρόδα, ακτίνας R_1 πατά σε μία λακούβα με κόκκινη μπογιά, που καλύπτει όλη την περιφέρεια της ρόδας. Στη συνέχεια, η ρόδα αφήνει μία κόκκινη ευθεία γραμμή.



Όταν η ρόδα κινείται χωρίς να ολισθαίνει, το μήκος της γραμμής, που χαράσσει σε κάθε πλήρη περιστροφή της, ισούται με $s = 2\pi R_1$. Εάν το συνολικό μήκος της γραμμής ισούται με L, ο αριθμός περιστροφών της ρόδας είναι $K_1 = L/(2\pi R_1)$.

Θεωρώντας ότι η κίνηση είναι **αριστερόστροφη**, η αντίστοιχη συνολική γωνιακή μετατόπιση ενός σημείου της μικρής ρόδας ισούται με $\Delta\theta_1 = K_1 \times (2\pi) = L/R_1$.

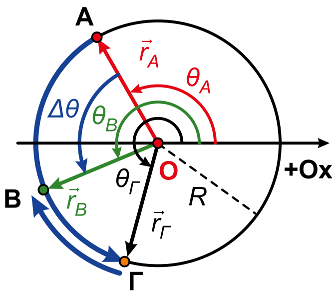
Αριθμητική Εφαρμογή

Έστω ότι η γραμμή έχει μήκος $L = 785$ m, και η μικρή ρόδα έχει ακτίνα $R_1 = 40{,}0$ cm. Από τις πιο πάνω σχέσεις, βρίσκουμε: $K_1 = (785\ \text{m})/[2\pi \times (0{,}400\ \text{m})] \cong 313$ στροφές, και $\Delta\theta_1 = (785\ \text{m})/(0{,}400\ \text{m}) \cong 1960$ rad.

Η μεγάλη ρόδα έχει ακτίνα $R_2 = 100{,}0$ cm. Εάν η ρόδα ήταν βαμμένη, θα άφηνε γραμμή ίδιου μήκους L με τη μικρή. Άρα, η μεγάλη ρόδα συμπληρώνει $K_2 = L/(2\pi R_2) = (785\ \text{m})/[2\pi \times (1{,}000\ \text{m})] = 125$ στροφές, και η γωνιακή μετατόπιση ενός σημείου έξω από το κέντρο της είναι $\Delta\theta_2 = L/R_2 = (785\ \text{m})/(1{,}000\ \text{m}) = 785$ rad.

Η Γωνιακή Μετατόπιση εξαρτάται μόνο από τη Διαφορά της Τελικής από την Αρχική Γωνία Θέσης

Εικόνα 4-3
Η γωνιακή μετατόπιση ισούται με τη διαφορά της τελικής από την αρχική γωνία θέσης.



$\Delta\theta = \theta_B - \theta_A$
$s = s_{\widehat{A\Gamma}} + s_{\widehat{\Gamma B}} = R(|\theta_\Gamma - \theta_A| + |\theta_B - \theta_\Gamma|)$

Η σφαίρα της **Εικόνας 4-3** μετακινείται αρχικά **αριστερόστροφα** από το Α στο Γ, και έπειτα **δεξιόστροφα** από το Γ στο Β.

Η γωνιακή μετατόπιση ισούται με τη διαφορά της **τελικής** από την **αρχική** γωνία θέσης, $\Delta\theta = \theta_B - \theta_A$

Αντίστοιχα, η μετατόπιση στην ευθύγραμμη κίνηση εξαρτάται μόνο από τη διαφορά της τελικής από την αρχική θέση.

Η διανυόμενη απόσταση (το συνολικό μήκος του διαγραφόμενου τόξου) στον κύκλο **δεν** ισούται πάντοτε με την ακτίνα του κύκλου επί την απόλυτη τιμή της γωνιακής μετατόπισης. Το **συνολικό μήκος τόξου**, που διανύει η σφαίρα της **Εικόνας 4-3**, ισούται με το **άθροισμα**

$$s_{\widehat{A\Gamma}} + s_{\widehat{\Gamma B}} = R\left(|\theta_\Gamma - \theta_A| + |\theta_B - \theta_\Gamma|\right)$$

Αντίστοιχα, η διανυόμενη απόσταση στην ευθύγραμμη κίνηση δεν ισούται γενικά με το μέτρο της μετατόπισης.

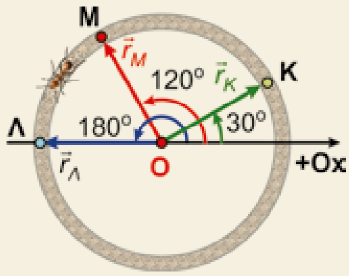
Παράδειγμα

Ένα μυρμήγκι μετακινείται κατά μήκος ενός κυκλικού αυλακιού ακτίνας $R = 2{,}0$ m. Αρχικά κινείται **αριστερόστροφα** από το σημείο **Κ** στο σημείο **Λ**, και ύστερα επιστρέφει **δεξιόστροφα** στο σημείο **Μ.** Εάν οι γωνίες θέσης των τριών σημείων είναι $\theta_K = 30^o$, $\theta_\Lambda = 180^o$ και $\theta_M = 120^o$, θα υπολογίσουμε τη συνολική γωνιακή μετατόπιση και το συνολικό μήκος τόξου, που διέγραψε το μυρμήγκι.

Η γωνιακή μετατόπιση ισούται με τη διαφορά της τελικής από την αρχική γωνία θέσης:

$$\Delta\theta = \theta_{M} - \theta_{K} = 120^o - 30^o = 90^o$$

Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι **συνολικά**, το μυρμήγκι μετακινήθηκε **αριστερόστροφα** (από το Κ στο Μ), κατά 90^o.



Για να υπολογίσουμε το συνολικό μήκος τόξου, που διέγραψε το μυρμήγκι, **προσθέτουμε** τα μήκη των επιμέρους διαδρομών:

$$s = s_{\widehat{K\Lambda}} + s_{\widehat{\Lambda M}} = R\left[\left|\theta_\Lambda - \theta_K\right| + \left|\theta_M - \theta_\Lambda\right|\right] = (2{,}0\ \text{m}) \times \left[\left|180^o - 30^o\right| + \left|120^o - 180^o\right|\right] \times \frac{\pi}{180^o} =$$

$$= (2{,}0\ \text{m}) \times 210^o \times \frac{\pi}{180^o} = 7{,}3\ \text{m}.$$

Μέση Γωνιακή Ταχύτητα

Έστω ότι το μυρμήγκι του προηγούμενου παραδείγματος χρειάσθηκε 200 s για να μετακινηθεί από το σημείο **Κ** στο **Μ**. Ο **μέσος** ρυθμός μεταβολής της γωνίας του μυρμηγκιού σε αυτό το διάστημα ήταν:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_M - \theta_K}{\Delta t} = \frac{90^o \times (\pi/180^o)}{200}\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 0{,}008\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για να περιγράψουμε πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η γωνία θέσης ενός σώματος, που κινείται πάνω σε κύκλο, χρησιμοποιούμε τον **μέσο ρυθμό μεταβολής της γωνίας** θ του σώματος, $\Delta\theta/\Delta t$. Με τον ρυθμό αυτό συνδέεται ένα **διανυσματικό** μέγεθος, που ονομάζεται **μέση γωνιακή ταχύτητα** και συμβολίζεται ως $\vec{\omega}_\mu$.

Μέση Γωνιακή Ταχύτητα $\vec{\omega}_\mu$

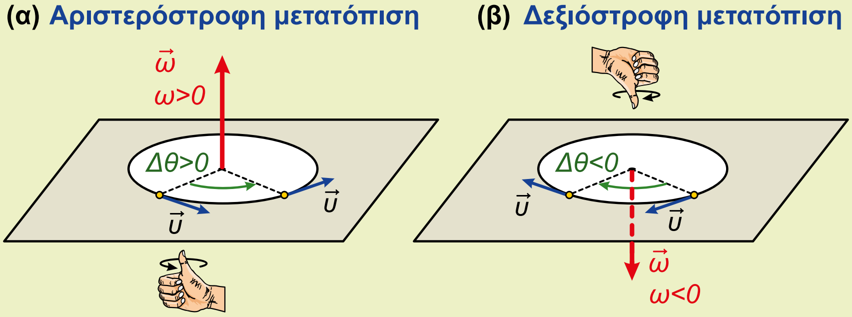
Το **μέτρο** της μέσης γωνιακής ταχύτητας ισούται με το πηλίκο της **απόλυτης τιμής** της γωνιακής μετατόπισης προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα:

$$\left|\vec{\omega}_\mu\right| = \frac{\left|\Delta\theta\right|}{\Delta t}$$

Η **διεύθυνση** της μέσης γωνιακής ταχύτητας είναι **κάθετη στο επίπεδο** της κυκλικής τροχιάς.

Η **φορά** της μέσης γωνιακής ταχύτητας καθορίζεται ως εξής: Τοποθετούμε **τη δεξιά παλάμη** με τα δάχτυλα, εκτός του αντίχειρα, λυγισμένα προς τη φορά της γωνιακής μετατόπισης, και τον αντίχειρα τεντωμένο, όπως φαίνεται στην **Εικόνα 4-4**. Η κατεύθυνση του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας ορίζεται από την κατεύθυνση του αντίχειρα.

Εικόνα 4-4



Θεωρούμε έναν άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο της τροχιάς, και διέρχεται από το κέντρο της (**Εικόνα 4-4**). Το διάνυσμα της μέσης γωνιακής ταχύτητας είναι παράλληλο με αυτόν τον άξονα.

Η αριστερόστροφη κίνηση ορίζει τη θετική κατεύθυνση του άξονα. Εάν η γωνιακή μετατόπιση είναι αριστερόστροφη, το διάνυσμα της μέσης γωνιακής ταχύτητας είναι προσανατολισμένο στη θετική κατεύθυνση, και έχει **θετική αλγεβρική τιμή**:

$$\omega_{\mu} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Εάν η γωνιακή μετατόπιση είναι **δεξιόστροφη**, η μέση γωνιακή ταχύτητα είναι προσανατολισμένη στην αρνητική κατεύθυνση και έχει **αρνητική** αλγεβρική τιμή.

Μονάδα μέτρησης της γωνιακής ταχύτητας είναι το rad/s. Όταν η γωνιακή ταχύτητα χρησιμοποιείται σε τύπους, το ακτίνιο αγνοείται στις πράξεις μεταξύ μονάδων μέτρησης.

Η **μέση γωνιακή ταχύτητα** της κυκλικής κίνησης είναι το αντίστοιχο μέγεθος με τη **μέση διανυσματική ταχύτητα** στην ευθύγραμμη κίνηση.

Σημείωση
Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε κυκλικές κινήσεις σε **σταθερό επίπεδο**. Επομένως, η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ έχει συνεχώς σταθερή διεύθυνση, κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς. Γι' αυτόν τον λόγο, θα χρησιμοποιούμε την αλγεβρική της τιμή, ω.

Παράδειγμα 1
Να υπολογίσετε τη μέση γωνιακή ταχύτητα, με την οποία περιστρέφεται ο δείκτης δευτερολέπτων ενός μηχανικού ρολογιού.

Ο δείκτης διαγράφει έναν πλήρη κύκλο σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 60{,}0$ s. Λαμβάνοντας υπ΄ όψη ότι περιστρέφεται δεξιόστροφα (όπως κοιτάμε το ρολόι), η μέση γωνιακή ταχύτητα είναι:

$$\omega_\mu = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{-2\pi \text{ rad}}{60{,}0 \text{ s}} = -0{,}105 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Σημείωση
Στην πραγματικότητα, η μέση γωνιακή ταχύτητα του δείκτη δευτερολέπτων είναι σταθερή (δεν εξαρτάται από το χρονικό διάστημα παρατήρησης), εάν το ρολόι λειτουργεί κανονικά.

Παράδειγμα 2
Να υπολογίσετε το μέτρο της μέσης γωνιακής ταχύτητας, με την οποία περιφέρεται η Γη γύρω από τον Ήλιο, κάνοντας την προσέγγιση ότι η τροχιά της Γης είναι κυκλική.

Η Γη συμπληρώνει έναν πλήρη κύκλο γύρω από τον Ήλιο σε 1 έτος. Άρα, το μέτρο της μέσης γωνιακής της ταχύτητας είναι

$$|\omega_\mu| = \frac{|\Delta\theta|}{\Delta t} = \frac{2\pi \text{ rad}}{365 \text{ days}} = \frac{2\pi \text{ rad}}{365 \text{ days}} \times \frac{1 \text{ day}}{24 \text{ h}} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 0{,}000000199 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \left(= 1{,}99 \times 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

Σημείωση
Στην πραγματικότητα, η γωνιακή ταχύτητα της Γης μεταβάλλεται κατά μήκος της τροχιάς της, επειδή η τροχιά της Γης είναι ελλειπτική και η απόσταση Γης - Ήλιου δεν είναι σταθερή.

Στιγμιαία Γωνιακή Ταχύτητα

Η μέση γωνιακή ταχύτητα συνδέεται με τον **μέσο** ρυθμό μεταβολής της γωνίας θέσης ενός σώματος σε ένα χρονικό διάστημα. **Η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα** $\vec{\omega}(t)$ συνδέεται με το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θέσης, σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt γύρω από τη στιγμή t.

Η αλγεβρική τιμή της στιγμιαίας γωνιακής ταχύτητας, τη στιγμή t, ισούται με

$$\omega(t) = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \ \Delta t \ \textbf{πολύ μικρό} \text{ χρονικό διάστημα γύρω από τη στιγμή } t.$$

Η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα είναι **διάνυσμα**, με διεύθυνση **κάθετη στο επίπεδο** της κυκλικής τροχιάς, και **φορά**, που καθορίζεται όπως στην περίπτωση της μέσης γωνιακής ταχύτητας.

Η **στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα** της κυκλικής κίνησης είναι το αντίστοιχο μέγεθος με τη **στιγμιαία ταχύτητα** στην ευθύγραμμη κίνηση.

4.2. Νόμοι της Ομαλής Κυκλικής Κίνησης

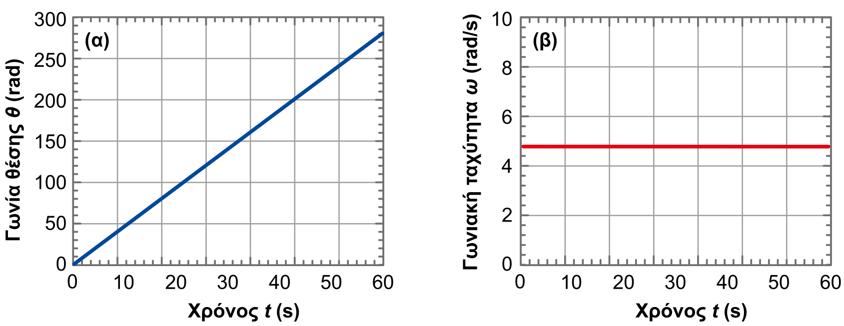
Σημείωση

Στις επόμενες ενότητες θεωρούμε ότι η γωνία θ παίρνει οποιαδήποτε τιμή. Δύο γωνίες που διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, περιγράφουν την ίδια θέση στον κύκλο. Για παράδειγμα οι γωνίες $\pi/4$, $9\pi/4$ και $-7\pi/4$ περιγράφουν την ίδια θέση στον κύκλο. Συνεπώς και η γωνιακή μετατόπιση παίρνει οποιαδήποτε τιμή.

Γραφική Παράσταση Γωνίας Θέσης - Χρόνου

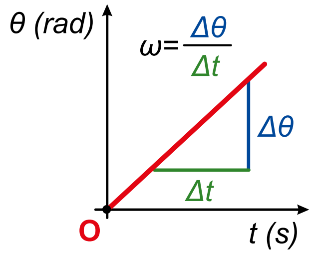
Οι μεγαλύτερες μουσικές επιτυχίες του περασμένου αιώνα πρωτοακούστηκαν σε δίσκους βινυλίου, οι οποίοι αργότερα αντικαταστάθηκαν από ψηφιακά μέσα, όπως τα CD και τα ipods. Για να ακουστούν οι μικροί δίσκοι των «45 στροφών», έπρεπε να τοποθετηθούν σε μία πλατφόρμα που συμπλήρωνε 45 κύκλους ανά λεπτό με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Η γραφική παράσταση της γωνίας θέσης - χρόνου ενός σημείου στην επιφάνεια ενός δίσκου βινυλίου 45 στροφών απεικονίζεται στην **Εικόνα 4-5(α)**.



Εικόνα 4-5
Γραφική παράσταση **(α)** γωνίας θέσης - χρόνου, και **(β)** γωνιακής ταχύτητας - χρόνου, για ένα σημείο στην επιφάνεια ενός δίσκου βινυλίου 45 στροφών/λεπτό.

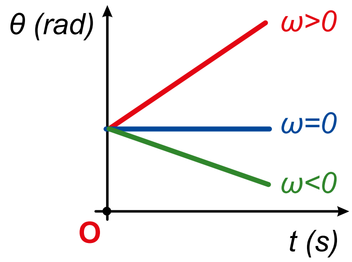
Η γραφική παράσταση της **Εικόνας 4-5(α)** είναι ευθεία γραμμή, οπότε το σημείο διαγράφει *την ίδια γωνιακή μετατόπιση* $\Delta\theta$ σε ίσα χρονικά διαστήματα Δt.



Το πηλίκο $\Delta\theta/\Delta t$ είναι σταθερό για αυθαίρετα χρονικά διαστήματα, και η **μέση** γωνιακή ταχύτητα είναι αμετάβλητη. Η **στιγμιαία** γωνιακή ταχύτητα ω είναι σταθερή:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega$$

Η γραφική παράσταση γωνιακής ταχύτητας – χρόνου απεικονίζεται στην **Εικόνα 4-5(β)**. Η καμπύλη είναι οριζόντια ευθεία, επειδή η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή.



Η Κλίση της Ευθείας Γωνίας Θέσης - Χρόνου ισούται με την Γωνιακή Ταχύτητα

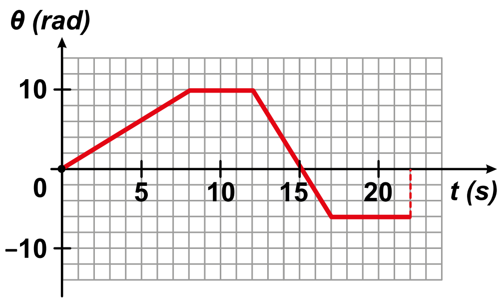
Σε αναλογία με την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, **η κλίση** της ευθείας στο **γράφημα γωνίας θέσης - χρόνου** ισούται με **τη γωνιακή ταχύτητα**:

$$\text{Κλίση} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega$$

Η κλίση της ευθείας γωνίας θέσης - χρόνου **δίνει συνοπτικές πληροφορίες για την κίνηση.** Θετική κλίση σημαίνει ότι το σώμα κινείται **αριστερόστροφα**, **μηδενική κλίση** (οριζόντια ευθεία) ότι είναι **ακίνητο**, και **αρνητική κλίση** ότι κινείται **δεξιόστροφα.**

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

4.2.1. Το πιο κάτω σχήμα απεικονίζει το γράφημα γωνίας θέσης - χρόνου ενός σώματος, που εκτελεί κυκλική κίνηση.



Α. Με βάση την **κλίση**, να περιγράψετε την κίνηση του σώματος.

Β. Να σχεδιάσετε το αντίστοιχο γράφημα της γωνιακής ταχύτητας - χρόνου για το σώμα.

Στο παράδειγμα της **Εικόνας 4-5(α)**, η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου ισούται με:

$$\omega = 45\,\frac{\sigma\tau\rho o\varphi\acute{\varepsilon}\varsigma}{\text{min}} = \frac{45 \times (2\pi\ \text{rad})}{60\ \text{s}} = 4{,}7\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

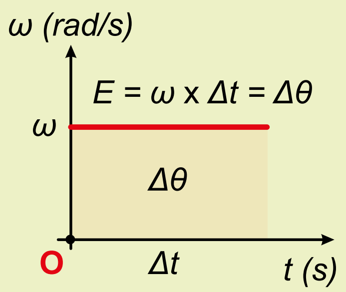
Συνοψίζουμε:

Ένα σώμα εκτελεί **ομαλή κυκλική κίνηση**, όταν κινείται σε περιφέρεια κύκλου με σταθερή (κατά μέτρο και κατεύθυνση) γωνιακή ταχύτητα.

Στην ομαλή κυκλική κίνηση, ένα σώμα διαγράφει σε ίσα χρονικά διαστήματα την ίδια γωνιακή μετατόπιση.

Η **ομαλή κυκλική** κίνηση είναι αντίστοιχη με την **ευθύγραμμη ομαλή** κίνηση.

Φυσική Σημασία του Εμβαδού της Γραφικής Παράστασης Γωνιακής Ταχύτητας - Χρόνου



Το **εμβαδόν** της επιφάνειας, που περικλείεται ανάμεσα στην καμπύλη **γωνιακής ταχύτητας - χρόνου** και στον οριζόντιο άξονα του χρόνου, ισούται με τη **γωνιακή μετατόπιση** του σώματος στο χρονικό διάστημα Δt:

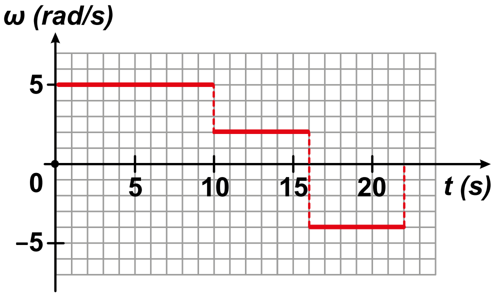
$$\text{Εμβαδόν} = \omega \Delta t = \Delta\theta$$

Το εμβαδόν αυτό εκφράζεται σε ακτίνια (rad).

Όταν η γωνιακή ταχύτητα είναι αρνητική, το τμήμα της καμπύλης γωνιακής ταχύτητας - χρόνου βρίσκεται **κάτω από τον άξονα του χρόνου** και το εμβαδόν της αντίστοιχης επιφάνειας **θεωρείται αρνητικό.**

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

4.2.2. Το σχήμα στην επόμενη σελίδα απεικονίζει τη γραφική παράσταση γωνιακής ταχύτητας - χρόνου μίας περιστρεφόμενης πλατφόρμας.



Να υπολογίσετε τη συνολική γωνιακή μετατόπιση ενός σημείου της πλατφόρμας, στο χρονικό διάστημα 0 s - 22 s.

Εξίσωση Γωνίας Θέσης - Χρόνου στην Ομαλή Κυκλική Κίνηση

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_0 η γωνία θέσης του σώματος είναι ίση με θ_0, και το σώμα κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Από τον ορισμό της γωνιακής ταχύτητας προκύπτει:

$$\Delta\theta = \omega\Delta t \Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega(t - t_0) \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

Η εξίσωση αυτή προσδιορίζει τη γωνία θέσης σαν συνάρτηση του χρόνου, για ένα σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω.

Εξίσωση Γωνίας Θέσης - Χρόνου στην Ομαλή Κυκλική Κίνηση

$$\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

Αν το σώμα βρίσκεται στη θέση $\theta_0 = 0$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, η εξίσωση παίρνει την απλούστερη μορφή:

$$\theta = \omega t$$

4.3. Η Έννοια της Περιοδικής Κίνησης

Ένα σώμα, που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση χωρίς να σταματά, επιστρέφει μετά από κάποιο χρονικό διάστημα στο αρχικό σημείο, έχοντας διαγράψει έναν πλήρη κύκλο. Εάν το σώμα συνεχίσει να κινείται, θα διέλθει ξανά από τα ίδια σημεία της κυκλικής τροχιάς του, και με την ίδια ταχύτητα. Ο ωροδείκτης ενός μηχανικού ρολογιού διαγράφει δύο πλήρεις κύκλους στη διάρκεια ενός 24ώρου.

Κινήσεις όπως η ομαλή κυκλική κίνηση, οι οποίες επαναλαμβάνονται μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, ονομάζονται **περιοδικές**.

Περίοδος της Ομαλής Κυκλικής Κίνησης

Περίοδος της ομαλής κυκλικής κίνησης είναι το χρονικό διάστημα T, στο οποίο το σώμα διαγράφει **έναν πλήρη κύκλο**.

Παράδειγμα
Η περίοδος της κίνησης του ωροδείκτη ενός μηχανικού ρολογιού ισούται με $T = 12$ h.

Συχνότητα της Ομαλής Κυκλικής Κίνησης

Ως συχνότητα *f* της ομαλής κυκλικής κίνησης ορίζεται ο αριθμός κύκλων, που διαγράφει το σώμα *στη μονάδα του χρόνου*:

$$f = \frac{\textit{Αριθμός Κύκλων}}{\textit{Αντίστοιχο Χρονικό Διάστημα}}$$

Η συχνότητα συμβολίζεται με το γράμμα f, από την αγγλική λέξη *frequency*.

Επειδή ο αριθμός κύκλων δεν έχει μονάδες, η μονάδα συχνότητας είναι το s^{-1}. Η μονάδα s^{-1} ονομάζεται **Hertz** (Hz). Συνεπώς, 1 Hz = 1 s^{-1}.

Παράδειγμα
Η συχνότητα κίνησης ενός δευτερολεπτοδείκτη μηχανικού ρολογιού είναι

$$f = \frac{1\ \textit{κύκλος}}{60{,}0\ \mathrm{s}} = 0{,}0167\ \mathrm{Hz}$$

Σημείωση
Στην περιγραφή της λειτουργίας πολλών συσκευών, η συχνότητα λειτουργίας εκφράζεται συχνά ως **στροφές ανά λεπτό** (rotations per minute ή **rpm**). Για παράδειγμα, μπορεί να διαβάσετε στο εγχειρίδιο λειτουργίας ενός πλυντηρίου ότι το τύμπανο περιστρέφεται με συχνότητα 1200 rpm στη φάση στιψίματος των ρούχων.

Παράδειγμα

Η λεπίδα ενός μίξερ εκτελεί 720 στροφές ανά λεπτό. Η συχνότητα κίνησης της λεπίδας είναι

$$f = \frac{720\ \textit{κύκλοι}}{60{,}0\ \text{s}} = 12\ \text{Hz}$$

Σχέση Περιόδου - Συχνότητας

Από τον ορισμό της περιόδου προκύπτει ότι ένα σώμα διαγράφει ***ακριβώς έναν πλήρη κύκλο***, σε χρονικό διάστημα μίας περιόδου. Άρα:

$$f = \frac{\textit{Αριθμός Κύκλων}}{\textit{Αντίστοιχο Χρονικό Διάστημα}} = \frac{1}{T} \Rightarrow fT = 1$$

Παράδειγμα

Το τύμπανο ενός πλυντηρίου περιστρέφεται με 1200 rpm. Η συχνότητα περιστροφής του τυμπάνου είναι $f = 1200/(60\ \text{s}) = 20\ \text{Hz}$, και η περίοδος του τυμπάνου είναι $T = 1/f = 1/20\ \text{s} = 0{,}05\ \text{s}$.

Κυκλική Συχνότητα

Από τον ορισμό της περιόδου προκύπτει ότι η γωνιακή μετατόπιση ενός σώματος, σε χρονικό διάστημα μίας περιόδου, ισούται κατ΄ απόλυτη τιμή με $|\Delta\theta| = 2\pi$.

Ορίζουμε ως **κυκλική συχνότητα** το μέγεθος

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Στην ομαλή κυκλική κίνηση, **η κυκλική συχνότητα ισούται με το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας** του σώματος. Η κυκλική συχνότητα εκφράζεται σε rad/s.

Για να υπολογίσουμε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας από τη συχνότητα, πολλαπλασιάζουμε με τον παράγοντα 2π.

Παράδειγμα

Ένας τροχός ποδηλάτου περιστρέφεται με συχνότητα $f = 2{,}00$ Hz. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού είναι $\omega = (2{,}00\ \text{Hz}) \times (2\pi\ \text{rad}) = 12{,}6\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

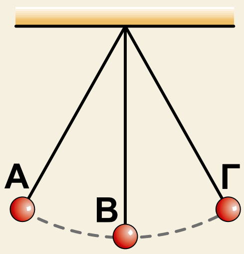
Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

4.3.1. Ποια είναι η περίοδος περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της και η περίοδος περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο;

4.3.2. Ένας ανεμιστήρας περιστρέφεται με 480 rpm. Πόσους κύκλους εκτελεί ανά δευτερόλεπτο; Ποια η συχνότητά του σε Hz;

4.3.3. Η ρόδα ενός ποδηλάτου περιστρέφεται με συχνότητα 4,0 Hz. Ποια είναι η περίοδος της κίνησής της; Ποια είναι η συχνότητά της σε rpm;

Εκτός από την ομαλή κυκλική κίνηση, άλλα παραδείγματα **περιοδικών κινήσεων** είναι η κίνηση ενός σώματος στερεωμένου σε ελατήριο, η κίνηση ενός εκκρεμούς και η περιφορά ενός πλανήτη γύρω από τον Ήλιο.



Για Παράδειγμα

- Η Σελήνη κινείται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τη Γη, και ολοκληρώνει μία περιφορά σε 27,3 ημέρες.
- Ο πλανήτης Πλούτωνας κινείται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον Ήλιο και ολοκληρώνει μία πλήρη περιφορά σε 248 χρόνια.
- Η διάταξη του διπλανού σχήματος (εκκρεμές) απεικονίζει ένα σώμα στερεωμένο σε σχοινί. Εάν αφεθεί ελεύθερο το σώμα στο σημείο Α, θα εκτελεί περιοδική κίνηση ανάμεσα στα δύο ακραία σημεία Α και Γ (**ταλάντωση**). Η διαδρομή **ΑΒΓΒΑ** αντιστοιχεί σε μία **πλήρη ταλάντωση** του εκκρεμούς. Το εκκρεμές βρίσκει εφαρμογές στην κατασκευή οργάνων για τη μέτρηση του χρόνου, σεισμομέτρων και άλλων συσκευών.

Περίοδος μίας περιοδικής κίνησης είναι το χρονικό διάστημα, στο οποίο επαναλαμβάνεται η κίνηση (το σώμα διέρχεται από το ίδιο σημείο και με την **ίδια ταχύτητα**). Για παράδειγμα, η περίοδος ταλάντωσης του εκκρεμούς είναι το χρονικό διάστημα, στο οποίο το εκκρεμές διατρέχει τη διαδρομή **ΑΒΓΒΑ**.

Ομοίως, **συχνότητα** μίας περιοδικής κίνησης είναι ο αριθμός επαναλήψεων της κίνησης ανά μονάδα χρόνου. Ο αριθμός διαδρομών **ΑΒΓΒΑ**, που εκτελεί το εκκρεμές ανά μονάδα χρόνου, είναι η συχνότητα ταλάντωσης του εκκρεμούς.

Η σχέση συχνότητας - περιόδου $f = 1/T$ ισχύει γενικά για όλες τις περιοδικές κινήσεις.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

4.3.4. **(α)** Όταν το εκκρεμές του πιο πάνω σχήματος εκτελεί τη διαδρομή **ΒΓΒ**, ξεκινά και επιστρέφει στο ίδιο σημείο **Β**. Γιατί δεν ισούται η περίοδος ταλάντωσης του εκκρεμούς με το χρονικό διάστημα, στο οποίο διατρέχει τη διαδρομή **ΒΓΒ**;

(β) Εάν το εκκρεμές ξεκινήσει από το **Β** και κινείται προς το **Γ**, ποια διαδρομή διαγράφει σε χρόνο μίας περιόδου;

4.4. Σχέση Γραμμικής και Γωνιακής Ταχύτητας στην Ομαλή Κυκλική Κίνηση

Γραμμική Ταχύτητα της Ομαλής Κυκλικής Κίνησης

Ο **ρυθμός μεταβολής** της **θέσης** ενός σώματος, που διαγράφει κυκλική τροχιά, περιγράφεται από την **ταχύτητα** του σώματος. Θυμίζουμε ότι η στιγμιαία ταχύτητα ορίζεται από τη σχέση:

Στιγμιαία ταχύτητα:

$$\vec{v}(t) = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

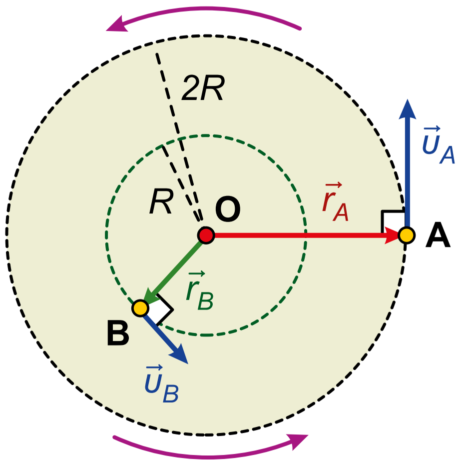
όπου Δt πολύ μικρό χρονικό διάστημα γύρω από τη στιγμή t.

Στην κυκλική κίνηση θα αναφερόμαστε στην στιγμιαία ταχύτητα ως **«γραμμική ταχύτητα»**, για να την διακρίνουμε από τη γωνιακή ταχύτητα.

Όπως αποδείξαμε στο **Κεφάλαιο 1** για τη γενική περίπτωση της επίπεδης κίνησης, η ταχύτητα ενός σώματος είναι **εφαπτομενική** με την τροχιά του σώματος. Ομοίως, η γραμμική ταχύτητα ενός σώματος, που κινείται σε κυκλική τροχιά, έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης του κύκλου, στο σημείο που βρίσκεται το σώμα (**Εικόνα 4-6**). Επομένως **τα διανύσματα της θέσης και της γραμμικής ταχύτητας** του σώματος είναι συνεχώς κάθετα μεταξύ τους και **περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα** ω.

Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε ότι οι κυκλικές κινήσεις είναι **αριστερόστροφες**, οπότε η αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας είναι **θετική**, $\omega > 0$. Θα συμβολίζουμε το μέτρο της αντίστοιχης γραμμικής ταχύτητας ως υ.

Εικόνα 4-6
Η πλατφόρμα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω.Τα σημεία **A** και **B** κινούνται με την **ίδια γωνιακή ταχύτητα** ω. Η γραμμική ταχύτητα κάθε σημείου είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης του, και το μέτρο της είναι ανάλογο με την ακτίνα της τροχιάς που διαγράφει ($\upsilon = \omega R$). Επειδή $R_A = 2R_B = 2R$ το **A** κινείται με διπλάσια γραμμική ταχύτητα από το **B**.



$\omega_A = \omega_B = \omega$
$\upsilon_B = \omega R$
$\upsilon_A = \omega(2R) = 2\upsilon_B$

Τα **μέτρα** της **γραμμικής** και της **γωνιακής** ταχύτητας συνδέονται με την σχέση:

Σχέση Γραμμικής Ταχύτητας - Γωνιακής Ταχύτητας της Ομαλής Κυκλικής Κίνησης

$$\upsilon = \omega R = \frac{2\pi}{T} R = (2\pi f) R$$

Παρατηρούμε ότι το μέτρο υ της γραμμικής ταχύτητας είναι **ανάλογο με το μέτρο** ω **της γωνιακής ταχύτητας** και **με την ακτίνα** R της κυκλικής τροχιάς. Συνεπώς, δύο σώματα, που κινούνται με την **ίδια** γωνιακή ταχύτητα σε τροχιές **διαφορετικών** ακτίνων, έχουν **διαφορετικές** κατά μέτρο γραμμικές ταχύτητες.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση γωνιακής μετατόπισης - τόξου κύκλου $s = R\left|\Delta\theta\right|$, βρίσκουμε:

$$\upsilon = \omega R = \frac{\left|\Delta\theta\right|}{\Delta t} R = \frac{s}{\Delta t}$$

Στην ομαλή κυκλική κίνηση, το **μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ισούται με το τόξο κύκλου, που διαγράφει το σώμα, ανά μονάδα χρόνου.**

Επειδή η γραμμική ταχύτητα είναι σταθερή, **το τόξο κύκλου** είναι **ανάλογο με το χρονικό διάστημα** της κίνησης:

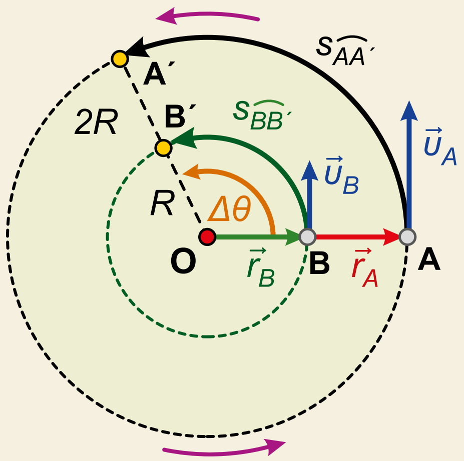
$$s_{\widehat{AB}} = \upsilon \Delta t$$

Συμπεραίνουμε ότι:

Ένα σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, διαγράφει ίσα τόξα κύκλου σε ίσα χρονικά διαστήματα.

Παράδειγμα 1

Στο πιο κάτω σχήμα, τα σημεία **A** και **B** της πλατφόρμας περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω, και διαγράφουν στο χρονικό διάστημα Δt την ίδια γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta = \omega\Delta t$. Το σημείο **A** κινείται με διπλάσια ταχύτητα από το **B**, και διαγράφει τόξο διπλάσιου μήκους σε σχέση με το **B**: $s_{AA'} = (2R)\Delta\theta = 2s_{BB'}$.



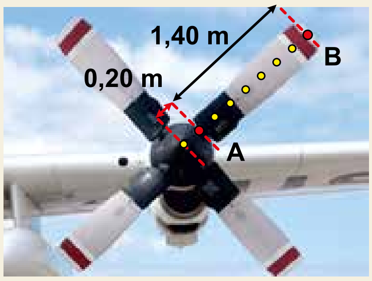
$\omega_A = \omega_B = \omega$

$\upsilon_A = \omega(2R) = 2(\omega R) = 2\upsilon_B$

$s_{AA'} = \Delta\theta \times (2R) = 2(\Delta\theta \times R) = 2s_{BB'}$

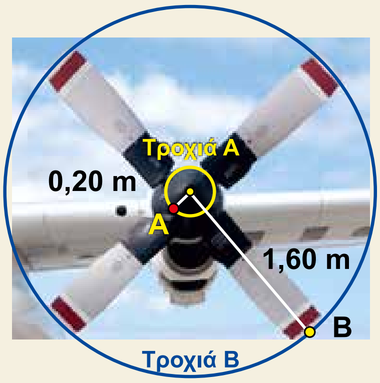
Παράδειγμα 2

Ο έλικας ενός αεροπλάνου έχει πτερύγια μήκους $L = 1{,}40$ m και συμπληρώνει 875 στροφές ανά λεπτό. Η φορά κίνησης του έλικα είναι αριστερόστροφη. Το σημείο **A** βρίσκεται στην αρχή του πτερυγίου και απέχει $d = 0{,}20$ m από το κέντρο περιστροφής **O**. Το σημείο **B** βρίσκεται στο δεύτερο άκρο του πτερυγίου. Θα υπολογίσουμε τη γραμμική ταχύτητα των **A** και **B**.



Η γωνιακή ταχύτητα των σημείων ισούται με:

$$\omega = 2\pi f = (2\pi \text{ rad}) \times \left(875 \frac{\sigma\tau\rho o\varphi\acute{\varepsilon}\varsigma}{\text{min}}\right) \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 91{,}6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



Η ακτίνα περιστροφής του σημείου **Α** είναι $R_A = d = 0{,}20$ m, και η αντίστοιχη ακτίνα για το σημείο **Β** είναι $R_B = L + d = 1{,}60$ m. Συνεπώς, οι γραμμικές ταχύτητες των δύο σημείων είναι:

$$\upsilon_A = \omega R_A = (91{,}6 \text{ rad/s}) \times (0{,}20 \text{ m}) = 18 \text{ m/s},$$

και

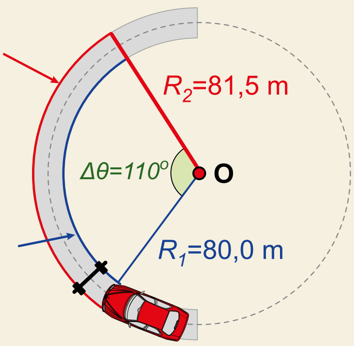
$$\upsilon_B = \omega R_B = (91{,}6 \text{ rad/s}) \times (1{,}60 \text{ m}) = 147 \text{ m/s}.$$

Παράδειγμα 3

Το Διαφορικό (differential) του Αυτοκινήτου

Όταν ένα αυτοκίνητο διαγράφει μία στροφή του δρόμου, **οι εξωτερικοί τροχοί διαγράφουν μεγαλύτερο μήκος τόξου από τους εσωτερικούς.** Ένα σημείο στο μέσο του αυτοκινήτου κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου, και διαγράφει γωνία $\Delta\theta$ σε χρονικό διάστημα Δt. Ο εσωτερικός τροχός διαγράφει μήκος τόξου $s_1 = R_1\Delta\theta$ και ο εξωτερικός τροχός διαγράφει ***στο ίδιο χρονικό διάστημα*** μήκος τόξου $s_2 = R_2\Delta\theta$. Άρα, ο λόγος των γραμμικών ταχυτήτων των δύο τροχών είναι:

$$\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{s_2/\Delta t}{s_1/\Delta t} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{R_2\,\Delta\theta}{R_1\,\Delta\theta} = \frac{R_2}{R_1}$$



Για παράδειγμα, έστω ότι το αυτοκίνητο διαγράφει στροφή γωνίας $\Delta\theta = 110^o = 1{,}92$ rad, με εσωτερική ακτίνα $R_1 = 80{,}0$ m και εξωτερική ακτίνα $R_2 = 81{,}5$ m. Εάν ο εσωτερικός τροχός κινείται με γραμμική ταχύτητα $\upsilon = 20{,}0$ m/s, ο εξωτερικός θα πρέπει να κινείται με ταχύτητα:

$$\upsilon_2 = \upsilon_1(R_2/R_1) = (20{,}0\ \text{m/s}) \times (81{,}5/80{,}0) = 20{,}4\ \text{m/s}.$$

Το ζευγάρι τροχών, στο οποίο μεταδίδεται η κίνηση της μηχανής (π.χ. το πίσω ζευγάρι, για αυτοκίνητα με πίσω κίνηση), είναι συνδεδεμένο με έναν άξονα. Για να μπορεί ο εξωτερικός τροχός να κινείται με μεγαλύτερη γραμμική ταχύτητα από τον εσωτερικό, το αυτοκίνητο είναι εξοπλισμένο με το **διαφορικό**. Αυτό παρεμβάλλεται στον άξονα που συνδέει τους τροχούς, και εξασφαλίζει ότι γυρίζουν ανεξάρτητα.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

4.4.1. Μία μπάλα κινείται με σταθερή ταχύτητα σε κυκλική τροχιά ακτίνας 2,0 m με συχνότητα 1,5 Hz. Ποια η γραμμική ταχύτητα της μπάλας;

4.4.2. Μία δεύτερη μπάλα κινείται με την ίδια συχνότητα σε τροχιά ακτίνας 4,0 m. Ποια η γραμμική της ταχύτητα;

4.4.3. Ένας δρομέας τρέχει σε μία κυκλική πίστα με σταθερή ταχύτητα 4,0 m/s. Με τι ταχύτητα πρέπει να τρέχει, για να διπλασιασθεί η περίοδος της κίνησής του;

Απόδειξη της Σχέσης $\upsilon = \omega R$ των Μέτρων Γραμμικής και Γωνιακής Ταχύτητας

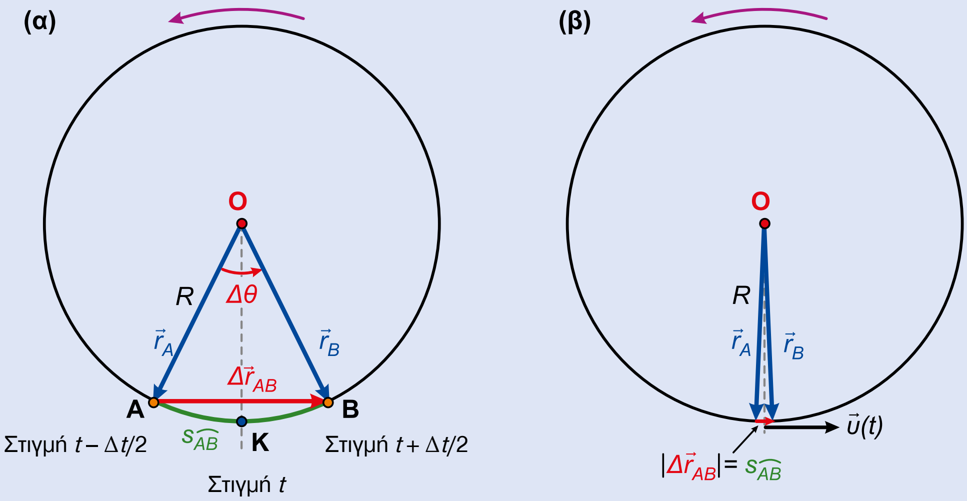
Η **Εικόνα 4-7(α)** απεικονίζει ένα σώμα, που κινείται **αριστερόστροφα** με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω σε μία περιφέρεια κύκλου ακτίνας R, και τη χρονική στιγμή t βρίσκεται στο σημείο **Κ.**

Για να υπολογίσουμε τη στιγμιαία ταχύτητα του σώματος ***τη χρονική στιγμή*** t θεωρούμε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt με αρχή τη χρονική στιγμή $t - \Delta t/2$ και τέλος τη χρονική στιγμή $t + \Delta t/2$. Τις στιγμές αυτές το σώμα βρίσκεται στα σημεία **Α** και **Β**, αντίστοιχα, και τα διανύσματα θέσης του είναι $\vec{r}_{\mathrm{A}}$ και $\vec{r}_{\mathrm{B}}$.

Στο διάστημα Δt το σώμα διαγράφει το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ και μετατοπίζεται στο επίπεδο κατά $\Delta\vec{r}_{\mathrm{AB}} = \vec{r}_{\mathrm{B}} - \vec{r}_{\mathrm{A}}$. Η γωνία θέσης του σώματος μεταβάλλεται κατά $\Delta\theta = \omega\Delta t$.

Επειδή η γωνιακή ταχύτητα ω είναι σταθερή, τα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{AK}}$ και $\overset{\frown}{\mathrm{KB}}$ έχουν το ίδιο μήκος: $s_{\overset{\frown}{\mathrm{AK}}} = s_{\overset{\frown}{\mathrm{KB}}} = (\omega R) \times (\Delta t/2)$. Συνεπώς, οι επίκεντρες γωνίες $\mathrm{A\hat{O}K} = \mathrm{K\hat{O}B}$ και τα σημεία **Α** και **Β** βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις ως προς το **Κ.**

Η **Εικόνα 4-7(β)** απεικονίζει την περίπτωση που το διάστημα Δt είναι πολύ μικρό και η αντίστοιχη μεταβολή στη γωνία θέσης του σώματος είναι περίπου μηδενική, $\Delta\theta \cong 0$. Τότε, το μέτρο της μετατόπισης



Εικόνα 4-7
Σώμα, που κινείται στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας R με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. **(α)** Το σώμα μετατοπίζεται από το σημείο Α στο Β, και διαγράφει το τόξο $\widehat{\mathrm{AB}}$. **(β)**. Εάν το χρονικό διάστημα γίνει πολύ μικρό, το μέτρο της μετατόπισης $\Delta\vec{r}_{\mathrm{AB}}$ ισούται με το μήκος του τόξου $\widehat{\mathrm{AB}}$.

$\Delta\vec{r}_{\mathrm{AB}}$ του σώματος γίνεται περίπου ίσο με το μήκος του τόξου $\widehat{\mathrm{AB}}$:

$$\left|\Delta\vec{r}_{\mathrm{AB}}\right| \cong s_{\widehat{\mathrm{AB}}}$$

Διαιρώντας με το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt καταλήγουμε στη σχέση μεταξύ των μέτρων της γραμμικής ταχύτητας και της γωνιακής ταχύτητας:

$$\left|\Delta\vec{r}_{\mathrm{AB}}\right| = s_{\widehat{\mathrm{AB}}} = R\left|\Delta\theta\right| \Rightarrow \frac{\left|\Delta\vec{r}_{\mathrm{AB}}\right|}{\Delta t} = R\frac{\left|\Delta\theta\right|}{\Delta t} \Rightarrow \upsilon = \omega R = \frac{2\pi}{T}R$$

Παράδειγμα 4
Ταχύτητα Περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο

Σε προηγούμενο παράδειγμα δείξαμε ότι η γωνιακή ταχύτητα περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι $\omega = 1{,}99 \times 10^{-7}$ rad/s. Η τροχιά της Γης είναι κατά προσέγγιση κυκλική, με ακτίνα 1 AU (150 000 000 km = $1{,}5 \times 10^{8}$ km). Συνεπώς, η ταχύτητα της Γης είναι:

$$\upsilon = \omega R = (1{,}99 \times 10^{-7}\ \text{rad/s}) \times (1{,}5 \times 10^{8}\ \text{km}) = 3{,}0 \times 10^{1}\ \text{km/s}.$$

Παράδειγμα 5

Ταχύτητα Περιστροφής στην Επιφάνεια ενός pulsar

Τα **pulsars** (**puls**ating radio st**ars**) είναι αστέρες νετρονίων με ισχυρό μαγνητικό πεδίο, που περιστρέφονται με μεγάλη γωνιακή ταχύτητα και εκπέμπουν στενές δέσμες ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας υψηλής ενέργειας (ακτίνες X και γ). Για να ανιχνευθεί ένα pulsar πρέπει η Γή να βρεθεί στην πορεία της δέσμης που εκπέμπει, όπως ένας φάρος γίνεται ορατός από ένα πλοίο, όταν αυτό συναντήσει τη δέσμη φωτός του.

Το pulsar Crab, στον αστερισμό του Ταύρου.

Το πιό γρήγορα περιστρεφόμενο pulsar, με βάση τις μέχρι σήμερα παρατηρήσεις των αστρονόμων, είναι το *PSR J1748-2446ad*, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση 18 000 ετών φωτός από τη Γη, και ανακαλύφθηκε στις 10 Νοεμβρίου 2004 από τον Jason Hessels του Πανεπιστημίου McGill, στον Καναδά. Το pulsar αυτό περιστρέφεται 716 φορές ανά δευτερόλεπτο, και η ακτίνα του εκτιμάται ότι είναι περίπου 16 km.

Με βάση αυτά τα δεδομένα, **θα υπολογίσουμε την ταχύτητα περιστροφής ενός σημείου στον ισημερινό του pulsar**.

Ένα τέτοιο σημείο διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας $R = 16$ km με συχνότητα περιστροφής $f = 716$ Hz. Άρα, η ταχύτητα του σημείου είναι:

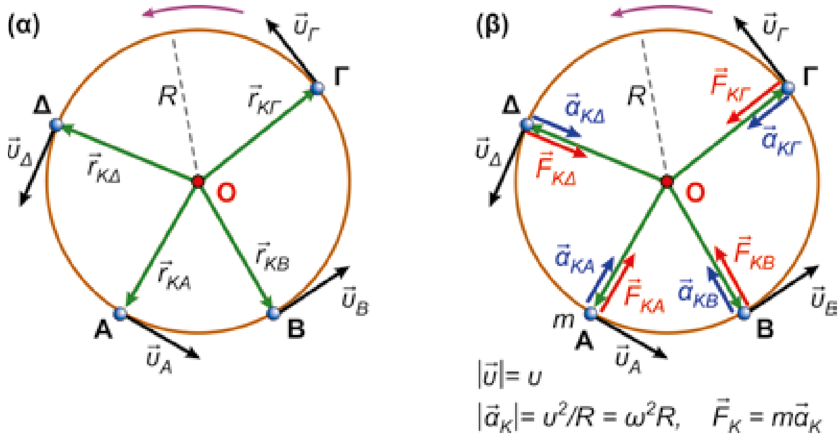
$$\upsilon = \omega R = (2\pi f)R = 2\pi \times (716\ \mathrm{s^{-1}}) \times (16\ \mathrm{km}) = 72 \times 10^3\ \mathrm{km/s} = 0{,}24\ \mathrm{c}.$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό ($3{,}0 \times 10^5$ km/s).

4.5. Επιτάχυνση της Ομαλής Κυκλικής Κίνησης

Στην **Εικόνα 4-8(α)** απεικονίζονται, σε διάφορα σημεία της τροχιάς, τα διανύσματα θέσης και γραμμικής ταχύτητας ενός σώματος, που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

Το διάνυσμα θέσης του σώματος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω. Επειδή το διάνυσμα της ταχύτητας είναι συνεχώς κάθετο στο διάνυσμα θέσης (εφαπτομενικό της τροχιάς), **περιστρέφεται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα** ω. Συνεπώς, παρόλο που το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας παραμένει σταθερό, η διεύθυνση της ταχύτητας μεταβάλλεται συνεχώς, δηλαδή το σώμα κινείται με **επιτάχυνση**. Η επι-



Εικόνα 4-8
(α) Το σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα ω. Τα διανύσματα θέσης και ταχύτητας του σώματος περιστρέφονται με την **ίδια γωνιακή ταχύτητα** *ω*. **(β)** Επειδή η διεύθυνση της ταχύτητας μεταβάλλεται, το σώμα κινείται με **κεντρομόλο επιτάχυνση** $\vec{\alpha}_{\mathrm{K}}$ κατά την ακτινική διεύθυνση. Στο σώμα δρα **κεντρομόλος δύναμη** $\vec{F}_{\mathrm{K}}$ κατά την ίδια διεύθυνση.

τάχυνση της **ομαλής κυκλικής κίνησης** ονομάζεται **κεντρομόλος**, και συμβολίζεται ως $\vec{\alpha}_{\mathrm{K}}$.

Στο **Κεφάλαιο 1** μάθαμε ότι όταν η διεύθυνση της ταχύτητας ενός σώματος μεταβάλλεται, αλλά το **μέτρο** της **παραμένει σταθερό**, το σώμα κινείται με **επιτάχυνση κάθετη στην ταχύτητα**:

$$\upsilon = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \Rightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\upsilon}$$

Στη ομαλή κυκλική κίνηση, το μέτρο της ταχύτητας του σώματος παραμένει σταθερό. Συνεπώς, **η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας**, και έχει ακτινική διεύθυνση. Η φορά της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς (**Εικόνα 4-8(β)**)[1]. Τα διανύσματα της θέσης και της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι αντίρροπα.

Κεντρομόλος Επιτάχυνση της Ομαλής Κυκλικής Κίνησης

Ένα σώμα, που εκτελεί **ομαλή κυκλική κίνηση**, κινείται με επιτάχυνση που ονομάζεται **κεντρομόλος**.

Η **κεντρομόλος επιτάχυνση** έχει διεύθυνση κατά μήκος της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς, φορά προς το κέντρο του κύκλου, και μέτρο που δίνεται από τη σχέση:

$$\left|\vec{\alpha}_{\mathrm{K}}\right| = \omega^2 R = \frac{\upsilon^2}{R}$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση δηλώνεται σε μονάδες m/s^2.

[1] Γενικά, σε μία καμπυλόγραμμη κίνηση, το διάνυσμα της επιτάχυνσης έχει φορά προς το κοίλο μέρος της τροχιάς, δηλαδή προς το εσωτερικό της στροφής.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

4.5.1. Ένας μαθητής επιχειρηματολογεί: «Αφού στην ομαλή κυκλική κίνηση η ταχύτητα είναι σταθερή, το σώμα δεν έχει επιτάχυνση». Εξηγείστε εάν ο συλλογισμός του μαθητή είναι σωστός.

4.5.2. Ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Πώς μεταβάλλεται η κεντρομόλος επιτάχυνση του σώματος, εάν:

(α) Διπλασιασθεί η γραμμική του ταχύτητα, χωρίς να μεταβληθεί η ακτίνα της τροχιάς;

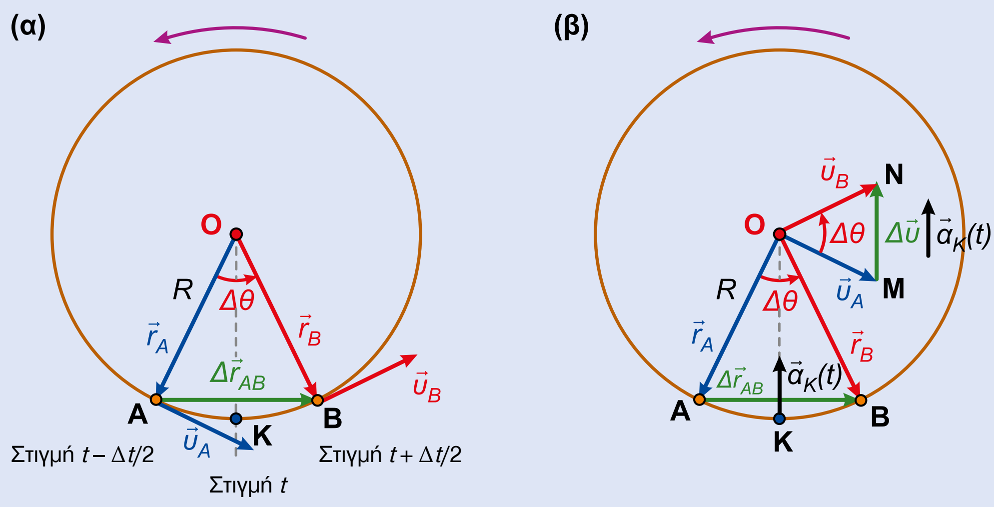
(β) Διπλασιασθεί η γωνιακή του ταχύτητα, χωρίς να μεταβληθεί η ακτίνα της τροχιάς;

(γ) Διπλασιασθεί η ακτίνα της τροχιάς, χωρίς να μεταβληθεί η γωνιακή του ταχύτητα;

(δ) Διπλασιασθεί η ακτίνα της τροχιάς, χωρίς να μεταβληθεί η γραμμική του ταχύτητα;

Απόδειξη της Σχέσης για το Μέτρο της Κεντρομόλου Επιτάχυνσης

Το σώμα του **σχήματος 4-9(α)** κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας R, και τη χρονική στιγμή t βρίσκεται στο σημείο **Κ**. Θα υπολογίσουμε το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης στο σημείο **Κ**.



Εικόνα 4-9
Σώμα, που κινείται στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας R με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. **(α)** Το σώμα μετατοπίζεται από το σημείο Α στο Β. **(β)** Επειδή $\vec{\upsilon}_A \perp \vec{r}_A$ και $\vec{\upsilon}_B \perp \vec{r}_B$, οι γωνίες $A\hat{O}B = M\hat{O}N$ και τα ισοσκελή τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΜΝ είναι **όμοια**.

Θεωρούμε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt με κέντρο *τη χρονική στιγμή* t, αρχή τη χρονική στιγμή $t-\Delta t/2$ και τέλος τη χρονική στιγμή $t+\Delta t/2$. Τη στιγμή $t-\Delta t/2$ το σώμα βρίσκεται στο σημείο **Α** και έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}}$. Τη στιγμή $t+\Delta t/2$ βρίσκεται στο σημείο Β και έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\mathrm{B}}$. Οι ταχύτητες έχουν το ίδιο μέτρο $|\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}}| = |\vec{\upsilon}_{\mathrm{B}}| = \upsilon$.

Στο **σχήμα 4-9(β)** έχουμε σχεδιάσει τα διανύσματα $\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}}$ και $\vec{\upsilon}_{\mathrm{B}}$ με κοινή αρχή το κέντρο **Ο** του κύκλου. Επειδή $\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}} \perp \vec{r}_{\mathrm{A}}$ και $\vec{\upsilon}_{\mathrm{B}} \perp \vec{r}_{\mathrm{B}}$, οι πλευρές των γωνιών $\mathrm{A\hat{O}B}$ και $\mathrm{M\hat{O}N}$ είναι κάθετες μία-προς-μία: $\mathrm{OM} \perp \mathrm{OA}$, $\mathrm{ON} \perp \mathrm{OB}$. Έτσι, $\mathrm{M\hat{O}N} = \mathrm{A\hat{O}B} = \Delta\theta$. Αφού τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΜΝ είναι ισοσκελή, προκύπτει ότι και οι υπόλοιπες γωνίες τους είναι ίσες:

$$\mathrm{O\hat{A}B} = \mathrm{O\hat{B}A} = \mathrm{O\hat{M}N} = \mathrm{O\hat{N}M} = \frac{\pi - \Delta\theta}{2}$$

Συνεπώς, τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΜΝ είναι **όμοια**, και ισχύει:

$$\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OA}} \Rightarrow \frac{|\Delta\vec{\upsilon}|}{|\Delta\vec{r}_{\mathrm{AB}}|} = \frac{\upsilon}{R} = \omega \Rightarrow |\Delta\vec{\upsilon}| = \omega\,|\Delta\vec{r}_{\mathrm{AB}}|$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή σχέση για το μέτρο της ταχύτητας, $\upsilon = \omega R$. Διαιρώντας με το χρονικό διάστημα Δt καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση για το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης:

$$\frac{|\Delta\vec{\upsilon}|}{\Delta t} = \omega\frac{|\Delta\vec{r}_{\mathrm{AB}}|}{\Delta t} \Rightarrow |\vec{\alpha}_{\mathrm{K}}(t)| = \omega\upsilon = \omega^2 R = \frac{\upsilon^2}{R}$$

Επειδή η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή, το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης δεν μεταβάλλεται με το χρόνο. Η διεύθυνση της κεντρομόλου επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή t (στο σημείο Κ) είναι ακτινική (κάθετη στην ταχύτητα), με φορά προς το κέντρο **Ο** του κύκλου.

Παρατήρηση

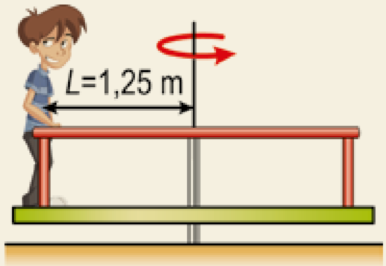
Από το **σχήμα 4-9(β)** μπορούμε να αποδείξουμε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha}_{\mathrm{K}}(t)$ έχει τη διεύθυνση της ακτίνας ΟΚ:

Επειδή $\mathrm{K\hat{O}M} = \mathrm{A\hat{O}M} - \mathrm{A\hat{O}K} = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\theta}{2} = \mathrm{O\hat{M}N}$,

συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{MN} /\!/ \mathrm{OK}$ (οι εντός-εναλλάξ γωνίες $\mathrm{K\hat{O}M}$, $\mathrm{O\hat{M}N}$ είναι ίσες). Άρα, το διάνυσμα $\Delta\vec{\upsilon}$ έχει την ίδια διεύθυνση με την ακτίνα ΟΚ. Επειδή $\vec{\alpha}_{\mathrm{K}}(t) /\!/ \Delta\vec{\upsilon}$, το διάνυσμα $\vec{\alpha}_{\mathrm{K}}(t)$ έχει επίσης τη διεύθυνση της ΟΚ.

Παράδειγμα 1
Παιδική Χαρά

Ένας νέος στέκεται στην οριζόντια κυκλική πλατφόρμα μίας παιδικής χαράς (merry-go-round), και συγκρατείται από έναν κατακόρυφο μεταλλικό πάσσαλο, σε απόσταση $L = 1{,}25$ m από το κέντρο της. Σε κάποια στιγμή, η πλατφόρμα αρχίζει να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.



Ποιά πρέπει να είναι η συχνότητα περιστροφής της πλατφόρμας, έτσι ώστε το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του νέου να είναι ίσο με την επιτάχυνση της βαρύτητας;

Θα υπολογίσουμε πρώτα τη γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας:

$$|\vec{\alpha}_K| = \omega^2 R = g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{1{,}25\ \text{m}}} = 2{,}80\ \frac{1}{\text{s}} = 2{,}80\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Να προσέξετε ότι οι πράξεις μεταξύ μονάδων δίνουν ως αποτέλεσμα το 1/s. Όμως, η γωνιακή ταχύτητα αντιστοιχεί σε «rad/s», και **όχι** σε Hz (1/s), ή σε «*στροφές*/s». Για να εκφράσουμε ορθά τη γωνιακή ταχύτητα σε rad/s πρέπει να **εισαγάγουμε το ακτίνιο** στο αποτέλεσμα.

Για να υπολογίσουμε τη συχνότητα περιστροφής f, διαιρούμε το προηγούμενο αποτέλεσμα με τον παράγοντα 2π:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2{,}80\ \text{rad/s}}{2\pi\ \text{rad}} = 0{,}45\ \text{Hz}$$

Παράδειγμα 2
Κεντρομόλος Επιτάχυνση ενός Σώματος στον Ισημερινό της Γης

Η Γη περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα, που διέρχεται από τον Βόρειο και τον Νότιο Πόλο της. Κατά τη διάρκεια μίας ημέρας, ένα σώμα στον Ισημερινό της Γης συμπληρώνει έναν κύκλο ακτίνας $R = 6\,378$ km (ακτίνα της Γης στον Ισημερινό).

Α. Θα υπολογίσουμε την κεντρομόλο επιτάχυνση, που πρέπει να έχει το σώμα για να εκτελεί αυτή την τροχιά.

Η περίοδος περιστροφής του σώματος ισούται με την διάρκεια ενός 24ώρου, δηλαδή με $(24 \text{ h}) \times \dfrac{3\,600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 86\,400$ s. Συνεπώς, η κεντρομόλος επιτάχυνση του σώματος είναι:

$$\left|\vec{\alpha}_{\text{K}}\right| = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \left(\frac{2\pi}{86\,400 \text{ s}}\right)^2 (6\,378 \times 10^3 \text{ m}) = \frac{(2\pi)^2 \times 6\,378}{864^2 \times 10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0{,}0337 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Η επιτάχυνση της βαρύτητας στον Ισημερινό ισούται με $g = 9{,}78$ m/s^2. Συνεπώς $\left|\vec{\alpha}_{\text{K}}\right| = 0{,}00345 \times g$, δηλαδή το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι 290 φορές μικρότερο από την επιτάχυνση της βαρύτητας.

Β. Αφού ένα σημείο του εδάφους στον Ισημερινό της Γης κινείται με επιτάχυνση, η συνισταμένη δύναμη που δρα σε αυτό δεν είναι μηδενική. Μπορεί το έδαφος να θεωρείται αδρανειακό σύστημα;

Σύμφωνα με τον ορισμό των αδρανειακών συστημάτων, συμπεραίνουμε ότι δεν μπορεί να θεωρηθεί. Επειδή όμως η επιτάχυνση αυτής της κίνησης είναι πολύ μικρή, όπως δείξαμε, μπορούμε να την θεωρούμε κατά προσέγγιση μηδενική.

Γ. Ποιά είναι η αντίστοιχη επιτάχυνση ενός σώματος στον Βόρειο Πόλο της Γης;

Επειδή τα σημεία των Πόλων δεν περιστρέφονται, η αντίστοιχη κεντρομόλος έχει μηδενική τιμή.

Σημείωση

Κάθε σημείο της Γης έχει και μία επιπρόσθετη επιτάχυνση, εξ΄ αιτίας της περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο σε (κατά προσέγγιση) κυκλική τροχιά. Η επιτάχυνση αυτή έχει συνεχώς τη διεύθυνση Γης - Ήλιου, και φορά προς τον Ήλιο. Θα μελετήσουμε το μέτρο αυτής της επιτάχυνσης σε άσκηση, και θα δείξουμε ότι είναι επίσης πολύ μικρό.

Παράδειγμα 3

Κεντρομόλος Επιτάχυνση της Σελήνης γύρω από τη Γη

Η Σελήνη συμπληρώνει μία πλήρη περιφορά γύρω από τη Γη σε 27,3 ημέρες. Το μέτρο της αντίστοιχης γωνιακής ταχύτητας είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{27{,}3 \text{ days}} \times \frac{1 \text{ day}}{24 \text{ h}} \times \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} = 0{,}00000266 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 2{,}66 \times 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η μέση απόσταση Γης - Σελήνης ισούται με 384 000 km = $3{,}84 \times 10^8$ m. Προσεγγίζοντας την τροχιά της Σελήνης ως κύκλο, με ακτίνα αυτή την απόσταση, βρίσκουμε:

$$\left|\vec{\alpha}_{\text{K}}(t)\right| = \omega^2 R = (2{,}66 \times 10^{-6} \text{ rad/s})^2 \times (3{,}84 \times 10^8 \text{ m}) = 2{,}72 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

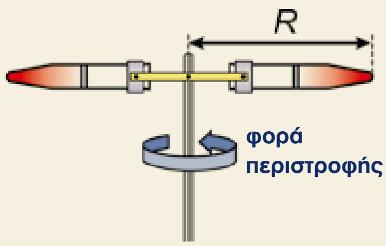
Σημείωση

Η τιμή της κεντρομόλου αντιστοιχεί στην **επιτάχυνση της βαρύτητας της Γης** σε απόσταση 384 000 km από το κέντρο της Γης. Παρατηρήστε ότι η τιμή αυτή είναι περίπου 3 600 φορές μικρότερη από την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης: $g/|\vec{\alpha}_K| \cong 3\,600$.

Παράδειγμα 4

Η συσκευή υψηλής φυγοκέντρισης

Τα σύγχρονα εργαστήρια μοριακής βιολογίας χρησιμοποιούν συσκευές υψηλής φυγοκέντρισης για να διαχωρίσουν τα συστατικά ενός βιολογικού μίγματος. Τα δοχεία αυτών των συσκευών μπορούν να περιστρέφονται με 2 500 στροφές ανά δευτερόλεπτο (150 000 rpm).



Έστω ότι ένας μικρός δοκιμαστικός σωλήνας με βιολογικό μίγμα είναι στερεωμένος στο δοχείο περιστροφής. Τα μόρια του υγρού σε μία περιοχή του σωλήνα κινούνται σε κυκλικές τροχιές ακτίνας $R = 4{,}0$ cm. Η κεντρομόλος επιτάχυνση των μορίων έχει μέτρο:

$$|\vec{\alpha}_K| = \omega^2 R = (2\pi \times 2500 \text{ rad/s})^2 \times (0{,}040 \text{ m}) \cong 1{,}0 \times 10^7 \text{ m/s}^2$$

$$\cong 1000\,000 \times g$$

4.6. Κεντρομόλος Δύναμη της Ομαλής Κυκλικής Κίνησης

Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, για να κινείται ένα σώμα με μη μηδενική επιτάχυνση $\vec{\alpha}$, πρέπει να ασκείται σε αυτό συνισταμένη δύναμη ίση με τη μάζα του επί την επιτάχυνση: $\sum\vec{F} = m\vec{\alpha}$. Συνεπώς, για να εκτελεί ένα σώμα ομαλή κυκλική κίνηση, πρέπει να δρα σε αυτό συνισταμένη δύναμη, ίση με τη μάζα επί την κεντρομόλο επιτάχυνση, $\sum\vec{F} = \vec{F}_K = m\vec{\alpha}$. Η δύναμη αυτή ονομάζεται **κεντρομόλος δύναμη**. Η κεντρομόλος δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με την κεντρομόλο επιτάχυνση (**Εικόνα 4-8(β)**).

Κεντρομόλος Δύναμη της Ομαλής Κυκλικής Κίνησης

Για να εκτελεί ένα σώμα **ομαλή κυκλική κίνηση**, πρέπει να ασκείται σε αυτό μία συνισταμένη δύναμη που ονομάζεται **κεντρομόλος δύναμη**. Η **κεντρομόλος δύναμη** έχει διεύθυνση κατά μήκος της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς, φορά προς το κέντρο του κύκλου, και μέτρο που δίνεται από τη σχέση:

$$\left|\vec{F}_{\text{K}}\right| = m\omega^2 R = m\,\frac{\upsilon^2}{R}$$

Σημείωση

Όσο η **συνισταμένη** δύναμη, που δρά στο σώμα, έχει αυτά τα χαρακτηριστικά που αναφέραμε, το σώμα περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R με γωνιακή ταχύτητα ω. Εάν η δύναμη μεταβληθεί, το σώμα δεν μπορεί να διατηρήσει την κίνησή του στην ίδια τροχιά.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

4.6.1. Η Γη εκτελεί *κατά προσέγγιση* κυκλική τροχιά γύρω από τον Ήλιο, με κέντρο τον Ήλιο. Για να διαγράφει αυτή την τροχιά, χρειάζεται να ασκείται κάποια δύναμη στη Γη;

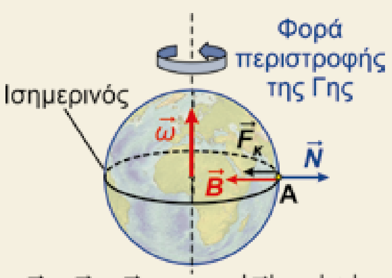
4.6.2. Δύο σώματα **A** και **B**, με μάζες 0,50 kg και 1,0 kg, εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση στην ίδια τροχιά, με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Να συγκρίνετε την κεντρομόλο επιτάχυνση των σωμάτων και την κεντρομόλο δύναμη, που δρα σε αυτά.

4.6.3. Εάν η φορά της κυκλικής κίνησης ενός σώματος αντιστραφεί (π.χ., από αριστερόστροφη γίνει δεξιόστροφη), αντιστρέφεται η φορά της κεντρομόλου δύναμης;

Παράδειγμα 1

Φαινόμενο Βάρος ενός Σώματος στην Επιφάνεια της Γης

Έστω ότι ένας άνθρωπος μάζας 70,0 kg στέκεται σε μία ζυγαριά στον Ισημερινό της Γης. Θα υπολογίσουμε την ένδειξη της ζυγαριάς.



$\vec{B} + \vec{N} = \vec{F}_\kappa \Rightarrow mg - |\vec{N}| = m|\vec{\alpha}_\kappa|$

Στο διπλανό σχήμα, ο άνθρωπος απεικονίζεται στην προσέγγιση υλικού σημείου (σημείο **A**). Στον άνθρωπο ασκούνται το βάρος του και μία κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από τη ζυγαριά. Στον Ισημερινό οι δύο δυνάμεις είναι αντίρροπες, και η συνισταμένη τους είναι η κεντρομόλος: $\vec{B} + \vec{N} = \vec{F}_{\text{K}}$.

Θεωρώντας θετική τη φορά προς το κέντρο της Γης, συμπεραίνουμε:

$$mg - \left|\vec{N}\right| = m\left|\vec{\alpha}_{\text{K}}\right| \Rightarrow \left|\vec{N}\right| = m(g - \left|\vec{\alpha}_{\text{K}}\right|)$$

Ο άνθρωπος ασκεί μία δύναμη $\vec{F}$ στη ζυγαριά, που είναι αντίθετη από τη δύναμη $\vec{N}$ (ζεύγος δράσης-αντίδρασης), και έχει ίσο μέτρο. Η ένδειξη της ζυγαριάς αντιστοιχεί στο μέτρο $|\vec{F}| = |\vec{N}|$, και αποτελεί το **φαινόμενο βάρος** του ανθρώπου.

Αριθμητική Αντικατάσταση

Μπορούμε να συγκρίνουμε το μέτρο της $\vec{N}$ με το βάρος:

$$\frac{|\vec{N}|}{mg} = \frac{m(g - \omega^2 R)}{mg} = 1 - \frac{\omega^2 R}{g} = 1 - \frac{|\vec{\alpha}_K|}{g}$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση στον Ισημερινό είχε υπολογιστεί σε προηγούμενο παράδειγμα: $|\vec{\alpha}_K| = 0{,}00345 \times g$. Συνεπώς:

$$\frac{|\vec{N}|}{mg} = 1 - \frac{0{,}00345 \times g}{g} = 0{,}9965$$

Το φαινόμενο βάρος του ανθρώπου διαφέρει ελάχιστα από το πραγματικό του βάρος. Για παράδειγμα, εάν ο άνθρωπος έχει μάζα 70,0 kg, το βάρος του στον Ισημερινό είναι (70,0 kg) × (9,78 m/s^2) = 685 N. Το αντίστοιχο φαινόμενο βάρος είναι 0,9965 × (70,0 kg) × (9,78 m/s^2) = 682 N.

Ερώτηση

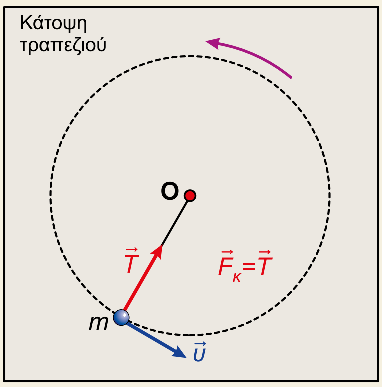
Να συγκρίνετε το φαινόμενο βάρος και το πραγματικό βάρος ενός ανθρώπου, που στέκεται πάνω σε μία ζυγαριά στον Βόρειο Πόλο της Γης.

4.7. Εφαρμογές της Ομαλής Κυκλικής Κίνησης

Παράδειγμα 1

Σφαίρα που στερεώνεται σε Σχοινί και εκτελεί Ομαλή Κυκλική Κίνηση

Μία μικρή σφαίρα μάζας $m = 0{,}15$ kg εφάπτεται σε ένα λείο οριζόντιο τραπέζι. Η σφαίρα είναι στερεωμένη στην άκρη ενός σχοινιού μήκους $L = 95$ cm και περιστρέφεται αριστερόστροφα με συχνότητα $f = 1{,}5$ Hz. Να υπολογίσετε το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης, που δρα στη σφαίρα.



Στη σφαίρα δρα η τάση $\vec{T}$ του σχοινιού, η οποία έχει συνεχώς ακτινική διεύθυνση. Δρουν επίσης το βάρος της $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το τραπέζι (δεν έχουν σχεδιαστεί).

Επειδή η σφαίρα δεν μετατοπίζεται στην κάθετη διεύθυνση ως προς το τραπέζι, $\vec{N} = -\vec{B}$.

Η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας είναι

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times (1{,}5\ \text{s}^{-1}) = (9{,}4)\ \text{rad/s}.$$

Η τάση του σχοινιού επενεργεί ως κεντρομόλος δύναμη, και έχει μέτρο:

$$\left|\vec{T}\right| = \left|\vec{F}_\text{κ}\right| = m\omega^2 L = (0{,}15\ \text{kg}) \times (9{,}4\ \text{rad/s})^2 \times (0{,}95\ \text{m}) = 13\ \text{N}.$$

Ερωτήσεις

1. Πώς θα κινηθεί το σώμα, αν κόψουμε το σχοινί;

Εικόνα: Celso Moreno
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/»

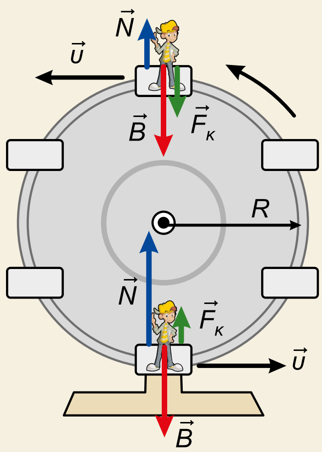
2. Στο άθλημα της σφυροβολίας, η αθλήτρια περιστρέφει γρήγορα μία μεταλλική σφαίρα στερεωμένη σε μία αλυσίδα (αμελητέας μάζας), με στόχο να την πετάξει όσο μακρύτερα γίνεται.

(α) Ποιές δυνάμεις ασκούνται στη σφαίρα όταν περιστρέφεται;

(β) Ποιές δυνάμεις ασκούνται στη σφαίρα όταν φεύγει από το χέρι της αθλήτριας;

(γ) Σε ποιά διεύθυνση κινείται η σφαίρα, τη στιγμή που φεύγει;

$N + mg = m\omega^2 R \Rightarrow N = m(\omega^2 R - g)$



$N - mg = m\omega^2 R \Rightarrow N = m(\omega^2 R + g)$

Παράδειγμα 2
Τροχός του Λούνα-Παρκ

Ο τροχός του Λούνα-Παρκ του επόμενου σχήματος έχει ακτίνα R και περιστρέφεται με **σταθερή** γωνιακή ταχύτητα ω. Ο άνθρωπος της καμπίνας έχει μάζα m και κινείται υπό την επίδραση του βάρους του $\vec{B}$ και της κάθετης δύναμης $\vec{N}$ από την καμπίνα. Θα υπολογίσουμε τη δύναμη $\vec{N}$ όταν ο άνθρωπος βρίσκεται, αντίστοιχα, στο **κατώτατο** και **ανώτατο** σημείο της τροχιάς.

Α. Στο **κατώτατο** σημείο και οι δύο δυνάμεις $\vec{B}$ και $\vec{N}$ έχουν ακτινική διεύθυνση. Η συνισταμένη τους είναι η απαιτούμενη **κεντρομόλος** δύναμη, και έχει φορά προς τα πάνω. Θεωρώντας **θετική** τη φορά προς τα πάνω, υπολογίζουμε την **αλγεβρική τιμή** της δύναμης $\vec{N}$:

$$\vec{N} + \vec{B} = \vec{F}_K \Rightarrow N - mg = m\omega^2 R \Rightarrow N = m(\omega^2 R + g)$$

Να παρατηρήσετε ότι η δύναμη $\vec{N}$ βλέπει πάντοτε προς τα πάνω ($N > 0$), και είναι πάντοτε μεγαλύτερη από το βάρος του ανθρώπου ($N > mg$).

Β. Στο **ανώτατο** σημείο, η κεντρομόλος δύναμη έχει φορά προς τα **κάτω**. Θεωρώντας **θετική** τη φορά προς τα **κάτω**, βρίσκουμε για την **αλγεβρική τιμή** της $\vec{N}$:

$$\vec{N} + \vec{B} = \vec{F}_K \Rightarrow N + mg = m\omega^2 R \Rightarrow N = m(\omega^2 R - g)$$

Από την τελευταία εξίσωση, συμπεραίνουμε ότι η αλγεβρική τιμή N μπορεί να **αλλάζει πρόσημο**. Αυτό σημαίνει ότι η δύναμη $\vec{N}$ μπορεί να αλλάζει φορά:

- Για τιμές της γωνιακής ταχύτητας $\omega < \sqrt{g/R}$, η αλγεβρική τιμή $N < 0$. Άρα, η $\vec{N}$ δρα προς τα **πάνω**, και εξουδετερώνει σε κάποιο βαθμό το βάρος. Αυτό συμβαίνει επειδή η απαιτούμενη κεντρομόλος είναι μικρότερη από το βάρος του ανθρώπου: ($m\omega^2 R < m\dfrac{g}{R} R = mg$).

- Όταν $\omega = \sqrt{g/R}$, η απαιτούμενη κεντρομόλος ισούται ακριβώς με το βάρος: $m\omega^2 R = m\dfrac{g}{R} R = mg$. Για $\omega = \sqrt{g/R}$ η δύναμη $\vec{N}$ μηδενίζεται και ο άνθρωπος νιώθει σαν να «αιωρείται» (επειδή δεν τον πιέζει κάποια δύναμη από το κάθισμα, νιώθει σαν να μην έχει βάρος). Επειδή η τιμή $\omega = \sqrt{g/R}$ **δεν εξαρτάται** από τη μάζα, η δύναμη $\vec{N}$ μηδενίζεται **για κάθε επιβάτη**, ανεξαρτήτως της μάζας του. Το ίδιο φαινόμενο «έλλειψης βάρους» παρατηρείται στον διεθνή διαστημικό σταθμό, όπου το βάρος των διαφόρων σωμάτων ενεργεί σαν κεντρομόλος.

- Για τιμές της γωνιακής ταχύτητας $\omega > \sqrt{g/R}$, η αλγεβρική τιμή $N > 0$. Άρα, η $\vec{N}$ δρα προς τα κάτω, και συνεισφέρει στην αύξηση της κεντρομόλου. Αυτο συμβαίνει επειδή η απαιτούμενη κεντρομόλος είναι μεγαλύτερη από το βάρος του ανθρώπου ($m\omega^2 R > mg$).

  Για να έχει φορά προς τα κάτω η δύναμη $\vec{N}$, ο άνθρωπος πρέπει να κρατά το κάθισμα καμπίνα, ή να στερεώνεται με ζώνη ασφαλείας.

- Για οποιαδήποτε γωνιακή ταχύτητα, η δύναμη $\vec{N}$ είναι μεγαλύτερη στο κατώτατο σημείο, σε σύγκριση με το ανώτατο σημείο της τροχιάς.

Αριθμητική Εφαρμογή

Έστω ότι ο τροχός του Λούνα-Παρκ έχει ακτίνα $R = 12$ m. Η τιμή της γωνιακής ταχύτητας, για την οποία η απαιτούμενη κεντρομόλος **οποιουδήποτε επιβάτη** ισούται με το βάρος του, είναι

$$\omega = \sqrt{g/R} = \sqrt{(9{,}81 \text{ m/s}^2) / (12 \text{ m})} = 0{,}90 \text{ rad/s}.$$

(Η τιμή αυτή είναι **πολύ μεγάλη**. Η αντίστοιχη γραμμική ταχύτητα του επιβάτη είναι $\upsilon = \omega R =$ 0,90 rad/s x (12 m) = 11 m/s).

Έστω ότι ο τροχός περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 0{,}25$ rad/s. Η κάθετη δύναμη σε ένα παιδί μάζας 35 kg είναι στο **χαμηλότερο** σημείο της τροχιάς:

$$N = m(\omega^2 R + g) = (35\text{ kg}) \times \left[(0{,}25\text{ rad/s})^2 \times (12\text{ m}) + (9{,}81\text{ m/s}^2)\right] = 369{,}6\text{ N}$$

και στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς:

$$N = m(\omega^2 R - g) = (35\text{ kg}) \times \left[(0{,}25\text{ rad/s})^2 \times (12\text{ m}) - (9{,}81\text{ m/s}^2)\right] = -317{,}1\text{ N}$$

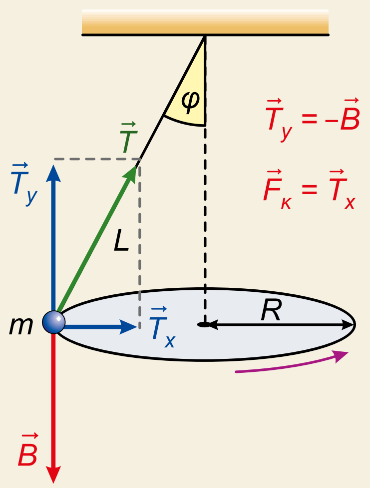
Συγκριτικά, το βάρος του παιδιού έχει μέτρο:

$$B = mg = (35\text{ kg}) \times (9{,}81\text{ m/s}^2) = 343{,}3\text{ N}$$

Παράδειγμα 3

Το Κωνικό Εκκρεμές. Η Συνισταμένη του Βάρους και της Τάσης του Σχοινιού επενεργεί ως Κεντρομόλος

Μία σφαίρα αναρτάται από ένα αβαρές σχοινί μήκους L. Εάν δώσουμε αρχική οριζόντια ταχύτητα στη σφαίρα, θα κινείται επάνω σε μία **οριζόντια** κυκλική τροχιά ακτίνας R με γωνιακή ταχύτητα ω. Το σχοινί θα διαγράφει επιφάνεια **κώνου**.



Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς R συνδέεται με τη γωνία φ και το μήκος του σχοινιού L με τη σχέση: $R = L\,\eta\mu\varphi$.

Στη σφαίρα δρουν το βάρος της $\vec{B}$ και η τάση $\vec{T}$ του σχοινιού. **Θα συμβολίζουμε το μέτρο της τάσης ως** T.

Επειδή η σφαίρα δεν κινείται στην κατακόρυφη διεύθυνση, η συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης στη διεύθυνση Oy μηδενίζεται:

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow \vec{T}_y = -\vec{B} \Rightarrow |\vec{T}_y| = |\vec{B}| \Rightarrow T\,\sigma\upsilon\nu\varphi = mg$$

Η συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης στην οριζόντια διεύθυνση δρα ως κεντρομόλος:

$$\left|\sum \vec{F}_x\right| = |\vec{T}_x| = m\omega^2 R$$

Αντικαθιστώντας $|\vec{T}_x| = T\,\eta\mu\varphi$ και $R = L\,\eta\mu\varphi$ προκύπτει:

$$T\,\eta\mu\varphi = m\omega^2 L\,\eta\mu\varphi \Rightarrow \eta\mu\varphi\,(T - m\omega^2 L) = 0$$

Για να ικανοποιείται η πιο πάνω ισότητα για $\varphi \neq 0$ το μέτρο της τάσης του νήματος πρέπει να ισούται με

$$T - m\omega^2 L = 0 \Rightarrow T = m\omega^2 L \quad (\varphi \neq 0)$$

Συνεπώς, η γωνία φ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{mg}{T} = \frac{mg}{m\omega^2 L} = \frac{g}{\omega^2 L}$$

Να παρατηρήσετε ότι:

- Η γωνία φ **δεν εξαρτάται από τη μάζα** της σφαίρας.
- Για $\varphi \neq 0$ προκύπτει $\sigma\upsilon\nu\varphi < 1 \Rightarrow \frac{g}{\omega^2 L} < 1 \Rightarrow \omega > \sqrt{\frac{g}{L}}$. Για συχνότητες $\omega \leq \sqrt{\frac{g}{L}}$ η σφαίρα δεν μπορεί να περιστρέφεται σε οριζόντιο κύκλο με το σχοινί να διατηρεί σταθερή γωνία $\varphi \neq 0$ με την κατακόρυφο.
- Καθώς η γωνιακή ταχύτητα ω αυξάνεται, η γωνία φ αυξάνεται. Για πολύ μεγάλες τιμές της γωνιακής ταχύτητας το σχοινί είναι σχεδόν οριζόντιο ($\varphi \cong 90^o$).

Αριθμητική Εφαρμογή

Έστω ότι το σχοινί του εκκρεμούς έχει μήκος $L = 1{,}00$ m. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας πρέπει να είναι μεγαλύτερο από την ελάχιστη τιμή

$$\omega_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{9{,}81 \text{ m/s}^2}{1{,}00 \text{ m}}} = 3{,}13 \, \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Το εκκρεμές συμπληρώνει μία πλήρη περιστροφή (6,28 rad) σε χρόνο $T = 2$ s.

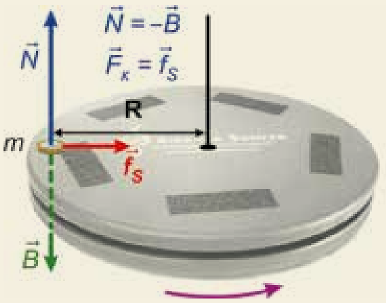
Εάν το εκκρεμές περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2\omega_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = 2\sqrt{g/L}$, η γωνία του σχοινιού γίνεται:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{g}{\omega^2 L} = \frac{g}{4(g/L)L} = \frac{1}{4} \Rightarrow \varphi = 75{,}6^o$$

Παράδειγμα 4

Νόμισμα πάνω σε Περιστρεφόμενη Πλατφόρμα. Η Στατική Τριβή Επενεργεί ως Κεντρομόλος

Το νόμισμα του πιο κάτω σχήματος έχει μάζα m και εφάπτεται σε μία οριζόντια κυκλική πλατφόρμα, σε απόσταση R από το κέντρο της. Η πλατφόρμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω οπότε το νόμισμα διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας R, ως προς το έδαφος.



Στο νόμισμα ασκούνται το βάρος του $\vec{B}$ και μία κατακόρυφη δύναμη $\vec{N}$ από την πλατφόρμα (κάθετη δύναμη).

Οι δυνάμεις αυτές είναι αντίθετες, επειδή το νόμισμα δεν μετακινείται στην κατακόρυφη διεύθυνση: $\vec{N} = -\vec{B} \Rightarrow |\vec{N}| = mg$.

Για να παραμένει το νόμισμα ακίνητο ως προς την πλατφόρμα, πρέπει να ασκείται σε αυτό μία οριζόντια δύναμη, με **ακτινική** διεύθυνση, φορά προς το κέντρο, και μέτρο $|\vec{F}_\kappa| = (m\omega^2)R$ (κεντρομόλος). Η δύναμη αυτή προέρχεται από την **στατική τριβή** μεταξύ της πλατφόρμας και του νομίσματος.

Η τριβή είναι **στατική** όσο το νόμισμα είναι ακίνητο ως προς την πλατφόρμα. Υπενθυμίζουμε ότι το μέτρο της στατικής τριβής δεν μπορεί να υπερβεί μία μέγιστη τιμή, που είναι ανάλογη με το μέτρο της κάθετης δύναμης $|\vec{N}| = mg$:

$$|\vec{f}_s| \leq f_s^{\mu\varepsilon\gamma} = \mu_s mg$$

Ο συντελεστής αναλογίας μ_s είναι ο συντελεστής στατικής τριβής νομίσματος - πλατφόρμας. Το νόμισμα διαγράφει την κυκλική τροχιά εάν η στατική τριβή κατά την ακτινική διεύθυνση επενεργεί ως κεντρομόλος: $|\vec{f}_s| = m\omega^2 R$. Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, συμπεραίνουμε ότι πρέπει να ικανοποιείται η ανισότητα:

$$m\omega^2 R \leq \mu_s mg \Rightarrow \omega^2 \leq \mu_s g/R \Rightarrow \omega \leq \sqrt{\mu_s g/R}$$

Η τιμή $\omega_{\mu\varepsilon\gamma} = \sqrt{\mu_s g/R}$ είναι η **μέγιστη** γωνιακή ταχύτητα, με την οποία μπορεί να περιστρέφεται η πλατφόρμα χωρίς το νόμισμα να ολισθαίνει ως προς την πλατφόρμα. Εάν $\omega > \sqrt{\mu_s g/R}$ η απαιτούμενη κεντρομόλος γίνεται μεγαλύτερη από τη μέγιστη στατική τριβή. Το νόμισμα θα αρχίσει να ολισθαίνει ως προς την πλατφόρμα, και η απόστασή του από το κέντρο θα αυξάνεται. Ως προς το έδαφος, η τροχιά του νομίσματος δεν θα είναι κυκλική.

Αριθμητική Εφαρμογή

Έστω ότι η απόσταση από το κέντρο της πλατφόρμας είναι 85 cm και ο συντελεστής στατικής τριβής είναι $\mu_s = 0{,}60$. Η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα είναι:

$$\omega_{\mu\varepsilon\gamma} = \sqrt{\mu_s g/R} = \sqrt{0{,}60 \times (9{,}81\ \mathrm{m/s^2})/(0{,}85\ \mathrm{m})} = 2{,}6\ \mathrm{rad/s}$$

Σημείωση

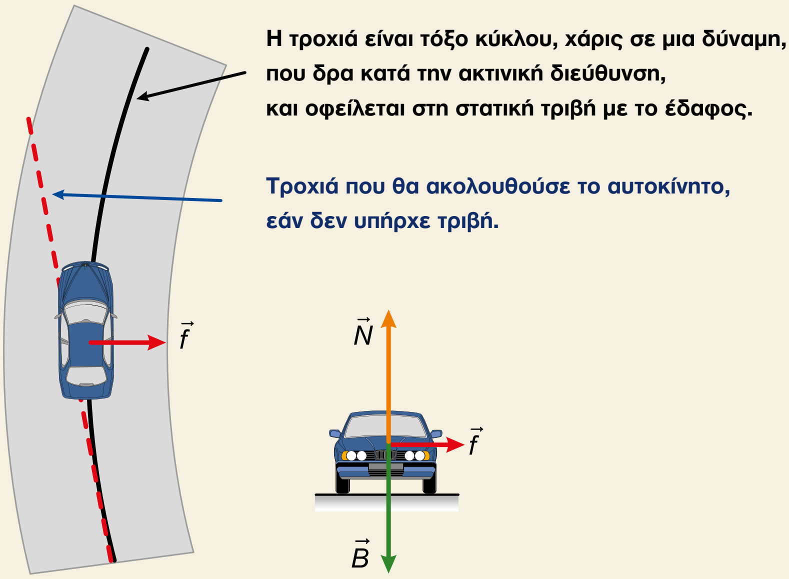
Όταν το νόμισμα αρχίσει να ολισθαίνει, η τριβή γίνεται **κινητική**, και το μέτρο της είναι ακόμα μικρότερο από τη μέγιστη στατική τριβή.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

4.7.1. Στο προηγούμενο παράδειγμα, πώς επηρεάζεται η γωνιακή ταχύτητα $\omega_{\mu\varepsilon\gamma}$ από τη μάζα του νομίσματος; Αν δοκιμάσουμε με νομίσματα μεγαλύτερης μάζας, μπορούμε να πετύχουμε να ισορροπούν στην ίδια ακτίνα, για μεγαλύτερες τιμές της $\omega_{\mu\varepsilon\gamma}$;

Παράδειγμα 5
Αυτοκίνητο σε Οριζόντια Κυκλική Στροφή: η Στατική Τριβή Επενεργεί ως Κεντρομόλος

Το αυτοκίνητο του πιο κάτω σχήματος έχει συνολική μάζα m, κινείται με ταχύτητα μέτρου υ και εισέρχεται σε οριζόντια κυκλική στροφή ακτίνας R.



Για να κινηθεί το αυτοκίνητο κατά μήκος του κυκλικού τόξου και να παραμείνει στο δρόμο, **χρειάζεται να ασκηθεί σε αυτό μία οριζόντια κεντρομόλος δύναμη**, με κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου και μέτρο $\left|\vec{F}_k\right| = m\upsilon^2/R$. Η δύναμη αυτή προέρχεται από την οριζόντια δύναμη **τριβής**, που ασκεί το έδαφος στα ελαστικά του αυτοκινήτου. Χωρίς αυτή την τριβή, το αυτοκίνητο θα συνέχιζε να κινείται ευθύγραμμα, κατά μήκος της διακεκομμένης τροχιάς.

Όταν οι τροχοί περιστρέφονται **χωρίς να ολισθαίνουν** (χωρίς να γλιστρούν στο δρόμο), τα σημεία των τροχών, που εφάπτονται με το δρόμο **δεν κινούνται** ως προς τον δρόμο. Γι΄ αυτό, η τριβή που δρά στους τροχούς είναι **στατική**.

Όπως στην περίπτωση του νομίσματος στο προηγούμενο παράδειγμα, το αυτοκίνητο εκτελεί την κυκλική τροχιά εάν ισχύει:

$$\omega \leq \sqrt{\mu_s g/R} \Rightarrow \upsilon \leq \sqrt{\mu_s g R}$$

Εάν η ταχύτητα του αυτοκινήτου έχει μέτρο $\upsilon > \upsilon_{\mu\varepsilon\gamma} = \sqrt{\mu_s g R}$ το αυτοκίνητο ξεφεύγει από την κυκλική τροχιά και αρχίζει να **γλιστρά** στο δρόμο.

Να παρατηρήσετε ότι η τιμή $\upsilon_{\mu\varepsilon\gamma}$ αυξάνεται με την ακτίνα R της στροφής. Άρα, το αυτοκίνητο μπορεί να διαγράφει στροφές μεγάλης ακτίνας (μικρής καμπυλότητας) με μεγαλύτερη ταχύτητα χωρίς να εκτρέπεται, σε σύγκριση με στροφές μικρής ακτίνας (μεγάλης καμπυλότητας).

Αριθμητική Εφαρμογή

Έστω ότι η στροφή έχει ακτίνα $R = 25$ m. Ο συντελεστής στατικής τριβής καουτσούκ – στεγνής ασφάλτου είναι ίσος με $\mu_s = 1{,}0$. Έτσι, η μέγιστη ταχύτητα έχει μέτρο:

$$\upsilon_{\mu\varepsilon\gamma} = \sqrt{\mu_s g R} = \sqrt{1{,}0 \times (9{,}81\ \text{m/s}^2) \times (25\ \text{m})} = 16\ \text{m/s} = 58\ \text{km/h}$$

Εάν ο δρόμος είναι βρεγμένος, ο συντελεστής στατικής τριβής μειώνεται σε $\mu_s = 0{,}30$. Η μέγιστη ταχύτητα γίνεται:

$$\upsilon_{\mu\varepsilon\gamma} = \sqrt{\mu_s g R} = \sqrt{0{,}30 \times (9{,}81\ \text{m/s}^2) \times (25\ \text{m})} = 8{,}6\ \text{m/s} = 31\ \text{km/h}$$

Σημείωση

Εάν ο οδηγός πατήσει το φρένο και οι τροχοί πάψουν να περιστρέφονται (αρχίζουν να ολισθαίνουν στο δρόμο), η τριβή μεταξύ τροχών - δρόμου γίνεται **κινητική.** Το μέτρο της γίνεται μικρότερο από αυτό της μέγιστης στατικής τριβής, και η **διεύθυνσή της μεταβάλλεται**. Ενώ η στατική τριβή μπορεί να έχει ακτινική διεύθυνση, η κινητική τριβή έχει παράλληλη διεύθυνση με την ταχύτητα του αυτοκινήτου (και αντίθετη φορά). Συνεπώς, το αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα και εγκαταλείπει τον δρόμο.

Τα μοντέρνα αυτοκίνητα έχουν σύστημα παρεμπόδισης της τροχοπέδησης (**A**nti-**B**raking **S**ystem ή **ABS**), το οποίο δεν επιτρέπει τη διακοπή της περιστροφής των τροχών.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

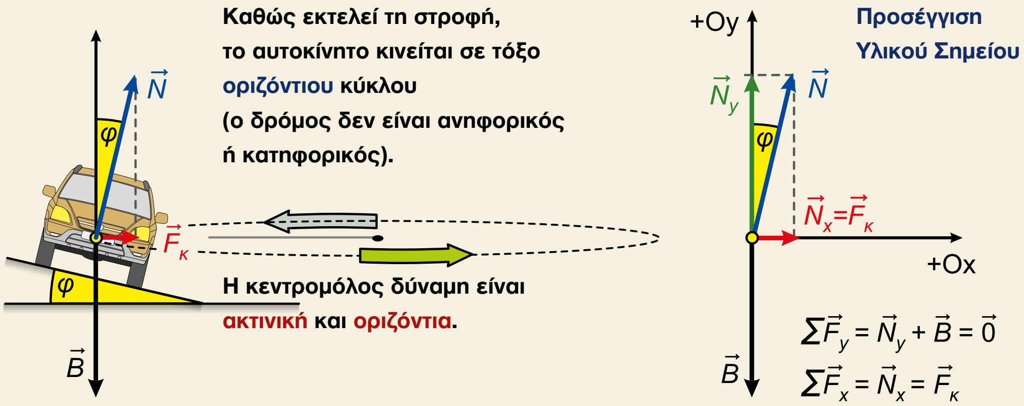
4.7.2. Ένας μηχανικός έχει αναλάβει την κατασκευή μίας κυκλικής στροφής. Να αναφέρετε δύο τρόπους, με τους οποίους μπορεί να αυξήσει τη μέγιστη ταχύτητα διαγραφής της στροφής με ασφάλεια.

4.7.3. Ένα αυτοκίνητο εισέρχεται σε μία στροφή με μεγάλη ταχύτητα. Τι θα μπορούσε να συμβεί, εάν ο οδηγός πατήσει απότομα το φρένο;

Παράδειγμα 6

Αυτοκίνητο σε Στροφή με Κλίση. Η Συνισταμένη του Βάρους και της Κάθετης Δύναμης Επενεργεί ως Κεντρομόλος

Η κίνηση των αυτοκινήτων σε μία στροφή **διευκολύνεται** (απαιτεί μικρότερη, ή και καθόλου τριβή), εάν το επίπεδο του δρόμου σχηματίζει γωνία $\varphi \neq 0$ με το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Ο **άξονας** του δρόμου είναι οριζόντιος (δηλαδή ο δρόμος δεν είναι ανηφορικός ή κατηφορικός). Καθώς το αυτοκίνητο εκτελεί τη στροφή, διαγράφει ένα τόξο **οριζόντιου κύκλου** (μαύρη διακεκομμένη γραμμή).



Στο αυτοκίνητο ασκούνται το βάρος του $\vec{B}$ και η κάθετη δυναμη $\vec{N}$. Γενικά, ασκούνται και δυνάμεις τριβής από το έδαφος, με παράλληλη διεύθυνση προς το οδόστρωμα (δεν έχουν σχεδιαστεί).

Στο **παράδειγμα 5**, η δύναμη $\vec{N}$ είχε **κατακόρυφη** διεύθυνση (όπως και το βάρος του αυτοκινήτου). Συνεπώς, η **οριζόντια** κεντρομόλος δύναμη προέρχονταν αναγκαστικά από την τριβή. Εδώ, η δύναμη $\vec{N}$ έχει οριζόντια συνιστώσα $\vec{N}_x$, που μπορεί να δράσει σαν κεντρομόλος. Έτσι, το αυτοκίνητο μπορεί να στρίψει **ακόμη και χωρίς την ύπαρξη τριβής**, για μία **συγκεκριμένη** ταχύτητα, που εξαρτάται από τη γωνία φ.

Σημείωση

Αυτό βρίσκει εφαρμογή στην κατασκευή δρόμων με απότομες στροφές σε ορεινές περιοχές. Οι στροφές κατασκευάζονται με κατάλληλη κλίση, έτσι ώστε κατά τους χειμερινούς μήνες να μπορούν τα αυτοκίνητα να στρίβουν ακόμη και σε συνθήκες παγετού (μηδενική τριβή).

Στο δεξί σχήμα απεικονίζεται το αυτοκίνητο στην προσέγγιση υλικού σημείου. Από την ισορροπία στη διεύθυνση Oy, προκύπτει:

$$\vec{B} = -\vec{N}_y \Rightarrow |\vec{B}| = |\vec{N}_y| \Rightarrow mg = |\vec{N}|\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Η συνιστώσα $\vec{N}_x$ επενεργεί σαν κεντρομόλος, εάν:

$$\left|\vec{N}_x\right| = \left|\vec{F}_k\right| \Rightarrow \left|\vec{N}\right| \eta\mu\varphi = m\upsilon^2/R$$

Διαιρώντας τις τελευταίες δύο σχέσεις κατά μέλη, παίρνουμε:

$$\frac{\left|\vec{N}\right| \eta\mu\varphi}{\left|\vec{N}\right| \sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{m\upsilon^2/R}{mg} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon^2}{Rg} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{Rg\varepsilon\varphi\varphi}$$

Το πιο πάνω αποτέλεσμα εκφράζει την ταχύτητα, με την οποία πρέπει να κινείται το αυτοκίνητο, για να μπορεί να στρίψει υπό την επίδραση της συνιστώσας $\vec{N}_x$, χωρίς να χρειάζεται επιπρόσθετη στατική τριβή από τον δρόμο. **Εάν κινείται με διαφορετική ταχύτητα, χρειάζεται τριβή** (η οποία ενδεχομένως να μην επαρκεί).

Αριθμητική Εφαρμογή

Έστω ότι το αυτοκίνητο εισέρχεται σε κυκλική στροφή ακτίνας R = 45,0 m με ταχύτητα 54,0 km/h (= 15,0 m/s). Για να πραγματοποιήσει τη στροφή χωρίς ακτινική συνιστώσα τριβής από το δρόμο, πρέπει το επίπεδο του δρόμου να σχηματίζει την εξής γωνία με την οριζόντια διεύθυνση:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon^2}{Rg} = \frac{(15{,}0 \text{ m/s})^2}{(45{,}0 \text{ m}) \times (9{,}81 \text{ m/s}^2)} = 0{,}510 \Rightarrow \varphi = 27^o$$

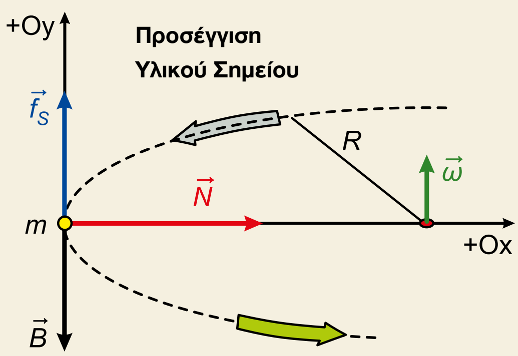
Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

4.7.4. Γιατί ένα αυτοκίνητο διαγράφει πιο εύκολα μία οριζόντια στροφή, όταν το οδόστρωμα έχει κλίση;

Παράδειγμα 7

Ο Γύρος του Θανάτου. Η Κάθετη Δύναμη επενεργεί ως Κεντρομόλος

Στον γύρο του θανάτου, ένας μοτοσυκλετιστής κινείται στο εσωτερικό μίας κατακόρυφης κυλινδρικής πίστας ακτίνας R, και διαγράφει οριζόντιο κύκλο με γωνιακή συχνότητα ω.



Πηγή Εικόνας: https://www.flickr.com/photos/seadave/3578249402/

Στο μοτοσυκλετιστή δρουν το βάρος του, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από την πίστα, και μία δύναμη τριβής από την πίστα. Η δύναμη $\vec{N}$ έχει ακτινική διεύθυνση και φορά προς το κέντρο της τροχιάς, και επενεργεί ως κεντρομόλος: $|\vec{N}| = |\vec{F}_k| = m\omega^2 R$.

Να παρατηρήσετε ότι το μέτρο της $\vec{N}$ **αυξάνεται** με τη γωνιακή ταχύτητα. Δηλαδή, όσο πιο γρήγορα περιστρέφεται ο μοτοσυκλετιστής, τόσο πιο μεγάλη δύναμη δέχεται στην ακτινική διεύθυνση από την πίστα.

Για να ισορροπεί ο μοτοσυκλετιστής στην κατακόρυφη διεύθυνση, πρέπει να ισχύει:

$$\vec{f}_s = -\vec{B} \Rightarrow |\vec{f}_s| = mg$$

Η δύναμη $\vec{f}_s$ προέρχεται από την τριβή των ελαστικών με την πίστα. Εάν οι τροχοί δεν γλιστρούν, η τριβή αυτή είναι **στατική**, όπως και στο παράδειγμα του αυτοκινήτου, που εξηγήσαμε προηγουμένως. Συνεπώς, το μέτρο της $\vec{f}_s$ είναι μικρότερο ή ίσο με τη μέγιστη στατική τριβή μεταξύ του μοτοσυκλετιστή και της πίστας:

$$|\vec{f}_s| \leq f_s^{\mu\varepsilon\gamma} = \mu_s |\vec{N}| = \mu_s m\omega^2 R$$

Να παρατηρήσετε ότι, όταν ελαττώνεται η γωνιακή ταχύτητα ω του μοτοσυκλετιστή, ελαττώνεται και η μέγιστη στατική τριβή, που μπορεί να ασκήσει η πίστα στον μοτοσυκλετιστή. Η μέγιστη στατική τριβή γίνεται μικρότερη από το βάρος του μοτοσυκλετιστή, εάν η γωνιακή ταχύτητα γίνει μικρότερη από μία χαρακτηριστική τιμή:

$$f_s^{\mu\varepsilon\gamma} \leq mg \Rightarrow \mu_s m\omega^2 R \leq mg \Rightarrow \omega \leq \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}}$$

Για $\omega < \sqrt{g/(\mu_s R)}$ το βάρος του μοτοσυκλετιστή είναι μεγαλύτερο από τη στατική τριβή, και ο μοτοσυκλετιστής γλιστρά προς τα κάτω. Όταν συμβεί αυτό, η στατική τριβή γίνεται κινητική και το μέτρο της ελαττώνεται ακόμη περισσότερο.

Αριθμητική Εφαρμογή

Έστω ότι η πίστα έχει ακτίνα R = 15,0 m, και ο συντελεστής στατικής τριβής του ελαστικού με την πίστα ισούται με μ_s = 1,0. Η γωνιακή ταχύτητα του μοτοσυκλετιστή πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με

$$\omega = \sqrt{g/(\mu_s R)} = \sqrt{(9{,}81\ \text{m/s}^2) / (1{,}0 \times 15{,}0\ \text{m})} = 0{,}81\ \text{rad/s}$$

που αντιστοιχεί σε συχνότητα $f = \omega/(2\pi)$ = 0,13 *στροφές*/s.

Ο μοτοσυκλετιστής κινείται με γραμμική ταχύτητα

$$\upsilon = \omega R = (0{,}81\ \text{rad/s}) \times (15{,}0\ \text{m}) = 12\ \text{m/s}$$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

4.7.5. Στο παράδειγμα 6 μάθαμε ότι η γωνία φ του οδοστρώματος διευκολύνει τα αυτοκίνητα. Τι προβλήματα θα μπορούσαν να προκύψουν για τους οδηγούς, εάν οι στροφές των δρόμων κατασκευάζονταν υπό μεγάλες γωνίες;

Αντιστοιχία Ομαλής Κυκλικής Κίνησης - Ευθύγραμμης Ομαλής Κίνησης	
Ομαλή Κυκλική Κίνηση	**Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση**
Φυσικό Μέγεθος	
Γωνία θ	Θέση x
Γωνιακή Μετατόπιση $\Delta\theta$	Μετατόπιση Δx
Μέση Γωνιακή Ταχύτητα $\omega_\mu = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$	Μέση Διανυσματική Ταχύτητα $\upsilon_\mu = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$
Γωνιακή Ταχύτητα $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$, $\Delta t \cong 0$	Ταχύτητα $\upsilon = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, $\Delta t \cong 0$
Εξίσωση	
Σχέση γωνίας θέσης - χρόνου $\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$	Σχέση θέσης - χρόνου $x = x_0 + \upsilon(t - t_0)$

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Στην κυκλική κίνηση:	
α	Η γραμμική ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου.	
β	Το διάνυσμα θέσης, ως προς το κέντρο του κύκλου, έχει μεταβαλλόμενο μέτρο.	
γ	Η γωνία θέσης αυξάνεται όταν το σώμα μετακινείται δεξιόστροφα.	

δ	Η γωνιακή μετατόπιση εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική γωνία θέσης.	
2	Η γωνιακή ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος.	
3	Η διεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας, στην κυκλική κίνηση, είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου.	
4	Ένα σώμα εκτελεί **ομαλή κυκλική κίνηση** με γωνιακή ταχύτητα ω:	
α	Η κλίση της γραφικής παράστασης γωνίας θέσης – χρόνου είναι πάντα αρνητική, όταν η γωνία θέσης ελαττώνεται.	
β	Το εμβαδόν της γραφικής παράστασης γωνίας θέσης – χρόνου ισούται με τη γωνιακή μετατόπιση.	
γ	Το εμβαδόν της γραφικής παράστασης γωνιακής ταχύτητας – χρόνου εκφράζεται σε ακτίνια.	
δ	Το σώμα έχει μηδενική επιτάχυνση, επειδή κινείται με σταθερή ταχύτητα.	
ε	Στο σώμα δρα μία τουλάχιστον δύναμη κατά την ακτινική διεύθυνση.	
ζ	Η συνισταμένη δύναμη στο σώμα δρα κατά την ακτινική διεύθυνση.	
5	Δύο σώματα **Α** και **Β** είναι στερεωμένα σε αποστάσεις R_A και $R_B > R_A$ από το κέντρο μίας κυκλικής πλατφόρμας, που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω.	
α	Τα Α και Β κινούνται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα.	
β	Τα Α και Β κινούνται με την ίδια γραμμική ταχύτητα.	
γ	Το Α έχει μεγαλύτερη κεντρομόλο επιτάχυνση από το Β.	
6	Ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε τροχιά δεδομένης ακτίνας.	
α	Εάν διπλασιαστεί η γραμμική ταχύτητα, διπλασιάζεται η κεντρομόλος επιτάχυνση.	
β	Εάν διπλασιαστεί η γωνιακή ταχύτητα, τετραπλασιάζεται η κεντρομόλος επιτάχυνση.	
7	Δύο σώματα κινούνται σε κυκλικές τροχιές ακτίνων R_1 και $R_2 = 2R_1$ με την ίδια σταθερή γραμμική ταχύτητα. Τα μέτρα των κεντρομόλων επιταχύνσεών τους είναι $\alpha_{K2} = 2\alpha_{K1}$.	

8	Στην κυκλική κίνηση, η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι ομόρροπη με το διάνυσμα θέσης ως προς το κέντρο του κύκλου.	
9	Η κεντρομόλος δύναμη της κυκλικής κίνησης παράγει μη μηδενικό έργο.	
10	Ένα σώμα διαγράφει έναν πλήρη κύκλο ακτίνας R με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω.	
α	Η μέση διανυσματική ταχύτητα είναι μηδενική.	
β	Η μέση επιτάχυνση έχει μέτρο $\omega^2 R$.	

Ασκήσεις

Αντιστοιχία Ομαλής Κυκλικής – Ευθύγραμμης Ομαλής Κίνησης

1 Να συμπληρώσετε τα αντίστοιχα μεγέθη της ομαλής κυκλικής κίνησης και της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης, και να σημειώσετε εάν είναι μονόμετρα (**Μ**) ή διανυσματικά (**Δ**).

	Ομαλή Κυκλική Κίνηση	Ευθύγραμμη ομαλή Κίνηση	Μ/Δ
1	Γωνιακή Μετατόπιση		
2		Διανυόμενη Απόσταση	
3	Μέση Γωνιακή Ταχύτητα		
4	Γωνιακή Ταχύτητα		

Γωνιακή Μετατόπιση, Μήκος τόξου, Μέση Γωνιακή Ταχύτητα

2 Ένα αυτοκίνητο κινείται συνεχώς με την ίδια φορά κατά μήκος μίας κυκλικής στροφής ακτίνας 85,0 m. Εάν η συνολική απόσταση που διανύει είναι 66,7 m, να υπολογίσετε τη γωνιακή μετατόπιση του αυτοκινήτου σε ακτίνια και μοίρες.

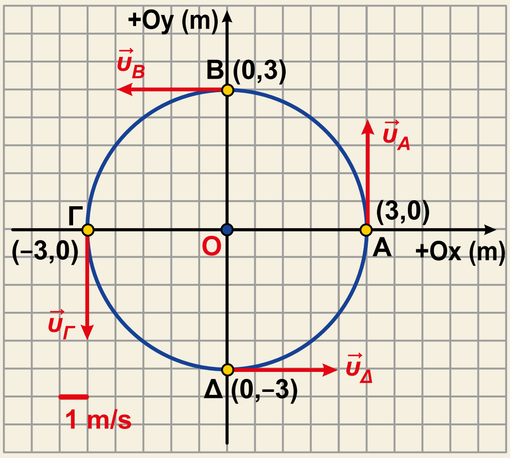
3 Η σφαίρα μίας ρουλέτας κινείται στο κυκλικό αυλάκι της ρουλέτας, ακτίνας R = 1,0 m, και διαγράφει 4 πλήρεις στροφές αριστερόστροφα και 2 στροφές δεξιόστροφα. Να υπολογίσετε το συνολικό μήκος τόξου που διανύει, και τη συνολική γωνιακή της μετατόπιση.

4 Ένα αυτοκίνητο των δημοσίων έργων, εφοδιασμένο με κύλινδρο ακτίνας 0,40 m χαράσσει με μπογιά στο δρόμο μία ευθεία γραμμή μήκους 250 m. Να υπολογίσετε τον αριθμό περιστροφών που έκανε ο κύλινδρος, και τη συνολική γωνιακή μετατόπιση ενός σημείου έξω από το κέντρο του κυλίνδρου.

5 Σε μία φάση της λειτουργίας του, το τύμπανο ενός πλυντηρίου ρούχων περιστρέφεται αριστερόστροφα με 600 στροφές το λεπτό (**rpm**) για 3 λεπτά, 1200 rpm για 2 λεπτά, και 800 rpm για 3 λεπτά. Να υπολογίσετε τη μέση γωνιακή ταχύτητα του τυμπάνου.

Ομαλή Κυκλική Κίνηση

6 Μία σφαίρα διαγράφει τον κύκλο του πιο κάτω σχήματος, με ταχύτητα σταθερού μέτρου 4 m/s. Να υπολογίσετε:



Α. Τις συνιστώσες της διανυσματικής μετατόπισης της σφαίρας, κατά τις διαδρομές Α → Β, Β → Γ και Α → Γ.

Β. Τη χρονική διάρκεια των διαδρομών Α → Δ, Α → Γ και Α → Β.

Γ. Τις συνιστώσες και το μέτρο της μέσης επιτάχυνσης, $\vec{a}_\mu = \Delta\vec{\upsilon}/\Delta t$, της σφαίρας στις διαδρομές Α → Δ, Α → Γ και Α → Β.

Δ. Να συγκρίνετε τα μέτρα της μέσης επιτάχυνσης (ερώτημα **Γ**) με το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης.

7 Ενα μεγάλο φορτηγό με πλάτος 2,5 m κινείται στον αυτοκινητόδρομο, και σε κάποια στιγμή εισέρχεται σε μία αριστερόστροφη στροφή, ακτίνας R = 150 m. Το κέντρο του φορτηγού κινείται με γραμμική ταχύτητα σταθερού μέτρου, και διαγράφει κυκλικό τόξο μήκους s = 150 m σε χρονικό διάστημα Δt = 15 s.

Α. Να υπολογίσετε τη γωνιακή μετατόπιση και τη γωνιακή ταχύτητα του κέντρου του φορτηγού.

Β. Να υπολογίσετε το μήκος τόξου που διαγράφει ο αριστερός και ο δεξιός τροχός, και τη γραμμική τους ταχύτητα.

8 Το δοχείο μίας σύγχρονης μηχανής φυγοκέντρισης περιστρέφεται με 120 000 στροφές ανά λεπτό.

Α. Να υπολογίσετε την περίοδο και τη συχνότητα περιστροφής του δοχείου.

Β. Η ακτίνα του δοχείου ισούται με $R = 7{,}5$ m. Να υπολογίσετε τη γραμμική ταχύτητα ενός σημείου στην περιφέρεια του δοχείου.

Γ. Το δοχείο είναι γεμάτο με υγρό. Να υπολογίσετε την κεντρομόλο επιτάχυνση ενός σημείου του υγρού στην περιφέρεια του δοχείου, και ενός σημείου σε απόσταση $R/2$ από το κέντρο του δοχείου.

9 Ένα αεροπλάνο πετά κατά μήκος του Ισημερινού της Γης, και η τροχιά του είναι κυκλική, με κέντρο το κέντρο της Γης και ακτίνα 6 400 km.

Α. Πόσο γρήγορα θα πρέπει να ταξιδεύει ένα αεροπλάνο κατά μήκος του Ισημερινού της Γης ώστε ο ήλιος να παραμένει στην ίδια θέση ώς προς τους επιβάτες του αεροπλάνου;

Β. Προς ποιά κατεύθυνση θα πρέπει να κινείται το αεροπλάνο, από την Ανατολή προς τη Δύση, ή από τη Δύση προς την Ανατολή;

10 Η Γη κινείται σε (κατά προσέγγιση) κυκλική τροχιά γύρω από τον Ήλιο, με μέση ακτίνα $R = 150\,000\,000$ km $= 15 \times 10^{10}$ m.

Α. Σε ένα από τα παραδείγματα, υπολογίσαμε τη μέση γωνιακή ταχύτητα περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο. Χρησιμοποιώντας αυτή την τιμή, να υπολογίσετε την **κεντρομόλο επιτάχυνση** που έχει η Γη εξ' αιτίας της περιφοράς της γύρω από τον Ήλιο.

Β. Να σχολιάσετε την τιμή της επιτάχυνσης που βρήκατε στο ερώτημα **Α** (π.χ., να την συγκρίνετε με την επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9{,}81$ m/s^2).

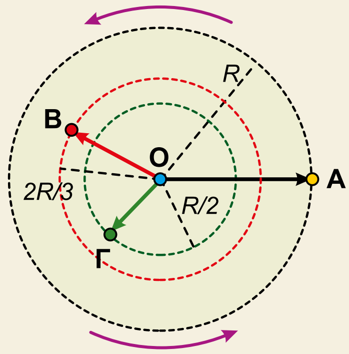
Γ. Για να κινείται η Γη με επιτάχυνση, δρά σε αυτήν μη μηδενική συνισταμένη δύναμη. Συνεπώς, στην πραγματικότητα η Γη **δεν** είναι αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Αν λάβετε υπ΄ όψη σας το αποτέλεσμά σας στο ερώτημα **Α**, κρίνετε ότι είναι ικανοποιητική η προσέγγιση της Γης σαν αδρανειακό σύστημα;

11 Ο επόμενος Πίνακας περιέχει πληροφορίες για την κίνηση διαφόρων πλανητών του ηλιακού μας συστήματος. Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία που δίδονται, να συμπληρώσετε τον πίνακα. Να υποθέσετε ότι οι πλανήτες κινούνται σε κυκλικές τροχιές, με σταθερές γωνιακές ταχύτητες.

Πλανήτης	**Περίοδος** T **(ημέρες)**	**Μέση ακτίνα περιστροφής** (m)	**Γωνιακή ταχύτητα** ω (rad/s)	**Γραμμική Ταχύτητα** υ (m/s)	**Κεντρομόλος Επιτάχυνση** a_K (m/s^2)
Αφροδίτη	225	108×10^9			
Άρης	687	228×10^9			

Δίας	4333	778×10^9			
Κρόνος	10759	1430×10^9			
Ποσειδώνας	60182	4500×10^9			

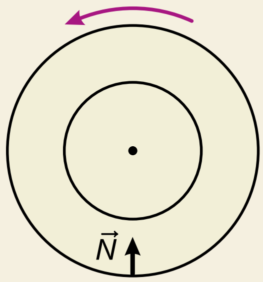
12 Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται σε κάτοψη μία **οριζόντια** πλατφόρμα, που περιστρέφεται αριστερόστροφα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Τα σημεία **Α**, **Β** και **Γ** διαγράφουν κυκλικές τροχιές με ακτίνες R, $2R/3$ και $R/2$.



Α. Να συγκρίνετε τα μέτρα των γραμμικών ταχυτήτων των σημείων Α, Β και Γ.

Β. Να συγκρίνετε τα μέτρα των κεντρομόλων επιταχύνσεων των σημείων Α, Β και Γ.

13 Ένας διαστημικός σταθμός του μέλλοντος είναι εγκατεστημένος σε μία μακρινή περιοχή του σύμπαντος, όπου η βαρύτητα από τα αστέρια είναι αμελητέα. Ο σταθμός έχει σχήμα κυκλικού δίσκου ακτίνας $R = 125$ m. Για να δημιουργήσει συνθήκες τεχνητής βαρύτητας, ο σταθμός περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω. Ένας κυκλικός διάδρομος, κατά μήκος της περιφέρειας, ενώνει τα διάφορα σημεία του σταθμού.



Ένας αστροναύτης, που ακουμπά στον διάδρομο, νιώθει μία κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το πάτωμα του διαδρόμου. Η δύναμη $\vec{N}$ έχει ακτινική διεύθυνση και επενεργεί ως κεντρομόλος. Η δύναμη αυτή δημιουργεί την αίσθηση του βάρους στον αστροναύτη.

Α. Να υπολογίσετε τον αριθμό περιστροφών, που απαιτούνται ανά λεπτό, έτσι ώστε η κεντρομόλος επιτάχυνση του αστροναύτη να ισούται με την επιτάχυνση της βαρύτητας.

Β. Φαντασθείτε ότι ο αστροναύτης στέκεται στο πάτωμα του διαδρόμου, πάνω σε μία ζυγαριά. Να εξηγήσετε γιατί η δύναμη, που μετρά η ζυγαριά, ισούται με το βάρος που θα είχε ο αστροναύτης στη Γή (αν ο σταθμός περιστρέφεται όπως καθορίσατε στο ερώτημα **Α**).

14 Ο τροχός ενός Λούνα - πάρκ έχει ακτίνα $R = 15$ m. Ένα παιδί μάζας $m = 35$ kg κάθεται στην καμπίνα του τροχού. Όταν ο τροχός περιστρέφεται θεωρούμε ότι το παιδί εκτελεί κυκλική τροχιά με ακτίνα *R*.

Α. Εαν το παιδί κινείται με γραμμική ταχύτητα 3,0 m/s να υπολογίσετε το μέτρο και τη φορά της δύναμης ***από το κάθισμα στο παιδί***, στο χαμηλότερο και ψηλότερο σημείο της τροχιάς του.

Β. Ποιά πρέπει να είναι η ελάχιστη γωνιακή ταχύτητα του τροχού, $\omega_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}$, έτσι ώστε να **αντιστραφεί** η φορά της δύναμης από το κάθισμα στο παιδί στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς; Πόσες στροφές εκτελεί τότε ο τροχός ανά δευτερόλεπτο;

Γ. Ποιό θα ήταν το φαινόμενο βάρος του παιδιού στο ψηλότερο σημείο, εάν $\omega = \omega_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}$;

Δ. Η τιμή $\omega_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}$, που προσδιορίσατε, εξαρτάται από τη μάζα του παιδιού;

15 Ένα αυτοκίνητο κινείται σε μία κυκλική πλατεία ακτίνας $R = 25$ m.

Α. Ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στα ελαστικά του αυτοκινήτου και τον δρόμο ισούται με $\mu_s = 0{,}80$. Να υπολογίσετε τη μέγιστη ταχύτητα, με την οποία μπορεί το αυτοκίνητο να διαγράψει την κυκλική στροφή.

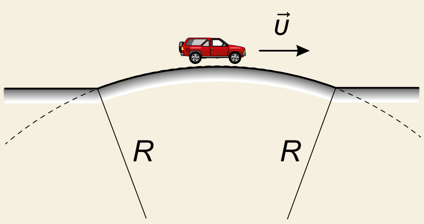
Β. Εάν ο δρόμος είναι σκεπασμένος με υγρό χιόνι, ο συντελεστής ελαττώνεται σε $\mu_s = 0{,}30$. Να υπολογίσετε τη νέα μέγιστη ταχύτητα του αυτοκινήτου.

16 Ένα αυτοκίνητο πλησιάζει σε μία οριζόντια κυκλική στροφή. Στην περιοχή της στροφής ο άξονας του δρόμου είναι οριζόντιος (ο δρόμος δεν είναι ανηφορικός, ούτε κατηφορικός), αλλά το επίπεδο του δρόμου σχηματίζει γωνία 6^o με το οριζόντιο επίπεδο.

Α. Σύμφωνα με τα σήματα της τροχαίας, τα αυτοκίνητα πρέπει να κινούνται με 54 km/h (= 15 m/s) σ΄ αυτή τη στροφή, έτσι ώστε να τη διαγράφουν χωρίς να απαιτείται τριβή από τον δρόμο. Ποιά είναι η ακτίνα της στροφής;

Β. Ένας οδηγός αγνοεί το σήμα της τροχαίας, και κινείται με 108 km/h (= 30,0 m/s). Ποιά θα έπρεπε να είναι η ακτίνα της κυκλικής στροφής, για να τη διαγράψει ο οδηγός με ασφάλεια;

17 Ένα έλκυθρο κινείται με ταχύτητα 126 km/h. Η πίστα είναι οριζόντια, αλλά το πάτωμά της σχηματίζει γωνία θ με το έδαφος. Ποιά πρέπει να είναι η τιμή της γωνίας θ, έτσι ώστε το έλκυθρο να διαγράψει μία κυκλική στροφή ακτίνας 225 m με αυτή την ταχύτητα;



18 Ένα αυτοκίνητο συνολικής μάζας 1200 kg ανεβαίνει με ταχύτητα σταθερού μέτρου $\upsilon = 15$ m/s σε έναν σφαιρικό λόφο ακτίνας 120 m.

Α. Να υπολογίσετε την κάθετη δύναμη από το έδαφος στο αυτοκίνητο, τη στιγμή που το αυτοκίνητο βρίσκεται στο ψηλότερο σημείο του λόφου.

Β. Να υπολογίσετε με ποιά ταχύτητα θα έπρεπε να κινείται το αυτοκίνητο, ώστε ο οδηγός να νομίζει ότι το βάρος του είναι μηδενικό.

19 Ένα κωνικό εκκρεμές, που βρίσκεται σε ένα πάρκο επιστήμης, αποτελείται από μία μεταλλική σφαίρα που κρέμεται από ένα αβαρές νήμα μήκους $L = 12$ m. Η σφαίρα περιφέρεται σε κυκλική τροχιά, και το νήμα σχηματίζει γωνία $\theta = 10^o$ με την κατακόρυφο.

A. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα και τη συχνότητα (περιστροφές ανά δευτερόλεπτο) του εκκρεμούς.

B. Να υπολογίσετε τη γραμμική ταχύτητα της σφαίρας.

20 Ένα κέρμα εφάπτεται σε μία οριζόντια πλατφόρμα, που εκτελεί 60 στροφές το λεπτό. Ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στο κέρμα και την πλατφόρμα είναι ίσος με $\mu_s = 0{,}40$.

Να υπολογίσετε ποιά είναι η μέγιστη απόσταση r από το κέντρο της πλατφόρμας, στην οποία μπορούμε να αφήσουμε το κέρμα και να διαγράφει κυκλική τροχιά.

21 Ένα δημοφιλές παιχνίδι του Λούνα παρκ αποτελείται από ένα μεταλλικό κυλινδρικό δωμάτιο ακτίνας $R = 3$ m που μπορεί να περιστρέφεται. Οι επιβάτες στέκονται στο δωμάτιο, ακουμπώντας στην περιφέρεια του κυλίνδρου. Όταν το δωμάτιο περιστρέφεται, και η γωνιακή ταχύτητα γίνει ίση ή μεγαλύτερη από μία συγκεκριμένη τιμή, το έδαφός του υποχωρεί. Οι επιβάτες αιωρούνται και διαγράφουν κυκλικές τροχιές ακτίνας R.

A. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται σε έναν επιβάτη, όταν το έδαφος του δωματίου έχει υποχωρήσει.

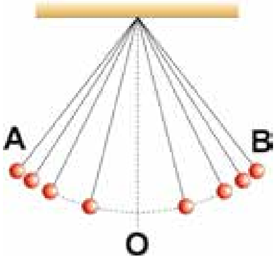
B. Για να αιωρείται ένας επιβάτης, πρέπει το δωμάτιο να εκτελεί τουλάχιστον 0,5 στροφές ανά δευτερόλεπτο. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή που πρέπει να έχει ο συντελεστής στατικής τριβής επιβάτη - τοίχου.

22 Ένας αθλητής της σφυροβολίας περιστρέφει μία μεταλλική σφαίρα μάζας 7,3 kg σε κύκλο ακτίνας περίπου 1,8 m (η αλυσίδα, στην οποία στερεώνεται η σφαίρα, έχει μήκος 1,2 m, και το μέσο μήκος του χεριού ενός αθλητή είναι 0,6 m). Το παγκόσμιο ρεκόρ στη σφυροβολία είναι περίπου 87 m.

A. Να υποθέσετε ότι η σφαίρα εγκαταλείπει την κυκλική τροχιά ***από το ύψος του εδάφους***, υπό γωνία 45^o ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Να υπολογίσετε την αρχική ταχύτητα, που πρέπει να έχει η σφαίρα για να διαγράψει αυτή την απόσταση.

B. Να υπολογίσετε την κεντρομόλο επιτάχυνση της σφαίρας μόλις πριν εγκαταλείψει τα χέρια του αθλητή, και την κεντρομόλο δύναμη που ασκεί ο αθλητής στη σφαίρα. (Η πραγματική τιμή της δύναμης είναι μικρότερη από αυτή που θα υπολογίσετε).

4.8. Κυκλική Κίνηση με Μεταβαλλόμενη Ταχύτητα

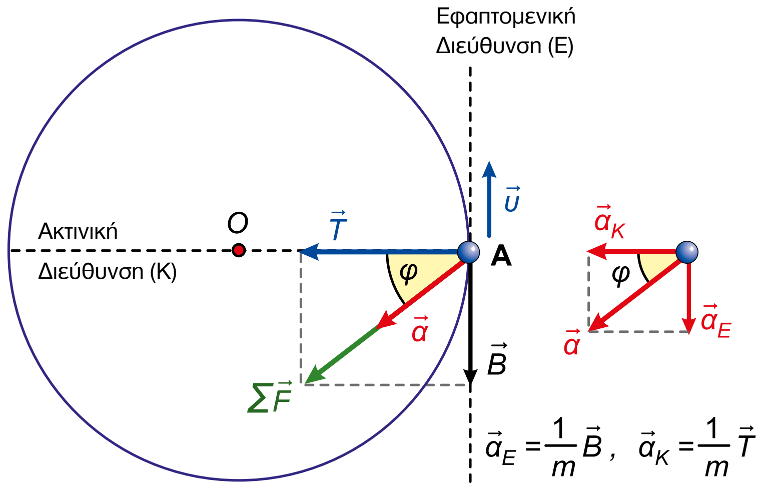


Ένα εκκρεμές (π.χ. μία κούνια) κινείται διαγράφοντας ένα κυκλικό τόξο $\widehat{AB}$. Εάν πάρουμε μία σειρά φωτογραφιών του εκκρεμούς σε διαδοχικά, *ίσα μεταξύ τους* χρονικά διαστήματα, θα διαπιστώσουμε ότι η θέση του μεταβάλλεται λιγότερο, καθώς πλησιάζει στα άκρα A και B της τροχιάς του, και περισσότερο, καθώς πλησιάζει στο κέντρο O της τροχιάς. Αυτό συμβαίνει επειδή το μέτρο της ταχύτητας του εκκρεμούς γίνεται μέγιστο στο σημείο O και ελαττώνεται προς τα άκρα A και B, στα οποία τελικά μηδενίζεται.

Σε πολλά παραδείγματα κυκλικών κινήσεων, **το μέτρο** $\upsilon = |\vec{\upsilon}|$ **της γραμμικής ταχύτητας του σώματος μεταβάλλεται με τον χρόνο**. Σε αυτή την περίπτωση, η επιτάχυνση του σώματος δεν είναι κάθετη στην ταχύτητα. Συνεπώς, εκτός από ακτινική (κεντρομόλο) συνιστώσα, έχει και **μη μηδενική** εφαπτομενική (**επιτρόχιο**) συνιστώσα.

Επιτάχυνση της Κυκλικής Κίνησης με Μεταβαλλόμενη Γωνιακή Ταχύτητα

Η **Εικόνα 4-10** απεικονίζει μία σφαίρα, μάζας *m*, η οποία τείνεται από αβαρές σχοινί μήκους *R* και περιστρέφεται αριστερόστροφα σε κατακόρυφο κύκλο. Τη χρονική στιγμή *t* η σφαίρα βρίσκεται στο σημείο **A** του κύκλου, και έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}(t)$. Η ακτινική διεύθυνση στο σημείο A είναι οριζόντια, και η εφαπτομενική διεύθυνση είναι κατακόρυφη. Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}(t)$ είναι παράλληλη με την εφαπτομενική διεύθυνση.



Εικόνα 4-10
Η σφαίρα κινείται σε **κατακόρυφο** κύκλο υπό τη δράση του βάρους της και της τάσης του σχοινιού. Η ταχύτητα της σφαίρας είναι εφαπτομενική της τροχιάς, αλλά η συνισταμένη δύναμη (και η επιτάχυνση) **δεν είναι κάθετη** στην ταχύτητα. Όταν η συνισταμένη δύναμη έχει εφαπτομενική (επιτρόχιο) συνιστώσα, το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται με τον χρόνο.

Στη σφαίρα ασκούνται το βάρος της $\vec{B}$ και η τάση του σχοινιού $\vec{T}$. Στο σημείο **A** η τάση είναι παράλληλη με την ακτινική διεύθυνση, και το βάρος είναι παράλληλο με την εφαπτομενική διεύθυνση.

Η επιτάχυνση της σφαίρας προκύπτει από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\sum\vec{F} = \frac{1}{m}(\vec{B} + \vec{T})$$

Το διάνυσμα $\vec{a}$ έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με τη συνισταμένη δύναμη $\sum\vec{F} = (\vec{B} + \vec{T})$ και μπορεί να αναλυθεί σε μία **εφαπτομενική (επιτρόχιο)** συνιστώσα $\vec{a}_E(t)$ και μία **ακτινική** συνιστώσα $\vec{a}_K(t)$. Οι συνιστώσες αυτές σχεδιάζονται στην **Εικόνα 4-10**.

Επειδή η επιτάχυνση $\vec{a}$ **δεν είναι κάθετη** προς την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ στο σημείο **Α**, η συνισταμένη δύναμη καταναλώνει **μη μηδενικό έργο**, καθώς η σφαίρα μετακινείται από το Α. Συνεπώς, τη χρονική στιγμή t μεταβάλλεται **τόσο η διεύθυνση, όσο και το μέτρο της ταχύτητας** της σφαίρας.

Ακτινική Συνιστώσα της Επιτάχυνσης στη Μεταβαλλόμενη Κυκλική Κίνηση

Η **ακτινική συνιστώσα** $\vec{a}_K(t)$ είναι η **κεντρομόλος επιτάχυνση**, και εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η **διεύθυνση** της γραμμικής ταχύτητας την ίδια χρονική στιγμή.

Αποδεικνύεται ότι το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης $\vec{a}_K$ της μεταβαλλόμενης κυκλικής κίνησης ικανοποιεί την ίδια σχέση, όπως **στην ομαλή κυκλική κίνηση**:

$$|\vec{a}_K| = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$$

Σημείωση

Όταν το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται με τον χρόνο, το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης επίσης μεταβάλλεται με τον χρόνο.

Η κεντρομόλος επιτάχυνση συνδέεται με την **κεντρομόλο** συνιστώσα της **συνισταμένης δύναμης** μέσω του δεύτερου νόμου:

$$\vec{a}_K(t) = \frac{1}{m}\left(\sum\vec{F}(t)\right)_K$$

Επιτρόχιος Συνιστώσα της Επιτάχυνσης στη Μεταβαλλόμενη Κυκλική Κίνηση

Η **επιτρόχιος** συνιστώσα της επιτάχυνσης, $\vec{a}_E(t)$, εκφράζει τον **ρυθμό**, με τον οποίο μεταβάλλεται το **μέτρο** $\upsilon = |\vec{\upsilon}(t)|$ της γραμμικής ταχύτητας της σφαίρας τη στιγμή t:

$$|\vec{a}_E(t)| = \left|\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}\right|$$

Η επιτρόχιος επιτάχυνση συνδέεται με την **εφαπτομενική (επιτρόχιο)** συνιστώσα της **συνισταμένης δύναμης** με τον δεύτερο νόμο:

$$\vec{a}_E(t) = \frac{1}{m}\left(\sum \vec{F}(t)\right)_E$$

Συμπεράσματα

- Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας μεταβάλλεται σε κάποια χρονική στιγμή t, **εάν και μόνο εάν** η επιτρόχιος συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης **δεν** είναι μηδενική την ίδια στιγμή:

$$\left(\sum \vec{F}(t)\right)_E \neq \vec{0} \Rightarrow \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} \neq 0$$

- Εάν η επιτρόχιος συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης, $\left(\sum \vec{F}(t)\right)_E$, είναι **ομόρροπη** με την ταχύτητα, το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας **αυξάνεται.**
- Εάν η επιτρόχιος συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης, $\left(\sum \vec{F}(t)\right)_E$, είναι **αντίρροπη** με την ταχύτητα, το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας **μειώνεται.**

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

4.8.1. Ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Ποιά είναι η διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης στο σώμα;

4.8.2. Ένα σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά. Εάν η συνισταμένη δύναμη είναι ακτινική, είναι δυνατόν να μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα του σώματος;

4.8.3. Ένα σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση σε τροχιά σταθερής ακτίνας με μεταβαλλόμενη γωνιακή ταχύτητα. Είναι δυνατόν να έχει σταθερή κεντρομόλο επιτάχυνση;

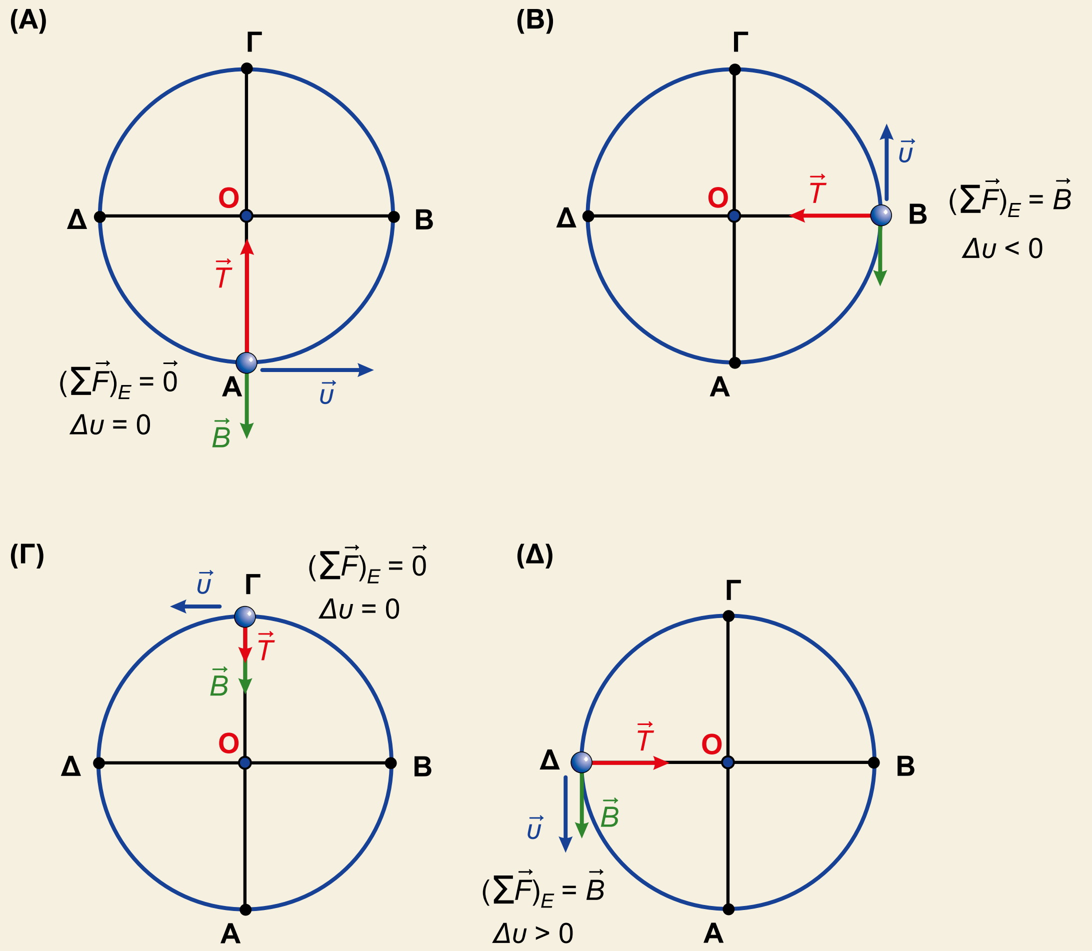
Παράδειγμα

Το επόμενο σχήμα απεικονίζει μία σφαίρα, που συνδέεται με αβαρές νήμα και περιστρέφεται **αριστερόστροφα** σε κατακόρυφο κύκλο. Θεωρούμε ότι η σφαίρα έχει αρκετά μεγάλη ταχύτητα στο σημείο Α, ώστε να διαγράφει ολόκληρο τον κύκλο.

Θα μελετήσουμε **τη μεταβολή στο μέτρο της ταχύτητας** της σφαίρας κατά μήκος του κύκλου, με βάση τις δυνάμεις που δρουν στη σφαίρα.

Κατ΄ αρχήν, παρατηρούμε ότι στη σφαίρα ασκούνται δύο δυνάμεις: η τάση του σχοινιού και το βάρος της.

- Η **τάση** του σχοινιού είναι **συνεχώς ακτινική**, οπότε συνεισφέρει μόνο στην αλλαγή της διεύθυνσης της ταχύτητας της σφαίρας. Η τάση του σχοινιού **δεν επηρεάζει το μέτρο της ταχύτητας** της σφαίρας, σε κανένα σημείο της τροχιάς.



- Το **βάρος** της σφαίρας έχει γενικά **τόσο ακτινική, όσο και επιτρόχιο συνιστώσα.** Η ακτινική συνιστώσα του βάρους συνεισφέρει στην αλλαγή της διεύθυνσης της ταχύτητας, και η επιτρόχιος συνιστώσα προκαλεί τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας.

- Στο σημείο Β, το βάρος έχει μόνο επιτρόχια συνιστώσα, αντίρροπη της ταχύτητας. Γενικότερα, στο ημικύκλιο ΑΒΓ, η επιτρόχια συνιστώσα του βάρους είναι συνεχώς **αντίρροπη με την ταχύτητα**, οπότε το μέτρο της ταχύτητας **ελαττώνεται.**

- Στο σημείο Δ, το βάρος έχει μόνο επιτρόχια συνιστώσα, ομόρροπη της ταχύτητας. Γενικότερα, στο ημικύκλιο ΓΔΑ, η επιτρόχια συνιστώσα του βάρους είναι συνεχώς **ομόρροπη της ταχύτητας**, οπότε το μέτρο της ταχύτητας **αυξάνεται.**

- Στα σημεία Α και Γ, η επιτρόχιος συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης μηδενίζεται:

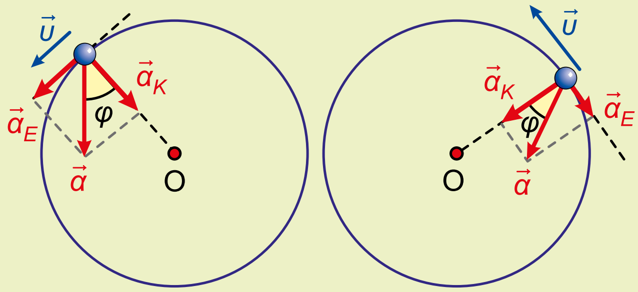
$$\left(\sum \vec{F}\right)_{E} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = 0$$

Άρα, τις στιγμές που η σφαίρα διέρχεται από τα σημεία Α και Γ, αλλάζει μόνο η διεύθυνση της ταχύτητάς της, χωρίς να αλλάζει το μέτρο της ταχύτητας.

Μέτρο της Επιτάχυνσης στη Μεταβαλλομενη Κυκλική Κίνηση

Επειδή οι συνιστώσες $\vec{a}_E(t)$ και $\vec{a}_K(t)$ είναι **κάθετες** μεταξύ τους, το μέτρο της επιτάχυνσης $\vec{a}(t)$ ισούται με:

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{|\vec{a}_E(t)|^2 + |\vec{a}_K(t)|^2}$$



Η γωνία φ που σχηματίζει η διεύθυνση της επιτάχυνσης, με την ακτίνα του κύκλου τη χρονική στιγμή t, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{|\vec{a}_E(t)|}{|\vec{a}_K(t)|}$$

Παράδειγμα

Ένα αγωνιστικό αυτοκίνητο κινείται σε ένα οριζόντιο κυκλικό τόξο πίστας, ακτίνας $R = 480$ m. Σε κάποια χρονική στιγμή, το μέτρο της ταχύτητάς του ισούται με $\upsilon = 162$ km/h, και αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = 5{,}5$ m/s^2. Θα προσδιορίσουμε το μέτρο και τη διεύθυνση της επιτάχυνσης του αυτοκινήτου.

Το μέτρο της ταχύτητας του αυτοκινήτου είναι

$$\upsilon = 162\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 162\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} \times \frac{1\text{h}}{3600\ \text{s}} = 45{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Επειδή το αυτοκίνητο κινείται σε **κυκλική** τροχιά με ταχύτητα **μεταβαλλόμενου μέτρου**, η επιτάχυνσή του έχει *τόσο ακτινική (κεντρομόλο), όσο και επιτρόχιο συνιστώσα*. Η κεντρομόλος συνιστώσα έχει μέτρο:

$$|\vec{a}_K(t)| = \frac{\upsilon^2(t)}{R} = \frac{(45{,}0\ \text{m/s})^2}{480\ \text{m}} = 4{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Η **επιτρόχιος** συνιστώσα έχει μέτρο:

$$|\vec{a}_E(t)| = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = 5{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Συνεπώς, το μέτρο της **συνολικής** επιτάχυνσης είναι

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{|\vec{a}_E(t)|^2 + |\vec{a}_K(t)|^2} = \sqrt{(5{,}5\ m/s^2)^2 + (4{,}2\ m/s^2)^2} = 6{,}9\ m/s^2$$

και η γωνία, που σχηματίζει με την ακτίνα του κύκλου, ισούται με:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{|\vec{a}_E|}{|\vec{a}_K|} = \frac{5{,}5\ m/s^2}{4{,}2\ m/s^2} \Rightarrow \varphi = 53^o$$

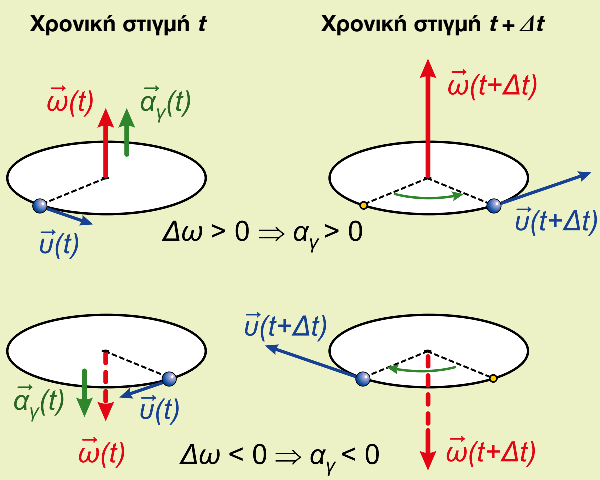
Γωνιακή Επιτάχυνση

Όταν μεταβάλλεται το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας, μεταβάλλεται και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του σώματος: $|\vec{\omega}| = \upsilon(t)/R$. Το φυσικό μέγεθος, που εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της **γωνιακής ταχύτητας**, ονομάζεται **γωνιακή επιτάχυνση** $\vec{a}_\gamma(t)$.

Γωνιακή Επιτάχυνση

$$\vec{a}_\gamma(t) = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\vec{\omega}(t+\Delta t) - \vec{\omega}(t)}{\Delta t}$$, Δt πολύ μικρό χρονικό διάστημα γύρω από τη στιγμή t.

Η γωνιακή επιτάχυνση είναι **διάνυσμα**, με την κατεύθυνση της μεταβολής στη γωνιακή ταχύτητα, $\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}(t+\Delta t) - \vec{\omega}(t)$. Στην κυκλική κίνηση, η διεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας δεν μεταβάλλεται και είναι συνεχώς κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς. Επομένως, και η γωνιακή επιτάχυνση έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς (επόμενο σχήμα).



Η αλγεβρική τιμή α_γ της γωνιακής επιτάχυνσης είναι

$$a_\gamma(t) = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} \text{ , } \Delta t \cong 0$$

Η τιμή $a_\gamma(t)$ είναι **θετική** όταν η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας, $\Delta\omega = \omega(t+\Delta t) - \omega(t)$, είναι **θετική**, και **αρνητική** όταν η μεταβολή $\Delta\omega$ είναι **αρνητική.**

Η **γωνιακή επιτάχυνση** είναι το αντίστοιχο μέγεθος με την **επιτάχυνση** στην ευθύγραμμη κίνηση.

Εξισώσεις της Κυκλικής Κίνησης με Σταθερή Γωνιακή Επιτάχυνση

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_0 η γωνιακή ταχύτητα του σώματος είναι ίση με ω_0, και το σώμα κινείται με **σταθερή** γωνιακή επιτάχυνση a_γ.

Από τον ορισμό της γωνιακής επιτάχυνσης προκύπτει:

$$\Delta\omega = a_\gamma \Delta t \Rightarrow \omega - \omega_0 = a_\gamma (t - t_0) \Rightarrow \omega = \omega_0 + a_\gamma (t - t_0)$$

Η εξίσωση αυτή προσδιορίζει τη γωνιακή ταχύτητα σαν συνάρτηση του χρόνου, για ένα σώμα που εκτελεί κυκλική κίνηση με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση a_γ.

Εξίσωση Γωνιακής Ταχύτητας - Χρόνου στην Κυκλική Κίνηση με Σταθερή Γωνιακή Επιτάχυνση

$$\omega(t) = \omega_0 + a_\gamma (t - t_0)$$

Αν το σώμα έχει ταχύτητα $\omega_0 = 0$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, η εξίσωση παίρνει την απλούστερη μορφή:

$$\omega(t) = a_\gamma t$$

Η **εξίσωση γωνιακής ταχύτητας - χρόνου** αντιστοιχεί στην **εξίσωση ταχύτητας - χρόνου** της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης:

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 + a(t - t_0)$$

Κατ’ αντιστοιχία με την ευθύγραμμη, ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, γράφουμε τις πιο κάτω εξισώσεις:

Εξίσωση Γωνιακής Θέσης - Χρόνου στην Κυκλική Κίνηση με Σταθερή Γωνιακή Επιτάχυνση

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_\gamma(t - t_0)^2$$

όπου θ_0 και ω_0 είναι η γωνιακή θέση και η γωνιακή ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t_0. Εάν το σώμα έχει γωνιακή θέση $\theta_0 = 0$ και γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 0$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, η εξίσωση παίρνει την απλούστερη μορφή:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}a_\gamma t^2$$

Η **εξίσωση γωνιακής θέσης - χρόνου** αντιστοιχεί στην **εξίσωση θέσης - χρόνου** της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης:

$$x(t) = x_0 + \upsilon(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Μέση Γωνιακή Ταχύτητα στην Κυκλική Κίνηση με Σταθερή Γωνιακή Επιτάχυνση

$$\omega_\mu = \frac{\omega_{\alpha\rho\chi} + \omega_{\tau\varepsilon\lambda}}{2}$$

όπου $\omega_{\alpha\rho\chi}$ και $\omega_{\tau\varepsilon\lambda}$ είναι η αρχική και τελική γωνιακή ταχύτητα σε κάποιο χρονικό διάστημα Δt, κατά το οποίο το σώμα κινείται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση.

Η **σχέση της μέσης γωνιακής ταχύτητας** αντιστοιχεί στη **σχέση μέσης ταχύτητας** της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης:

$$\upsilon_\mu = \frac{\upsilon_{\alpha\rho\chi} + \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}}{2}$$

Σχέση Γωνιακής Ταχύτητας και Γωνιακής Μετατόπισης στην Κυκλική Κίνηση με Σταθερή Γωνιακή Επιτάχυνση

$$\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \omega_{\alpha\rho\chi}^2 = 2a_\gamma\Delta\theta$$

όπου $\omega_{\alpha\rho\chi}$ και $\omega_{\tau\varepsilon\lambda}$ είναι η αρχική και τελική γωνιακή ταχύτητα σε κάποιο χρονικό διάστημα, κατά το οποίο το σώμα κινείται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση a_γ, και έχει γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$.

Η **σχέση γωνιακής ταχύτητας - γωνιακής μετατόπισης** αντιστοιχεί στη **σχέση ταχύτητας - μετατόπισης** της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης:

$$\upsilon^2_{\tau\epsilon\lambda} - \upsilon^2_{\alpha\rho\chi} = 2a\Delta x$$

Παράδειγμα 1

Ο τροχός ενός ποδηλάτου περιστρέφεται αριστερόστροφα με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Ξεκινά από την ηρεμία και αποκτά γωνιακή ταχύτητα $\omega = 62{,}8\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ μετά από $\Delta t = 10{,}0$ s. Θα προσδιορίσουμε τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού, και τη γωνιακή μετατόπιση ενός σημείου του τροχού εκτός του κέντρου του.

Από την εξίσωση γωνιακής ταχύτητας - χρόνου, προσδιορίζουμε τη γωνιακή επιτάχυνση:

$$\omega = a_\gamma(t - t_0) \Rightarrow a_\gamma = \frac{\omega}{(t - t_0)} = \frac{62{,}8\ \text{rad/s}}{10{,}0\ \text{s}} = 6{,}28\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Από την εξίσωση γωνιακής θέσης - χρόνου προσδιορίζουμε τη γωνιακή μετατόπιση:

$$\Delta\theta = \theta(t) - \theta_0 \Rightarrow \Delta\theta = \frac{1}{2}a_\gamma(t - t_0)^2 = \frac{1}{2}\left(6{,}28\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) \times (10{,}0\ \text{s})^2 = 314\ \text{rad}$$

Παράδειγμα 2

Τα πτερύγια ενός ανεμιστήρα αρχίζουν να κινούνται από την ηρεμία με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Τη στιγμή που η συνολική γωνιακή μετατόπιση ενός πτερυγίου έχει γίνει ίση με $\Delta\theta = 24\pi$ rad, το πτερύγιο περιστρέφεται με 540 στροφές το λεπτό (rpm). Θα προσδιορίσουμε τη γωνιακή επιτάχυνση και τη μέση γωνιακή ταχύτητα του ανεμιστήρα.

Η γωνιακή ταχύτητα του πτερυγίου εκείνη τη στιγμή ισούται με:

$$\omega = 2\pi f = (2\pi\ \text{rad}) \times \left(\frac{540\ \sigma\tau\rho o\varphi\acute{\epsilon}\varsigma}{60\ \text{s}}\right) = 18\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Από τη σχέση **γωνιακής ταχύτητας - γωνιακής μετατόπισης**, προκύπτει:

$$\omega^2_{\tau\epsilon\lambda} - \omega^2_{\alpha\rho\chi} = 2a_\gamma\Delta\theta \Rightarrow a_\gamma = \frac{\omega^2_{\tau\epsilon\lambda} - \omega^2_{\alpha\rho\chi}}{2\Delta\theta} = \frac{(18\pi\ \text{rad/s})^2}{2 \times (24\pi\ \text{rad})} = 21\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Από την εξίσωση της μέσης γωνιακής ταχύτητας, προκύπτει:

$$\omega_\mu = \frac{\omega_{\alpha\rho\chi} + \omega_{\tau\varepsilon\lambda}}{2} = \frac{0 + 18\pi}{2}\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 9\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Σχέση Επιτρόχιας Επιτάχυνσης - Γωνιακής Επιτάχυνσης

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t το σώμα κινείται αριστερόστροφα. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας δίδεται από τη σχέση $\upsilon(t) = R\omega(t)$, οπότε το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης ισούται με το γινόμενο της ακτίνας R επί το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης $|a_\gamma(t)|$:

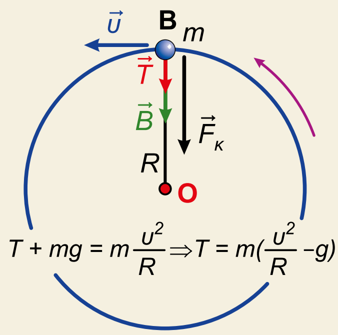
$$|\vec{a}_E(t)| = \left|\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}\right| = R\left|\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right| = R\,|a_\gamma(t)|$$

Εφαρμογές της Κυκλικής Κίνησης με Μεταβαλλόμενη Ταχύτητα

Παράδειγμα 1

Σώμα που τείνεται από Σχοινί και διαγράφει Κατακόρυφο Κύκλο

Η σφαίρα μάζας m του διπλανού σχήματος τείνεται από ένα αβαρές σχοινί, και διαγράφει **κατακόρυφη** κυκλική τροχιά ακτίνας R. Στη σφαίρα ασκούνται το βάρος της $\vec{B}$ και η τάση $\vec{T}$ του σχοινιού. Θα υπολογίσουμε την ελάχιστη ταχύτητα, που χρειάζεται να έχει η σφαίρα στο ανώτατο σημείο Β της τροχιάς της, για να μην πέφτει.



Το πρόβλημα αυτό μοιάζει με τον κατακόρυφο τροχό του Λούνα-παρκ. Όμως, εδώ η γραμμική και η γωνιακή ταχύτητα του σώματος **δεν είναι σταθερή**.

Στο σημείο **Β**, η τάση του σχοινιού έχει κατακόρυφη διεύθυνση, όπως και το βάρος. Θα υπολογίσουμε τη συνισταμένη δύναμη, θεωρώντας **θετική** *τη φορά προς τα κάτω*:

$$T + mg = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow T = m\left(\frac{\upsilon^2}{R} - g\right)$$

Εάν η ταχύτητα της σφαίρας στο ανώτατο σημείο είναι ακριβώς ίση με $\upsilon = \sqrt{Rg}$, η τάση του σχοινιού **μηδενίζεται**, δηλαδή το σχοινί παύει να είναι τεντωμένο.

Εάν η ταχύτητα ήταν ακόμα μικρότερη ($\upsilon < \sqrt{Rg}$), η **απαιτούμενη κεντρομόλος** στο σημείο **Β** θα είχε μικρότερο μέτρο από το βάρος: $m\frac{\upsilon^2}{R} < m\frac{Rg}{R} = mg$

Αυτό σημαίνει ότι το σχοινί θα έπρεπε να ασκεί στο σώμα τάση με **αντίθετη κατεύθυνση** από το βάρος (προς τα πάνω), όπως συνέβαινε με την κάθετη δύναμη $\vec{N}$ στο παράδειγμα του τροχού του Λούνα - παρκ. Αυτό είναι αδύνατο, και το σώμα πέφτει. Η τιμή $\upsilon_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = \sqrt{Rg}$ είναι η **ελάχιστη** ταχύτητα, που χρειάζεται να έχει το σώμα στο ανώτατο σημείο **Β**, έτσι ώστε να συνεχίσει να κινείται στον κύκλο.

Η αντίστοιχη **ελάχιστη γωνιακή** ταχύτητα είναι:

$$\omega_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = \frac{\upsilon_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}}{R} = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

Να παρατηρήσετε ότι η ελάχιστη **γραμμική** ταχύτητα **αυξάνεται με την ακτίνα** της τροχιάς, ενώ η ελάχιστη **γωνιακή** ταχύτητα **ελαττώνεται**.

Αριθμητική Εφαρμογή

Έστω ότι το σχοινί έχει μήκος $R = 0{,}95$ m. Η γραμμική ταχύτητα, για την οποία μηδενίζεται η τάση του σχοινιού, είναι ίση με

$$\upsilon_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = \sqrt{Rg} = \sqrt{(0{,}95\text{ m}) \times (9{,}81\text{ m/s}^2)} = 3{,}1\text{ m/s}$$

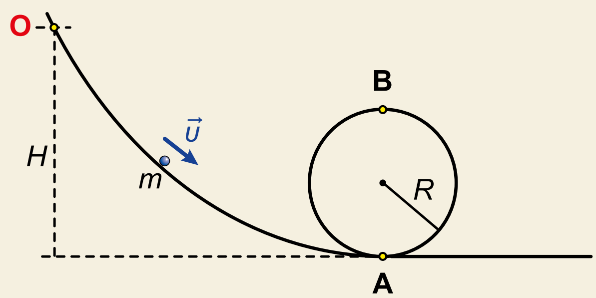
Η αντίστοιχη γωνιακή ταχύτητα είναι ίση με:

$$\omega_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = \sqrt{g/R} = \sqrt{(9{,}81\text{ m/s}^2)/(0{,}95\text{ m})} = 3{,}2\text{ rad/s}$$

Παράδειγμα 2

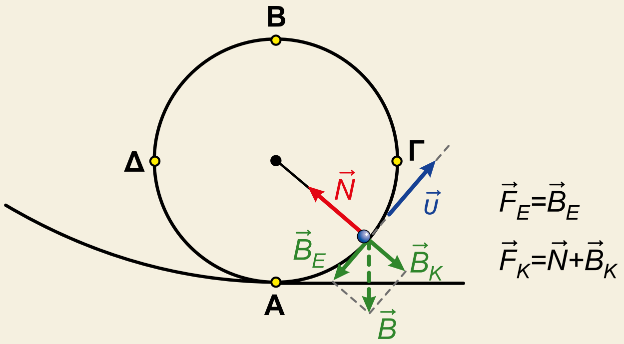
Ανακύκλωση σε Κατακόρυφη Κυκλική Τροχιά

Το πιο κάτω σχήμα απεικονίζει μία χάντρα μάζας m η οποία κινείται σε έναν **λείο** διάδρομο και εκτελεί τη διαδρομή ΟΑΒ. Η χάντρα αφήνεται ελεύθερη από το σημείο Ο, σε ύψος H από το κατώτατο σημείο της τροχιάς Α.



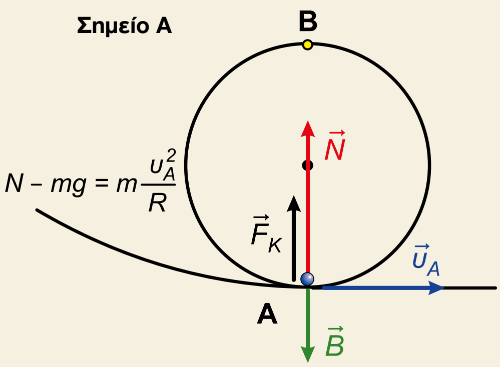
Να συζητήσετε ποιές δυνάμεις ασκούνται στη χάντρα, και πώς επηρεάζουν την κίνησή της.

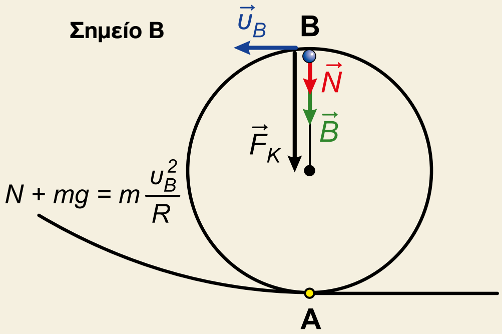
Στη χάντρα ασκούνται το βάρος της $\vec{B}$ και μία **κάθετη** δύναμη $\vec{N}$ από τον διάδρομο. Όταν η χάντρα κινείται στο κυκλικό τμήμα του διαδρόμου, η δύναμη $\vec{N}$ έχει συνεχώς **ακτινική** διεύθυνση. Το βάρος της σφαίρας έχει γενικά μη μηδενική ακτινική ($\vec{B}_K$) και επιτρόχιο ($\vec{B}_E$) συνιστώσα, με εξαίρεση τα σημεία Α, Β ($\vec{B}_E = \vec{0}$) και Γ, Δ ($\vec{B}_K = \vec{0}$). Η επιτρόχιος συνιστώσα $\vec{B}_E$ μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας. Σε κάθε σημείο της τροχιάς, η ακτινική συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης $\left(\sum \vec{F}\right)_K = \vec{N} + \vec{B}_K$, επενεργεί ως κεντρομόλος.



Να εκφράσετε την κάθετη δύναμη από τον διάδρομο στη χάντρα, στα σημεία Α και Β σαν συνάρτηση της μάζας m, της ταχύτητας υ, της ακτίνας R και της επιτάχυνσης της βαρύτητας.

Το ερώτημα αυτό είναι ανάλογο με το πρόβλημα του τροχού του Λούνα-παρκ, με τη διαφορά ότι ***η σφαίρα έχει διαφορετική ταχύτητα στα σημεία* Α *και* Β**.





Στο σημείο **Α** θεωρούμε ως **θετική** τη φορά προς τα πάνω, οπότε προκύπτει:

Σημείο Α:

$$N - mg = m\frac{\upsilon_A^2}{R} \Rightarrow N = m\left(\frac{\upsilon_A^2}{R} + g\right)$$

Η αλγεβρική τιμή N είναι πάντα θετική στο σημείο **Α** (η δύναμη $\vec{N}$ έχει φορά προς τα πάνω). Εάν η ταχύτητα $\upsilon_A \neq 0$, η κάθετη δύναμη **είναι μεγαλύτερη** από το βάρος της σφαίρας: $N > mg$.

Στο σημείο **Β**, θεωρούμε θετική τη φορά προς τα **κάτω**:

Σημείο Β:

$$N + mg = m\frac{\upsilon_B^2}{R} \Rightarrow N = m\left(\frac{\upsilon_B^2}{R} - g\right)$$

Όπως στο παράδειγμα με το σχοινί, εάν $\upsilon_B = \sqrt{Rg}$, η δύναμη $\vec{N}$ μηδενίζεται. Για ακόμα μικρότερες τιμές $\upsilon_B < \sqrt{Rg}$, η απαιτούμενη κεντρομόλος είναι **μικρότερη** από το βάρος:

$$m\frac{\upsilon_B^2}{R} < m\frac{Rg}{R} = mg.$$

Συνεπώς, η δύναμη $\vec{N}$ αποκτά φορά προς τα πάνω ($N < 0$) όπως στον τροχό του Λούνα πάρκ. Εάν το σώμα απλώς εφάπτεται στην πίστα, η αντιστροφή της φοράς της $\vec{N}$ είναι αδύνατη. Το σώμα πέφτει πριν φθάσει στο σημείο **Β**, χάνοντας επαφή με την κυκλική τροχιά. Εάν το σώμα κινείται μέσα σε κατάλληλο αυλάκι και η φορά της $\vec{N}$ μπορεί να αντιστραφεί, η κίνησή του συνεχίζεται. Στο σημείο **Β**, η δύναμη $\vec{N}$ από το αυλάκι έχει φορά προς τα επάνω.

Να συζητήσετε ποιές από τις δυνάμεις, που ασκούνται στη σφαίρα, παράγουν ή καταναλώνουν μη μηδενικό έργο.

Η δύναμη $\vec{N}$ είναι **κάθετη στον διάδρομο και στην ταχύτητα** του σώματος, οπότε το έργο της είναι μηδενικό. Το βάρος παράγει έργο όταν η σφαίρα κατεβαίνει, και καταναλώνει έργο όταν η σφαίρα ανεβαίνει.

Να δείξετε ότι ισχύει η **Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας** για το σύστημα που αποτελείται από τη σφαίρα και τη Γη.

Σύμφωνα με το **Θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας**:

$$W_{\vec{B}} + W_{\vec{N}} = \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow -\Delta U_{\beta\alpha\rho} + W_{\vec{N}} = \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow W_{\vec{N}} = \Delta U_{\beta\alpha\rho} + \Delta E_{\kappa\iota\nu}$$

Επειδή το έργο της δύναμης $\vec{N}$ είναι μηδενικό, $W_{\vec{N}} = 0$, **η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή:**

$$0 = \Delta U_{\beta\alpha\rho} + \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow E_{\kappa\iota\nu} + U_{\beta\alpha\rho} = \sigma\tau\alpha\theta$$

Προσοχή

Υπενθυμίζουμε ότι η Αρχή της Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας ισχύει μόνο όταν το **συνολικό έργο των άλλων δυνάμεων** στο σώμα, εκτός του βάρους, είναι **μηδενικό.**

Να προσδιορίσετε το ελάχιστο ύψος H, από το οποίο πρέπει να αφεθεί η σφαίρα για να φθάσει στο σημείο Β και να εκτελέσει ανακύκλωση.

Έστω ότι η σφαίρα αφήνεται από ύψος H. Έστω στο σημείο Β, που απέχει κατά $2R$ από το έδαφος, η σφαίρα έχει ταχύτητα υ. Εφαρμόζοντας την αρχή της διατήρησης μηχανικής ενέργειας, παίρνουμε:

$$0 + mgH = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + mg(2R) \Rightarrow \upsilon^2 = 2g(H - 2R)$$

Η ελάχιστη ταχύτητα της σφαίρας για ανακύκλωση είναι $\upsilon_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = \sqrt{Rg}$. Άρα:

$$\upsilon^2 = 2g\,(H - 2R) \geq gR \Rightarrow H \geq (5R)/2 \Rightarrow H_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = (5R)/2$$

Παράδειγμα 3
Το Στεγνωτήριο Ρούχων

Σε ένα στεγνωτήριο ρούχων, το τύμπανο περιστρέφεται με **κατάλληλη συχνότητα**, ώστε τα ρούχα να πέφτουν μόλις φθάνουν στο υψηλότερο σημείο του τυμπάνου (εάν έχετε στεγνωτήριο ρούχων στο σπίτι σας, βεβαιωθείτε ότι ισχύει αυτό). Με αυτό τον τρόπο λειτουργίας, τα ρούχα έρχονται σε μεγαλύτερη επαφή με τον ζεστό αέρα και τρίβονται μεταξύ τους, οπότε στεγνώνουν γρηγορότερα.

Θα υπολογίσουμε τη μέγιστη **συχνότητα περιστροφής** f του τυμπάνου, για την οποία τα ρούχα πέφτουν στο ψηλότερο σημείο, χωρίς να ολοκληρώνουν την κυκλική τροχιά.

Έστω ότι το τύμπανο έχει ακτίνα R και περιστρέφεται με συχνότητα f. Το τύμπανο αναγκάζει τα ρούχα να εκτελούν κατακόρυφη κυκλική τροχιά με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2\pi f$. Ένα ρούχο που εφάπτεται με την εσωτερική επιφάνεια του τυμπάνου, κινείται με γραμμική ταχύτητα μέτρου $\upsilon = \omega R = 2\pi f R$. Από το προηγούμενο παράδειγμα γνωρίζουμε ότι το ρούχο αυτό πέφτει στο ανώτατο σημείο της τροχιάς, εάν η ταχύτητά του $\upsilon \leq \sqrt{Rg}$. Συνεπώς:

$$2\pi f R \leq \sqrt{Rg} \Rightarrow f \leq f_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/R}$$

Αριθμητική Εφαρμογή
Έστω ότι το τύμπανο έχει ακτίνα R = 0,30 m. Για κάποιο ρούχο, που διαγράφει κυκλική τροχιά με αυτήν την ακτίνα, προκύπτει:

$$f_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(9{,}81\ \text{m/s}^2)/(030\ \text{m})} = 0{,}91\frac{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho o\varphi\acute{\varepsilon}\varsigma}{\text{s}}$$

Να παρατηρήσετε ότι η συχνότητα **δεν** εξαρτάται από τη μάζα των ρούχων (δηλαδή από το αν είναι βρεγμένα ή στεγνά).

Αντιστοιχία Κυκλικής Κίνησης με Σταθερή Γωνιακή Επιτάχυνση - Ευθύγραμμης, Ομαλά Επιταχυνόμενης Κίνησης	
Κυκλική Κίνηση με Σταθερή Γωνιακή Επιτάχυνση	**Ευθύγραμμη, Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση**
Σχέση γωνίας θέσης - χρόνου $\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0) + \frac{1}{2}a_\gamma(t - t_0)^2$	Σχέση θέσης - χρόνου $x = x_0 + \upsilon(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$
Σχέση γωνιακής ταχύτητας - χρόνου $\omega = \omega_0 + a_\gamma(t - t_0)$	Σχέση ταχύτητας - χρόνου $\upsilon = \upsilon_0 + a(t - t_0)$
Σχέση μέσης γωνιακής ταχύτητας $\omega_\mu = \frac{\omega_{\alpha\rho\chi} + \omega_{\tau\varepsilon\lambda}}{2}$	Σχέση μέσης ταχύτητας $\upsilon_\mu = \frac{\upsilon_{\alpha\rho\chi} + \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}}{2}$
Σχέση γων. ταχύτητας - γων. μετατόπισης $\omega^2_{\tau\varepsilon\lambda} - \omega^2_{\alpha\rho\chi} = 2a_\gamma\Delta\theta$	Σχέση ταχύτητας - μετατόπισης $\upsilon^2_{\tau\varepsilon\lambda} - \upsilon^2_{\alpha\rho\chi} = 2a\Delta x$

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
	Στην επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση:	
1	Η γραμμική ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου.	
2	Η γραμμική ταχύτητα δεν είναι γενικά εφαπτομενική στην τροχιά.	
3	Η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου.	
4	Η επιτάχυνση μπορεί να είναι εφαπτομενική στην τροχιά.	
5	Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης εξαρτάται με τον ίδιο τρόπο από τη γωνιακή ταχύτητα και την ακτίνα, όπως στην ομαλή κυκλική κίνηση.	

6	Τα μέτρα της γραμμικής και της γωνιακής ταχύτητας συνδέονται με την ίδια σχέση, $\upsilon = \omega R$, όπως στην ομαλή κυκλική κίνηση.	
7	Για να αυξάνεται το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας, η επιτρόχια συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης, $\left(\sum \vec{F}\right)_{E}$, πρέπει να είναι ομόρροπη με τη γραμμική ταχύτητα.	
8	Η συνισταμένη δύναμη δρα κατά την ακτινική διεύθυνση.	
9	Η συνισταμένη δύναμη δρα κατά την επιτρόχιο διεύθυνση.	
10	Ένα σώμα, που κινείται σε κυκλική τροχιά, είναι δυνατόν να έχει σταθερή γωνιακή ταχύτητα και μή μηδενική επιτάχυνση.	
11	Όταν ένα σώμα, κινείται σε κυκλική τροχιά με αρνητική γωνιακή επιτάχυνση, το μέτρο της ταχύτητάς του πάντοτε ελαττώνεται.	
12	Όταν ένα σώμα, κινείται σε κυκλική τροχιά με θετική γωνιακή επιτάχυνση, το μέτρο της ταχύτητάς του πάντοτε αυξάνεται.	

Ασκήσεις

1 Μια ρόδα ποδηλάτου ακτίνας $R = 0{,}70$ m περιστρέφεται με 120 στροφές το λεπτό. Ο ποδηλάτης αρχίζει να πιέζει σταθερά τα φρένα, οπότε η ρόδα κινείται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση και σταματά μετά από διάστημα $\Delta t = 5{,}0$ s.

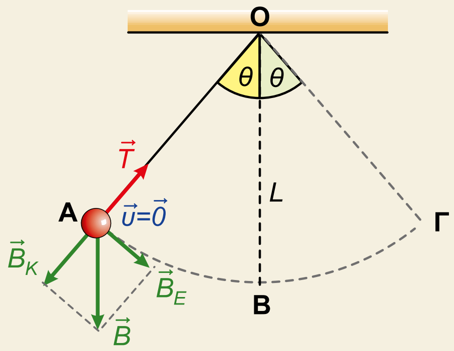
Α. Να υπολογίσετε τη μέση γωνιακή ταχύτητα της ρόδας, σε αυτό το χρονικό διάστημα.

Β. Να υπολογίσετε τη συνολική γωνιακή μετατόπιση ενός σημείου στην περιφέρεια της ρόδας, και το συνολικό μήκος τόξου που διέγραψε το σημείο στο ίδιο χρονικό διάστημα.

2 Ο έλικας ενός αεροπλάνου έχει ακτίνα 1,0 m και αρχίζει να περιστρέφεται από την ηρεμία, με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = 5{,}0$ s περιστρέφεται με 1200 στροφές ανά λεπτό. Να υπολογίσετε τον συνολικό αριθμό περιστροφών του έλικα στο διάστημα των 5 δευτερολέπτων. Ποια είναι η εφαπτομενική επιτάχυνση ενός σημείου της περιφέρειας;

3 Το σχήμα στην επόμενη σελίδα απεικονίζει μία σφαίρα μάζας m η οποία κρέμεται από ένα αβαρές νήμα μήκους L και απομακρύνεται κατά γωνία θ από την κατακόρυφο. Στη σφαίρα ασκούνται συνεχώς το βάρος της και η τάση του σχοινιού.

Α. Στο σημείο Α η σφαίρα αφήνεται με μηδενική ταχύτητα. Στο σχήμα έχουμε αναλύσει το βά-



ρος στο σημείο **Α** σε επιτρόχια ($\vec{B}_E$) και ακτινική συνιστώσα ($\vec{B}_K$). Να υπολογίσετε την κεντρομόλο δύναμη και την τάση του σχοινιού σε αυτό το σημείο, αμέσως πριν ξεκινήσει να κινείται η σφαίρα.

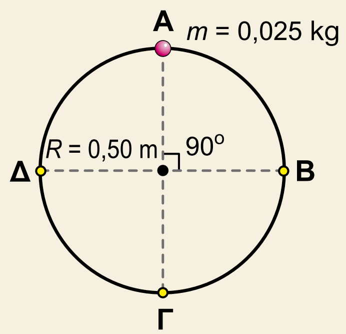
Β. Ποιά/ές δύναμη/εις καθορίζει τη μεταβολή **στο μέτρο** της ταχύτητας της σφαίρας, κατά τη διαδρομή Α → Β → Γ. (Ποιες δυνάμεις έχουν συνιστώσα στην επιτρόχιο διεύθυνση);

Γ. Πώς μεταβάλλεται το μέτρο της ταχύτητας στα τμήματα Α → Β και Β → Γ (αυξάνεται, μειώνεται ή μένει σταθερό;).

Δ. Ποιά/ές δύναμη/εις καθορίζει τη μεταβολή **στην κατεύθυνση** της ταχύτητας της σφαίρας, κατά τη διαδρομή Α → Β → Γ; (Ποιες δυνάμεις έχουν συνιστώσα στην ακτινική διεύθυνση;)

Ε. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας, να υπολογίσετε την ταχύτητα της σφαίρας στα σημεία Β και Γ.

ΣΤ. Να αναλύσετε το βάρος σε επιτρόχιο και ακτινική συνιστώσα στα σημεία Β και Γ. Χρησιμοποιώντας το ερώτημα **Ε**, να υπολογίσετε την τάση του σχοινιού στα σημεία Β και Γ.



4 Μια χάντρα μάζας $m = 0,025$ kg είναι περασμένη σε ένα ***λείο*** κατακόρυφο στεφάνι ακτίνας $R = 0,50$ m και ηρεμεί στο ψηλότερο σημείο Α του στεφανιού. Σε κάποια στιγμή της δίνουμε μια ελαφριά ώθηση, οπότε αρχίζει να κινείται δεξιόστροφα και διαγράφει τη διαδρομή ΑΒΓΔΑ.

Α. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας, με την οποία διέρχεται η σφαίρα από τα σημεία Β, Γ, Δ, και Α (όταν επιστρέφει σε αυτό).

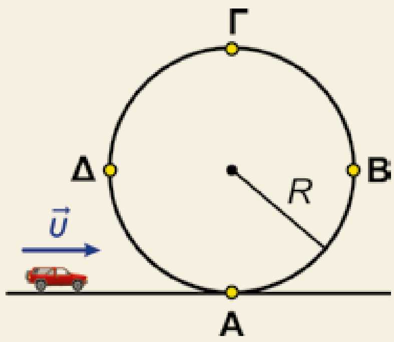
Β. Να συζητήσετε εάν η χάντρα εκτελεί ομαλή ή μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση.

Γ. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις στη χάντρα, στα σημεία Β, Γ και Δ.

Δ. Ποιες δυνάμεις είναι υπεύθυνες για την αλλαγή στη διεύθυνση της γραμμικής ταχύτητας της χάντρας, και ποιές για την αλλαγή στο μέτρο της ταχύτητάς της, στα σημεία Β, Γ και Δ;

Ε. Να υπολογίσετε την κεντρομόλο και την επιτρόχιο συνιστώσα της επιτάχυνσης της χάντρας στα σημεία Β, Γ και Δ. Σε κάθε σημείο να σχεδιάσετε το διάνυσμα της επιτάχυνσης.

5 Ένα αυτοκίνητο εισέρχεται με ταχύτητα μέτρου υ σε έναν λείο διάδρομο ανακύκλωσης.



Α. Να αναφέρετε σε ποιά σημεία του διαδρόμου ΑΒΓΔΑ το αυτοκίνητο έχει τη μέγιστη και την ελάχιστη επιτρόχιο επιτάχυνση. Ποιό μέγεθος λάβατε υπ' όψη σας, για να απαντήσετε;

Β. Να αναφέρετε σε ποιά σημεία του διαδρόμου το αυτοκίνητο έχει τη μέγιστη και την ελάχιστη κεντρομόλο επιτάχυνση. Ποιό μέγεθος λάβατε υπ' όψη σας, για να απαντήσετε;

Απαντήσεις Ελέγχου Κατανόησης Εννοιών

4.1.1. $\pi/3$, $\pi/2$, $3\pi/2$.

4.1.2. 120^o, 135^o, 240^o.

4.1.3. **Α.** $+120^o$, **Β.** $+360^o$, **Γ.** -100^o , **Δ.** -360^o.

4.2.1. Αριστερόστροφη ομαλή κυκλική με $\omega = 5/4$ rad/s στο διάστημα 0 s - 8 s, δεξιόστροφη ομαλή κυκλική με $\omega = -16/5$ rad/s στο διάστημα 12 s - 17 s. Το σώμα παραμένει ακίνητο στα διαστήματα 8 s - 12 s και 17 s - 22 s.

4.2.2. (5 rad/s) × (10 s) + (2 rad/s) × (6 s) + (–4 rad/s) × (6 s) = 38 rad.

4.3.1. 24 h, 365 days.

4.3.2. $\dfrac{480}{\text{min}} \times \dfrac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 8\ \text{Hz}$

4.3.3. $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{4{,}0\ \text{s}^{-1}} = 0{,}25\ \text{s},\ f = 4{,}0\ \text{Hz} = 4{,}0\ \dfrac{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\iota}{\text{s}} = 240\ \dfrac{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\iota}{60\ \text{s}} = 240\ \text{rpm}.$

4.3.4 **(α)** Στη διαδρομή **ΒΓΒ**, το εκκρεμές έχει διαφορετικές ταχύτητες, όταν διέρχεται από το Β: Στην πρώτη διέλευση κινείται **προς** το **Γ**, και στη δεύτερη απομακρύνεται από το **Γ**.
(β) Τη διαδρομή **ΒΓΒΑΒ**.

4.4.1. 19 m/s

4.4.2. 38 m/s

4.4.3. 2,0 m/s

4.5.1. Επειδή η **διεύθυνση** της γραμμικής ταχύτητας μεταβάλλεται (είναι συνεχώς εφαπτομενική στον τροχιά), το σώμα κινείται με επιτάχυνση.

4.5.2. **(α)** Τετραπλασιάζεται
(β) Τετραπλασιάζεται
(γ) Διπλασιάζεται
(δ) υποδιπλασιάζεται (γίνεται ίση με τη μισή).

4.6.1. Χρειάζεται κεντρομόλος δύναμη. Στο επόμενο κεφάλαιο θα μάθουμε ότι αυτή η δύναμη οφείλεται στην βαρυτική έλξη της Γης από τον Ήλιο.

4.6.2. Τα σώματα έχουν την **ίδια** κεντρομόλο επιτάχυνση. Στο σώμα **Β** δρα **διπλάσια** κεντρομόλος δύναμη.

4.6.3. Όχι, η φορά είναι πάντοτε προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

4.7.1. Η $\omega_{\mu\varepsilon\gamma}$ **δεν** εξαρτάται από τη μάζα των νομισμάτων.

4.7.2. Αυξάνοντας την ακτίνα της στροφής, ή αυξάνοντας τον συντελεστή στατικής τριβής του οδοστρώματος.

4.7.3. Εάν οι τροχοί σταματήσουν να περιστρέφονται, η στατική τριβή γίνεται κινητική, με εφαπτομενική διεύθυνση. Λόγω απώλειας της κεντρομόλου δύναμης, το αυτοκίνητο δεν μπορεί να διαγράψει την στροφή και βγαίνει από τον δρόμο.

4.7.4. Δημιουργείται κεντρομόλος δύναμη, ακόμη και εάν δεν υπάρχει στατική τριβή.

4.7.5. Θα έπρεπε τα αυτοκίνητα να κινούνται με μεγάλη ταχύτητα, ώστε να δημιουργείται επαρκής κατακόρυφη στατική τριβή (με φορά προς τα πάνω), που να τα κρατά στο δρόμο. Εάν η ταχύτητα δεν ήταν αρκετά μεγάλη, τα αυτοκίνητα θα γλιστρούσαν προς τα κάτω, όπως ο μοτοσυκλετιστής στον γύρο του θανάτου.

4.8.1. Ακτινική (κεντρομόλος).

4.8.2. Όχι.

4.8.3. Όχι: Αφού μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα, πρέπει να μεταβάλλεται και η κεντρομόλος επιτάχυνση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ο ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΓΚΟΣΜΙΑΣ ΕΛΞΗΣ

Στο Κεφάλαιο 5:

- **Εξάγουμε** τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης (ΝΠΕ) μεταξύ δύο σωμάτων, χρησιμοποιώντας αστρονομικά δεδομένα.
- **Εφαρμόζουμε** τον ΝΠΕ στον υπολογισμό της έλξης διαφόρων σωμάτων, και της μάζας ουρανίων σωμάτων.
- **Εξάγουμε** από τον ΝΠΕ εκφράσεις για την επιτάχυνση της βαρύτητας και το βάρος ενός σώματος.
- **Εξηγούμε** γιατί όλα τα σώματα πέφτουν ελεύθερα με την ίδια επιτάχυνση, ανεξάρτητα από τη μάζα τους.
- **Αποδεικνύουμε** μία σχέση ανάμεσα στην περίοδο και την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς φυσικών και τεχνητών δορυφόρων.
- **Υπολογίζουμε** την ακτίνα της τροχιάς ενός γεωστατικού δορυφόρου.
- **Ερμηνεύουμε** τη φαινόμενη έλλειψη βαρύτητας σε διαστημόπλοια που κινούνται υπό τη βαρυτική έλξη της Γης.
- **Υπολογίζουμε** την έκφραση της Βαρυτικής Δυναμικής Ενέργειας, όταν το βάρος ενός σώματος μεταβάλλεται σύμφωνα με τον ΝΠΕ.
- **Εφαρμόζουμε** την Αρχή της Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας στον υπολογισμό της **ταχύτητας διαφυγής** ενός σώματος από την βαρυτική έλξη της Γης.

Οι ελκτικές βαρυτικές δυνάμεις από τη Γη συγκρατούν το διαστημικό λεωφορείο και τη Σελήνη σε τροχιές γύρω από τη Γη. (Πηγή: NASA).

Όπως γνωρίζουμε, η Γη ασκεί σε κάθε σώμα μία ελκτική δύναμη (το **βάρος** του σώματος), με διεύθυνση την ευθεία που ενώνει το σώμα με το κέντρο της Γης, και φορά προς το κέντρο της Γης. Η συμπεριφορά αυτή είναι γενική: Όλα τα σώματα ασκούν ελκτικές δυνάμεις μεταξύ τους, οι οποίες ονομάζονται **βαρυτικές**. Στην Α΄ Λυκείου αναφέραμε ότι οι βαρυτικές δυνάμεις είναι πολύ ασθενείς, και γίνονται αισθητές όταν το σώμα που τις ασκεί έχει συγκρίσιμη μάζα με αυτή ενός ουράνιου σώματος (αστεριού ή πλανήτη).

Οι βαρυτικές δυνάμεις ευθύνονται για τη σταθεροποίηση των διαφόρων σωμάτων του περιβάλλοντός μας πάνω στην επιφάνεια της Γης, τη διατήρηση της Γήινης ατμόσφαιρας, τις παλίρροιες στους ωκεανούς, τη συσσώρευση ύλης και τον σχηματισμό πλανητικών συστημάτων, τη διατήρηση της Σελήνης σε τροχιά γύρω από τη Γη και των πλανητών στις τροχιές τους, τον σχηματισμό των γαλαξιών, διέπουν ακόμα και τη διαστολή του Σύμπαντος. Μαζί με τις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις, οι βαρυτικές δυνάμεις είναι υπεύθυνες σχεδόν για όλα τα φαινόμενα που παρατηρούμε στην καθημερινή μας ζωή.

Πρώτος από όλους ο Νεύτωνας συνειδητοποίησε ότι το βάρος ενός σώματος, η έλξη της Σελήνης από τη Γη, η έλξη της Γης από τον Ήλιο, και γενικότερα οι ελκτικές βαρυτικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ οποιωνδήποτε σωμάτων ακολουθούν **τον ίδιο νόμο**. Γι’ αυτό το λόγο ο νόμος που διέπει τις βαρυτικές αλληλεπιδράσεις ονομάζεται **«Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης»**.

1

2

Εικόνα 5-1
Οι βαρυτικές δυνάμεις είναι υπεύθυνες για το σχηματισμό αστέρων, πλανητικών συστημάτων, αστρικών σμηνών και γαλαξιών.

1
Το σφαιρικό σμήνος NGC362. ESA/Hubble & NASA

2
Εικόνα του πιο απομακρυσμένου τμήματος του Σύμπαντος από το τηλεσκόπιο Hubble, με Γαλαξίες ηλικίας 13,2 δισεκατομμυρίων ετών.

3
Ο Γαλαξίας της Ανδρομέδας NASA/MSFC/Meteoroid Environment Office/Bill Cooke.

4
Δύο Γαλαξίες που συγκρούονται και ενώνονται υπό την επίδραση των βαρυτικών μεταξύ τους δυνάμεων. NASA/ESA/J. Lotz.

3

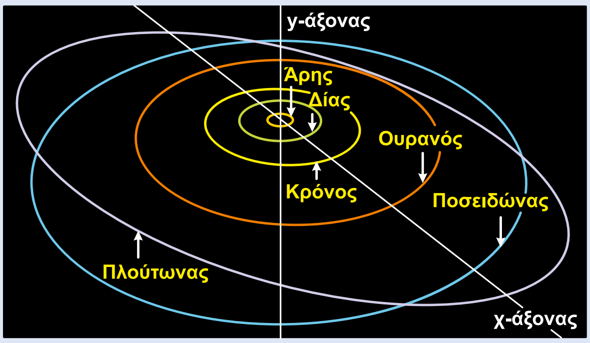
4

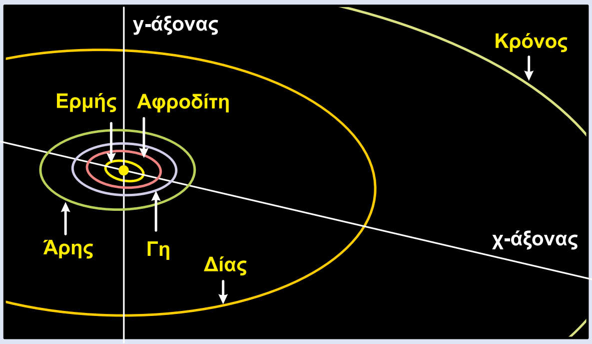
ΕΝΘΕΤΟ: Τροχιές των Πλανητών του Ηλιακού Συστήματος

Ο Νεύτωνας κατέληξε στον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης μελετώντας τα δεδομένα για τις κινήσεις των πλανητών του Ηλιακού Συστήματος. Όπως είχε συμπεράνει πρώτος ο αστρονόμος **Johannes Kepler**, οι πλανήτες κινούνται σε **ελλειπτικές** τροχιές με τον Ήλιο στη μία εστία της έλλειψης. Οι τροχιές αυτές απεικονίζονται στο σχήμα που ακολουθεί.

Οι επόμενες ιστοσελίδες προσφέρουν προσομοιώσεις του Ηλιακού Συστήματος:
http://www.solarsystemscope.com
https://janus.astro.umd.edu/SolarSystems/

Η επόμενη ιστοσελίδα της NASA σας δίνει τη δυνατότητα να μελετήσετε διαδραστικά το Ηλιακό σύστημα: *http://eyes.nasa.gov*



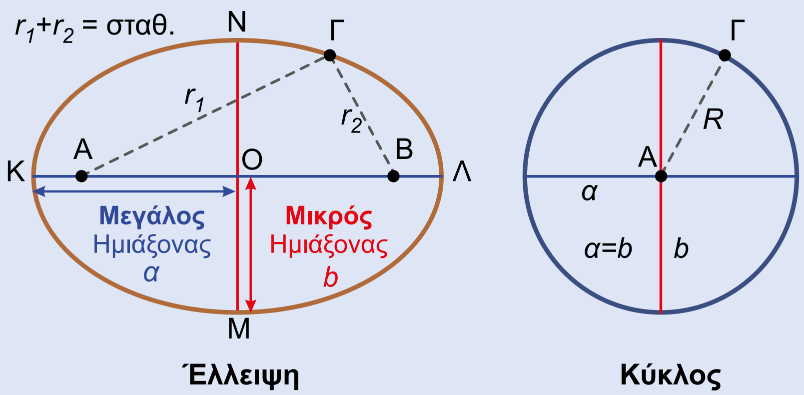


Οι τροχιές των μακρινότερων (αριστερό σχήμα) και κοντινότερων (δεξί σχήμα) πλανητών του Ηλιακού Συστήματος.

ΕΝΘΕΤΟ: Το σχήμα της έλλειψης

Η έλλειψη είναι μία κλειστή επίπεδη καμπύλη, με την ιδιότητα ότι **το άθροισμα των αποστάσεων** κάθε σημείου της από δύο σημεία **Α** και **Β** του επιπέδου είναι σταθερό. Στο αριστερό σχήμα, το άθροισμα $r_1 + r_2$ των αποστάσεων του σημείου **Γ** από τα σημεία **Α** και **Β** παραμένει σταθερό, καθώς το **Γ** διαγράφει την έλλειψη.

Τα σημεία **Α** και **Β** ονομάζονται **εστίες** της έλλειψης. Το ευθύγραμμο τμήμα **ΚΛ**, που διέρχεται από τις εστίες, και το κάθετο σε αυτό ευθύγραμμο τμήμα **ΜΝ** αποτελούν τους **άξονες** της έλλειψης.



Τα μήκη ΚΟ = α και ΟΜ = b είναι, αντίστοιχα, ο **μεγάλος ημιάξονας** και ο **μικρός ημιάξονας** της έλλειψης. Εάν $\alpha = b = R$, η έλλειψη αντιστοιχεί σε κύκλο ακτίνας R και οι εστίες της συμπίπτουν με το κέντρο του κύκλου.

Σημείωση
Επειδή οι τροχιές των πλανητών είναι ελλειπτικές, με τον Ήλιο σε μία από τις εστίες, η απόσταση κάθε πλανήτη από τον Ήλιο και **το μέτρο της ταχύτητας** του πλανήτη **μεταβάλλονται** κατά την περιφορά του πλανήτη γύρω από τον Ήλιο. Θα μελετήσουμε τις κινήσεις των πλανητών, κάνοντας τις εξής **προσεγγίσεις**:

(1) Οι πλανήτες κινούνται σε **κυκλικές τροχιές με κέντρο τον Ήλιο**, και
(2) Κατά την κίνηση ενός πλανήτη, **το μέτρο της ταχύτητάς του παραμένει σταθερό.**

Τα συμπεράσματα θα είναι σε πολύ καλή συμφωνία με τα αστρονομικά δεδομένα.

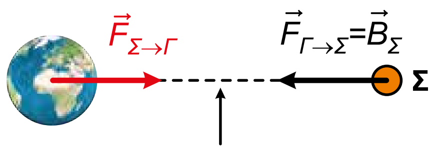
5.1. Ο Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης

Θα εξαγάγουμε τον Νόμο Παγκόσμιας Έλξης μεταξύ δύο σωμάτων **Α** και **Β**, που έχουν μάζες m_A και m_B και απέχουν μεταξύ τους κατά απόσταση r, **χρησιμοποιώντας αστρονομικά δεδομένα** για την κίνηση των πλανητών. Θα ακολουθήσουμε έναν παρόμοιο συλλογισμό με αυτόν του Νεύτωνα.

Α. Κατεύθυνση των Δυνάμεων Παγκόσμιας Έλξης μεταξύ δύο Σωμάτων

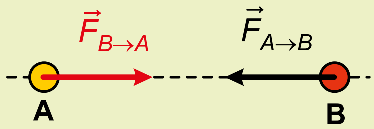
Γνωρίζουμε ότι η ελκτική δύναμη $\vec{F}_{\Gamma\to\Sigma}$ από τη Γη σε ένα σώμα **Σ** (το βάρος του σώματος) έχει κατακόρυφη διεύθυνση (την ευθεία που ενώνει το σώμα με το κέντρο της Γης), και φορά προς το κέντρο της Γης (**Εικόνα 5-2**). Η ελκτική δύναμη $\vec{F}_{\Sigma\to\Gamma}$ που ασκεί το σώμα στη Γη, έχει την ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά (ζεύγος δράσης - αντίδρασης με το βάρος του σώματος). Επειδή η Γη έχει κατά προσέγγιση σφαιρικό σχήμα και **συμμετρικά κατανεμημένη μάζα** γύρω από το κέντρο της, η ελκτική δύναμη $\vec{F}_{\Sigma\to\Gamma}$ ασκείται στο κέντρο της Γης.

Εικόνα 5-2
Οι δυνάμεις παγκόσμιας έλξης $\vec{F}_{\Gamma\to\Sigma}$, από τη Γη στο σώμα **Σ**, (το βάρος $\vec{B}_\Sigma$ του σώματος), και $\vec{F}_{\Sigma\to\Gamma}$ από το σώμα **Σ** στη Γη, είναι ζεύγος δράσης - αντίδρασης και έχουν διεύθυνση την ευθεία που ενώνει το κέντρο της Γης με το σώμα.



Οι πιο πάνω παρατηρήσεις ισχύουν για οποιοδήποτε ζεύγος **σφαιρικών** σωμάτων Α και Β **με συμμετρικά κατανεμημένη μάζα γύρω από το κέντρο τους.** Ισχύουν επίσης και για ζεύγη σωμάτων με τυχαίο σχήμα, εάν η απόσταση μεταξύ τους είναι πολύ μεγαλύτερη από τις διαστάσεις τους, έτσι ώστε να μπορούν να θεωρηθούν ως υλικά σημεία. Οδηγούμαστε στο εξής συμπέρασμα:

Συμπέρασμα 1
Οι δυνάμεις παγκόσμιας έλξης ανάμεσα σε δύο σώματα **Α** και **Β**, που μπορούν να θεωρηθούν ως **υλικά σημεία**, έχουν **διεύθυνση την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία**.

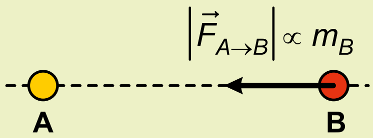


Β. Εξάρτηση της Δύναμης Παγκόσμιας Έλξης από τις Μάζες των Σωμάτων

Εάν τοποθετήσουμε διάφορα σώματα σε μία ζυγαριά, διαπιστώνουμε ότι το βάρος οποιουδήποτε σώματος **Σ** έχει μέτρο ανάλογο με τη μάζα του:

$$|\vec{B}_\Sigma| = |\vec{F}_{\Gamma\to\Sigma}| = m_\Sigma\, g \propto m_\Sigma$$

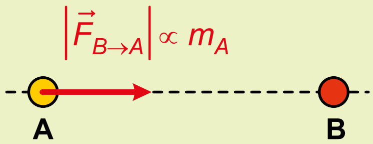
Γενικεύοντας αυτή την αναλογία **για τις ελκτικές δυνάμεις μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους σωμάτων Α και Β**, συμπεραίνουμε:



Συμπέρασμα 2

Το μέτρο της δύναμης παγκόσμιας έλξης $\vec{F}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$, που ασκεί ένα σώμα **A** σε ένα δεύτερο σώμα **B**, είναι ανάλογο με τη μάζα του σώματος **B**:

$$\left|\vec{F}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}\right| \propto m_{\mathrm{B}}$$



Ομοίως, το μέτρο της δύναμης παγκόσμιας έλξης $\vec{F}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}$, που ασκεί το σώμα **B** στο σώμα **A**, είναι ανάλογο με τη μάζα του **A**:

$$\left|\vec{F}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}\right| \propto m_{\mathrm{A}}$$

Επειδή οι δυνάμεις $\vec{F}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ και $\vec{F}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}$ έχουν ίσα μέτρα (ζεύγος δράσης - αντίδρασης), το μέτρο της $\vec{F}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ πρέπει να είναι ανάλογο **και** με τη μάζα του A:

$$\left|\vec{F}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}\right| = \left|\vec{F}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}\right| \Rightarrow \left|\vec{F}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}\right| \propto m_{\mathrm{A}}$$

Αφού το μέτρο $\left|\vec{F}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}\right|$ είναι ανάλογο **και με τις δύο μάζες** m_{A} και m_{B}, θα είναι ανάλογο και με το **γινόμενο** $m_{\mathrm{A}}\,m_{\mathrm{B}}$. Το ίδιο ισχύει για το ίσο μέτρο $\left|\vec{F}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}\right|$. Συνοψίζουμε:

Συμπέρασμα 3

Τα μέτρα των δυνάμεων παγκόσμιας έλξης μεταξύ δύο σωμάτων **A** και **B**, είναι ανάλογα με το γινόμενο των μαζών των **A** και **B**:

$$\left|\vec{F}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}\right| = \left|\vec{F}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}\right| \propto m_{\mathrm{A}}\,m_{\mathrm{B}}$$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

5.1.1. Χρησιμοποιώντας το **συμπέρασμα 3**, να εξηγήσετε πώς θα μεταβληθεί το βάρος ενός ανθρώπου μάζας 75 kg εάν διπλασιασθεί η μάζα **(α)** της Γης, **(β)** του ανθρώπου.

Γ. Εξάρτηση της Δύναμης Παγκόσμιας Έλξης από την Απόσταση μεταξύ των Σωμάτων

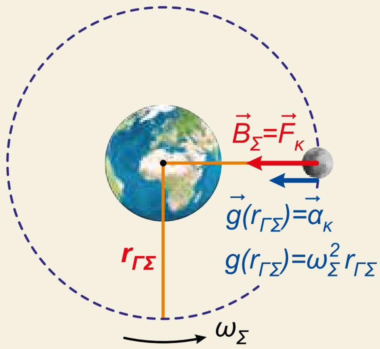
Το μέτρο του βάρους ενός σώματος είναι επίσης ανάλογο με το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας: $\left|\vec{B}_{\Sigma}\right| = m_{\Sigma}\,g \propto g$. Η τιμή g δεν είναι σταθερή, αλλά **μεταβάλλεται με την απόσταση** του σώματος από το κέντρο της Γης. Για παράδειγμα, ***στην επιφάνεια της Γης*** μεταβάλλεται από 9,83 m/s^2 στους πόλους μέχρι 9,78 m/s^2 στον Ισημερινό, επειδή το σχήμα της Γης δεν είναι απόλυτα σφαιρικό. Για να καταλάβουμε πώς μεταβάλλεται η τιμή g με την απόσταση από το κέντρο της Γης, θα μελετήσουμε την κίνηση της Σελήνης.

Η Σελήνη κινείται γύρω από τη Γη, σε (κατά προσέγγιση) κυκλική τροχιά, και η απόσταση των κέντρων Γης - Σελήνης ισούται με $r_{ΓΣ}$ = 384 000 km (= 3,84 × 10^8 m). Η απόσταση $r_{ΓΣ}$ είναι περίπου 60 φορές μεγαλύτερη από την ακτίνα της Γης $R_Γ$:

$$\frac{r_{ΓΣ}}{R_Γ} = \frac{384\,000\ \text{km}}{6\,370\ \text{km}} \cong 60$$

Ερώτηση

Ποιό είναι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας της Γης, σε απόσταση από το κέντρο της Γης ίση με $r_{ΓΣ}$;



Η **κεντρομόλος δύναμη**, που δρά στη Σελήνη, είναι η **βαρυτική έλξη** της Γης στη Σελήνη. Εξισώνοντας τις δύο δυνάμεις, βρίσκουμε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας της Γης σε απόσταση $r_{ΓΣ}$ από το κέντρο της Γης, ισούται με την κεντρομόλο επιτάχυνση της Σελήνης:

$$m_Σ\, g(r_{ΓΣ}) = m_Σ\left|\vec{α}_Κ\right| \Rightarrow g(r_{ΓΣ}) = \left|\vec{α}_Κ\right| = ω_Σ^2 r_{ΓΣ}$$

όπου $ω_Σ$ είναι η γωνιακή ταχύτητα της Σελήνης.

Προσοχή

Όταν ένα σώμα **Β** εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση υπό την επίδραση μόνο της βαρυτικής έλξης από ένα σώμα **Α**, η κεντρομόλος επιτάχυνση του **Β** ισούται με την επιτάχυνση της βαρύτητας λόγω του **Α**. **Αυτό το αποτέλεσμα είναι βασικό**, και θα το χρησιμοποιούμε συχνά στο παρόν Κεφάλαιο.

Επειδή η Σελήνη συμπληρώνει μία πλήρη περιφορά γύρω από τη Γη σε $T = 27{,}3$ ημέρες, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητάς της είναι:

$$ω_Σ = \frac{2π}{T} = \frac{2π\ \text{rad}}{27{,}3\ \text{days}} \times \frac{1\ \text{day}}{24\ \text{h}} \times \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} = 0{,}00000266\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 2{,}66 \times 10^{-6}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Άρα, **η επιτάχυνση της βαρύτητας της Γης**, σε απόσταση $r_{ΓΣ}$ από το κέντρο της Γης, έχει μέτρο:

$$g(r_{ΓΣ}) = \omega_Σ^2 r_{ΓΣ} = (2{,}66)^2 \times 10^{-12}\,\text{rad}^2/\text{s}^2 \times (3{,}84 \times 10^8\,\text{m}) = (2{,}66)^2 \times 3{,}84 \times 10^{-4}\,\text{m/s}^2 = 2{,}72 \times 10^{-3}\,\text{m/s}^2$$

Η τιμή $g(r_{ΓΣ})$ είναι περίπου 3600 φορές **μικρότερη** από την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης:

$$\frac{g(R_Γ)}{g(r_{ΓΣ})} = \frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{2{,}72 \times 10^{-3}\,\text{m/s}^2} \cong 3\,600 = 60^2$$

Συγκρίνοντας με τον λόγο $r_{ΓΣ}/R_Γ = 60$ οδηγούμαστε στο συμπέρασμα:

$$g(R_Γ)/g(r_{ΓΣ}) = (r_{ΓΣ}/R_Γ)^2 \Rightarrow g(r_{ΓΣ}) \propto 1/r_{ΓΣ}^2$$

Άρα, **η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης από το κέντρο της Γης.**

Σύμφωνα με τον Νεύτωνα, η συμπεριφορά αυτή πρέπει να **περιγράφει γενικά** την παγκόσμια έλξη μεταξύ δύο σωμάτων, που μπορούν να θεωρηθούν ως υλικά σημεία. Δηλαδή:

Συμπέρασμα 4
Το μέτρο της δύναμης παγκόσμιας έλξης μεταξύ δύο σωμάτων **Α** και **Β**, που μπορούν να θεωρηθούν ως υλικά σημεία, είναι **αντιστρόφως ανάλογο** με το **τετράγωνο της μεταξύ τους απόστασης**:

$$\left|\vec{F}_{Α\to Β}\right| = \left|\vec{F}_{Β\to Α}\right| \propto \frac{1}{r_{ΑΒ}^2}$$

Γενική μορφή του Νόμου Παγκόσμιας Έλξης

Συνδυάζοντας τα συμπεράσματα **1**, **3** και **4**, καταλήγουμε στον γενικό **Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης**, που περιγράφει τις βαρυτικές ελκτικές δυνάμεις μεταξύ οποιωνδήποτε σωμάτων:

Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης

Το μέτρο των δυνάμεων παγκόσμιας έλξης μεταξύ δύο σωμάτων **Α** και **Β**, που μπορούν να θεωρηθούν υλικά σημεία, είναι ανάλογο με το γινόμενο των μαζών των **Α** και **Β**, και **αντιστρόφως ανάλογο με το τετράγωνο της μεταξύ τους απόστασης**:

$$\left|\vec{F}_{A\to B}\right| = \left|\vec{F}_{B\to A}\right| = G\frac{m_A m_B}{r_{AB}^2}$$

Οι δυνάμεις αυτές είναι ελκτικές και δρουν στην ευθεία που ενώνει τα δύο υλικά σημεία.

Η σταθερά G ονομάζεται **σταθερά της παγκόσμιας έλξης** και εκφράζεται σε μονάδες $\frac{N \times m^2}{kg^2}$.

Η τιμή της ισούται με $G = 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{N \times m^2}{kg^2}$ και εκφράζει το μέτρο της δύναμης παγκόσμιας έλξης ανάμεσα σε δύο υλικά σημεία με μάζες $m_A = m_B = 1kg$, όταν αυτά απέχουν μεταξύ τους κατά 1 m:

$$\left|\vec{F}_{A\to B}\right| = \left|\vec{F}_{B\to A}\right| = \left(6{,}67 \times 10^{-11} \frac{N \times m^2}{kg^2}\right)\frac{(1\ kg) \times (1\ kg)}{(1m)^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N$$

Σημείωση

Στην εφαρμογή του Νόμου Παγκόσμιας Έλξης, θα θεωρούμε ότι κάθε σώμα με φυσιολογικές (όχι ουράνιες) διαστάσεις προσεγγίζεται σαν **υλικό σημείο**, και κάθε **σφαιρικό** ουράνιο σώμα σαν **υλικό σημείο, που συμπίπτει με το κέντρο του.** Για παράδειγμα, στη μελέτη της έλξης μεταξύ ενός δορυφόρου και της Γης, θα προσεγγίζουμε τον δορυφόρο σαν υλικό σημείο, και τη Γη σαν υλικό σημείο τοποθετημένο στο κέντρο της.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

5.1.2. Πώς μεταβάλλεται η παγκόσμια έλξη μεταξύ σωμάτων (στην προσέγγιση υλικού σημείου), εάν **(α)** διπλασιασθεί η μάζα κάθε σώματος, **(β)** διπλασιασθεί η μεταξύ τους απόσταση.

ΕΝΘΕΤΟ: Επαλήθευση του Νόμου Παγκόσμιας Έλξης

Για να επιβεβαιώσουμε ότι ο Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης ισχύει γενικά, **πρέπει να ελέγξουμε εάν περιγράφει σωστά τις ελκτικές δυνάμεις μεταξύ και άλλων σωμάτων.** Θα υπολογίσουμε τις δυνάμεις παγκόσμιας έλξης ανάμεσα στον Ήλιο και σε πλανήτες του Ηλιακού συστήματος, από **αστρονομικά δεδομένα** για την κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο, που περιλαμβάνονται στον **Πίνακα 1.**

Πίνακας 1
Αστρονομικά Δεδομένα για την Κίνηση των Πλανητών του Ηλιακού Συστήματος γύρω από τον Ήλιο.

Πλανήτης (Π)	**Περίοδος** T_{Π} **(ημέρες)**	**Τετράγωνο Γωνιακής Ταχύτητας** $\omega_{\Pi}^2 = (2\pi/T_{\Pi})^2$ (rad/s)^2	**Μέση Ακτίνα περιφοράς** $r_{H\Pi}$ (m)	**Κεντρομόλος Επιτάχυνση** $\lvert\vec{\alpha}_{K\Pi}\rvert = \omega_{\Pi}^2 r_{H\Pi}$ (m/s^2)	$\dfrac{\lvert\vec{\alpha}_{K\Gamma\eta\varsigma}\rvert}{\lvert\vec{\alpha}_{K\Pi}\rvert}$	$\left(\dfrac{r_{H\Pi}}{r_{H\Gamma\eta\varsigma}}\right)^2$
Αφροδίτη	225	$1{,}0 \times 10^{-13}$	$1{,}1 \times 10^{11}$	$1{,}1 \times 10^{-2}$	0,5	0,5
Γη	365	$4{,}0 \times 10^{-14}$	$1{,}5 \times 10^{11}$	$6{,}0 \times 10^{-3}$	1	1
Άρης	687	$1{,}1 \times 10^{-14}$	$2{,}3 \times 10^{11}$	$2{,}5 \times 10^{-3}$	2,4	2,4
Δίας	4333	$2{,}8 \times 10^{-16}$	$7{,}8 \times 10^{11}$	$2{,}2 \times 10^{-4}$	27	
Κρόνος	10759	$4{,}6 \times 10^{-17}$	$1{,}4 \times 10^{12}$	$6{,}4 \times 10^{-5}$	94	
Ποσειδώνας	60182	$1{,}5 \times 10^{-18}$	$4{,}5 \times 10^{12}$	$6{,}8 \times 10^{-6}$	880	

Κάθε πλανήτης **Π** ολοκληρώνει μία περιφορά γύρω από τον Ήλιο σε χρόνο ίσο με την περίοδο T_{Π}. Δεχόμαστε, κατά προσέγγιση, ότι κάθε πλανήτης κινείται σε **κυκλική** τροχιά γύρω από τον Ήλιο, με **σταθερή** γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_{\Pi} = (2\pi)/T_{\Pi}$, και ακτίνα $r_{H\Pi}$ τη μέση απόσταση Ήλιου - πλανήτη.

Η δύναμη παγκόσμιας έλξης από τον Ήλιο στον πλανήτη **Π** επενεργεί ως κεντρομόλος δύναμη, $\vec{F}_{H\to\Pi} = \vec{F}_{K\Pi}$, και κινεί τον πλανήτη με κεντρομόλο επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{K\Pi}$. Εάν ο Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης ισχύει, το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης θα εξαρτάται αντιστρόφως ανάλογα από το τετράγωνο της απόστασης $r_{H\Pi}$:

$$\lvert\vec{F}_{K\Pi}\rvert = \lvert\vec{F}_{H\to\Pi}\rvert \Rightarrow m_{\Pi}\lvert\vec{\alpha}_{K\Pi}\rvert = G\frac{M_H m_{\Pi}}{r_{H\Pi}^2} \Rightarrow \lvert\vec{\alpha}_{K\Pi}\rvert = G\frac{M_H}{r_{H\Pi}^2}$$

Άρα, ο λόγος του μέτρου της κεντρομόλου επιτάχυνσης **της Γης** προς το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης **ενός πλανήτη Π** πρέπει να ισούται με:

$$\lvert\vec{\alpha}_{K\Gamma}\rvert / \lvert\vec{\alpha}_{K\Pi}\rvert = r_{H\Pi}^2 / r_{H\Gamma}^2$$

Τα μέτρα των κεντρομόλων επιταχύνσεων των διαφόρων πλανητών (5η στήλη του Πίνακα 1) **υπολογίζονται από τα αστρονομικά δεδομένα**. Για παράδειγμα, η γωνιακή ταχύτητα της Αφροδίτης είναι

$$\omega_A = \frac{2\pi}{T_A} = \frac{2\pi}{(225 \text{ days}) \times (86\,400 \text{ s/day})} = 3{,}23 \times 10^{-7}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Επειδή η μέση απόσταση Αφροδίτης - Ήλιου είναι $r_{HA} = 1{,}1 \times 10^{11}$ m, η κεντρομόλος επιτάχυνση της Αφροδίτης ισούται με:

$$\left|\vec{\alpha}_{KA}\right| = \omega_A^2 r_{HA} = \left(3{,}23 \times 10^{-7}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \times (1{,}1 \times 10^{11}\text{ m}) = 1{,}1 \times 10^{-2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ο αντίστοιχος υπολογισμός για τη Γη δίνει:

$$\omega_\Gamma = \frac{2\pi}{T_\Gamma} = \frac{2\pi}{(365\text{ days}) \times (86\,400\text{ s/day})} = 1{,}99 \times 10^{-7}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \text{και}$$

$$\left|\vec{\alpha}_{K\Gamma}\right| = \omega_\Gamma^2 r_{H\Gamma} = \left(1{,}99 \times 10^{-7}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \times (1{,}5 \times 10^{11}\text{ m}) = 6{,}0 \times 10^{-3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ο λόγος των επιταχύνσεων της Γης και Αφροδίτης ισούται με

$$\left|\vec{\alpha}_{K\Gamma}\right| / \left|\vec{\alpha}_{KA}\right| = (6{,}0 \times 10^{-3})/(1{,}1 \times 10^{-2}) = 0{,}5$$

Ο λόγος των τετραγώνων των αποστάσεών τους από τον Ήλιο είναι:

$$r_{HA}^2 / r_{H\Gamma}^2 = (1{,}1 \times 10^{11})^2/(1{,}5 \times 10^{11})^2 = (0{,}73)^2 = 0{,}5$$

Οι δύο λόγοι είναι ίσοι, σε συμφωνία με τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης:

$$\left|\vec{\alpha}_{K\Gamma}\right| / \left|\vec{\alpha}_{KA}\right| = r_{HA}^2 / r_{H\Gamma}^2 = 0{,}5$$

Άσκηση

Να συμπληρώσετε τα κενά του **Πίνακα 1** και να επαληθεύσετε ότι ο Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης ικανοποιείται και για τις έλξεις των πιο απομακρυσμένων πλανητών. (Μικρές ασυμφωνίες οφείλονται στις παραδοχές που κάναμε για κίνηση σε κυκλική τροχιά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα).

Παράδειγμα 1

Δύναμη Παγκόσμιας Έλξης μεταξύ δύο Ανθρώπων

Δύο αστροναύτες βρίσκονται στο διάστημα, σε απόσταση $r = 5{,}00$ m μεταξύ τους. Η συνολική μάζα κάθε αστροναύτη (μαζί με τη διαστημική στολή του) είναι 250,0 kg.

Θα υπολογίσουμε το μέτρο της δύναμης παγκόσμιας έλξης, που ασκείται από τον έναν αστροναύτη στον άλλο, υποθέτοντας ότι οι αστροναύτες μπορούν να προσεγγισθούν ως υλικά σημεία. Από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης:

$$\left|\vec{F}\right| = \left[6{,}67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \times \text{m}^2}{\text{kg}^2}\right] \times \frac{(250{,}0\ \text{kg})^2}{(5{,}00\ \text{m})^2} = \frac{6{,}67 \times (25{,}0)^2 \times 10^2}{25{,}0} \times 10^{-11}\ \text{N} = 1{,}67 \times 10^{-7}\ \text{N}$$

Η δύναμη αυτή είναι πολύ μικρή. Η επιτάχυνση που προσδίδει σε κάθε αστροναύτη έχει μέτρο $\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{F}\right|/m = 0{,}67 \times 10^{-9}\ \text{m/s}^2$.

Προσοχή

Στα προβλήματα Παγκόσμιας Έλξης απαιτούνται υπολογισμοί με αριθμούς που περιέχουν δυνάμεις του 10. Σας **συστήνουμε** να συγκεντρώνετε στο τέλος κάθε έκφρασης τις δυνάμεις του 10, και να κάνετε **ξεχωριστά** τις πράξεις μεταξύ τους, **όπως στα παραδείγματα του βιβλίου**.

Παράδειγμα 2

Δύναμη Παγκόσμιας Έλξης μεταξύ των Συστατικών του Πυρήνα των Ατόμων

Το πρωτόνιο και το νετρόνιο είναι συστατικά σωματίδια του πυρήνα των ατόμων, και έχουν μάζες $m_p = 1{,}6726 \times 10^{-27}$ kg και $m_n = 1{,}6749 \times 10^{-27}$ kg αντίστοιχα. Η τυπική απόσταση πρωτονίου - νετρονίου είναι συγκρίσιμη με τη διάσταση του πυρήνα του ατόμου, ($\approx 10^{-15}$ m). Να υπολογίσετε την δύναμη παγκόσμιας έλξης μεταξύ ενός πρωτονίου και ενός νετρονίου, που απέχουν μεταξύ τους κατά $r = 1{,}0 \times 10^{-15}$ m.

$$\left|\vec{F}\right| = \left[6{,}67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \times \text{m}^2}{\text{kg}^2}\right] \times \frac{(1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg}) \times (1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg})}{(1{,}0 \times 10^{-15}\ \text{m})^2} =$$

$$\frac{6{,}67 \times 1{,}67^2}{1{,}0} \times 10^{-35} \frac{\text{N} \times \text{m}^2}{\text{kg}^2} \times \frac{\text{kg}^2}{\text{m}^2} = 1{,}9 \times 10^{-34}\ \text{N}$$

Παράδειγμα 3

Δύναμη Παγκόσμιας Έλξης Ήλιου - Γης

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη ζητούμενη δύναμη, χρησιμοποιώντας ως δεδομένα ότι οι μάζες της Γης και του Ήλιου είναι ίσες με $M_\Gamma = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg και $M_H = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg αντίστοιχα, και η απόσταση Ήλιου - Γης ισούται με $1{,}5 \times 10^{11}$ m.

Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι η δύναμη παγκόσμιας έλξης $\vec{F}_{H \to \Gamma}$, από τον Ήλιο στη Γη, επενεργεί στη Γη ως κεντρομόλος δύναμη $\vec{F}_{K\Gamma}$. Όπως φαίνεται από τον **Πίνακα 1**, η κεντρομόλος επιτάχυνση της Γης ισούται με $\left|\vec{\alpha}_{K\Gamma}\right| = 6{,}0 \times 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Η μάζα της Γης ισούται με $M_\Gamma = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg. Συνεπώς, ο Ήλιος ασκεί στη Γη δύναμη παγκόσμιας έλξης μέτρου:

$$\left|\vec{F}_{\text{Η→Γ}}\right| = \left|\vec{F}_{\text{ΚΓ}}\right| = M_{\Gamma}\left|\vec{\alpha}_{\text{ΚΓ}}\right| = (6{,}0 \times 10^{24}\ \text{kg}) \times (6{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m/s}^2) = 3{,}6 \times 10^{22}\ \text{N}$$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

5.1.3. Να εισαγάγετε τις μάζες Ήλιου και Γης και την απόσταση Ήλιου-Γης στο Νόμο Παγκόσμιας Έλξης, και να επιβεβαιώσετε το πιο πάνω αποτέλεσμα.

Από τα **Παραδείγματα 1-3** είναι φανερό ότι οι βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ σωμάτων με συνηθισμένες μάζες είναι **εξαιρετικά ασθενείς**. Για να γίνουν σημαντικές, χρειάζεται τουλάχιστον ένα από τα σώματα να έχει συγκρίσιμη μάζα με αυτή ενός ουράνιου σώματος.

5.2. Η Βαρυτική Δύναμη είναι Δύναμη από Απόσταση

Από τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης, προκύπτει ότι η βαρυτική έλξη μεταξύ δύο σωμάτων γίνεται αισθητή **από απόσταση**. Το μέτρο της βαρυτικής έλξης ελαττώνεται καθώς μεγαλώνει η απόσταση μεταξύ των σωμάτων, και μηδενίζεται όταν γίνει άπειρη. Όμως, ακόμα και σε μεγάλες αποστάσεις, η βαρυτική έλξη μεταξύ δύο σωμάτων μπορεί να είναι σημαντική.

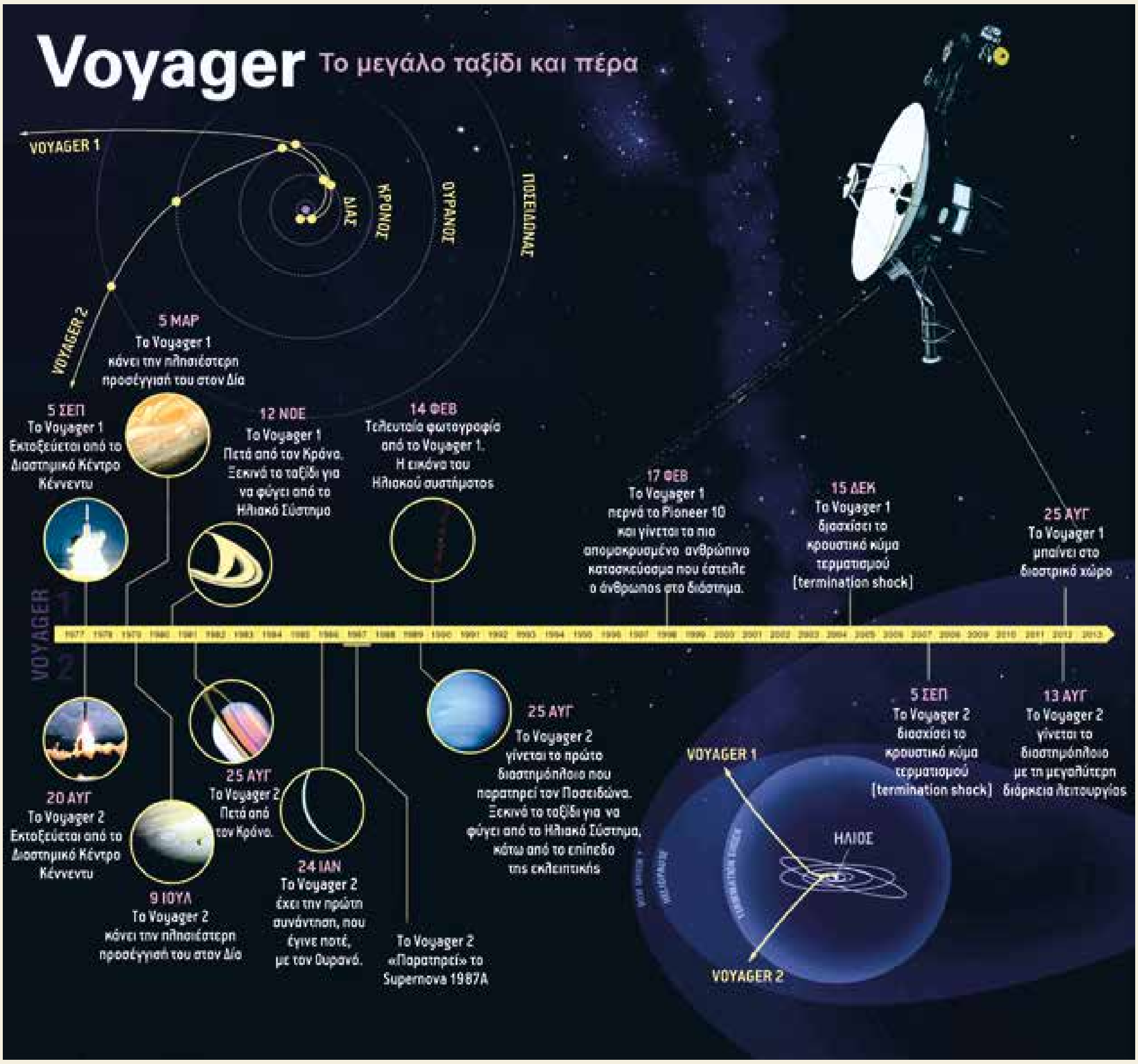
Παράδειγμα

Δύναμη Παγκόσμιας Έλξης, που δρα από τον Ήλιο στο διαστημόπλοιο Voyager 1

Το διαστημόπλοιο Voyager 1 εκτοξεύθηκε στις 5 Σεπτεμβρίου 1977, με στόχο να εξερευνήσει τον Δία και τον Κρόνο, και τελικά να εξέλθει στον διαστρικό χώρο. Αυτή τη στιγμή έχει περάσει τα όρια του Ηλιακού Συστήματος, βρίσκεται σε απόσταση 20,4 δισεκατομμύρια χιλιόμετρα (= $20{,}4 \times 10^{12}$ m = 137 AU) από τον Ήλιο, και απομακρύνεται με ταχύτητα 17 km/s. Το Voyager 1 μεταφέρει οπτικοακουστικό υλικό από τη Γη, με την ελπίδα ότι κάποτε θα συναντήσει έναν εξωγήινο πολιτισμό.

Το Voyager 1 έχει μάζα 720 kg. Η βαρυτική έλξη που δρά αυτή τη στιγμή από τον Ήλιο στο Voyager 1 έχει μέτρο:

$$\left|\vec{F}\right| = G\frac{M_{\text{H}} M_{\text{V}}}{r^2} = \left(6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{\text{N} \times \text{m}^2}{\text{kg}^2}\right) \times \frac{(2{,}0 \times 10^{30}\ \text{kg}) \times (720\ \text{kg})}{(20{,}4 \times 10^{12}\ \text{m})^2} =$$



$$\frac{6{,}67 \times 2{,}0 \times 720}{(20{,}4)^2} \times 10^{-5}\ \text{N} = 2{,}3 \times 10^{-4}\ \text{N}$$

Η δύναμη αυτή είναι παρόμοια με το βάρος μίας μύγας στην επιφάνεια της Γης. Να **παρατηρήσετε** ότι, παρά την τεράστια απόσταση που χωρίζει το Voyager 1 από τον Ήλιο, η δύναμη παγκόσμιας έλξης μεταξύ τους **δεν** είναι μηδαμινή.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την αποστολή Voyager 1, μπορείτε να περιηγηθείτε στην ιστοσελίδα της NASA: ***http://voyager.jpl.nasa.gov/index.html***

Στην ιστοσελίδα ***http://voyager.jpl.nasa.gov/where/index.html*** καταγράφεται συνεχώς η απόσταση του Voyager 1 από τον Ήλιο και τη Γη.

Στις 14 Φεβρουαρίου 1990, το Voyager 1 έστειλε τη διπλανή φωτογραφία της Γης (μικρή κουκκίδα μέσα στον κύκλο) από απόσταση 6 δισεκατομμύρια χιλιόμετρα. Η φωτογραφία είναι γνωστή ως **«pale**

blue dot» (αχνή γαλάζια τελεία) και αποτέλεσε το θέμα βιβλίου του διάσημου αστρονόμου Carl Sagan.
https://en.wikipedia.org/wiki/Pale_Blue_Dot

Μπορείτε να ακούσετε μία αφήγηση αποσπάσματος του βιβλίου (με υπότιτλους) στην ιστοσελίδα
https://www.youtube.com/watch?v=n5khU_6o7lc

5.3. Επιτάχυνση της Βαρύτητας

Από τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης προκύπτει ότι το μέτρο της ελκτικής δύναμης, που δρα από ένα ουράνιο σώμα **A** σε ένα σώμα **B**, γράφεται ως:

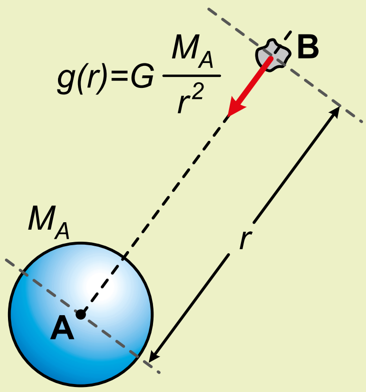
$$\left|\vec{F}_{A\to B}\right| = m_B\left[G\frac{M_A}{r^2}\right] = m_B g(r)$$

όπου r είναι η απόσταση του **B** από το κέντρο του **A**. Από αυτή τη σχέση, οδηγούμαστε στον εξής ορισμό για την επιτάχυνση της βαρύτητας:

Επιτάχυνση της Βαρύτητας λόγω του Ουράνιου Σώματος A.

Έστω ένα σώμα **B** εκτελεί ελεύθερη πτώση υπό τη βαρυτική έλξη του ουράνιου σώματος **A**. Όταν βρίσκεται σε απόσταση r από το κέντρο του **A**, θα έχει επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας λόγω του **A**. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι **διάνυσμα**, με διεύθυνση την ευθεία που ενώνει το A με το κέντρο του B, φορά προς το A, και μέτρο:

$$g(r) = G\frac{M_A}{r^2}$$



Για ένα σώμα, που εκτελεί ελεύθερη πτώση υπό την έλξη της Γης:

$g(r) = G\frac{M_\Gamma}{r^2}$ όπου M_Γ είναι η μάζα της Γης, και r είναι η απόσταση από το κέντρο της Γης.

Προσοχή

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας λόγω της Γης εξαρτάται από τη μάζα της Γης, αλλά **δεν εξαρτάται** από τη μάζα του επιταχυνόμενου σώματος. **Όλα τα σώματα εκτελούν ελεύθερη πτώση με την ίδια επιτάχυνση της βαρύτητας.**

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

5.3.1. Εάν εκτελέσουμε πειράματα ελεύθερης πτώσης σε ένα σημείο της επιφάνειας του Άρη, θα παρατηρήσουμε ότι όλα τα σώματα πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση της βαρύτητας, ανεξαρτήτως μάζας;

Παράδειγμα 1

Επιτάχυνση της Βαρύτητας στην Επιφάνεια της Γης

Η μάζα της Γης ισούται με $M_\Gamma = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg και η μέση ακτίνα της Γης ισούται με $6{,}37 \times 10^3$ km. Συνεπώς, η επιτάχυνση της βαρύτητας λόγω της Γης, σε απόσταση ίση με τη μέση ακτίνα της Γης, ισούται με:

$$g(r = R_\Gamma) = G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} = \left[6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N} \times \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\right] \times \frac{5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(6{,}37 \times 10^6\,\mathrm{m})^2} = \frac{6{,}67 \times 5{,}97}{(6{,}37)^2} \times 10^1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Αυτό το αποτέλεσμα αντιστοιχεί στην τιμή g που χρησιμοποιούμε.

5.4. Το Βάρος ενός Σώματος

Από τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης, συμπεραίνουμε ότι το μέτρο του βάρους ενός σώματος, που βρίσκεται σε απόσταση $r_{\Gamma\Sigma}$ από το κέντρο της Γης, ισούται με:

$$\left|\vec{B}\right| = m\; g(r_{\Gamma\Sigma}) = m\left[G\frac{M_\Gamma}{r_{\Gamma\Sigma}^2}\right]$$

όπου $g(r_{\Gamma\Sigma})$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

5.5 Υπολογισμός της Μάζας Ουρανίων Σωμάτων

Χρησιμοποιώντας τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης, οι επιστήμονες **υπολογίζουν τη μάζα των διαφόρων ουρανίων σωμάτων.**

Παράδειγμα 1

Υπολογισμός της Μάζας της Γης από την Επιτάχυνση της Βαρύτητας

Έστω ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι γνωστή σε κάποια τοποθεσία από πειραματικές μετρήσεις (π.χ. από πειράματα κίνησης). Ξεκινούμε από την έκφραση του Νόμου Παγκόσμιας Έλξης για την επιτάχυνση της βαρύτητας, και λύνουμε ως προς τη μάζα της Γης:

$$g = G\frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2} \Rightarrow M_{\Gamma} = \frac{gR_{\Gamma}^2}{G}$$

Η σταθερά G της παγκόσμιας έλξης έχει προσδιορισθεί από πειράματα ισορροπίας δυνάμεων, όπως το πείραμα του Cavendish (επόμενο Ένθετο), και ο μόνος άγνωστος είναι η μάζα της Γης. Αντικαθιστώντας τις τιμές $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $(\text{N} \times \text{m}^2)/\text{kg}^2$, $R_{\Gamma} = 6\,370$ km και $g = 9{,}81$ m/s^2, προσδιορίζουμε την εξής τιμή για τη μάζα της Γης:

$$M_{\Gamma} = \frac{gR_{\Gamma}^2}{G} = \frac{(9{,}81\ \text{m/s}^2) \times (6{,}37 \times 10^6\ \text{m})^2}{6{,}67 \times 10^{-11}\ (\text{N} \times \text{m}^2)/\text{kg}^2} = \frac{9{,}81 \times (6{,}37)^2 \times 10^{12}}{6{,}67 \times 10^{-11}} \frac{\text{m}^3/\text{s}^2}{(\text{N} \times \text{m}^2)/\text{kg}^2} = 5{,}97 \times 10^{24}\ \text{kg}$$

Παράδειγμα 2

Υπολογισμός της Μάζας του Ήλιου από τα Αστρονομικά Δεδομένα για την Κίνηση της Γης

Προσεγγίζουμε την τροχιά της Γης σαν κυκλική, με κέντρο τον Ήλιο. Η απαιτούμενη κεντρομόλος δύναμη στη Γη είναι η δύναμη παγκόσμιας έλξης από τον Ήλιο (αγνοούμε δυνάμεις στη Γη από άλλα ουράνια σώματα). Εξισώνουμε την δύναμη παγκόσμιας έλξης με την κεντρομόλο δύναμη, και υπολογίζουμε την κεντρομόλο επιτάχυνση της Γης:

$$\left|\vec{F}_{\text{H}\to\Gamma}\right| = \left(G\frac{M_{\text{H}}}{r_{\text{H}\Gamma}^2}\right)M_{\Gamma} = M_{\Gamma}\left|\vec{\alpha}_{\text{K}\Gamma}\right| \Rightarrow \left|\vec{\alpha}_{\text{K}\Gamma}\right| = G\frac{M_{\text{H}}}{r_{\text{H}\Gamma}^2}$$

Η τελευταία εξίσωση λύνεται ως προς τη μάζα του ήλιου:

$$M_{\text{H}} = \frac{\left|\vec{\alpha}_{\text{K}\Gamma}\right| r_{\text{H}\Gamma}^2}{G}$$

Από τον **Πίνακα 1**, βλέπουμε ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση, με την οποία κινείται η Γη γύρω από τον Ήλιο, έχει μέτρο $|\vec{\alpha}_{ΚΓ}| = 6{,}0 \times 10^{-3} \dfrac{m}{s^2}$. Η μέση απόσταση Γης - Ήλιου είναι $r_{ΗΓ} = 150\,000\,000$ km = $1{,}5 \times 10^{11}$ m.

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε:

$$M_Η = \left(6{,}0 \times 10^{-3} \frac{m}{s^2}\right) \times \frac{(1{,}5 \times 10^{11}\ m)^2}{6{,}67 \times 10^{-11}\ (N \times m^2)/kg^2} = \frac{6{,}0 \times 1{,}5^2}{6{,}67} \times 10^{30} \frac{kg^2 \times m}{N \times s^2} = 2{,}0 \times 10^{30}\ kg$$

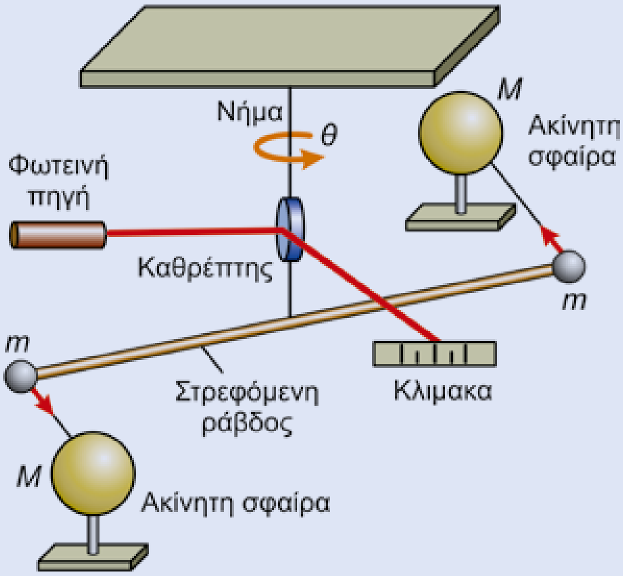
Η ακριβής τιμή είναι $M_Η = 1{,}989 \times 10^{30}$ kg.

ΕΝΘΕΤΟ: Μέτρηση της Σταθεράς της Παγκόσμιας Έλξης με τον Ζυγό του Cavendish

Ο **Henry Cavendish** (1731 - 1810) ήταν σπουδαίος Βρεττανός Φυσικός και Χημικός, ο οποίος ανακάλυψε το υδρογόνο, μελέτησε τη σύσταση του αέρα και τη σύνθεση του νερού, προσπάθησε να εξηγήσει τη φύση της θερμότητας, και υπολόγισε τη σταθερά της παγκόσμιας έλξης G, τη μάζα και την πυκνότητα της Γης.

Η διάταξη, που χρησιμοποίησε ο Cavendish για να μετρήσει τη σταθερά G φαίνεται σχηματικά στην επόμενη εικόνα.

Δύο μικρές μπάλες από μόλυβδο, μάζας $m = 0{,}73$ kg, είναι προσδεμένες σε μία ράβδο, που κρέμεται από ένα λεπτό νήμα και μπορεί να περιστρέφεται. Οι μικρές σφαίρες τοποθετούνται κοντά σε δύο μεγάλες ακίνητες σφαίρες από μόλυβδο, μάζας $M = 158$ kg.



Ανάμεσα στις μικρές και στις μεγάλες σφαίρες ασκούνται δυνάμεις παγκόσμιας έλξης. Οι δυνάμεις στις μικρές σφαίρες (κόκκινα βέλη) τις αναγκάζουν να προσεγγίσουν τις μεγάλες σφαίρες, προκαλώντας περιστροφή της ράβδου. Επειδή το νήμα προβάλλει αντίσταση στην περιστροφή, η ράβδος ισορροπεί σε μία νέα θέση.

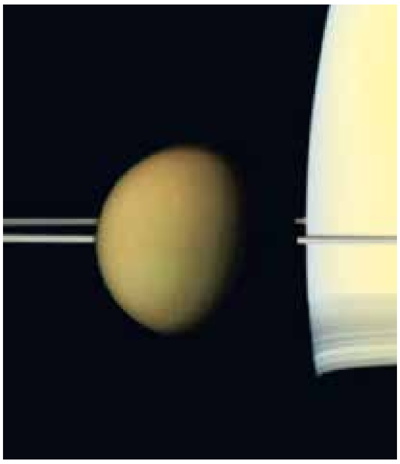
Η γωνία περιστροφής της ράβδου προσδιορίζεται από την απόκλιση μίας φωτεινής δέσμης.

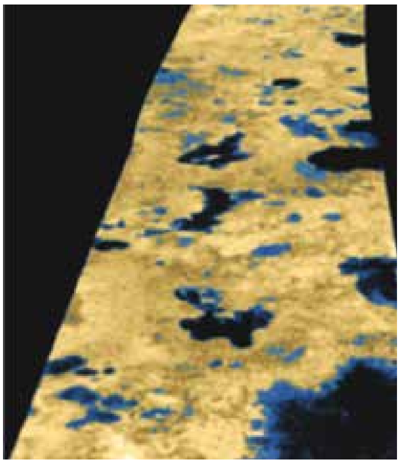
Από τη γωνία περιστροφής υπολογίζεται το **μέτρο** $|\vec{F}|$ της δύναμης παγκόσμιας έλξης ανάμεσα σε μία μικρή και μία μεγάλη σφαίρα. Επειδή οι μάζες των σφαιρών και η απόσταση μεταξύ τους είναι γνωστές, από το νόμο παγκόσμιας έλξης προσδιορίζεται η σταθερά G.

Η τιμή, που υπολόγισε ο Cavendish, ήταν $6{,}74 \times 10^{-11}\ \frac{N \times m^2}{kg^2}$, μόλις κατά 1% διαφορετική από τη σύγχρονη εκτίμηση ($6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{N \times m^2}{kg^2}$). Από την τιμή του G, ο Cavendish υπολόγισε επίσης τη μάζα και την πυκνότητα της Γης.

5.6. Φυσικοί και Τεχνητοί Δορυφόροι

Φυσικός δορυφόρος ονομάζεται κάθε φυσικό ουράνιο σώμα, που περιφέρεται γύρω από έναν πλανήτη[1]. Γύρω από τους πλανήτες του Ηλιακού συστήματος έχουν ανακαλυφθεί 173 δορυφόροι. Ο πιο γνωστός είναι η Σελήνη, που αποτελεί δορυφόρο της Γης. Ο πλανήτης Κρόνος έχει 62 δορυφόρους, από τους οποίους ο Τιτάνας είναι μεγαλύτερος από τον πλανήτη Ερμή.





Αριστερά: Ο δορυφόρος Τιτάνας του Κρόνου. Πίσω από τον δορυφόρο διακρίνονται οι δακτύλιοι και μέρος του πλανήτη Κρόνου. **Δεξιά:** Στην κρύα επιφάνεια του Τιτάνα υπάρχουν λίμνες από υγρό μεθάνιο και αιθάνιο.

[1] Δορυφόρος στην αρχαιότητα ονομαζόταν ο σωματοφύλακας ενός αξιωματούχου, επειδή **έφερε** (κρατούσε) **δόρυ**.

Κάτω: Ο δορυφόρος Ευρώπη ανατέλλει πάνω από τον ορίζοντα του Δία (η εικόνα λήφθηκε το 2007 από το διαστημόπλοιο New Horizons).

Ο πλανήτης Δίας έχει 67 φυσικούς δορυφόρους, από τους οποίους οι τέσσερεις (Ιώ, Ευρώπη, Γανυμήδης και Καλλιστώ) ανακαλύφθηκαν από τον Γαλιλαίο. Οι δορυφόροι αυτοί έχουν αρκετά μεγάλο μέγεθος, ώστε εάν περιφέρονταν γύρω από τον Ήλιο θα χαρακτηρίζονταν ως πλανήτες.

Η διαστημική οβίδα Juno (Ηρα) προσέγγισε τον πλανήτη Δία το καλοκαίρι του 2016, και έστειλε στη Γη εικόνες από την περιφορά αυτών των δορυφόρων γύρω από τον Δία. Μπορείτε να δείτε το σχετικό video στην ιστοσελίδα:
http://www.space.com/33350-nasa-juno-jupiter-moons-video.html

Εξάρτηση της Περιόδου Περιφοράς ενός Δορυφόρου από την Ακτίνα της Κυκλικής Τροχιάς.

Χρησιμοποιώντας τους νόμους της κυκλικής κίνησης, εξάγουμε μία σχέση ανάμεσα στην **περίοδο περιφοράς** ενός δορυφόρου και την ακτίνα της τροχιάς του.

Ένας δορυφόρος κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_Δ, σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_Δ γύρω από ένα ουράνιο σώμα μάζας M. Η κεντρομόλος επιτάχυνση του δορυφόρου ισούται με την επιτάχυνση της βαρύτητας λόγω του ουράνιου σώματος:

$$\omega_\Delta^2 r_\Delta = G\frac{M}{r_\Delta^2} \Rightarrow \omega_\Delta^2 = G\frac{M}{r_\Delta^3}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση γωνιακής ταχύτητας - περιόδου, εξάγουμε τις εξής σχέσεις ανάμεσα στην περίοδο $T_\Delta = 2\pi/\omega_\Delta$ και την ακτίνα της τροχιάς:

Σχέση Ακτίνας - Περιόδου Περιφοράς Δορυφόρου

$$\left(\frac{2\pi}{T_\Delta}\right)^2 = G\frac{M}{r_\Delta^3} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T_\Delta^2} = G\frac{M}{r_\Delta^3} \Rightarrow r_\Delta^3 = \frac{GM}{4\pi^2}T_\Delta^2 \text{ , ή ισοδύναμα } T_\Delta^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r_\Delta^3$$

Συμπεραίνουμε ότι **το τετράγωνο της περιόδου περιφοράς ενός δορυφόρου είναι ανάλογο με τον κύβο της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς του.**

Να παρατηρήσετε ότι:

(1) Η μάζα του δορυφόρου **δεν** εισέρχεται στις πιο πάνω σχέσεις ακτίνας - περιόδου περιφοράς. Δορυφόροι **διαφορετικής μάζας** περιφέρονται στην ίδια τροχιά με την ίδια περίοδο, γύρω από το ίδιο ουράνιο σώμα, μάζας M.

(2) Η **περίοδος περιφοράς** ενός δορυφόρου **αυξάνεται** (και η γωνιακή ταχύτητα ελαττώνεται), όταν βρίσκεται σε τροχιά **μεγαλύτερης ακτίνας.** Αυτό συμβαίνει επειδή η κεντρομόλος επιτάχυνση του δορυφόρου, $\omega_\Delta^2 r_\Delta$, ισούται με την επιτάχυνση της βαρύτητας, η οποία **ελαττώνεται** με την απόσταση του δορυφόρου από το ουράνιο σώμα.

(3) Για τον ίδιο λόγο, η **περίοδος περιφοράς** του δορυφόρου αυξάνεται (για σταθερή τροχιά), εάν **ελαττωθεί η μάζα** M του κεντρικού ουράνιου σώματος.

(4) Ο λόγος $\mathrm{A} = r_\Delta^3/T_\Delta^2 = GM/(4\pi^2)$ είναι σταθερός για ένα σύνολο δορυφόρων, που περιφέρονται γύρω από το ίδιο **ουράνιο σώμα**.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

5.6.1. Δύο τεχνητοί δορυφόροι με μάζες M_1 και M_2 περιφέρονται γύρω από τη Σελήνη σε κυκλικές τροχιές της ίδιας ακτίνας.

(α) Να συγκρίνετε τις συχνότητες περιφοράς των δορυφόρων. Είναι δυνατόν να κινούνται με διαφορετικές συχνότητες;

(β) Ο ένας δορυφόρος χρησιμοποιεί τους εκτοξευτήρες του και αυξάνει ελαφρά την ταχύτητά του. Τι θα συμβεί στην ακτίνα της τροχιάς του;

(γ) Πώς πρέπει να μετακινήσουμε τους δορυφόρους, για να περιφέρονται με μικρότερη γωνιακή ταχύτητα;

Στην πραγματικότητα, και οι πλανήτες είναι δορυφόροι του Ήλιου. Στην περίπτωση των πλανητών, η σχέση ακτίνας - περιόδου γενικεύεται σε έναν από τους **νόμους του Kepler**. Επειδή οι τροχιές των πλανητών είναι ελλειπτικές, το μέγεθος r_Δ στη σχέση ακτίνας - περιόδου ενός πλανήτη ισούται με τη **μέση απόσταση** πλανήτη - Ήλιου (το ημιάθροισμα της μικρότερης και μεγαλύτερης απόστασης).

Παράδειγμα 1

Επαλήθευση της Σχέσης ανάμεσα στην Ακτίνα της Τροχιάς των Πλανητών και την Περίοδο Περιφοράς: $r_\Delta^3 \propto T_\Pi^2$

Στον **Πίνακα 1** συμπεριλάβαμε την περίοδο περιφοράς T_Π διαφόρων πλανητών γύρω από τον Ήλιο, και τη μέση απόστασή τους από τον Ήλιο, $r_{\text{ΗΠ}}$. Από τα δεδομένα μπορούμε να υπολογίσουμε για κάθε πλανήτη το πηλίκο $\mathrm{A} = r_{\text{ΗΠ}}^3 / T_{\text{Π}}^2$.

Για τη Γη βρίσκουμε $\mathrm{A} = \dfrac{(1{,}5 \times 10^{11}\ \text{m})^3}{(365\ \text{days})^2} = 2{,}5 \times 10^{28} \dfrac{\text{m}^3}{\text{days}^2}$. Για τον Άρη, ο αντίστοιχος υπολογισμός δίνει $\mathrm{A} = \dfrac{(2{,}3 \times 10^{11}\ \text{m})^3}{(687\ \text{days})^2} = 2{,}6 \times 10^{28} \dfrac{\text{m}^3}{\text{days}^2}$. Παρατηρούμε ότι το πηλίκο $\mathrm{A} = r_{\text{ΗΠ}}^3 / T_{\text{Π}}^2$ είναι σχεδόν σταθερό. Συνεπώς, **ο κύβος της ακτίνας της τροχιάς ενός πλανήτη είναι ανάλογος με το τετράγωνο της περιόδου περιφοράς του**: $r_{\text{ΗΠ}}^3 = \mathrm{A}\, T_{\text{Π}}^2$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

5.6.2. Να επιβεβαιώσετε ότι ο λόγος $r_{\text{ΗΠ}}^3 / T_{\text{Π}}^2$ είναι σταθερός για άλλους πλανήτες του **Πίνακα 1**.

Παράδειγμα 2

Χρήση της Σχέσης Ακτίνας - Περιόδου Περιφοράς για τον Υπολογισμό άγνωστης Ακτίνας Περιφοράς

Από αστρονομικές παρατηρήσεις, γνωρίζουμε ότι η περίοδος περιφοράς του πλανήτη Ποσειδώνα γύρω από τον Ήλιο είναι $T_{\text{ΗΠ}} = 60\,182$ μέρες. Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση, και **τα αστρονομικά δεδομένα για την περιφορά της Γης**, θα υπολογίσουμε την ακτίνα περιφοράς του Ποσειδώνα γύρω από τον Ήλιο.
Επειδή ο Ποσειδώνας και η Γη περιφέρονται γύρω από το ίδιο ουράνιο σώμα (τον Ήλιο), ο λόγος ακτίνας - περιόδου είναι σταθερός για τον Ποσειδώνα και τη Γη.

$$\text{Άρα: } \mathrm{A} = \frac{r_{\text{ΗΠ}}^3}{T_{\text{ΗΠ}}^2} = \frac{r_{\text{ΗΓ}}^3}{T_{\text{ΗΓ}}^2} \Rightarrow r_{\text{ΗΠ}}^3 = r_{\text{ΗΓ}}^3 \frac{T_{\text{ΗΠ}}^2}{T_{\text{ΗΓ}}^2} \Rightarrow r_{\text{ΗΠ}} = r_{\text{ΗΓ}} (T_{\text{ΗΠ}} / T_{\text{ΗΓ}})^{2/3}$$

Για τη Γη ισχύει $r_{\text{ΗΓ}} = 1$ AU και $T_{\text{ΗΓ}} = 365$ μέρες. Αντικαθιστούμε και βρίσκουμε:

$$r_{\text{ΗΠ}} = (1\ \text{AU}) \times (60\,182/365)^{2/3} = 30{,}1\ \text{AU}$$

Από αστρονομικά δεδομένα, προκύπτει ότι η **μικρότερη** και η **μεγαλύτερη** απόσταση Ποσειδώνα - Ήλιου είναι 29,8 AU και 30,3 AU, αντίστοιχα. Η μέση απόσταση (29,8 + 30,3)/2 = 30,1 AU συμφωνεί με το αποτέλεσμα που βρήκαμε.

Προσοχή

Ο λόγος $\mathrm{A} = r_{\Delta}^3 / T_{\Delta}^2$ είναι σταθερός για δορυφόρους που περιφέρονται γύρω από το **ίδιο ουρά-**

νιο σώμα. Ο λόγος $\mathrm{A} = r_{\mathrm{H\Gamma}}^3 / T_{\Gamma}^2$, που αντιστοιχεί στην περιφορά της Γης γύρω από τον Ήλιο, **δεν ισούται** με τον λόγο $\mathrm{A} = r_{\Gamma\Sigma}^3 / T_{\Sigma}^2$, που αντιστοιχεί στην περιφορά της Σελήνης γύρω από τη Γη.

Παρατήρηση

Η σχέση ακτίνας - περιόδου μπορεί να λυθεί ως προς τη μάζα του κεντρικού ουρανίου σώματος, γύρω από το οποίο περιφέρεται ο δορυφόρος:

$$r_{\Delta}^3 = \frac{GM}{4\pi^2} T_{\Delta}^2 \Rightarrow M = \frac{4\pi^2}{G} \frac{r_{\Delta}^3}{T_{\Delta}^2}.$$

Εάν γνωρίζουμε την ακτίνα και την περίοδο περιφοράς του δορυφόρου, **υπολογίζουμε τη μάζα M του κεντρικού ουράνιου σώματος**.

Παράδειγμα 3

Υπολογισμός της Μάζας του Κρόνου από τη Σχέση Ακτίνας – Περιόδου Περιφοράς ενός Δορυφόρου του

Η μέση ακτίνα περιφοράς του δορυφόρου Τιτάνα γύρω από τον Κρόνο είναι $r_{\mathrm{T}} = 1{,}22 \times 10^9$ m και η περίοδος περιφοράς του είναι 15,9 ημέρες.

Η περίοδος περιφοράς του Τιτάνα σε δευτερόλεπτα είναι:

$$15{,}9 \text{ days} \times 86\,400 \text{ s/days} = 1{,}38 \times 10^6 \text{ s}$$

Η σχέση ακτίνας - περιόδου του Τιτάνα είναι:

$$M_{\mathrm{K}} = \frac{4\pi^2}{G} \frac{r_{\mathrm{T}}^3}{T_{\mathrm{T}}^2}$$

Από αυτή τη σχέση, βρίσκουμε:

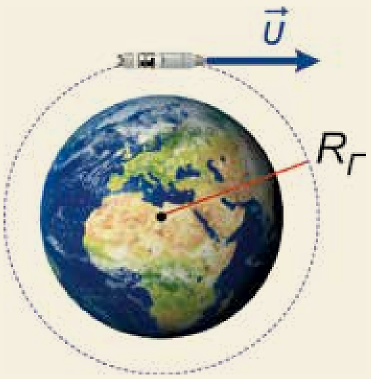
$$M_{\mathrm{K}} = \frac{4\pi^2}{G} \frac{r_{\mathrm{T}}^3}{T_{\mathrm{T}}^2} = \frac{4\pi^2 \times (1{,}22 \times 10^9 \text{ m})^3}{(6{,}67 \times 10^{-11} \text{ N} \times \text{m}^2/\text{kg}^2) \times (1{,}38 \times 10^6 \text{ s})^2} =$$

$$\frac{4\pi^2 \times (1{,}22)^3 \times 10^{26}}{6{,}67 \times (1{,}38)^2} \frac{\text{m} \times \text{kg}^2}{\text{N} \times \text{s}^2} = 5{,}68 \times 10^{26} \text{ kg}.$$

Η ακριβής τιμή της μάζας του Κρόνου είναι $M_{\mathrm{K}} = 5{,}68 \times 10^{26}$ kg.

Τεχνητοί Δορυφόροι

Εκτός από τους φυσικούς δορυφόρους, γύρω από ουράνια σώματα του Ηλιακού μας συστήματος περιφέρονται και ανθρώπινες κατασκευές. Κάθε τέτοια κατασκευή είναι **τεχνητός δορυφόρος**.



Παράδειγμα 4

Με ποιά ταχύτητα πρέπει να εκτοξεύσουμε μία ρουκέτα πολύ κοντά στην επιφάνεια της Γης και παράλληλα προς το έδαφος, έτσι ώστε να διαγράφει κυκλική κίνηση γύρω από τη Γη χωρίς επιπρόσθετη ώθηση από τη μηχανή της; (Να υποθέσετε ότι η τριβή του αέρα είναι αμελητέα, και η ρουκέτα ολοκληρώνει μία τροχιά γύρω από τη Γη χωρίς να συναντά κάποιο εμπόδιο).

Η ρουκέτα θα κινηθεί σαν **τεχνητός** δορυφόρος σε κυκλική τροχιά ακτίνας R_Γ. Από την ισότητα κεντρομόλου επιτάχυνσης - επιτάχυνσης της βαρύτητας, προκύπτει:

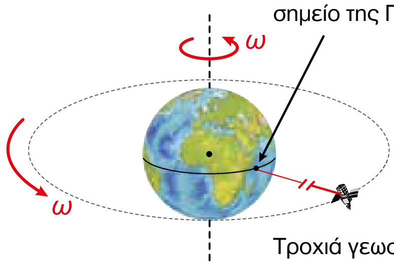
$$\omega_\Delta^2 R_\Gamma = \frac{\upsilon_\Delta^2}{R_\Gamma} = G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Rightarrow \upsilon_\Delta = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^2}R_\Gamma} = \sqrt{g(R_\Gamma)R_\Gamma}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές της επιτάχυνσης της βαρύτητας και της ακτίνας της Γης, βρίσκουμε:

$$\upsilon = \sqrt{(9{,}81\ \text{m/s}^2) \times (6{,}37 \times 10^6\ \text{m})} = 7{,}91\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Με αυτή την ταχύτητα, η περίοδος περιφοράς της ρουκέτας γύρω από τη Γη είναι:

$$\upsilon = \frac{2\pi}{T}R_\Gamma \Rightarrow T = \frac{2\pi R_\Gamma}{\upsilon} = \frac{2\pi \times 6{,}37 \times 10^6\ \text{m}}{7{,}91 \times 10^3\ \text{m/s}} = 5{,}06 \times 10^3\ \text{s} = 1{,}41\ \text{h}$$



Γεωστατικοί Τεχνητοί Δορυφόροι

Πολλοί δορυφόροι περιφέρονται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη, έτσι ώστε να βρίσκονται συνεχώς **πάνω από το ίδιο σημείο** της επιφάνειας της Γης. Οι δορυφόροι αυτοί ονομάζονται **γεωστατικοί**.

Επειδή το κέντρο της κυκλικής τροχιάς οποιουδήποτε τεχνητού δορυφόρου της Γης συμπίπτει με το κέντρο της Γης, η τροχιά ενός γεωστατικού δορυφόρου πρέπει να είναι ομόκεντρος κύκλος με τον Ισημερινό. Άρα, ένας γεωστατικός δορυφόρος κινείται αναγκαστικά πάνω από τον Ισημερινό.

Η περίοδος περιφοράς ενός γεωστατικού δορυφόρου ισούται με $T = 24\ h = 86\ 400\ s$. Από τη σχέση ακτίνας - περιόδου, που αποδείξαμε στο **Παράδειγμα 1**, προκύπτει ότι η απαιτούμενη ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του δορυφόρου είναι:

$$r_\Delta^3 = \frac{GM_\Gamma}{4\pi^2}T_\Delta^2 \Rightarrow r_\Delta = \left(\frac{GM_\Gamma}{4\pi^2}T_\Delta^2\right)^{1/3} =$$

$$\left(\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}97\times10^{24}\times86\ 400^2}{4\pi^2}\,\frac{N\times m^2}{kg^2}\times kg\times s^2\right)^{1/3} =$$

$$\left(\frac{6{,}67\times5{,}97\times8{,}64^2\times10^{21}}{4\pi^2}\right)^{1/3}\left(\frac{kg\times\frac{m}{s^2}\times m^2}{kg^2}\times kg\times s^2\right)^{1/3} =$$

$$= 4{,}22\times10^7\ m = 42\ 200\ km$$

Συμπεραίνουμε ότι ένας γεωστατικός δορυφόρος πρέπει να βρίσκεται σε ύψος

$$h = 42\ 200\ km - 6\ 370\ km = 35\ 830\ km \cong 36\ 000\ km$$

πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας (περίπου ίσο με 6 φορές την ακτίνα της Γης).

Οι γεωστατικοί δορυφόροι χρησιμοποιούνται εκτεταμένα στις τηλεπικοινωνίες, αλλά η χρήση τους παρουσιάζει και δυσκολίες. Επειδή το ύψος της τροχιάς τους είναι μεγάλο, ένα σήμα, που ταξιδεύει με την ταχύτητα του φωτός, χρειάζεται περίπου 0,25 s για να καλύψει την απόσταση Γης - Δορυφόρου - Γης. Έτσι, δημιουργείται καθυστέρηση μεταξύ εκπομπής και λήψης του σήματος, η οποία μπορεί να γίνει αντιληπτή (π.χ. στις επικοινωνίες μέσω τηλεφώνου ή internet). Επειδή οι δορυφόροι αυτοί κινούνται πάνω από τον Ισημερινό, σε αρκετά βόρειες ή νότιες τοποθεσίες φαίνεται να βρίσκονται πολύ κοντά στον ορίζοντα, και τα σήματά τους μπορεί να διακόπτονται από βουνά.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

5.6.3. Γιατί ένας γεωστατικός δορυφόρος πρέπει να βρίσκεται σε ορισμένη απόσταση από το κέντρο της Γης;

5.6.4. Πώς θα μεταβληθεί η περίοδος περιστροφής ενός γεωστατικού δορυφόρου, εάν μεταφερθεί πιο κοντά στην επιφάνεια της Γης;

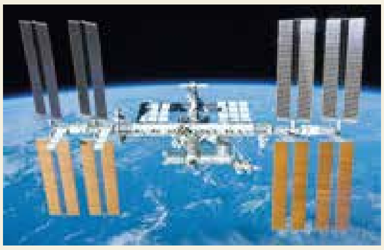
5.6.5. Είναι δυνατόν ένας δορυφόρος, που τοποθετείται σε ακτίνα γεωστατικής τροχιάς, να περιστρέφεται με περίοδο $T = 12$ h;

5.7. Συνθήκες Έλλειψης Βαρύτητας

Αστροναύτες σε συνθήκες έλλειψης βαρύτητας στον Διεθνή Διαστημικό Σταθμό.
Πηγή Εικόνας:
NASA (Photo ID: ISS008-E-21996).

Στην **Ενότητα 5.2.** εξηγήσαμε με το παράδειγμα του Voyager 1 ότι η δύναμη παγκόσμιας έλξης μεταξύ ενός ουράνιου σώματος κι ενός σώματος με μικρές διαστάσεις παραμένει αισθητή ακόμη και σε τεράστιες αποστάσεις.

Αυτό έρχεται σε αντίθεση με εικόνες από το διάστημα, όπου οι αστροναύτες φαίνεται να κινούνται σε συνθήκες έλλειψης βαρύτητας, ακόμη κι εάν απέχουν μόλις μερικές εκατοντάδες χιλιόμετρα από τη Γη. Στην πραγματικότητα, το βάρος των αστροναυτών είναι **ελάχιστα διαφορετικό** από το αντίστοιχο βάρος τους στη Γη, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.



Παράδειγμα 1
Ο Διεθνής Διαστημικός Σταθμός (International Space Station) βρίσκεται σε τροχιά σε ύψος 400 km από την επιφάνεια της Γης (6770 km από το κέντρο της Γης). Γνωρίζουμε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης από το κέντρο της Γης. Άρα:

$$\frac{g(r = 6770\ \text{km})}{g(R_\Gamma)} = \left(\frac{R_\Gamma}{r}\right)^2 = \left(\frac{6370\ \text{km}}{6770\ \text{km}}\right)^2 = 0{,}885$$

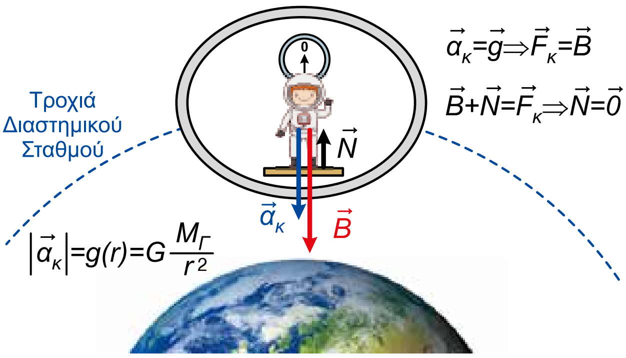
Συνεπώς, η επιτάχυνση της βαρύτητας της Γης στο διαστημικό σταθμό έχει μέτρο

$$g(r = 6770\ \text{km}) = 0{,}885 \times (9{,}81\ \text{m/s}^2) = 8{,}69\ \text{m/s}^2$$

Η τιμή αυτή αντιστοιχεί στο 88,5 % της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης.

Για μία ξενάγηση στο Διεθνή Διαστημικό Σταθμό, επισκεφθείτε την ιστοσελίδα:
https://www.youtube.com/watch?v=afBm0Dpfj_k&feature=youtube

Από το προηγούμενο παράδειγμα, προκύπτει ότι ένας αστροναύτης μάζας $m = 100{,}0$ kg, έχει βάρος 869 N στο διαστημικό σταθμό, μόλις κατά 112 N μικρότερο από το βάρος του στην επιφάνεια της Γης (981 N). **Γιατί ο αστροναύτης φαίνεται να μην έχει βάρος;**



Εικόνα 5-3
Το διαστημόπλοιο περιφέρεται γύρω από τη Γη με κεντρομόλο επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας, $\vec{\alpha}_K = \vec{g}$. Το βάρος του αστροναύτη επενεργεί ως κεντρομόλος και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από τον ζυγό στον αστροναύτη μηδενίζεται.

Στην **Εικόνα 5-3** απεικονίζεται ένα διαστημόπλοιο, το οποίο εκτελεί κυκλική τροχιά με κέντρο τη Γη. Εάν η συνισταμένη δύναμη στο σταθμό είναι η δύναμη παγκόσμιας έλξης από τη Γη, η κεντρομόλος επιτάχυνση του διαστημόπλοιου ισούται με την επιτάχυνση της βαρύτητας:

$$\vec{F}_K = \vec{B}_\Sigma \Rightarrow m_\Sigma \vec{\alpha}_K = m_\Sigma \vec{g} \Rightarrow \vec{\alpha}_K = \vec{g}$$

Έστω ότι ένας αστροναύτης βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο και πατά σε μία ζυγαριά. Επειδή ο αστροναύτης κινείται μαζί με το διαστημόπλοιο, διαγράφει κυκλική τροχιά με την ίδια ακτίνα και την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Συνεπώς, ο αστροναύτης κινείται με την ίδια κεντρομόλο επιτάχυνση με το διαστημόπλοιο, $\vec{\alpha}_K = \vec{g}$.

Στον αστροναύτη ασκούνται το βάρος του και η κάθετη δύναμη από τη ζυγαριά. Η συνισταμένη δύναμη στον αστροναύτη ισούται με την κεντρομόλο δύναμη. Συνεπώς:

$$\vec{B} + \vec{N} = m_A \vec{\alpha}_K = m_A \vec{g} \Rightarrow \vec{B} + \vec{N} = \vec{B} \Rightarrow \vec{N} = \vec{0}$$

Άρα, στον αστροναύτη δρα μηδενική δύναμη από τη ζυγαριά. Ο αστροναύτης ασκεί μηδενική δύναμη στη ζυγαριά (3ος νόμος), και η ένδειξη της ζυγαριάς είναι μηδενική.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

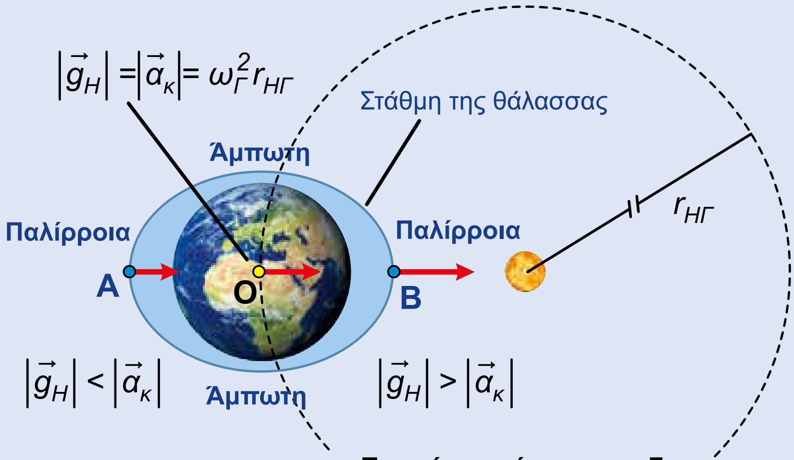
5.7.1. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα σώματα στον ΔΔΣ «δεν έχουν βάρος», εξαιτίας της μεγάλης απόστασης του σταθμού από το κέντρο της Γης. Είναι σωστός αυτός ο ισχυρισμός;

ΕΝΘΕΤΟ: Η Δημιουργία της Παλίρροιας

Το κάστρο St. Michel στην Νορμανδία, όταν επικρατεί παλίρροια (δεξιά) και άμπωτη (αριστερά) .

Θα γνωρίζετε ότι η στάθμη της θάλασσας παρουσιάζει αυξομειώσεις κατά τη διάρκεια του εικοσιτετραώρου. Όταν η στάθμη του νερού μεγαλώνει, λέμε ότι εμφανίζεται **παλίρροια**, και όταν ελαττώνεται λέμε ότι εμφανίζεται **άμπωτη**.

Η δημιουργία της παλίρροιας και της άμπωτης οφείλεται στην βαρυτική έλξη της Σελήνης και του Ήλιου, και μπορεί να εξηγηθεί από την περιφορά της Γης. Εξηγούμε την παλίρροια που προκαλεί ο Ήλιος, μελετώντας το διπλανό σχήμα.



Τροχιά του κέντρου της Γης
Σε αυτή την απόσταση, η επιτάχυνση της βαρύτητας από τον Ήλιο έχει ίσο μέτρο με την Κεντρομόλο.

Η δύναμη παγκόσμιας έλξης από τον Ήλιο στη Γη επενεργεί ως κεντρομόλος. Στο κέντρο της Γης **O**, και στα σημεία που βρίσκονται σε απόσταση $r = r_{\text{ΗΓ}}$ από τον Ήλιο, η επιτάχυνση της βαρύτητας από τον Ήλιο ισούται με την κεντρομόλο επιτάχυνση:

$$|\vec{g}_{\text{Η}}| = G\frac{M_{\text{Η}}}{r_{\text{ΗΓ}}^2} = |\vec{\alpha}_{\text{Κ}}|$$

όπου $r_{\text{ΗΓ}}$ είναι η μέση απόσταση Γης - Ήλιου.

Στο σημείο **B**, η επιτάχυνση της βαρύτητας από τον Ήλιο έχει μέτρο

$$\left|\vec{g}_{\mathrm{H}}\right| = G\frac{M_{\mathrm{H}}}{(r_{\mathrm{H}\Gamma} - R_{\Gamma})^2} > \left|\vec{\alpha}_{\mathrm{K}}\right|$$

δηλαδή είναι κάπως μεγαλύτερη από την απαιτούμενη κεντρομόλο επιτάχυνση. Το σημείο Β τείνει να κινηθεί προς τον Ήλιο.

Στο σημείο **Α**, η επιτάχυνση της βαρύτητας από τον Ήλιο έχει μέτρο

$$\left|\vec{g}_{\mathrm{H}}\right| = G\frac{M_{\mathrm{H}}}{(r_{\mathrm{H}\Gamma} + R_{\Gamma})^2} < \left|\vec{\alpha}_{\mathrm{K}}\right|$$

δηλαδή είναι κάπως μικρότερη από την κεντρομόλο επιτάχυνση. Το σημείο Α τείνει να απομακρυνθεί από τον Ήλιο. Ως αποτέλεσμα, το ύψος της στάθμης του νερού εμφανίζει **ελάχιστα** και **μέγιστα**. Ένα ανάλογο, **ακόμη μεγαλύτερο** αποτέλεσμα στη στάθμη του νερού έχει η επίδραση της βαρυτικής έλξης της Σελήνης στη Γη.

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. (Σε όλες τις ερωτήσεις, οι τροχιές θεωρούνται **κυκλικές**). Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντηση σας στο τετράδιό σας.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Η δύναμη παγκόσμιας έλξης από τον Ήλιο στη Γη είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη παγκόσμιας έλξης από τη Γη στον Ήλιο.	
2	Οι δυνάμεις παγκόσμιας έλξης μεταξύ του Ήλιου και της Γης είναι μηδενικές, επειδή ο Ήλιος βρίσκεται πολύ μακριά από τη Γη.	
3	Το βάρος ενός σώματος δεν εξαρτάται από τη μάζα της Γης.	
4	Το βάρος ενός σώματος έξω από τη Γήινη ατμόσφαιρα είναι ίσο με μηδέν.	
5	Η επιτάχυνση της βαρύτητας, με την οποία πέφτει ένα σώμα στη Γη, είναι ανάλογη με το γινόμενο των μαζών του σώματος και της Γης.	
6	Στην επιφάνεια του Άρη, όλα τα σώματα πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση της βαρύτητας.	
7	Ένα σώμα έχει την ίδια επιτάχυνση της βαρύτητας στη Γη και στον Άρη, επειδή έχει την ίδια μάζα.	
8	Εάν η Γη περιφέρονταν σε μικρότερη απόσταση από τον Ήλιο, ένα Γήινο έτος θα διαρκούσε λιγότερο.	

9	Εάν η Γη είχε μεγαλύτερη μάζα και κινούνταν στην ίδια τροχιά γύρω από τον Ήλιο, ένα Γήινο έτος θα διαρκούσε περισσότερο.	
10	Εάν ο Ήλιος είχε μεγαλύτερη μάζα, και η Γη κινούνταν στην ίδια τροχιά που έχει τώρα, ένα Γήινο έτος θα διαρκούσε περισσότερο.	
11	Οι επιστήμονες του διεθνούς διαστημικού σταθμού εργάζονται σε συνθήκες (περίπου) μηδενικής βαρύτητας, επειδή βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση από τη Γη.	

Ασκήσεις

1. Ένας αστροναύτης εκτελεί εργασίες στο εξωτερικό ενός διαστημικού σταθμού στο απομακρυσμένο διάστημα, όταν ξαφνικά ένας μικρός μετεωρίτης κόβει το νήμα που τον συνδέει με τον διαστημικό σταθμό. Να υποθέσετε ότι ο αστροναύτης και ο σταθμός είναι υλικά σημεία με μάζες 10^2 kg και 10^5 kg, και ότι ο αστροναύτης απέχει 60 m από τον σταθμό. Να υπολογίσετε τη δύναμη παγκόσμιας έλξης αστροναύτη - σταθμού. Τι επιτάχυνση προσδίδει στον αστροναύτη αυτή η δύναμη;

2. Ένα μικρό διαστημόπλοιο έχει μάζα $m = 1{,}0 \times 10^3$ kg και ταξιδεύει στο διάστημα. Να βρείτε σε ποιά απόσταση πρέπει να απομακρυνθεί από τη Γη, έτσι ώστε το βάρος του (η δύναμη παγκόσμιας έλξης από τη Γη) να είναι ίσο με το βάρος που έχει ένας κόκκος γύρης στην επιφάνεια της Γης. Ένας τυπικός κόκκος γύρης έχει μάζα $m = 2{,}0 \times 10^{-10}$ kg.

3. Μία διαστημική αποστολή επικέφτεται έναν νέο πλανήτη. Οι αστροναύτες έχουν στη διάθεσή τους υλικά/όργανα όπως ένα λείο κεκλιμένο επίπεδο, ένα χρονόμετρο ακριβείας και διάφορα μικρά σώματα. Από αστρονομικές παρατηρήσεις γνωρίζουν την ακτίνα του πλανήτη. Να περιγράψετε μία μέθοδο, με την οποία οι αστροναύτες θα υπολογίσουν τη μάζα του πλανήτη.

4. Στον **Πίνακα 2** περιέχονται στοιχεία για τη μάζα και την ακτίνα διαφόρων ουρανίων σωμάτων.

   I. Να υπολογίσετε την **επιτάχυνση της βαρύτητας** στην επιφάνεια αυτών των ουράνιων σωμάτων.

   II. Να υπολογίσετε το βάρος ενός αστροναύτη συνολικής μάζας 150 kg στην επιφάνεια αυτών των σωμάτων.

   III. Το παγκόσμιο ρεκόρ στον ακοντισμό είναι 104,80 m. Ποιό θα ήταν το ρεκόρ εάν διεξάγονταν διαστημικοί ολυμπιακοί αγώνες στην επιφάνεια αυτών των ουρανίων σωμάτων;

   IV. Όλα τα σώματα πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης. Θα παρατηρούσατε το ίδιο και στην επιφάνεια των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων;

Πίνακας 2. Μάζες και Ακτίνες διαφόρων Ουρανίων Σωμάτων		
Ουράνιο Σώμα	**Μάζα M (kg)**	**Ακτίνα R (m)**
Ήλιος	$1,99 \times 10^{30}$	$6,96 \times 10^{8}$
Σελήνη	$7,35 \times 10^{22}$	$1,74 \times 10^{6}$
Άρης	$0,642 \times 10^{24}$	$3,40 \times 10^{6}$
Δίας	$19,0 \times 10^{26}$	$7,15 \times 10^{7}$

5 **Α.** Από τα δεδομένα του **Πίνακα 1**, να επιβεβαιώσετε ότι το πηλίκο $\mathrm{A} = r^3_{\mathrm{ΗΠ}}/T^2_{\mathrm{Π}}$ είναι περίπου σταθερό για τους πλανήτες Δία και Ποσειδώνα.

Β. Ο πλανήτης - νάνος Πλούτωνας περιφέρεται σε μέση απόσταση 5,9 δισεκατομμύρια χιλιόμετρα από τον Ήλιο. Να υπολογίσετε την περίοδο περιφοράς του, χρησιμοποιώντας την τιμή $\mathrm{A} = r^3_{\mathrm{ΗΠ}}/T^2_{\mathrm{Π}}$ του ερωτήματος **Α.** (Η ακριβής περίοδος είναι 90560 ημέρες, ή 248 χρόνια).

6 Το αστέρι **R136a1** σε έναν διαφορετικό γαλαξία (το νέφος του Μαγγελάνου) έχει τη μεγαλύτερη μάζα ανάμεσα σε όλα τα γνωστά αστέρια του Σύμπαντος (~$315 \times M_{\mathrm{Η}}$), όπου $M_{\mathrm{Η}}$ είναι η μάζα του Ήλιου.

Εάν υποθέσουμε ότι το αστέρι αυτό βρισκόταν στη θέση του Ήλιου, και η Γη περιφερόταν στην ίδια κυκλική τροχιά που έχει τώρα, πόσο θα διαρκούσε ένα Γήινο έτος; (Θυμηθείτε ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση της Γης ισούται με την επιτάχυνση της βαρύτητας λόγω του Ήλιου).

7 Από λανθασμένο υπολογισμό, ένας γεωστατικός δορυφόρος τοποθετείται σε απόσταση από το κέντρο της Γης ίση με το μισό της απαιτούμενης. Ποια θα είναι η περίοδος περιφοράς του;

8 Ο κομήτης του Halley πλησιάζει τη Γη κάθε 75 χρόνια. Η τελευταία προσέγγιση του κομήτη στη Γη έγινε το 1986, και η επόμενη θα είναι το 2061. Το χρονικό διάστημα των 75 ετών ισούται με την περίοδο περιφοράς του κομήτη του Halley γύρω από τον Ήλιο. Η τροχιά του Halley είναι πολύ ελλειπτική. Η μικρότερη απόστασή του από τον Ήλιο είναι 0,59 AU, και η μεγαλύτερη είναι 35 AU.

Όταν ένας δορυφόρος κινείται σε ελλειπτική τροχιά, με εστία ένα ουράνιο σώμα, στη σχέση ακτίνας - περιόδου αντί για την ακτίνα εισέρχεται η ***μέση απόσταση*** του δορυφόρου από το ουράνιο σώμα.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση ακτίνας - περιόδου περιφοράς που εξάγαμε για έναν δορυφόρο, να δείξετε ότι η **μέση απόσταση** του κομήτη του Halley από τον Ήλιο είναι 18 AU.

9 Ο Διεθνής Διαστημικός Σταθμός (ΔΔΣ) περιφέρεται σε κυκλική τροχιά, σε ύψος 400 km πάνω

από την επιφάνεια της Γης. Χρησιμοποιώντας την ακτίνα και περίοδο περιφοράς ενός γεωστατικού δορυφόρου, να υπολογίσετε την περίοδο περιφοράς και την ταχύτητα του ΔΔΣ. Πόσες περιφορές συμπληρώνει ο ΔΔΣ γύρω από τη Γη, στη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου;

5.8. Η Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια

Ανασκόπηση από την Α΄ Λυκείου

Στην Α΄ Λυκείου μελετήσαμε το έργο του βάρους για την περίπτωση, στην οποία **η επιτάχυνση της βαρύτητας δεν μεταβάλλεται με τη θέση του σώματος**. Δείξαμε ότι το έργο του βάρους ενός σώματος μάζας m κατά τη μετακίνησή του από ένα αρχικό ύψος y_1, σε ένα τελικό υψος y_2 ισούται με:

$$W_{\vec{B}} = -mg(y_2 - y_1)$$

Επίσης, ορίσαμε ως **βαρυτική δυναμική ενέργεια** του συστήματος σώματος - Γης την ποσότητα $U_{\delta\upsilon\nu}^{\beta\alpha\rho} = mgy$. Αυτές οι σχέσεις **τροποποιούνται**, εάν λάβουμε υπ' όψη τη **μεταβολή της επιτάχυνσης της βαρύτητας με τη θέση του σώματος**.

Στη γενική περίπτωση που το βάρος ενός σώματος περιγράφεται από τον Νόμο Παγκόσμιας Έλξης, **ορίζουμε** ως βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης την ποσότητα:

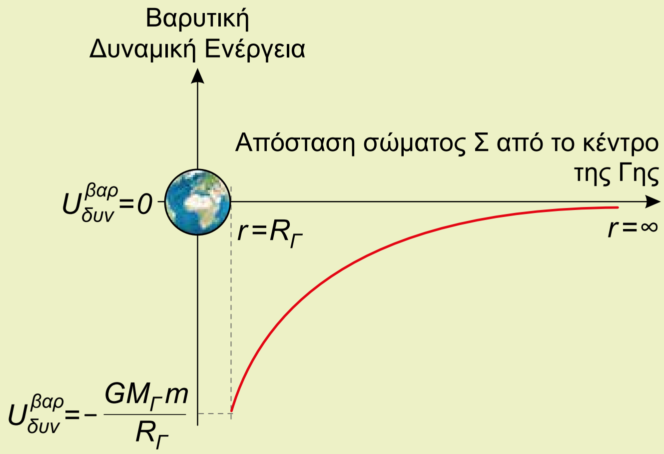
Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια Συστήματος Σώματος - Γης

$$U_{\delta\upsilon\nu}^{\beta\alpha\rho}(r) = -G\frac{M_\Gamma m}{r}$$

Στον πιο πάνω ορισμό, r είναι η απόσταση του σώματος από το κέντρο της Γης. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια εκφράζεται σε μονάδες Joule, όπως θα έπρεπε:

$$\frac{\mathrm{N} \times \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} \times \frac{\mathrm{kg}^2}{\mathrm{m}} = \mathrm{N} \times \mathrm{m} = \mathrm{J}$$

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης είναι **αρνητική** στο έδαφος $\left(U_{\delta\upsilon\nu}^{\beta\alpha\rho} = -G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma}\right)$ και **αυξάνεται** (γίνεται λιγότερο αρνητική) με **την απόσταση** r από το κέντρο της Γης. Σε **άπειρη** απόσταση από τη Γη **μηδενίζεται**: $r = \infty \Rightarrow U_{\delta\upsilon\nu}^{\beta\alpha\rho} = 0$.



Το έργο του βάρους του σώματος, κατά τη μετατόπιση του σώματος από απόσταση r_K σε απόσταση r_Λ από το κέντρο της Γης, συνδέεται με τη μεταβολή στη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης με τη σχέση:

Σχέση Έργου Βάρους και Μεταβολής στη Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια

$$W_{\vec{B}}\,(r_K \rightarrow r_\Lambda) = -\Delta U^{\beta\alpha\rho}_{\delta\upsilon\nu} = U^{\beta\alpha\rho}_{\delta\upsilon\nu}(r_K) - U^{\beta\alpha\rho}_{\delta\upsilon\nu}(r_\Lambda) = (-GM_\Gamma m)\left(\frac{1}{r_K} - \frac{1}{r_\Lambda}\right)$$

- Η σχέση έργου βάρους - μεταβολής δυναμικής ενέργειας ισχύει για αυθαίρετη διαδρομή του σώματος από μία αρχική θέση **Κ** σε μία τελική θέση **Λ.** Δηλαδή, το έργο του βάρους **εξαρτάται μόνο από την απόσταση του αρχικού και του τελικού σημείου από το κέντρο της Γης**. Το βάρος είναι **διατηρητική δύναμη**.

- Η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας **δεν εξαρτάται** από την επιλογή του σημείου, στο οποίο μηδενίζεται η βαρυτική δυναμική ενέργεια. Συνεπώς, το σημείο αυτό επιλέγεται αυθαίρετα.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

5.8.1. Πώς μεταβάλλεται η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος Γης - σφαίρας, εάν **(α)** διπλασιασθεί η απόσταση της σφαίρας από το κέντρο της Γης, **(β)** διπλασιασθεί η μάζα της σφαίρας;

5.8.2. Μία μαθήτρια διατυπώνει τον εξής συλλογισμό: « Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης είναι ανάλογη με τη μάζα του σώματος, αλλά **δεν** εξαρτάται από τη μάζα της Γης». Είναι σωστός αυτός ο συλλογισμός;

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ενός σώματος μάζας m = 1 kg, που μετακινείται από την επιφάνεια της Γης στον διεθνή διαστημικό σταθμό (σε ύψος 400,0 km από το έδαφος), και να συγκρίνετε με τη σχέση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας για σταθερό βάρος (γνωστή από την Α΄ Λυκείου).

Μεταβολή Βαρυτικής Δυναμικής Ενέργειας με βάση τη σχέση της Παγκόσμιας Έλξης:

$$\Delta U_{\delta\upsilon\nu}^{\beta\alpha\rho} = (-GMm)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = -\left(6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \times m^2}}{\mathrm{kg^2}}\right) \times (5{,}97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}) \times (1{,}00\ \mathrm{kg})$$

$$\times \left(\frac{1}{6770{,}0 \times 10^3\ \mathrm{m}} - \frac{1}{6370{,}0 \times 10^3\ \mathrm{m}}\right) = -\,(6{,}67 \times 5{,}97 \times 1{,}00 \times 10^{13}) \times \frac{6370{,}0 - 6770{,}0}{6770{,}0 \times 6370{,}0}$$

$$\times 10^{-3}\,\frac{\mathrm{N \times m^2}}{\mathrm{kg^2}} \times \frac{\mathrm{kg^2}}{\mathrm{m}} = 3{,}70 \times 10^6\ \mathrm{J}$$

Μεταβολή με βάση τη Σχέση Σταθερού Βάρους $\Delta U_{\delta\upsilon\nu}^{\beta\alpha\rho} = mg(r_2 - r_1)$:

$$\Delta U_{\delta\upsilon\nu}^{\beta\alpha\rho} = mg(r_2 - r_1) = (1{,}00\ \mathrm{kg}) \times (9{,}81\ \mathrm{m/s^2}) \times (4{,}00 \times 10^5\ \mathrm{m}) = 3{,}92 \times 10^6\ \mathrm{J}$$

Η έκφραση για σταθερό βάρος υπερεκτιμά τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας κατά 22 000 J επειδή αγνοεί την μείωση του μέτρου του βάρους του σώματος με την απόσταση.

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ενός σώματος μάζας m = 1 kg που μετακινείται από την επιφάνεια της Γης σε ύψος 100 m από το έδαφος, και να συγκρίνετε με τη σχέση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας για σταθερό βάρος.

Μεταβολή Βαρυτικής Δυναμικής Ενέργειας με βάση τη σχέση της Παγκόσμιας Έλξης:

$$\Delta U_{\delta\upsilon\nu}^{\beta\alpha\rho} = (-GM_\Gamma m)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = -\left(6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \times m^2}}{\mathrm{kg^2}}\right) \times (5{,}97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}) \times (1{,}00\ \mathrm{kg})$$

$$\times \left(\frac{1}{6370{,}1 \times 10^3\ \mathrm{m}} - \frac{1}{6370{,}0 \times 10^3\ \mathrm{m}}\right) = -\,(6{,}67 \times 5{,}97 \times 1{,}00 \times 10^{13}) \times \frac{6370{,}0 - 6370{,}1}{6370{,}1 \times 6370{,}0}$$

$$\times 10^{-3}\,\frac{\mathrm{N \times m^2}}{\mathrm{kg^2}} \times \frac{\mathrm{kg^2}}{\mathrm{m}} = 981\ \mathrm{J}$$

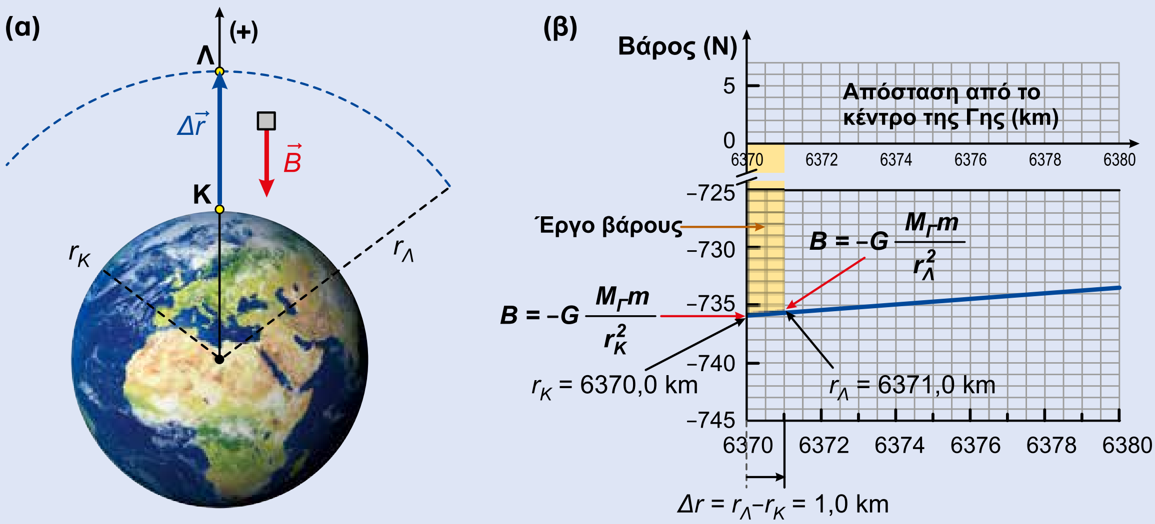
Μεταβολή με βάση τη σχέση σταθερού βάρους $\Delta U_{\delta\upsilon\nu}^{\beta\alpha\rho} = mg(r_2 - r_1)$:

$$\Delta U_{\delta\upsilon\nu}^{\beta\alpha\rho} = mg(r_2 - r_1) = (1{,}00\ \text{kg}) \times (9{,}81\ \text{m/s}^2) \times (100{,}0\ \text{m}) = 981\ \text{J}$$

Παρατηρούμε ότι **οι δύο εκφράσεις δίνουν ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα, για μικρές μετατοπίσεις.**

ΕΝΘΕΤΟ: Εξαγωγή της Σχέσης για τη Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια

Το σώμα της **Εικόνας 5-4(α)** έχει μάζα m = 75,0 kg και μετακινείται ακτινικά από το σημείο **Κ** της επιφάνειας της Γης (r_K = 6370,0 km) στο σημείο **Λ**, που βρίσκεται σε απόσταση r_Λ = 6371,0 km από το κέντρο της Γης. Η ευθεία ΚΛ διέρχεται από το κέντρο της Γης, οπότε το βάρος του σώματος είναι αντίρροπο με τη μετατόπιση.



Εικόνα 5-4
(α) Το σώμα μετακινείται κατά μήκος της ακτινικής διεύθυνσης, από το σημείο **Κ** στο σημείο **Λ**. **(β)** Γράφημα της αλγεβρικής τιμής του βάρους του σώματος, σαν συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο της Γης. Το έργο του βάρους, κατά τη μετακίνηση Κ→Λ, ισούται με το εμβαδόν του σκιασμένου τραπεζίου.

Θεωρούμε ως άξονα την ευθεία ΚΛ, και ως **θετική τη φορά της μετατόπισης από το Κ στο Λ.** Με αυτή τη σύμβαση, η μετατόπιση του σώματος $\Delta r = r_\Lambda - r_K$ είναι θετική και το βάρος του σώματος, σε απόσταση r από το κέντρο της Γης, έχει αρνητική αλγεβρική τιμή:

$$B = -G\frac{M_\Gamma m}{r^2}$$

Θα υπολογίσουμε το **έργο** του βάρους για τη μεταφορά του σώματος από το σημείο **K** στο σημείο **Λ.** Για το σκοπό αυτό, εφαρμόζουμε τις γνώσεις μας για το έργο μεταβαλλόμενης δύναμης: **Σχεδιάζουμε την αλγεβρική τιμή του βάρους σαν συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο της Γης (Εικόνα 5-4(β)).** Το έργο του βάρους για τη μετατόπιση από το K στο Λ ισούται κατά προσέγγιση με το εμβαδόν του σκιασμένου **τραπεζίου**, και είναι **αρνητικό**:

$$W_{\vec{B}} \cong \frac{1}{2}\left[-G\frac{M_\Gamma m}{r_K^2} - G\frac{M_\Gamma m}{r_\Lambda^2}\right] \times (r_\Lambda - r_K) = \frac{1}{2} \times (-G\,M_\Gamma\,m) \times \left[\frac{r_\Lambda - r_K}{r_K^2} + \frac{r_\Lambda - r_K}{r_\Lambda^2}\right]$$

Επειδή οι αποστάσεις r_K και r_Λ είναι πολύ μεγαλύτερες από τη μετατόπιση $\Delta r = r_\Lambda - r_K$ οι λόγοι $\frac{r_\Lambda - r_K}{r_K^2}$ και $\frac{r_\Lambda - r_K}{r_\Lambda^2}$ αλλάζουν ελάχιστα, εάν αντικαταστήσουμε τους παρονομαστές τους με το γινόμενο $r_K\,r_\Lambda$:

$$\frac{r_\Lambda - r_K}{r_K^2} = \frac{(6371{,}0 - 6370{,}0)\ \text{km}}{(6370{,}0\ \text{km})^2} = 2{,}4644 \times 10^{-8}\ \text{km}^{-1}$$

$$\frac{r_\Lambda - r_K}{r_\Lambda^2} = \frac{(6371{,}0 - 6370{,}0)\ \text{km}}{(6371{,}0\ \text{km})^2} = 2{,}4637 \times 10^{-8}\ \text{km}^{-1}$$

$$\frac{r_\Lambda - r_K}{r_K\,r_\Lambda} = \frac{(6371{,}0 - 6370{,}0)\ \text{km}}{(6370{,}0\ \text{km}) \times (6371{,}0\ \text{km})} = 2{,}4641 \times 10^{-8}\ \text{km}^{-1}$$

Άρα, μπορούμε να γράψουμε:

$$\left[\frac{r_\Lambda - r_K}{r_K^2} + \frac{r_\Lambda - r_K}{r_\Lambda^2}\right] \cong 2 \times \frac{r_\Lambda - r_K}{r_K\,r_\Lambda} = 2 \times \left(\frac{1}{r_K} - \frac{1}{r_\Lambda}\right)$$

Με αυτή την αντικατάσταση, το έργο του βάρους γίνεται:

$$W_{\vec{B}} = (-G\,M_\Gamma\,m) \times \left(\frac{1}{r_K} - \frac{1}{r_\Lambda}\right) = \left[-G\frac{M_\Gamma m}{r_K}\right] - \left[-G\frac{M_\Gamma m}{r_\Lambda}\right]$$

Η τελευταία σχέση συνδέει το έργο του βάρους κατά τη μετακίνηση $K \to \Lambda$ με την αντίστοιχη μεταβολή στην ποσότητα $-G\frac{M_\Gamma m}{r}$. Εάν **ορίσουμε** ως βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης την ποσότητα $U_{\delta\upsilon\nu}^{\beta\alpha\rho} = -G\frac{M_\Gamma m}{r}$, το έργο του βάρους του σώματος κατά τη μετακίνηση $K \to \Lambda$ ισούται με: $W_{\vec{B}}\,(r_K \to r_\Lambda) = -\Delta U_{\delta\upsilon\nu}^{\beta\alpha\rho} = U_{\delta\upsilon\nu}^{\beta\alpha\rho}(r_K) - U_{\delta\upsilon\nu}^{\beta\alpha\rho}(r_\Lambda)$.

Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας

Το **άθροισμα της κινητικής ενέργειας του σώματος και της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας** του συστήματος σώματος - Γης είναι η **μηχανική ενέργεια** του συστήματος σώματος - Γης. Από το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας, που ισχύει και όταν στο σώμα ασκούνται μεταβαλλόμενες δυνάμεις, γνωρίζουμε ότι:

$$\Delta E_{\kappa\iota\nu} = W_{\sum\vec{F}}$$

Εάν το έργο όλων των υπολοίπων δυνάμεων εκτός από το βάρος είναι μηδενικό, το έργο στο σώμα ισούται με το έργο του βάρους, $W_{\sum\vec{F}} = W_{\vec{B}}$. Άρα:

$$\Delta E_{\kappa\iota\nu} = W_{\vec{B}} \Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu} = -\Delta U^{\beta\alpha\rho}_{\delta\upsilon\nu} \Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu} + \Delta U^{\beta\alpha\rho}_{\delta\upsilon\nu} = 0 \Rightarrow \Delta E_{\mu\eta\chi} = 0$$

Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = 0 \Rightarrow E_{\mu\eta\chi} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - G\frac{M_\Gamma m}{r_1} = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - G\frac{M_\Gamma m}{r_2} \Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon_1^2 - G\frac{M_\Gamma}{r_1} = \frac{1}{2}\upsilon_2^2 - G\frac{M_\Gamma}{r_2}$$

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης διατηρείται, καθώς το σώμα μετακινείται σε σχέση με το κέντρο της Γης. **Να παρατηρήσετε** ότι:

- Η μάζα του σώματος απαλείφεται στην πιο πάνω εξίσωση διατήρησης. Άρα, δύο σώματα που εκκινούν με την ίδια ταχύτητα από κάποιο σημείο, έχουν **την ίδια ταχύτητα** σε κάποιο άλλο σημείο, **ανεξάρτητα από τη μάζα τους**.
- Η πιο πάνω εξίσωση ισχύει και όταν η δύναμη παγκόσμιας έλξης δεν οφείλεται στη Γη, αλλά σε κάποιο άλλο σώμα **Β**. Σε εκείνη την περίπτωση, στη θέση της μάζας της Γης (M_Γ) εισέρχεται η μάζα M_B του σώματος **Β**.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

5.8.3. Αφήνουμε από ηρεμία, από το ίδιο ύψος πάνω από την επιφάνεια της Γης, μία μεταλλική σφαίρα μάζας 0,500 kg και μία πέτρα μάζας 0,100 kg. Ποιό από τα δύο σώματα φθάνει στη Γη με μεγαλύτερη ταχύτητα; Να θεωρήσετε ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

5.8.4. Ένας μαθητής μελετά την κίνηση ενός δορυφόρου, που περιφέρεται γύρω από τη Γη, και διατυπώνει τον εξής συλλογισμό: «Εάν η τροχιά του δορυφόρου είναι κυκλική, το έργο του βάρους του δορυφόρου είναι ίσο με μηδέν σε **μία πλήρη περιφορά**, επειδή το βάρος είναι συνεχώς κάθετο στην ταχύτητα. Εάν η τροχιά είναι ελλειπτική, το βάρος δεν είναι συνεχώς κάθετο στην ταχύτητα και το έργο του βάρους δεν μηδενίζεται». Είναι σωστός αυτός ο συλλογισμός;

5.8.5. Κατά την περιφορά της Γης γύρω από τον Ήλιο, το μέτρο της ταχύτητας της Γης είναι συνεχώς σταθερό; Γιατί;

5.9. Η Ταχύτητα Διαφυγής

Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μπορούμε να δείξουμε ότι ένα σώμα, που εκτοξεύεται με μεγάλη ταχύτητα από την επιφάνεια της Γης, φθάνει σε **άπειρη** απόσταση, δηλαδή **διαφεύγει** από τη βαρυτική έλξη της Γης.

Ας υποθέσουμε ότι το σώμα μπορεί να απομακρυνθεί σε άπειρη απόσταση από τη Γη. Από τη **διατήρηση της μηχανικής ενέργειας**, προκύπτει ότι η μηχανική ενέργεια του σώματος σε άπειρη απόσταση ισούται με τη μηχανική ενέργεια που έχει στην επιφάνεια της Γης:

$$E_{\mu\eta\chi}(r=\infty)=E_{\mu\eta\chi}(r=R_\Gamma)$$

Σε άπειρη απόσταση από τη Γη, η βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος είναι μηδενική. Συνεπώς, η μηχανική ενέργεια του σώματος ισούται με την κινητική του ενέργεια, η οποία είναι πάντοτε μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός:

$$E_{\mu\eta\chi}(r=\infty)=E_{\kappa\iota\nu}(r=\infty)$$

Συμπεραίνουμε ότι η μηχανική ενέργεια του σώματος στην επιφάνεια της Γης θα πρέπει να ικανοποιεί την ίδια ανισότητα:

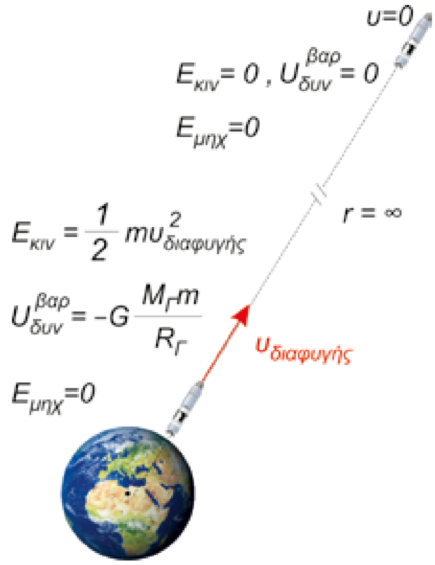
$$E_{\mu\eta\chi}(r=R_\Gamma)=E_{\mu\eta\chi}(r=\infty)\geq 0$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση για τη μηχανική ενέργεια στην επιφάνεια της Γης, βρίσκουμε ότι η ταχύτητα εκτόξευσης πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση με μία χαρακτηριστική τιμή:

$$E_{\mu\eta\chi}=\frac{1}{2}m\upsilon_{\varepsilon\kappa\tau o\xi}^2-G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma}\geq 0\Rightarrow\frac{1}{2}\upsilon_{\varepsilon\kappa\tau o\xi}^2\geq G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma}\Rightarrow\upsilon_{\varepsilon\kappa\tau o\xi}\geq\sqrt{2\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma}}$$

Η **ελάχιστη ταχύτητα** εκτόξευσης από την επιφάνεια της Γης, με την οποία το σώμα διαφεύγει σε άπειρη απόσταση, είναι αυτή για την οποία **η μηχανική ενέργεια μηδενίζεται**. Η ταχύτητα αυτή ονομάζεται **ταχύτητα διαφυγής**:

$$\upsilon_{\text{διαφυγής}} = \sqrt{2\frac{GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}}}$$



Να παρατηρήσετε ότι η ταχύτητα διαφυγής **δεν εξαρτάται από τη μάζα** του σώματος. Η ταχύτητα διαφυγής μπορεί να εκφραστεί και ως προς την **επιτάχυνση της βαρύτητας** στην επιφάνεια της Γης:

$$\upsilon_{\text{διαφυγής}} = \sqrt{2g(R_{\Gamma})R_{\Gamma}}$$

Αντικαθιστώντας στην πιο πάνω έκφραση τις τιμές για την μάζα και την ακτίνα της Γης, βρίσκουμε:

$$\upsilon_{\text{διαφυγής}} = \sqrt{2\times\left(9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\times(6{,}37\times10^6\,\text{m})} = \sqrt{2\times9{,}81\times6{,}37\times10^6\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}$$

$$= 1{,}12\times10^4\frac{\text{m}}{\text{s}} = 11{,}2\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Καθώς το σώμα απομακρύνεται από τη Γη, η ταχύτητά του ελαττώνεται και η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος – Γης αυξάνεται. Εάν ένα σώμα εκτοξευθεί με την ταχύτητα διαφυγής, όταν πλησιάζει σε άπειρη απόσταση από τη Γη, η κινητική του ενέργεια (και η ταχύτητά του) θα προσεγγίζει το μηδέν.

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. (Σε όλες τις ερωτήσεις, οι τροχιές θεωρούνται **κυκλικές**). Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντηση σας στο τετράδιό σας.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος ενός σώματος και της Γης:	
α	Εξαρτάται από το τετράγωνο της μεταξύ τους απόστασης	
β	Εξαρτάται μόνο από τη μάζα του σώματος.	

γ	Είναι συνεχώς αρνητική και μηδενίζεται στο άπειρο.	
2	Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης διατηρείται μόνο εάν το βάρος θεωρείται σταθερό.	
3	Όταν ένα σώμα απομακρύνεται από τη Γη, η κινητική του ενέργεια μετατρέπεται σε βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης.	
4	Εάν ένα σώμα εκτοξευθεί από την επιφάνεια της Γης με αρνητική μηχανική ενέργεια, δεν μπορεί να απομακρυνθεί σε άπειρη απόσταση από τη Γη.	
5	Εάν διπλασιάσουμε τη μάζα ενός πυραύλου, η ταχύτητα διαφυγής του διπλασιάζεται.	

Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του **Πίνακα 2**, να υπολογίσετε την ταχύτητα διαφυγής ενός βλήματος από την επιφάνεια της Σελήνης, του Άρη, και του Δία.

2. Όπως αναφέραμε, οι πλανήτες κινούνται στην πραγματικότητα σε ελλειπτικές τροχιές με εστία τον Ήλιο, και η απόστασή τους από τον Ήλιο μεταβάλλεται.

   Α. Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας ενός πλανήτη, να εξηγήσετε πώς μεταβάλλεται η ταχύτητα του πλανήτη, όταν βρίσκεται κοντά ή μακριά από τον Ήλιο.

   Β. Η απόσταση της Γης από τον Ήλιο στο κοντινότερο σημείο της τροχιάς της (περιήλιο) και στο μακρινότερο σημείο της τροχιάς της (αφήλιο) είναι 147,5 και 152,5 εκατομμύρια χιλιόμετρα, αντίστοιχα. Εάν η γραμμική ταχύτητα της Γης στο περιήλιο είναι 30,0 km/s, να υπολογίσετε την ταχύτητα της Γης στο αφήλιο.

3. Ένας δορυφόρος περιφέρεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r γύρω από τη Γη. Η μόνη δύναμη που δρα στο δορυφόρο είναι η βαρυτική έλξη της Γης. Να αποδείξετε ότι η μηχανική ενέργεια του δορυφόρου ισούται με $E_{μηχ} = U^{βαρ}_{δυν}/2$. Να συγκρίνετε την κινητική και τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του δορυφόρου.

4. Τον 19ο αιώνα, ο φυσικός και μαθηματικός Pierre-Simon Laplace συμπέρανε ότι εάν η ακτίνα ενός σφαιρικού ουράνιου σώματος μάζας M γίνει μικρότερη από την οριακή τιμή $R_0 = \frac{2GM}{c^2}$, όπου c η ταχύτητα του φωτός, κανένα άλλο σώμα δεν μπορεί να διαφύγει στο άπειρο από την βαρυτική του έλξη.

Α. Να εξηγήσετε τον συλλογισμό του Laplace, λαμβάνοντας υπόψη ότι η ταχύτητα κανενός σώματος δεν μπορεί να υπερβεί την ταχύτητα του φωτός.

Β. Η οριακή ακτίνα R_0 ονομάζεται βαρυτική ακτίνα. Να την υπολογίσετε για ένα αστέρι με τη μάζα του Ήλιου.

Σημείωση

Ο Laplace ισχυρίστηκε ότι η βαρυτική έλξη ενός σώματος με ακτίνα $R \leq R_0$ είναι τόσο ισχυρή, ώστε ακόμα και το φως δεν μπορεί να διαφύγει στο άπειρο. Γι αυτό ονόμασε τα σώματα αυτά μελανά. Το 1915, ο φυσικός Karl Schwarzschild εφάρμοσε τη θεωρία Γενικής Σχετικότητας του Einstein για να περιγράψει τη βαρύτητα ενός σφαιρικού ουράνιου σώματος μάζας M, και έδειξε ότι για τιμές $R \leq R_0$ σχηματίζεται μια **μαύρη τρύπα**, που εγκλωβίζει το φως στο εσωτερικό της χωρίς να του επιτρέπει να διαφύγει.

Απαντήσεις Ελέγχου Κατανόησης Εννοιών

5.1.1. **(α)** θα διπλασιασθεί,
(β) θα διπλασιασθεί.

5.1.2. **(α)** τετραπλασιάζεται,
(β) υποτετραπλασιάζεται.

5.3.1. Ναι, εάν η αντίσταση του αέρα της ατμόσφαιρας μπορεί να αγνοηθεί.

5.6.1. **(α)** Η περίοδος περιφοράς θα είναι ίδια, γιατί δεν εξαρτάται από τη μάζα των δορυφόρων.
(β) Εάν αυξηθεί η ταχύτητα (ελαττωθεί η περίοδος) ο δορυφόρος πρέπει να μετακινηθεί σε τροχιά μικρότερης ακτίνας (χρειάζεται να αυξηθεί το βάρος, που επενεργεί ως κεντρομόλος).
(γ) Πρέπει να μεταφερθούν σε τροχιές μεγαλύτερης ακτίνας.

5.6.3. Γιατί πρέπει να έχει συγκεκριμένη περίοδο περιφοράς (24 h).

5.6.4. Η περίοδος περιφοράς θα ελαττωθεί (η ταχύτητα μεγαλώνει, επειδή η βαρυτική δυναμική ενέργεια ελαττώνεται. Το βάρος επενεργεί συνεχώς σαν κεντρομόλος).

5.6.5. Όχι, εάν κινείται μόνο υπό την επίδραση του βάρους του.

5.7.1. Όχι. Το **φαινόμενο βάρος** είναι ίσο με μηδέν (η ένδειξη της ζυγαριάς). Το βάρος κάθε σώματος επενεργεί ως κεντρομόλος δύναμη, που διατηρεί το σώμα σε κυκλική τροχιά.

5.8.1. **(α)** υποδιπλασιάζεται
(β) διπλασιάζεται.

5.8.2. Όχι. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι ανάλογη με το γινόμενο των μαζών του σώματος και της Γης.

5.8.3. Φθάνουν με την ίδια ταχύτητα.

5.8.4. Το έργο του βάρους μηδενίζεται επειδή ο δορυφόρος ξεκινά και καταλήγει στο ίδιο σημείο, σε μία πλήρη περιφορά, και η δύναμη του βάρους είναι διατηρητική.

5.8.5. Όχι. Η τροχιά της Γης είναι ελλειπτική με εστία τον Ήλιο, και η απόσταση Γης - Ήλιου δεν είναι σταθερή. Άρα, η βαρυτική δυναμική ενέργεια Γης - Ήλιου δεν είναι σταθερή. Επειδή η Μηχανική Ενέργεια είναι σταθερή, η κινητική ενέργεια της Γης μεταβάλλεται.

Προτεινόμενη Δραστηριότητα 1

Εξαγωγή του Νόμου της Παγκόσμιας Έλξης από Αστρονομικά Δεδομένα.

Χρόνος

1 Διδακτική Περίοδος

Σχετική θεωρία

Ενότητα **5.1.**, Σελ. 182 - 189.

Σε αυτή τη δραστηριότητα θα μελετήσουμε την **εξάρτηση** της δύναμης Παγκόσμιας Έλξης μεταξύ δύο σωμάτων από **τις μάζες τους** και την μεταξύ τους **απόσταση**. Για το σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε δεδομένα για το βάρος ενός σώματος, και αστρονομικά δεδομένα για την κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο.

I. Εξάρτηση της Βαρυτικής έλξης μεταξύ δύο Σωμάτων από τις Μάζες των Σωμάτων

A. Όπως γνωρίζετε, η ελκτική δύναμη $\vec{F}_{\Gamma\to\Sigma}$, που ασκεί η Γη σε ένα σώμα **Σ** (το **βάρος** του σώματος) έχει μέτρο $m_\Sigma g$, όπου m_Σ είναι η μάζα του **Σ** και g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Πώς εξαρτάται το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_{\Gamma\to\Sigma}$ **στο σώμα Σ** από τη μάζα m_Σ **του Σ**;

B. Το σώμα **έλκει τη Γη** με μία δύναμη $\vec{F}_{\Sigma\to\Gamma}$.

Πώς εξαρτάται το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_{\Sigma\to\Gamma}$ στη Γη από τη μάζα M_Γ της Γης;

Γ. Οι δυνάμεις $\vec{F}_{\Gamma\to\Sigma}$ και $\vec{F}_{\Sigma\to\Gamma}$ είναι ζεύγος δράσης - αντίδρασης, οπότε τα μέτρα τους είναι ίσα, $|\vec{F}_{\Gamma\to\Sigma}| = |\vec{F}_{\Sigma\to\Gamma}|$. Ένας συμμαθητής σας συμπεραίνει ότι το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_{\Gamma\to\Sigma}$ **στο σώμα Σ** είναι ανάλογο **και** με τη μάζα της Γης, $|\vec{F}_{\Gamma\to\Sigma}| \propto M_\Gamma$.

Πώς κατέληξε σε αυτό το συμπέρασμα;

____

____

____

____

Δ. Με βάση τα πιο πάνω, μία συμμαθήτριά σας ισχυρίζεται ότι τα μέτρα $|\vec{F}_{\Gamma\to\Sigma}| = |\vec{F}_{\Sigma\to\Gamma}|$ των ελκτικών δυνάμεων μεταξύ ενός σώματος **Σ** και **της Γης**, είναι ανάλογα με το γινόμενο των μαζών τους m_Σ και M_Γ: $|\vec{F}_{\Gamma\to\Sigma}| = |\vec{F}_{\Sigma\to\Gamma}| \propto M_\Gamma\, m_\Sigma$.

Πώς κατέληξε σε αυτό το συμπέρασμα;

____

____

____

____

Ο Νεύτωνας **γενίκευσε** το πιο πάνω συμπέρασμα σε **οποιαδήποτε σώματα, που μπορούν να θεωρηθούν ως υλικά σημεία**:

Το μέτρο της βαρυτικής έλξης μεταξύ δύο σωμάτων **Α** και **Β**, **που μπορούν να θεωρηθούν ως υλικά σημεία**, είναι ανάλογο με το γινόμενο των μαζών τους:

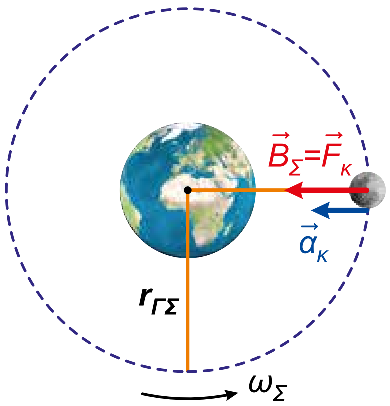
$$|\vec{F}_{A\to B}| = |\vec{F}_{B\to A}| \propto m_A\, m_B$$

II. Εξάρτηση της Βαρυτικής Έλξης μεταξύ δύο Σωμάτων από την μεταξύ τους Απόσταση.

Ένας συμμαθητής σας διατυπώνει την εξής υπόθεση: «*Το βάρος ενός σώματος, mg, ελαττώνεται καθώς το σώμα απομακρύνεται από τη Γη, επειδή ελαττώνεται η τιμή g της επιτάχυνσης της βαρύτητας.*»

Ίσως να σκέφτεστε ότι αυτό είναι σωστό, επειδή έχετε δεί εικόνες από το διαστημικό σταθμό, όπου οι αστροναύτες αιωρούνται σαν να μην έχουν βάρος. Η απάντηση σας **δεν πρέπει να βασιστεί** σε αυτές τις εικόνες, γιατί η έλλειψη βάρους των αστροναυτών **είναι φαινομενική**, όπως θα μάθουμε στην **Ενότητα 5.7.** του βιβλίου.

Για να αποφασίσουμε εάν η υπόθεση του συμμαθητή σας είναι σωστή, θα υπολογίσουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας της Γης $g(r_{ΓΣ})$ σε απόσταση $r_{ΓΣ} = 384\,500$ km, ίση με την απόσταση των κέντρων Γης - Σελήνης. Για τον υπολογισμό μας **αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας (1) για την κυκλική κίνηση, και (2) για την κίνηση της Σελήνης**.



Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται η Σελήνη, καθώς κινείται γύρω από τη Γη. Η τροχιά της Σελήνης είναι κατά προσέγγιση **κυκλική**, με ακτίνα $r_{ΓΣ}$.

Η ελκτική δύναμη από τη Γη στη Σελήνη είναι το **βάρος της Σελήνης**, $M_Σ\, g(r_{ΓΣ})$, όπου $M_Σ$ είναι η μάζα της Σελήνης και $g(r_{ΓΣ})$ είναι η ζητούμενη επιτάχυνση της βαρύτητας **της Γης** σε απόσταση $r_{ΓΣ}$.

Το βάρος $M_Σ\, g(r_{ΓΣ})$ επενεργεί ως η **απαιτούμενη κεντρομόλος** δύναμη πάνω στη Σελήνη:

$$|\vec{B}_Σ| = |\vec{F}_Κ|$$

Α. Με βάση την πιο πάνω σχέση, να δείξετε ότι **η ζητούμενη επιτάχυνση της βαρύτητας** της Γης $g(r_{ΓΣ})$ ισούται με την **κεντρομόλο επιτάχυνση** της Σελήνης.

Β. Η περίοδος περιφοράς της Σελήνης γύρω από τη Γη ισούται με T = 27,3 ημέρες. Να υπολογίσετε την κεντρομόλο επιτάχυνση της Σελήνης.

Η κεντρομόλος επιτάχυνση που υπολογίσατε ισούται με τη ζητούμενη επιτάχυνση της βαρύτητας της Γης $g(r_{ΓΣ})$, σε απόσταση $r_{ΓΣ}$ = 384 500 km, από το κέντρο της Γης. Ήταν τελικά σωστή η υπόθεση του συμμαθητή σας, ότι το βάρος ενός σώματος ελαττώνεται με την απόσταση από τη Γη; Τι βάρος θα έχει ένας αστροναύτης μάζας m = 100,0 kg σε αυτή την απόσταση;

Μία συμμαθήτριά σας έχει μία λαμπρή ιδέα: Ισχυρίζεται ότι γνωρίζει και **πώς** μεταβάλλεται το βάρος με την απόσταση. Για να σας βοηθήσει να καταλάβετε τη σκέψη της, σας προτείνει να ακολουθήσετε τα επόμενα βήματα:

Γ. Να συγκρίνετε την επιτάχυνση της βαρύτητας της Γης $g(r_{ΓΣ})$, με την αντίστοιχη επιτάχυνση $g(R_Γ)$ = 9,81 m/s^2, που μετράμε στην επιφάνεια της Γης:

$$\frac{g(R_Γ)}{g(r_{ΓΣ})} = \frac{\qquad\qquad \mathrm{m/s^2}}{\qquad\qquad \mathrm{m/s^2}} =$$

Δ. Η απόσταση $R_Γ$, στην οποία μετράμε την τιμή $g(R_Γ) = 9{,}81\ m/s^2$, είναι ίση με τη μέση ακτίνα της Γης $R_Γ = 6370$ km. Να συγκρίνετε τις αποστάσεις $R_Γ$ και $r_{ΓΣ}$:

$$\frac{r_{ΓΣ}}{R_Γ} = \frac{\qquad\qquad\text{m}}{\qquad\qquad\text{m}} =$$

Ε. Τι διαπιστώνετε για την **εξάρτηση** της επιτάχυνσης της βαρύτητας της Γης από την **απόσταση από το κέντρο της Γης**;

Άρα, το βάρος ενός σώματος **Σ** είναι αντιστρόφως ανάλογο με το **τετράγωνο της απόστασής** του από το κέντρο της Γης. Ο Νεύτωνας **γενίκευσε** αυτό το συμπέρασμα σε **οποιαδήποτε σώματα, που μπορούν να θεωρηθούν ως υλικά σημεία**:

*Το μέτρο της βαρυτικής έλξης μεταξύ δύο σωμάτων **Α** και **Β**, που μπορούν να θεωρηθούν ως υλικά σημεία, είναι αντιστρόφως ανάλογο με το τετράγωνο της μεταξύ τους απόστασης:*

$$\left|\vec{F}_{A\to B}\right| = \left|\vec{F}_{B\to A}\right| = G\frac{m_A m_B}{r_{AB}^2}$$

Η σταθερά $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \dfrac{N \times m^2}{kg^2}$ ονομάζεται **σταθερά της παγκόσμιας έλξης** και μετρήθηκε για πρώτη φορά από τον Βρεττανό φυσικό Henry Cavendish. Στο βιβλίο περιγράφεται το πείραμα μέτρησης της σταθεράς G.

Προτεινόμενες Δραστηριότητες (για το Σπίτι ή /και περαιτέρω Συζήτηση στην Τάξη)

1. Σε κάποια από τις πιο κάτω ιστοσελίδες θα βρείτε προγράμματα προσομοίωσης της κίνησης των πλανητών στο Ηλιακό σύστημα.

http://www.solarsystemscope.com
https://janus.astro.umd.edu/SolarSystems/

Στην ιστοσελίδα της NASA υπάρχει ένα πρόγραμμα διαδραστικής μελέτης του Ηλιακού συστήματος.

http://eyes.nasa.gov

Να περιηγηθείτε στις ιστοσελίδες και να εξετάσετε την κίνηση των πλανητών. **(α)** Είναι κυκλικές οι τροχιές των πλανητών; **(β)** Πώς φαίνεται ότι αλλάζει η γωνιακή ταχύτητα περιφοράς των πλανητών γύρω από τον Ήλιο, καθώς απομακρυνόμαστε από τον Ήλιο; Οι πιο απομακρυσμένοι πλανήτες έχουν μικρότερη ή μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα από τους πιο κοντινούς;

2. Στο Ένθετο των σελ. 181-182 του βιβλίου αναφέρεται ότι οι τροχιές των πλανητών είναι **ελλειπτικές, με τον Ήλιο σε μία εστία**, και περιγράφεται το σχήμα της έλλειψης. Να διαβάσετε το σχετικό Ένθετο, για να καταλάβετε πώς διαφέρει η έλλειψη από τον κύκλο. Από την προσομοίωση του ηλιακού συστήματος (ερώτηση 1), ποιοί πλανήτες νομίζετε ότι ακολουθούν τροχιές που μοιάζουν περισσότερο με κύκλο;

3. Τα **Παραδείγματα 1-3** στις σελ. 189-191 υπολογίζουν τη βαρυτική έλξη μεταξύ σωμάτων διαφόρων μαζών. Να μελετήσετε τα παραδείγματα αυτά. Τι μάζες πρέπει να έχουν τα σώματα που έλκονται με δυνάμεις παγκόσμιας έλξης, έτσι ώστε το μέτρο αυτών των δυνάμεων να είναι σημαντικό; Ακολουθώντας τα παραδείγματα, να λύσετε την **άσκηση 1** στη σελ. 208.

4. Στις σελ. 191-193 περιγράφεται το ταξίδι του διαστημοπλοίου Voyager 1, το οποίο έχει εξέλθει από το ηλιακό μας σύστημα και βρίσκεται σε απόσταση 20 δισεκατομμύρια χιλιόμετρα από τη Γη. Να διαβάσετε το σχετικό απόσπασμα του βιβλίου. Σας κάνει εντύπωση ότι το Voyager νιώθει ακόμα μία μετρήσιμη βαρυτική έλξη από τον Ήλιο, παρά την τεράστια απόσταση που το χωρίζει από αυτόν; Να λύσετε την **άσκηση 2** στη σελ. 208.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την αποστολή του Voyager 1, μπορείτε να περιηγηθείτε στην ιστοσελίδα της NASA:

http://voyager.jpl.nasa.gov/index.html

Προτεινόμενη Δραστηριότητα 2

Έλεγχος του Νόμου Παγκόσμιας Έλξης μεταξύ Ηλίου και Πλανητών.

Χρόνος

1 Διδακτική Περίοδος (ή άσκηση για το σπίτι)

Σχετική θεωρία

Ενότητα **5.1.**, Σελ. 187-189.

Στην **ΠΔ1** καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι **η δύναμη παγκόσμιας έλξης μεταξύ δύο σωμάτων μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο της μεταξύ τους απόστασης.**

Στην **ΠΔ2** θα ελέγξετε αυτό το συμπέρασμα για τη βαρυτική έλξη **μεταξύ των πλανητών και του Ήλιου.**

Προσοχή

Στα προβλήματα Παγκόσμιας Έλξης απαιτούνται υπολογισμοί αριθμών που περιέχουν δυνάμεις του 10. Σας **συστήνουμε** να γράφετε στο τέλος κάθε έκφρασης τις δυνάμεις του 10, και να **εκτελείτε** ξεχωριστά τις πράξεις μεταξύ τους, **όπως στα παραδείγματα του βιβλίου**. Μην ξεχνάτε να γράφετε και τις μονάδες μέτρησης.

Πίνακας Α

Αστρονομικά Δεδομένα για την Κίνηση των Πλανητών του Ηλιακού Συστήματος γύρω από τον Ήλιο.

Πλανήτης (Π)	**Περίοδος** T_Π **(ημέρες)**	**Τετράγωνο Γωνιακής Ταχύτητας** $\omega_\Pi^2 = (2\pi/T_\Pi)^2$ $(\mathrm{rad/s})^2$	**Μέση Ακτίνα περιφοράς** $r_{\mathrm{H}\Pi}$ (m)	**Κεντρομόλος Επιτάχυνση** $\lvert\vec{\alpha}_{\mathrm{K}\Pi}\rvert = \omega_\Pi^2 r_{\mathrm{H}\Pi}$ $(\mathrm{m/s^2})$	$\dfrac{\lvert\vec{\alpha}_{\mathrm{K}\Gamma\eta\varsigma}\rvert}{\lvert\vec{\alpha}_{\mathrm{K}\Pi}\rvert}$	$\left(\dfrac{r_{\mathrm{H}\Pi}}{r_{\mathrm{H}\Gamma\eta\varsigma}}\right)^2$
Αφροδίτη	225		$1{,}1 \times 10^{11}$			0,5
Γη	365	$4{,}0 \times 10^{-14}$	$1{,}5 \times 10^{11}$	$6{,}0 \times 10^{-3}$	1	1
Άρης	687		$2{,}3 \times 10^{11}$			2,4
Δίας	4333		$7{,}8 \times 10^{11}$			27

Θα κάνετε την προσέγγιση ότι οι πλανήτες εκτελούν **ομαλή κυκλική κίνηση** με κέντρο τον Ήλιο. Στην 2η στήλη του **Πίνακα Α** περιλαμβάνεται η **περίοδος περιφοράς** T_{Π} και στην 4η στήλη η **ακτίνα** $r_{Η\Pi}$ της κυκλικής τροχιάς των πλανητών γύρω από τον Ήλιο.

Α. **Στην ερώτηση 1 της ΠΔ1** σας προτείναμε να περιηγηθείτε σε κάποιες ιστοσελίδες και να μελετήσετε προσομοιώσεις των πλανητών του Ηλιακού συστήματος. Να παρατηρήσετε πώς μεταβάλλονται οι περίοδοι των πλανητών του **Πίνακα Α**, καθώς αυξάνεται η απόστασή τους από τον Ήλιο. Είναι σε συμφωνία αυτό με τις παρατηρήσεις σας από τις προσομοιώσεις του Ηλιακού συστήματος;

Στον **Πίνακα Α** έχουμε ήδη συμπληρώσει τα στοιχεία για την περιφορά της **Γης** γύρω από τον Ήλιο. Να παρατηρήσετε ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση της Γης ισούται με $6{,}0 \times 10^{-3}$ m/s^2.

Β. Η Γη κινείται γύρω από τον Ήλιο σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r_{ΗΓ} = 1{,}5 \times 10^{11}$ m. Να δείξετε ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση της Γης ισούται με την **επιτάχυνση της βαρύτητας λόγω του Ήλιου**, σε απόσταση ίση με $r_{ΗΓ}$.

Στα επόμενα θα υπολογίσετε τα στοιχεία του **Πίνακα Α** για τους υπόλοιπους πλανήτες, και **θα συγκρίνετε την κεντρομόλο επιτάχυνση των άλλων πλανητών με την κεντρομόλο επιτάχυνση της Γης.**

Γ. Από την περίοδο περιφοράς της Αφροδίτης, να υπολογίσετε το τετράγωνο της γωνιακής ταχύτητας της Αφροδίτης ω_{A}^2 και να συμπληρώσετε την 3η στήλη. Κατόπιν, να υπολογίσετε την κεντρομόλο επιτάχυνση της Αφροδίτης, $|\vec{\alpha}_{\mathrm{KA}}| = \omega_{\mathrm{A}}^2 r_{\mathrm{HA}}$. Αυτή είναι η **επιτάχυνση της βαρύτητας λόγω του Ήλιου**, $g_{\mathrm{H}}(r_{\mathrm{HA}})$, σε απόσταση από τον Ήλιο ίση με r_{HA}.

$\omega_{\mathrm{A}}^2 =$

$|\vec{\alpha}_{\mathrm{KA}}| = \omega_{\mathrm{A}}^2 r_{\mathrm{HA}} =$

Δ. Ποια είναι μεγαλύτερη, η κεντρομόλος επιτάχυνση της Αφροδίτης, ή της Γης; Είναι αναμενόμενο αυτό, με βάση τις αποστάσεις Ήλιου - Αφροδίτης και Ήλιου - Γης; (Θυμίζουμε ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση κάθε πλανήτη ισούται με την επιτάχυνση της βαρύτητας **του Ήλιου**, στην απόσταση που βρίσκεται ο πλανήτης).

Ε. Να συγκρίνετε την κεντρομόλο επιτάχυνση της Αφροδίτης και της Γης, και να συμπληρώσετε την 6η στήλη του Πίνακα Α.

$$\frac{|\vec{\alpha}_{\mathrm{K\Gamma\eta\varsigma}}|}{|\vec{\alpha}_{\mathrm{KA}}|} =$$

Ο λόγος που βρήκατε ισούται με το λόγο των αντίστοιχων επιταχύνσεων της βαρύτητας του Ήλιου:

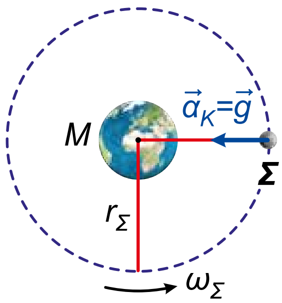
$$\frac{|\vec{\alpha}_{\mathrm{K\Gamma\eta\varsigma}}|}{|\vec{\alpha}_{\mathrm{KA}}|} = \frac{g_{\mathrm{H}}(r_{\mathrm{H\,\Gamma\eta\varsigma}})}{g_{\mathrm{H}}(r_{\mathrm{HA}})}$$

ΣΤ. Να συγκρίνετε τους λόγους $\dfrac{|\vec{\alpha}_{\text{ΚΓης}}|}{|\vec{\alpha}_{\text{ΚΠ}}|}$ και $\dfrac{r^2_{\text{ΗΠ}}}{r^2_{\text{Η Γης}}}$. Τι παρατηρείτε;

Είναι σε συμφωνία το αποτέλεσμά σας με τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης;

Προτεινόμενη Δραστηριότητα 3

Σχέση ανάμεσα στην Περίοδο Περιφοράς και την Ακτίνα Περιφοράς ενός Δορυφόρου.



Χρόνος

25 λεπτά (ή άσκηση για το σπίτι)

Σχετική θεωρία

Ενότητα **5.6.**, Σελ. 198-201.

Στην **ΠΔ1** δείξαμε ότι, όταν ένα σώμα **Σ** κινείται σε κυκλική τροχιά, υπό την επίδραση της δύναμης παγκόσμιας έλξης **από ένα ουράνιο σώμα μάζας** *M*, η κεντρομόλος επιτάχυνση του **Σ** ισούται με την επιτάχυνση της βαρύτητας λόγω του ουράνιου σώματος.

Α. Ξεκινώντας από την ισότητα των δύο επιταχύνσεων, να δείξετε ότι προκύπτουν οι εξής σχέσεις ανάμεσα στην περίοδο περιφοράς T_Σ και την ακτίνα περιφοράς r_Σ του σώματος Σ:

$$r_\Sigma^3 = \frac{GM}{4\pi^2}T_\Sigma^2 \Rightarrow T_\Sigma^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r_\Sigma^3$$

Στην **ΠΔ3** θα επιβεβαιώσετε ότι αυτή η σχέση περιγράφει την κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο. Από τα αστρονομικά δεδομένα του **Πίνακα Α** (**ΠΔ2**) γνωρίζουμε ήδη ότι η περίοδος περιφοράς ενός πλανήτη **αυξάνεται** με την ακτίνα περιφοράς.

Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα.

Πλανήτης (Π)	**Περίοδος** T_Π (days)	**Τετράγωνο Περιόδου** T_Π^2 $(\text{days})^2$	**Μέση Ακτίνα περιφοράς** $r_{\text{ΗΠ}}$ (m)	**Κύβος Ακτίνας** $r_{\text{ΗΠ}}^3$ (m^3)	$\mathrm{A} = \dfrac{r_{\text{ΗΠ}}^3}{T_\Pi^2}$ $\left(\dfrac{\text{m}^3}{\text{days}^2}\right)$
Αφροδίτη	225		$1{,}1 \times 10^{11}$		
Γη	365		$1{,}5 \times 10^{11}$		
Άρης	687		$2{,}3 \times 10^{11}$		
Δίας	4333		$7{,}8 \times 10^{11}$		

Α. Πώς μεταβάλλεται ο λόγος $\mathrm{A} = r_{\text{ΗΠ}}^3 / T_\Pi^2$ από πλανήτη σε πλανήτη;

Β. Εάν γνωρίζουμε την περίοδο και ακτίνα περιφοράς ενός δορυφόρου, μπορούμε να υπολογίσουμε την ακτίνα περιφοράς ενός άλλου δορυφόρου γύρω από το **ίδιο** ουράνιο σώμα. Να διαβάσετε το σχετικό **Παράδειγμα 2** της **σελ. 200**.

Γ. Εάν είναι γνωστή η περίοδος και η ακτίνα περιφοράς ενός δορυφόρου, μπορούμε να υπολογίσουμε **τη μάζα** του ουράνιου σώματος, γύρω από το οποίο περιφέρεται:

$$r_\Sigma^3 = \frac{GM}{4\pi^2} T_\Sigma^2 \Rightarrow M = \frac{4\pi^2}{G} \frac{r_\Sigma^3}{T_\Sigma^2}$$

Να διαβάσετε το σχετικό **Παράδειγμα 3** της **σελ. 201**.

Β. Από τα δεδομένα του προηγούμενου Πίνακα, τη μάζα ποιού ουράνιου σώματος μπορείτε να υπολογίσετε; Να διαλέξετε τα δεδομένα για έναν πλανήτη, και να κάνετε τον υπολογισμό. Να συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με τη μάζα για το ίδιο ουράνιο σώμα, που περιέχεται στον Πίνακα 2 της σελ. 209.

Επιπρόσθετες Προτεινόμενες Ερωτήσεις:

1. Να λύσετε το πρόβλημα **5Β** της σελ. 209.

2. Πώς εξαρτάται η περίοδος περιφοράς ενός δορυφόρου **(1)** από τη μάζα του, **(2)** από τη μάζα του κεντρικού ουράνιου σώματος, και **(3)** από την ακτίνα περιφοράς; Να λύσετε τις ασκήσεις **6** και **7** στη σελ. 209.

3. Ποιό μέγεθος εισέρχεται στη σχέση ακτίνας - περιόδου περιφοράς ενός δορυφόρου, όταν η τροχιά του δορυφόρου είναι ελλειπτική; (η απάντηση είναι στη σελ. 199). Να διαβάσετε το **Παράδειγμα 2** της σελ. 200 και να λύσετε την **άσκηση 8** της σελ. 209.

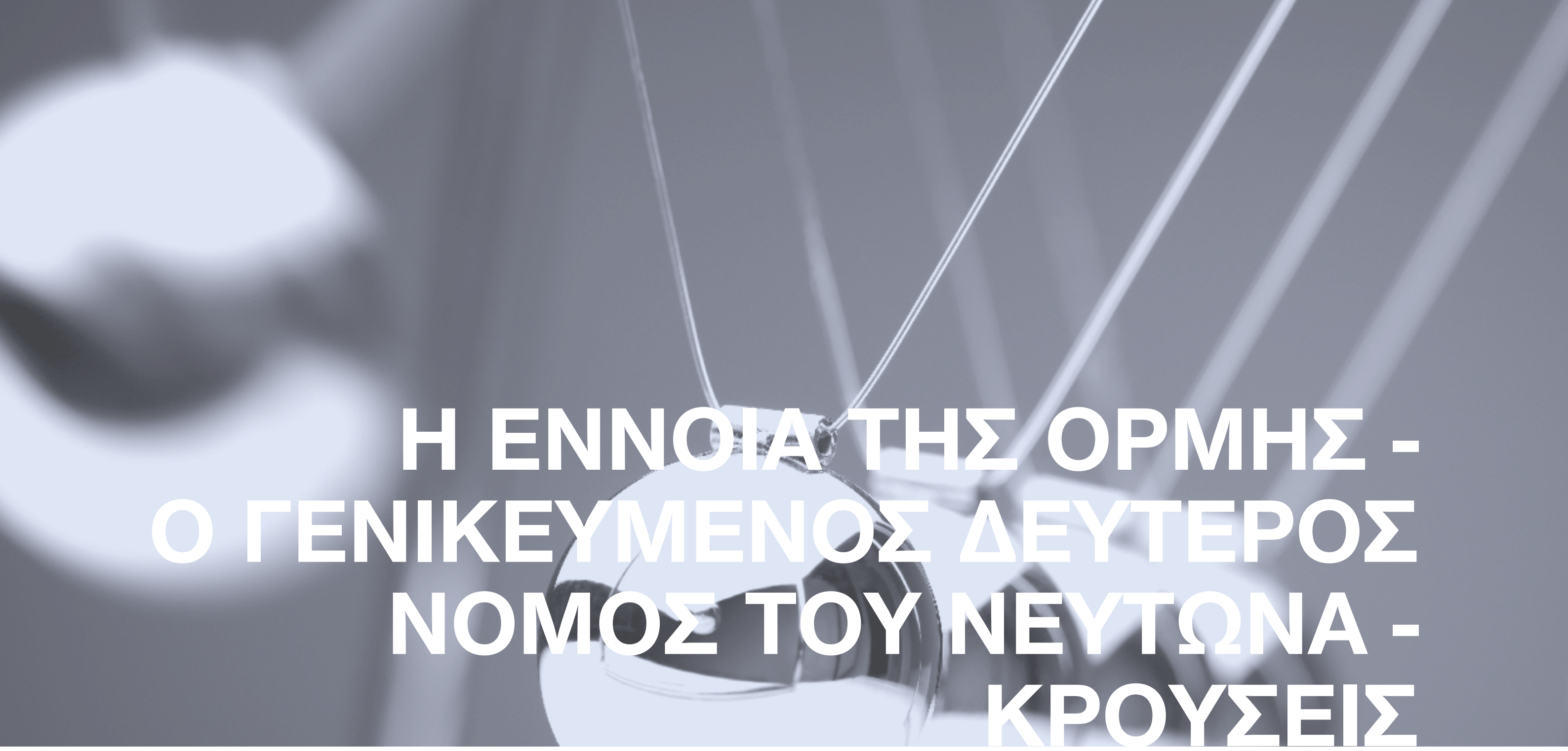
4. Η ακτίνα περιφοράς του δορυφόρου **Ευρώπη** γύρω από τον Δία είναι $r_{\mathrm{E}} = 6{,}7 \times 10^8$ m και η περίοδος περιφοράς του είναι 3,55 ημέρες. Να υπολογίσετε τη μάζα του Δία και να τη συγκρίνετε με την ακριβή τιμή $M_{\Delta} = 1{,}90 \times 10^{27}$ kg.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ - Ο ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ - ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Στο Κεφάλαιο 6:

- **Εισάγουμε** το φυσικό μέγεθος της **ορμής**.
- **Διατυπώνουμε** τη γενικευμένη μορφή του Δεύτερου Νόμου του Νεύτωνα.
- **Ορίζουμε** τη **μέση συνισταμένη δύναμη** σε ένα χρονικό διάστημα ως τον μέσο ρυθμό μεταβολής της ορμής στο ίδιο διάστημα.
- **Αναλύουμε** τους παράγοντες που επηρεάζουν τη μέση συνισταμένη δύναμη σε ένα σώμα.
- **Εισάγουμε** το φυσικό μέγεθος της **Ώθησης Δύναμης**.
- **Εξηγούμε** ότι η Ώθηση Δύναμης σε ένα σώμα ισούται με τη μεταβολή της ορμής του σώματος στο ίδιο χρονικό διάστημα.
- **Ορίζουμε** το **Κέντρο Μάζας (ΚΜ)** συστήματος σωμάτων, που θεωρούνται υλικά σημεία.
- **Αποδεικνύουμε** ότι το ΚΜ ηρεμεί ή κινείται με σταθερή ταχύτητα όταν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων στο σύστημα είναι μηδενική.

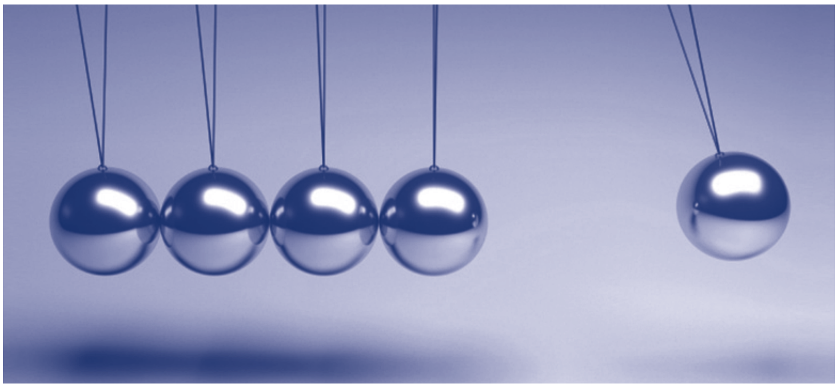


Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ - Ο ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ - ΚΡΟΥΣΕΙΣ

- **Εξάγουμε** τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το ΚΜ.
- **Αποδεικνύουμε** ότι η ορμή ενός συστήματος σωμάτων διατηρείται όταν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων στο σύστημα μηδενίζεται, και διατηρείται **κατά προσέγγιση** όταν η Ώθηση των εξωτερικών δυνάμεων είναι μικρή.
- **Αναδεικνύουμε** διαφορές ανάμεσα στα φυσικά μεγέθη της Ορμής και της Κινητικής Ενέργειας.
- **Διακρίνουμε** τις κρούσεις σε ελαστικές και ανελαστικές.
- **Εξηγούμε** ότι η συνολική ορμή διατηρείται τόσο στις ελαστικές, όσο και στις ανελαστικές κρούσεις.
- **Μελετούμε** περιπτώσεις ελαστικών και ανελαστικών κρούσεων.

Σύμφωνα με τον Δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, γνωρίζοντας τη συνισταμένη δύναμη που δρά σε ένα σώμα και τη μάζα του σώματος μπορούμε να υπολογίσουμε τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του σώματος (την επιτάχυνση). Στην καθημερινή μας ζωή προκύπτουν ερωτήσεις όπως οι επόμενες:

- Ποιό απαιτεί μεγαλύτερη δύναμη για να σταματήσει κατά την πρόσκρουσή του σε έναν τοίχο, ένα φορτηγό που κινείται με μικρή ταχύτητα, ή ένα μικρό αυτοκίνητο που κινείται με μεγάλη ταχύτητα;
- Γιατί κατά την εκπυρσοκρότηση ενός όπλου, η σφαίρα και το όπλο κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις, με πολύ διαφορετικές ταχύτητες; Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ αυτών των ταχυτήτων;
- Γιατί εάν μετά την εκπυρσοκρότηση η σφαίρα και το όπλο έρθουν σε επαφή με ένα σώμα, η σφαίρα προκαλεί πολύ μεγαλύτερη ζημιά από το όπλο;
- Γιατί στην κούνια του Νεύτωνα κινούνται μόνο οι ακραίες σφαίρες, ενώ οι ενδιάμεσες σφαίρες παραμένουν ακίνητες;

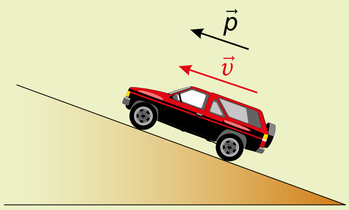


Προσπαθώντας να απαντήσουμε αυτές τις ερωτήσεις, διαπιστώνουμε ότι **γνωρίζουμε ελάχιστα για τις δυνάμεις** που ασκούνται στα εμπλεκόμενα σώματα. Στο παρόν κεφάλαιο θα διαπιστώσουμε ότι αυτές οι ερωτήσεις απαντώνται εύκολα, με την εισαγωγή δύο νέων φυσικών μεγεθών, της **ορμής** και της **ώθησης δύναμης**.

Επιπρόσθετα, θα δείξουμε ότι η συνολική ορμή ενός συστήματος σωμάτων παραμένει σταθερή, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις. Αυτή **η αρχή της διατήρησης της ορμής** αποτελεί θεμελιώδη συμπεριφορά της φύσης. Όπως και η αρχή της διατήρησης της ενέργειας, απλουστεύει τη μελέτη πολλών προβλημάτων, στα οποία αλληλεπιδρούν δύο ή περισσότερα σώματα.

6.1. Το Φυσικό Μέγεθος της Ορμής

Έστω σώμα μάζας m κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς. Ορίζουμε ως **ορμή** του σώματος το γινόμενο της μάζας του σώματος επί την ταχύτητά του:



Ορμή: $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$

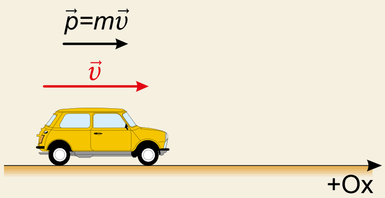
Η ορμή είναι διανυσματικό μέγεθος, ομόρροπο με την ταχύτητα του σώματος, και εκφράζεται σε μονάδες $\mathrm{kg}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Παρατήρηση

Όπως η ταχύτητα, έτσι και η ορμή ενός σώματος εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς.

Παράδειγμα 1

Α. Να υπολογίσετε την ορμή ενός αυτοκινήτου μάζας $m = 785$ kg, το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου 72,0 km/h ως προς το έδαφος.



Θεωρούμε άξονα παράλληλο προς την ταχύτητα του αυτοκινήτου, και ορίζουμε ως θετική τη φορά της κίνησης. Η ορμή του αυτοκινήτου είναι ομόρροπο διάνυσμα με την ταχύτητα, και έχει αλγεβρική τιμή:

$$p = m\upsilon = (785\ \mathrm{kg}) \times \left(72{,}0\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \times \frac{1000\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{km}} \times \frac{1\mathrm{h}}{3600\ \mathrm{s}}\right) = (785\ \mathrm{kg}) \times \left(20{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 15700\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Β. Πώς θα μεταβληθεί η ορμή του αυτοκινήτου, εάν **διπλασιασθεί** η ταχύτητά του;

$$p' = m\upsilon' = m\,(2\upsilon) = (785\ \mathrm{kg}) \times \left(2 \times 20{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 31400\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Γ. Πώς θα μεταβληθεί η ορμή του αυτοκινήτου, εάν **διπλασιασθεί** η μάζα του;

$$p' = m'\upsilon = (2m)\upsilon = (2 \times 785\ \mathrm{kg}) \times \left(20{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 31400\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Παρατήρηση

Η ορμή είναι ανάλογη με τη μάζα και με την ταχύτητα του σώματος.

Παράδειγμα 2

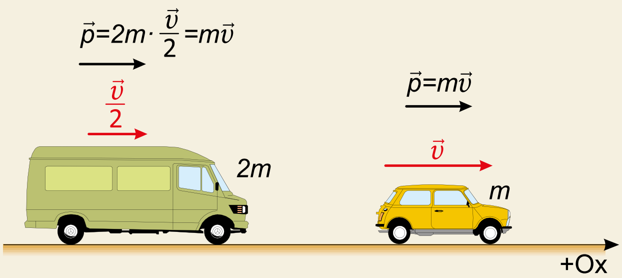
Ένα φορτηγάκι μάζας $m_φ = 1570$ kg έχει ορμή ίσου μέτρου με την ορμή του αυτοκινήτου του παραδείγματος 1. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του φορτηγού.

Το μέτρο της ορμής ενός σώματος είναι $|\vec{p}| = m|\vec{v}|$. Άρα, το μέτρο της ταχύτητας του φορτηγού είναι:

$$|\vec{v}_φ| = \frac{|\vec{p}|}{m_φ} = \frac{15700 \text{ kg m/s}}{1570 \text{ kg}} = 10{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 36{,}0\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Το φορτηγάκι κινείται με **ταχύτητα μισού μέτρου**, αλλά έχει ορμή ίσου μέτρου με το αυτοκίνητο, επειδή έχει **διπλάσια μάζα**:

$$|\vec{p}| = (2m)\,(|\vec{v}|/2) = m\,|\vec{v}|$$



Παρατήρηση

Δύο σώματα, που κινούνται με ορμές ίσου μέτρου, **δεν** έχουν γενικά ταχύτητες ίσου μέτρου. Για ορμή δεδομένου μέτρου, το μέτρο της ταχύτητας είναι **αντιστρόφως ανάλογο με τη μάζα**.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

6.1.1. Είναι δυνατόν δύο σώματα, που κινούνται με την ίδια ταχύτητα, να έχουν διαφορετική ορμή;

6.1.2. Είναι δυνατόν μια σφαίρα να έχει μεγαλύτερη ορμή από ένα τρένο;

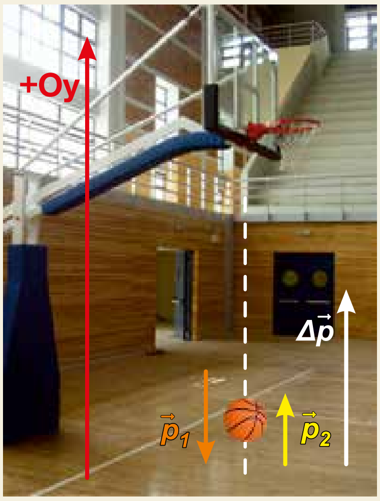
Παράδειγμα 3

Μία μπάλα του μπάσκετ, μάζας $m = 0{,}630$ kg, χτυπά στο έδαφος με κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου 5,00 m/s και αναπηδά με κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου 4,00 m/s. Θα υπολογίσουμε τη **μεταβολή στην ορμή** της μπάλας κατά την αναπήδησή της.

Επειδή η ορμή είναι διανυσματικό μέγεθος, η μεταβολή στην ορμή της μπάλας ισούται με

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

όπου $\vec{p}_1$ και $\vec{p}_2$ είναι η αρχική και η τελική ορμή της μπάλας.



Ορίζουμε έναν κατακόρυφο άξονα Oy, με **θετική** φορά προς τα **πάνω.** Ως προς αυτόν τον άξονα, η ορμή της μπάλας αμέσως πριν την αναπήδηση έχει αλγεβρική τιμή

$$p_1 = (0{,}630\ \text{kg}) \times (-5{,}00\ \text{m/s}) = -3{,}15\ \text{kg m/s}$$

και αμέσως μετά την αναπήδηση έχει αλγεβρική τιμή

$$p_2 = (0{,}630\ \text{kg}) \times (4{,}00\ \text{m/s}) = 2{,}52\ \text{kg m/s}$$

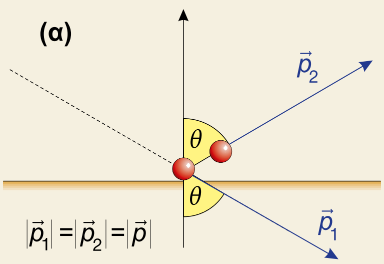
Η μεταβολή στην ορμή της μπάλας ισούται με:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 2{,}52\ \text{kg m/s} - (-3{,}15\ \text{kg m/s}) = 5{,}67\ \text{kg m/s}$$

Η θετική τιμή εκφράζει το γεγονός ότι το διάνυσμα $\Delta\vec{p}$ έχει φορά προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα (προς τα επάνω).

Προσοχή

Στη μεταβολή της ορμής εισέρχονται οι αλγεβρικές τιμές της αρχικής και της τελικής ορμής.



Παράδειγμα 4

Το διπλανό σχήμα **(α)** απεικονίζει μία μπάλα του τένις, η οποία προσπίπτει σε οριζόντιο έδαφος με ορμή $\vec{p}_1$, που σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο. Η μπάλα αναπηδά με ορμή $\vec{p}_2$ ίσου μέτρου, και ίσης γωνίας θ με την κατακόρυφο.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη μεταβολή $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ με τους εξής τρόπους:

Α. Ανάλυση των Ορμών σε Συνιστώσες.

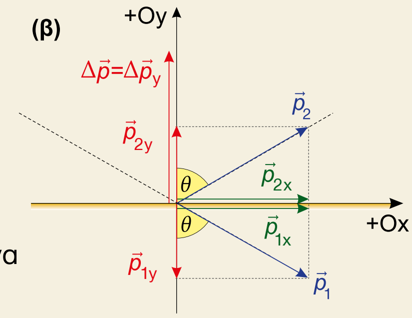
Ακολουθούμε την ίδια μεθοδολογία, όπως για την ανάλυση δυνάμεων. Επιλέγουμε ένα σύστημα κάθετων μεταξύ τους αξόνων **Ox** και **Oy**. Οι συνιστώσες της αρχικής και τελικής ορμής είναι (σχήμα **β**):

$$p_{1x} = +|\vec{p}|\,\eta\mu\theta \qquad p_{1y} = -|\vec{p}|\,\sigma\upsilon\nu\theta$$

και

$$p_{2x} = +|\vec{p}|\,\eta\mu\theta \qquad p_{2y} = +|\vec{p}|\,\sigma\upsilon\nu\theta$$

όπου $|\vec{p}|$ είναι το μέτρο της αρχικής και της τελικής ορμής. Το διάνυσμα $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ έχει συνιστώσες:



$$\Delta p_x = p_{2x} - p_{1x} = +|\vec{p}|\eta\mu\theta - |\vec{p}|\eta\mu\theta = 0$$

$$\Delta p_y = p_{2y} - p_{1y} = |\vec{p}|\sigma\upsilon\nu\theta - (-|\vec{p}|\sigma\upsilon\nu\theta) = 2|\vec{p}|\sigma\upsilon\nu\theta$$

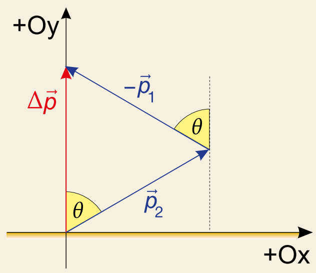
Άρα, η μεταβολή της ορμής $\Delta\vec{p}$ έχει διεύθυνση κατά τον άξονα **Oy**, και μέτρο

$$|\Delta\vec{p}| = \sqrt{(\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2} = 2|\vec{p}|\sigma\upsilon\nu\theta$$

Β. Γραφικός Προσδιορισμός.

Σχεδιάζουμε διαδοχικά διανύσματα ίσα με τα $\vec{p}_2$ και $-\vec{p}_1$, και εφαρμόζουμε τον κανόνα του πολυγώνου. Το άθροισμα που υπολογίζουμε είναι η ζητούμενη μεταβολή:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1).$$



Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

6.1.3. Μία μπάλα του τένις χτυπά σε έναν τοίχο με ορμή μέτρου $|\vec{p}|$. Εάν επιστρέψει πίσω με ορμή ίσου μέτρου, η μεταβολή στην ορμή της είναι ίση με μηδέν;

6.2. Η Γενικευμένη Μορφή του 2ου Νόμου του Νεύτωνα

Ξεκινώντας από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα, μπορούμε να εκφράσουμε τη συνισταμένη δύναμη, που δρά σε ένα σώμα σταθερής μάζας σε κάποια χρονική στιγμή *t*, με την εξής σχέση:

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

όπου Δt πολύ μικρό χρονικό διάστημα γύρω από τη χρονική στιγμή *t*.

Συμπεραίνουμε ότι η συνισταμένη δύναμη, που δρά σε ένα σώμα σε **κάποια χρονική στιγμή**, ισούται με τον **στιγμιαίο** ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος αυτή τη χρονική στιγμή.

Σε πολλές περιπτώσεις **η μάζα του κινούμενου σώματος μεταβάλλεται με τον χρόνο.** Για παράδειγμα, η μάζα ενός πυραύλου ελαττώνε-

ται εξ΄ αιτίας της αποβολής των αερίων καύσης. Αποδεικνύεται **πειραματικά** ότι και σε αυτές τις περιπτώσεις, η συνισταμένη δύναμη ισούται με τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος.

Για τον λόγο αυτό, η πιο πάνω εξίσωση συνιστά τη γενικευμένη μορφή του Δεύτερου Νόμου του Νεύτωνα.

Γενικευμένη Μορφή του Δευτέρου Νόμου του Νεύτωνα:

$\sum\vec{F} = \dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$, Δt πολύ μικρό χρονικό διάστημα γύρω από τη χρονική στιγμή t.

Παρατήρηση

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος είναι σταθερός, όταν η συνισταμένη δύναμη που δρα στο σώμα είναι σταθερή. Σε αυτή την περίπτωση, η ορμή του σώματος μεταβάλλεται γραμμικά με τον χρόνο.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

6.2.1. Χρησιμοποιώντας τη γενικευμένη μορφή του Δεύτερου Νόμου του Νεύτωνα να δείξετε σε ποιές άλλες μονάδες μπορεί να εκφραστεί η ορμή ενός σώματος, εκτός από kg m/s.

6.3. Η Μέση Συνισταμένη Δύναμη

Σε πολλές περιπτώσεις κινήσεων, η συνισταμένη δύναμη μεταβάλλεται με τον χρόνο. Για παράδειγμα όταν:

- Ένας σιδηρουργός χτυπά με το σφυρί του ένα σιδερένιο ραβδί.
- Δύο αυτοκίνητα συγκρούονται.
- Μία μπάλα αναπηδά σε δάπεδο.
- Ένα βέλος εκτοξεύεται από τη χορδή ενός τόξου.

Σε πολλά από αυτά τα παραδείγματα δεν γνωρίζουμε τη συνισταμένη δύναμη, που δρα στο σώμα, σε κάθε χρονική στιγμή. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε τον **μέσο ρυθμό** μεταβολής της ορμής του σώματος, σε ένα αυθαίρετα μεγάλο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_{τελ} - t_{αρχ}$, για να **ορίσουμε** μία **μέση συνισταμένη** δύναμη:

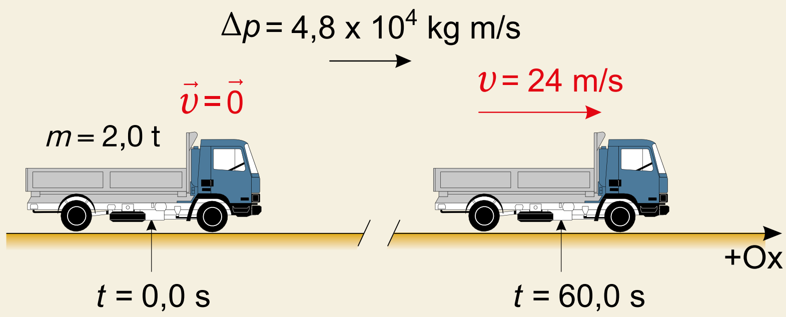
$$\left(\sum\vec{F}\right)_{μ} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ}}{t_{τελ} - t_{αρχ}}$$

Σε πολλά πειράματα, μετρώντας τη μεταβολή της ορμής ενός σώματος σε ένα χρονικό διάστημα Δt προσδιορίζουμε τη μέση συνισταμένη δύναμη που δρα στο σώμα. Ελαττώνοντας το χρονικό διάστημα, αποκτούμε καλύτερη εκτίμηση για τη στιγμιαία συνισταμένη δύναμη που δρα στο σώμα.

6.4. Εφαρμογές Υπολογισμού της Μέσης Συνισταμένης Δύναμης από τη Μεταβολή της Ορμής

Παράδειγμα 1
Κίνηση ενός Φορτηγού

Ένα φορτηγό συνολικής μάζας 2,0 t (τόνων) κινείται σε οριζόντιο ευθύγραμμο δρόμο. Το φορτηγό ξεκινά από την ηρεμία και σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 60{,}0$ s αποκτά ταχύτητα μέτρου 24 m/s.



Θεωρούμε άξονα με θετική κατεύθυνση αυτή της κίνησης του φορτηγού. Η μεταβολή της ορμής του φορτηγού έχει αλγεβρική τιμή:

$$\Delta p = p_{\tau\varepsilon\lambda} - p_{\alpha\rho\chi} = m\upsilon - 0 = (2{,}0 \text{ x } 10^3 \text{ kg}) \times (24 \text{ m/s}) = 4{,}8 \times 10^4 \text{ kg m/s}$$

Η μέση συνισταμένη δύναμη στο φορτηγό έχει οριζόντια διεύθυνση και αλγεβρική τιμή:

$$\left(\sum F\right)_{\mu} = \Delta p / \Delta t = (4{,}8 \times 10^4 \text{ kg m/s}) / (60{,}0 \text{ s}) = 8{,}0 \times 10^2 \text{ N}$$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

6.4.1. Το μέτρο της μέσης συνισταμένης δύναμης στο πιο πάνω παράδειγμα ενδεχομένως να σας φαίνεται μικρό. Σε τι οφείλεται η μικρή τιμή;

6.4.2. Ένας συμμαθητής σας επιμένει ότι η συνισταμένη δύναμη στο φορτηγό είναι σταθερή και έχει μέτρο $8{,}0 \times 10^2$ N σε όλη τη διάρκεια των 60,0 s. Είναι σωστό αυτό το συμπέρασμα;

Παράδειγμα 2

Σε ένα σερβίς αγώνα τένις, η μπάλα μάζας $5{,}80 \times 10^{-2}$ kg έχει μηδενική αρχική ταχύτητα, και φεύγει με οριζόντια ταχύτητα μέτρου 55,0 m/s. Μετρήσεις με φωτοκάμερα υψηλής ακριβείας εκτιμούν ότι η επαφή της ρακέτας με τη μπάλα διαρκεί $\Delta t = 4{,}00 \times 10^{-3}$ s.

Θεωρούμε έναν οριζόντιο άξονα, με θετική κατεύθυνση κατά τη φορά κίνησης της μπάλας. Η μεταβολή της ορμής της μπάλας είναι διάνυσμα με οριζόντια διεύθυνση και αλγεβρική τιμή

$$\Delta p = p_{\tau\varepsilon\lambda} - p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\varepsilon\lambda} - 0 = (5{,}80 \times 10^{-2}\ \text{kg}) \times (55{,}0\ \text{m/s}) = 3{,}19\ \text{kg m/s}.$$

Από τη μεταβολή της ορμής, υπολογίζουμε τη **μέση συνισταμένη δύναμη** στη μπάλα:

$$\left(\sum F\right)_{\mu} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{3{,}19\ \text{kg m/s}}{4{,}00 \times 10^{-3}\ \text{s}} = 768\ \text{N}$$

Η πραγματική δύναμη από τη ρακέτα στη μπάλα δεν έχει σταθερή τιμή κατά τη διάρκεια του διαστήματος των $4{,}00 \times 10^{-3}$ s. Η μέγιστη δύναμη μπορεί να είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη μέση συνισταμένη δύναμη, και προκαλεί σημαντική παραμόρφωση στη μπάλα.

Παρατήρηση

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της μπάλας (3,19 kg m/s) είναι **πολύ μικρότερο** από το μέτρο της μεταβολής της ορμής του φορτηγού του **Παραδείγματος 1** ($4{,}8 \times 10^{4}$ kg m/s). Η μπάλα δέχεται **μέση συνισταμένη δύναμη συγκρίσιμου μέτρου** με το φορτηγό, επειδή η μεταβολή στην ορμή της μπάλας πραγματοποιείται σε **πολύ μικρό** χρονικό διάστημα.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

6.4.3. Ένα σώμα μάζας m ξεκινά από ηρεμία και αποκτά ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ σε χρονικό διάστημα Δt. Πώς θα μεταβληθεί το μέτρο της μέσης συνισταμένης δύναμης εάν:

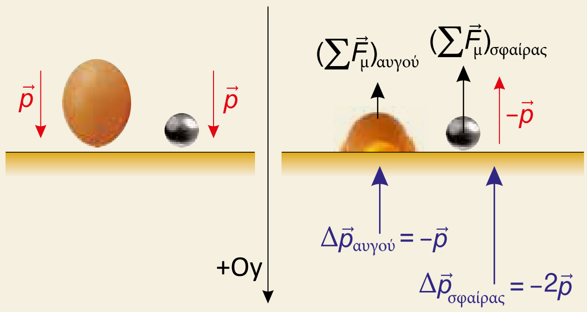
- Διπλασιαστεί η μάζα του σώματος.
- Διπλασιαστεί το χρονικό διάστημα.
- Διπλασιαστεί το μέτρο της τελικής ταχύτητας.

6.4.4. Ένα φορτηγό μάζας 2 t και ένα αυτοκίνητο μάζας 1250 kg κινούνται με την ίδια ταχύτητα, μέτρου 18,0 m/s. Υπάρχει περίπτωση να ακινητοποιήσουμε τα δύο οχήματα, ασκώντας μικρότερη δύναμη στο φορτηγό σε σύγκριση με το αυτοκίνητο;

6.4.5. Δύο πλοιάρια έλκονται από ρυμουλκό. Έστω ότι σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 2{,}5$ min, το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας του κάθε πλοιαρίου είναι $|\Delta\vec{\upsilon}| = 5$ m/s. Είναι σωστό να συμπεράνουμε ότι το ρυμουλκό ασκεί στα πλοιάρια την ίδια σε μέτρο μέση συνισταμένη δύναμη;

Παράδειγμα 3

Μία ελαστική σφαίρα και ένα αυγό, με ίσες μάζες 40,0 g, αφήνονται από ηρεμία από ύψος 1,00 m και συγκρούονται με ένα σκληρό, οριζόντιο πάτωμα.



Εξ΄ αιτίας της σύγκρουσης, το αυγό σπάει και η ταχύτητά του μηδενίζεται. Η σφαίρα αναπηδά με **αντίθετη ταχύτητα** από αυτή που είχε αμέσως πριν την επαφή της με το πάτωμα.

Θα συγκρίνουμε τη μέση συνισταμένη δύναμη στο αυγό και τη σφαίρα.

Για την περιγραφή των θέσεων χρησιμοποιούμε κατακόρυφο άξονα Oy, με θετική φορά προς τα κάτω. Η σφαίρα και το αυγό φθάνουν στο έδαφος με την **ίδια** κατακόρυφη ταχύτητα:

$$\upsilon = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times (9{,}81 \text{ m/s}^2) \times (1{,}00 \text{ m})} = 4{,}43 \text{ m/s}$$

Επειδή έχουν ίσες μάζες, έχουν την **ίδια ορμή** μόλις φθάσουν στο έδαφος:

$$p_{αυγού} = p_{σφαίρας} = m\upsilon = (40{,}0 \times 10^{-3} \text{ kg}) \times (4{,}43 \text{ m/s}) = 0{,}177 \text{ kg m/s}$$

Επειδή η ταχύτητα του αυγού μηδενίζεται, η μεταβολή στην ορμή του αυγού, κατά την πρόσκρουσή του στο έδαφος, ισούται με:

$$\Delta p_{αυγού} = p^{τελ}_{αυγού} - p^{αρχ}_{αυγού} = 0 - m\upsilon = -0{,}177 \text{ kg m/s}$$

Η ταχύτητα της σφαίρας αντιστρέφεται, οπότε η μεταβολή στην ορμή της σφαίρας είναι **διπλάσια**:

$$\Delta p_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} = p^{\tau\varepsilon\lambda}_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} - p^{\alpha\rho\chi}_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} = -m\upsilon - m\upsilon = -2 \times (0{,}177 \text{ kg m/s}) = -0{,}354 \text{ kg m/s}$$

Έστω ότι η χρονική διάρκεια της σύγκρουσης και των δύο σωμάτων με το πάτωμα ισούται με $1{,}00 \times 10^{-2}$ s. Η μέση συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο αυγό ισούται με:

$$\left(\sum F_{\mu}\right)_{\alpha\upsilon\gamma o\acute{\upsilon}} = \frac{\Delta p_{\alpha\upsilon\gamma o\acute{\upsilon}}}{\Delta t} = \frac{-0{,}177 \text{ kg m/s}}{1{,}00 \times 10^{-2} \text{ s}} = -17{,}7 \text{ N}$$

Η μέση συνισταμένη δύναμη έχει φορά προς τα επάνω (αρνητική).

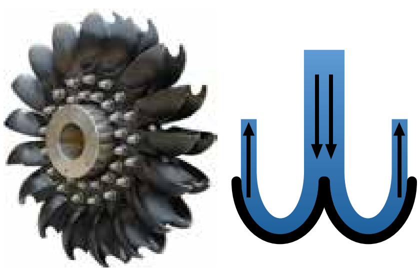
Επειδή η σφαίρα υφίσταται διπλάσια μεταβολή ορμής στο ίδιο χρονικό διάστημα, συμπεραίνουμε ότι υφίσταται διπλάσια μέση **συνισταμένη δύναμη:**

$$\left(\sum F_{\mu}\right)_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} = \frac{\Delta p_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma}}{\Delta t} = \frac{-0{,}354 \text{ kg m/s}}{1{,}00 \times 10^{-2} \text{ s}} = -35{,}4 \text{ N}$$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

6.4.6. Δύο παίκτες του bowling προσπαθούν να ανατρέψουν μία κορίνα. Η μπάλα του παίκτη **Α** χτυπά την κορίνα με ταχύτητα 45 cm/s και σταματά. Η μπάλα του παίκτη **Β** χτυπά την κορίνα με την ίδια ταχύτητα, και γυρίζει πίσω με ταχύτητα –15 cm/s. Ποιά από τις δύο μπάλες είναι πιθανότερο να ανατρέψει την κορίνα;

6.4.7. Σε πολλές εφαρμογές (π.χ. σε μεταλλεία) χρησιμοποιούνται νεροτροχοί, που περιστρέφονται με τη βοήθεια τρεχούμενου νερού. Στον τροχό του **Pelton** του πιο κάτω σχήματος, τα φτερά έχουν σχήμα κουβά για να αντιστρέφουν τη φορά του νερού που προσπίπτει στον τροχό. Γιατί ο τροχός του Pelton είναι πιο αποτελεσματικός, από τροχούς που έχουν επίπεδα φτερά;



Τροχός του Pelton. Η φορά της ορμής του νερού, που χτυπά τον τροχό, αντιστρέφεται.

Ανασκόπηση από την Α΄ Λυκείου

Στο Κεφάλαιο της Ενέργειας της Α΄ Λυκείου είχαμε ορίσει τη **μέση συνισταμένη δύναμη** σε ένα σώμα που κινείται σε ευθεία γραμμή, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας:

$$\Delta E_{\kappa\iota\nu} = W_{\sum \vec{F}} = \left(\sum F\right)_{\mu} \Delta x \Rightarrow \left(\sum F\right)_{\mu} = \frac{\Delta E_{\kappa\iota\nu}}{\Delta x}$$

όπου Δx είναι η μετατόπιση του σώματος. Είχαμε συμπεράνει ότι η **μέση συνισταμένη δύναμη**, για δεδομένη μεταβολή **στην Κινητική Ενέργεια** του σώματος, είναι **αντιστρόφως ανάλογη** με τη μετατόπιση του σώματος. Μελετήσαμε εφαρμογές αυτής της σχέσης σε προστατευτικές διατάξεις, όπως οι ζώνες παραμόρφωσης (crumble zones) και η ζώνη ασφαλείας των σύγχρονων αυτοκινήτων.

Εφαρμόζοντας τον γενικευμένο Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα, δείχνουμε τώρα ότι, για δεδομένη μεταβολή στην ορμή του σώματος, η μέση συνισταμένη δύναμη είναι **αντιστρόφως ανάλογη με το χρονικό διάστημα** Δt κατά το οποίο δρα. Για ευθύγραμμη κίνηση,

$$\left(\sum F\right)_{\mu} = \Delta p / \Delta t \propto 1/\Delta t.$$

Σημείωση

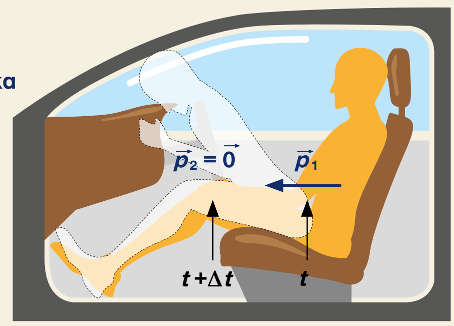
Υπολογίζουμε τη **μέση συνισταμένη δύναμη** από τον Δεύτερο Νόμο, εάν είναι γνωστό το χρονικό διάστημα Δt της δράσης της δύναμης, και από το θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας εάν είναι γνωστή η μετατόπιση Δx του σημείου εφαρμογής της δύναμης.

Παράδειγμα 4
Η Λειτουργία της Ζώνης Ασφαλείας

Α. Ένα αυτοκίνητο αρχίζει να φρενάρει, ενώ ο συνοδηγός δεν φορά ζώνη ασφαλείας. Τη στιγμή που το κεφάλι του συνοδηγού συναντά τον ανεμοθώρακα, το αυτοκίνητο έχει ακινητοποιηθεί ως προς το έδαφος. Εκείνη τη στιγμή, το κεφάλι και το επάνω μέρος του σώματος του συνοδηγού κινούνται με οριζόντια ταχύτητα 10,0 m/s ως προς το έδαφος. Ακινητοποιούνται μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = 0{,}007$ s.

Το σώμα/κεφάλι ακουμπά τον ανεμοθώρακα με ορμή $\vec{p}_1$

Το σώμα/κεφάλι ακινητοποιείται μετά από χρονικό διάστημα Δt



Θεωρούμε οριζόντιο άξονα με θετική τη φορά της κίνησης. Θα υποθέσουμε ότι το κεφάλι και το επάνω μέρος του σώματος του συνοδηγού έχουν συνολική μάζα 35,0 kg. Η ορμή του κεφαλιού-σώματος αμέσως πριν την επαφή με τον ανεμοθώρακα έχει αλγεβρική τιμή

$$p_1 = (35{,}0\ \text{kg}) \times (10{,}0\ \text{m/s}) = 35{,}0 \times 10^1\ \text{kg m/s}.$$

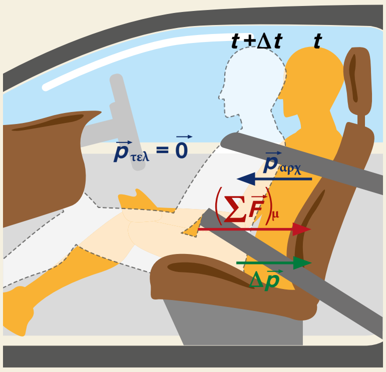
Σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 0{,}007$ s η ορμή μηδενίζεται. Άρα, κατά τη διάρκεια της επαφής, η μέση συνισταμένη δύναμη που αναπτύσσεται από τον ανεμοθώρακα στο κεφάλι (και στο επάνω μέρος του σώματος) του συνοδηγού είναι:

$$\left(\sum F\right)_\mu = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-p_1}{\Delta t} = \frac{-35{,}0 \times 10^1\ \text{kg m/s}}{0{,}007\ \text{s}} = -5 \text{ x } 10^4\ \text{N}$$

Η δύναμη αυτή είναι περίπου ίση με το βάρος ενός σώματος μάζας 5 τόνων.

Β. Στα μοντέρνα αυτοκίνητα, η ζώνη ασφαλείας προεκτείνεται κατά το φρενάρισμα, έτσι ώστε να ασκεί δύναμη για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα. Έστω ότι τη στιγμή t ακινητοποιείται το αυτοκίνητο αλλά το σώμα του συνοδηγού ($m = 70{,}0$ kg) έχει ταχύτητα $\upsilon = 10{,}0$ m/s. Λόγω αδράνειας το σώμα συνεχίζει την κίνησή του, και τελικά ακινητοποιείται σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 0{,}07$ s πριν ακουμπήσει στο μπροστινό μέρος του αυτοκινήτου ή τον ανεμοθώρακα.

Μέση δύναμη από τη ζώνη στον συνοδηγό κατά τη διάρκεια της ακινητοποιήσης



Κατά τη διάρκεια αυτού του χρονικού διαστήματος δρα στο σώμα του συνοδηγού μία μέση συνισταμένη δύναμη από τη ζώνη ασφαλείας, η οποία έχει αλγεβρική τιμή:

$$\left(\sum F\right)_\mu = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-p_1}{\Delta t} = \frac{-(70{,}0\ \text{kg}) \times (10{,}0\ \text{m/s})}{0{,}07\ \text{s}} = -10\,000\ \text{N}$$

Να παρατηρήσετε ότι η δύναμη γίνεται 5 φορές μικρότερη, επειδή δρα για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα.

Το κράνος των μοτοσυκλετιστών περιέχει στο εσωτερικό του κατάλληλο μαλακό υλικό. Κατά την πρόσκρουση του κεφαλιού του μοτοσυκλετιστή σε κάποιο εμπόδιο, το υλικό συμπιέζεται και η ακινητοποίηση του κεφαλιού πραγματοποιείται σε μεγαλύτερο χρονικό διάστημα. Όπως και στην περίπτωση της ζώνης ασφαλείας, η μέση συνισταμένη δύναμη στο κεφάλι μειώνεται σημαντικά, ελαττώνοντας την πιθανότητα σοβαρού τραυματισμού.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

6.4.8. Ένας αθλητής του καράτε μπορεί να σπάσει μία σειρά από ξύλα ή τούβλα με ένα χτύπημα. Ποιά χαρακτηριστικά πρέπει να έχει το χτύπημα, για να επιφέρει αυτό το αποτέλεσμα;

6.4.9. Ένας πυγμάχος φορά ειδικά γάντια με μαλακό υλικό, το οποίο συμπιέζεται και αυξάνει τη διάρκεια των χτυπημάτων του. Ποιές θα είναι οι συνέπειες στον αντίπαλο (και στον ίδιο), εάν προσπαθήσει να πυγμαχήσει χωρίς γάντια;

6.5. Ώθηση Δύναμης

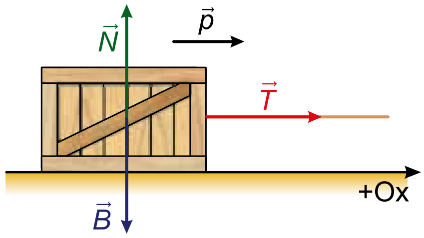
Όπως δείξαμε στην προηγούμενη ενότητα, εάν είναι γνωστή η μεταβολή της ορμής ενός σώματος σε κάποιο χρονικό διάστημα, υπολογίζουμε τη μέση συνισταμένη δύναμη στο σώμα, ακόμη κι εάν οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι άγνωστες:

$$\Delta\vec{p} \text{ γνωστή σε κάποιο χρονικό διάστημα } \Delta t \rightarrow \left(\sum\vec{F}\right)_{\mu} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Αντιστρόφως, εάν είναι γνωστή **η συνισταμένη δύναμη στο σώμα**, ως συνάρτηση του χρόνου, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μεταβολή της ορμής του σώματος σε κάποιο χρονικό διάστημα:

$$\sum\vec{F} \text{ γνωστή σε κάποιο χρονικό διάστημα } \Delta t \rightarrow \Delta\vec{p}$$

Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια ενός νέου φυσικού μεγέθους, της **Ώθησης Δύναμης.**



Α. Σταθερή Συνισταμένη Δύναμη

Το κιβώτιο του διπλανού σχήματος κινείται πάνω σε μία λεία οριζόντια επιφάνεια υπό την επίδραση μίας σταθερής οριζόντιας τάσης σχοινιού $\vec{T}$. Στο κιβώτιο δρούν επίσης το βάρος του και η κάθετη δύναμη από την επιφάνεια. Η συνισταμένη δύναμη ισούται με την τάση του σχοινιού:

$$\sum\vec{F} = \underbrace{\vec{B} + \vec{N}}_{=\vec{0}} + \vec{T} = \vec{T}$$

Έστω ότι η τάση $\vec{T}$ δρά για ένα **αυθαίρετα μεγάλο** χρονικό διάστημα $\Delta t = t_{\tau\varepsilon\lambda} - t_{\alpha\rho\chi}$.

Αφού η συνισταμένη δύναμη $\sum\vec{F} = \vec{T}$ είναι **σταθερή**, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του κιβωτίου είναι σταθερός:

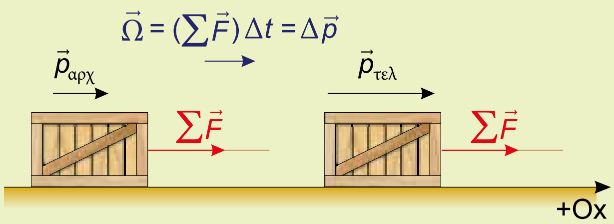
$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \sum\vec{F} = \frac{\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi}}{t_{\tau\varepsilon\lambda} - t_{\alpha\rho\chi}}$$

όπου $\vec{p}_{\alpha\rho\chi}$ και $\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ είναι η ορμή του κιβωτίου τις στιγμές $t_{\alpha\rho\chi}$ και $t_{\tau\varepsilon\lambda}$. Η συνολική μεταβολή της ορμής του κιβωτίου ισούται με:

$$\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \left(\sum\vec{F}\right)(t_{\tau\varepsilon\lambda} - t_{\alpha\rho\chi})$$

Το γινόμενο της **σταθερής** συνισταμένης δύναμης $\sum\vec{F}$ επί το χρονικό διάστημα, κατά το οποίο δρά, αντιστοιχεί στο φυσικό μέγεθος **Ώθηση Δύναμης:**

Ώθηση Σταθερής Συνισταμένης Δύναμης για χρονικό διάστημα $\Delta t = t_{\tau\varepsilon\lambda} - t_{\alpha\rho\chi}$



$$\vec{\Omega} = \left(\sum\vec{F}\right)\Delta t = \left(\sum\vec{F}\right)(t_{\tau\varepsilon\lambda} - t_{\alpha\rho\chi}) = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi}$$

Η Ώθηση Δύναμης είναι **διανυσματικό** μέγεθος και ισούται με τη μεταβολή της ορμής. Στο σύστημα SI εκφράζεται σε μονάδες Ns = kg m/s.

Αριθμητική Εφαρμογή: Έστω ότι η δύναμη $\vec{T}$ έχει μέτρο 30,0 N και δρα για χρονικό διάστημα $\Delta t = 5{,}0$ s. Ορίζοντας τη θετική φορά του οριζόντιου άξονα Ox κατά τη φορά της κίνησης, η συνισταμένη δύναμη έχει αλγεβρική τιμή $\sum F = T = 30{,}0$ N. Η Ώθηση Δύναμης ισούται με:

$$\Omega = \left(\sum F\right)\Delta t = T\Delta t = (30{,}0\ \text{N}) \times (5{,}0\ \text{s}) = 150\ \text{Ns}$$

Από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει ότι **η ώθηση της δύναμης ισούται με τη μεταβολή της ορμής**. Συμπεραίνουμε ότι στη διάρκεια των 5,0 s, η ορμή του κιβωτίου αυξάνεται κατά 150 Ns = 150 kg m/s.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

6.5.1. Να αναφέρετε δύο τρόπους, με τους οποίους μπορούμε να διπλασιάσουμε την Ώθηση Δύναμης, που δρα σε ένα σώμα.

6.5.2. Ένα αυτοκίνητο έχει την ίδια ορμή στις χρονικές στιγμές $t_1 = 0$ s και $t_2 = 30$ s. Ποιό από τα κάτω συμπεράσματα είναι σωστό:

- Στο διάστημα 0 s – 30 s, η συνισταμένη δύναμη στο αυτοκίνητο ήταν ίση με μηδέν.
- Στο διάστημα 0 s – 30 s, η Ώθηση Δύναμης στο αυτοκίνητο ήταν ίση με μηδέν.

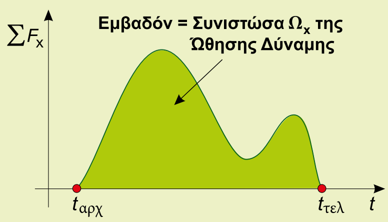
6.5.3. Μία μπάλα περιστρέφεται στην άκρη ενός σχοινιού και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Είναι σωστό να συμπεράνουμε ότι η ώθηση δύναμης στη μπάλα είναι μηδενική, επειδή η ορμή της έχει σταθερό μέτρο;

Β. Μεταβαλλόμενη Συνισταμένη Δύναμη

Όταν η συνισταμένη δύναμη **δεν** είναι σταθερή, υπολογίζουμε τις διάφορες συνιστώσες της ‘Ωθησης Δύναμης σε ένα **αυθαίρετα μεγάλο** χρονικό διάστημα $t_{τελ} - t_{αρχ}$ με τον ακόλουθο **γραφικό** τρόπο.

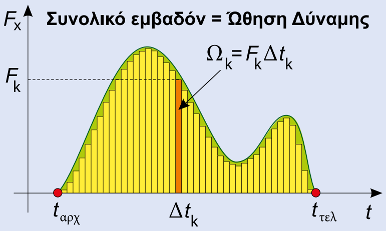
Υπολογισμός της Ώθησης Δύναμης για Μεταβαλλόμενη Συνισταμένη Δύναμη

Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της x-συνιστώσας της συνισταμένης δύναμης, $\sum F_x$, σαν συνάρτηση του χρόνου, για το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_{τελ} - t_{αρχ}$. Το εμβαδόν ανάμεσα στην καμπύλη της $\sum F_x$ και τον άξονα του χρόνου, ισούται με τη x-συνιστώσα της Ώθησης, Ω_x.



Αντίστοιχα υπολογίζουμε την y-συνιστώσα της Ώθησης Δύναμης, Ω_y, από τη γραφική παράσταση $\sum F_y$ – χρόνου.

ΕΝΘΕΤΟ - Απόδειξη του Υπολογισμού της Ώθησης Δύναμης, για Μεταβαλλόμενη Δύναμη



Το διπλανό σχήμα απεικονίζει την αλγεβρική τιμή μίας μεταβαλλόμενης οριζόντιας δύναμης F σαν συνάρτηση του χρόνου, για το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_{τελ} - t_{αρχ}$. Για να υπολογίσουμε την Ώθηση Δύναμης, χωρίζουμε το συνολικό διάστημα $t_{τελ} - t_{αρχ}$ σε **πολύ μικρά** χρονικά διαστήματα Δt_1, Δt_2, ..., Δt_k,...

Θεωρούμε ότι σε κάθε μικρό χρονικό διάστημα Δt_k η δύναμη είναι κατά προσέγγιση σταθερή και ίση με F_k. Η αντίστοιχη ώθηση δύναμης στο σώμα είναι ίση με $\Omega_k = F_k \, \Delta t_k$. Να παρατηρήσετε ότι η ώθηση Ω_k ισούται με το εμβαδόν του πορτοκαλί παραλληλογράμμου.

Η συνολική Ώθηση Δύναμης στο σώμα στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_{τελ} - t_{αρχ}$ ισούται με το άθροισμα των ωθήσεων σε όλα τα ενδιάμεσα μικρά χρονικά διαστήματα:

$$\Omega = \sum_k \Omega_k = \sum_k F_k \, \Delta t_k$$

Από το σχήμα προκύπτει ότι η συνολική Ώθηση ισούται με το εμβαδόν που περικλείεται ανάμεσα στην καμπύλη της αλγεβρικής τιμής της δύναμης και τον άξονα του χρόνου.

6.6. Ώθηση Δύναμης και Μεταβολή της Ορμής

Σύνδεση Ώθησης Δύναμης και Μεταβολής της Ορμής

Η μεταβολή της ορμής ενός σώματος, σε ένα **αυθαίρετα μεγάλο** χρονικό διάστημα $\Delta t = t_{τελ} - t_{αρχ}$, ισούται με την **Ώθηση** της Συνισταμένης Δύναμης, που δρα στο σώμα στο ίδιο χρονικό διάστημα:

$$\Delta \vec{p} = \vec{\Omega}$$

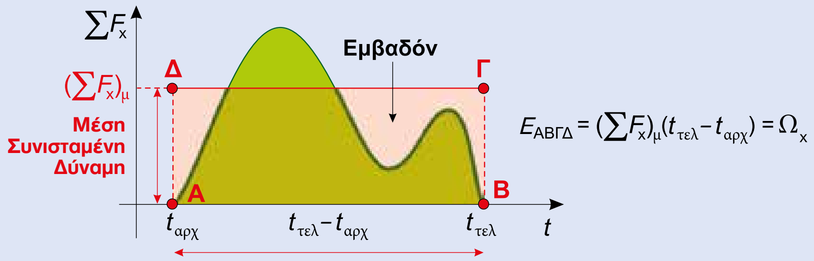
Παρατηρήσεις

- Εάν η συνισταμένη δύναμη μεταβάλλεται χρονικά, η Ώθηση Δύναμης υπολογίζεται **γραφικά** όπως εξηγήσαμε στην **Ενότητα 6.5.**
- Εξ΄ ορισμού, η μέση συνισταμένη δύναμη έχει την **ίδια Ώθηση** με την ακριβή συνισταμένη δύναμη:

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{\mu} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \left(\sum \vec{F}\right)_{\mu} \Delta t = \Delta \vec{p} \Rightarrow \left(\sum \vec{F}\right)_{\mu} \Delta t = \vec{\Omega}$$

Γραφική Ερμηνεία της Μέσης Συνισταμένης Δύναμης.

Το εμβαδόν της πράσινης επιφάνειας ισούται με την x-συνιστώσα της Ώθησης, Ω_x. Σχεδιάζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, έτσι ώστε μία πλευρά ΑΒ = $t_{τελ} - t_{αρχ}$.



Η πλευρά ΑΔ επιλέγεται έτσι ώστε το εμβαδό του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ να είναι ίσο με το εμβαδό της πράσινης επιφάνειας, και ισούται με την x-συνιστώσα της μέσης συνισταμένης δύναμης $\left(\sum F_x\right)_\mu$.

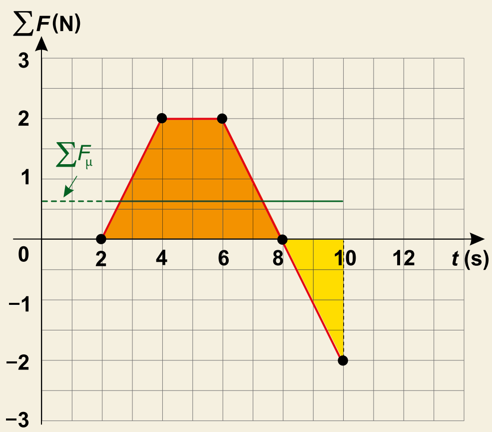
Στο παράδειγμα της **Ενότητας 6.5.** αποδείξαμε ότι η μεταβολή της ορμής του κιβωτίου στο χρονικό διάστημα $t_{τελ} - t_{αρχ}$ ήταν ίση με την αντίστοιχη Ώθηση της συνισταμένης δύναμης στο κιβώτιο:

$$\vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ} = \vec{\Omega}$$

Η σχέση αυτή γενικεύεται **και όταν η συνισταμένη δύναμη μεταβάλλεται με τον χρόνο**.

Παράδειγμα

Ένα αυτοκινητάκι κινείται σε οριζόντιο δρόμο με ορμή 3,0 kg m/s. Τη χρονική στιγμή t = 2,0 s αρχίζει να δρα στο αυτοκίνητο μία οριζόντια συνισταμένη δύναμη. Το διπλανό σχήμα απεικονίζει το γράφημα συνισταμένης δύναμης - χρόνου.



Η Ώθηση Δύναμης στο χρονικό διάστημα 2 s - 8 s ισούται με το εμβαδόν του τραπεζίου:

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) \times \Upsilon = \frac{1}{2}(6{,}0\text{ s} + 2{,}0\text{ s}) \times (2{,}0\text{ N}) = 8{,}0\text{ Ns}$$

Στο διάστημα αυτό, η Ώθηση είναι θετική και η ορμή του σώματος **αυξάνεται**:

$$\Delta p_1 = \Omega_1 = 8{,}0\text{ Ns} = 8{,}0\text{ kg m/s}$$

Η Ώθηση στο χρονικό διάστημα 8 s - 10 s ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου:

$$\Omega_2 = \frac{1}{2}\beta \times \Upsilon = \frac{1}{2}(2{,}0\text{ s}) \times (-2{,}0\text{ N}) = -2{,}0\text{ Ns}$$

Στο διάστημα αυτό, η Ώθηση είναι αρνητική και η ορμή του σώματος **μειώνεται**:

$$\Delta p_2 = \Omega_2 = -2{,}0\text{ Ns} = -2{,}0\text{ kg m/s}$$

Οι δύο μεταβολές της ορμής έχουν την ίδια διεύθυνση (αυτή του οριζόντιου δρόμου). Η συνολική μεταβολή προκύπτει από το άθροισμά τους:

$$\Delta p_{ολ} = \Delta p_1 + \Delta p_2 = 8{,}0\text{ kg m/s} + (-2{,}0\text{ kg m/s}) = 6{,}0\text{ kg m/s}$$

Η τελική ορμή του αυτοκινήτου είναι:

$$p_{τελ} = p_{αρχ} + \Delta p = 3{,}0\text{ kg m/s} + (6{,}0\text{ kg m/s}) = 9{,}0\text{ kg m/s}$$

Η μέση συνισταμένη δύναμη στο αυτοκίνητο έχει αλγεβρική τιμή:

$$\left(\sum F\right)_{\mu} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{6{,}0}{10{,}0}\frac{\text{kg m/s}}{\text{s}} = 0{,}60\text{ N}$$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

6.6.1. Ένας ποδηλάτης συνολικής μάζας m και ένα αυτοκίνητο συνολικής μάζας $M >> m$ κινούνται με την ίδια **ορμή**. Εάν ασκηθεί η **ίδια μέση συνισταμένη δύναμη** στον ποδηλάτη και στο αυτοκίνητο, τι από τα επόμενα είναι σωστό:

- Ο ποδηλάτης ακινητοποιείται πιο γρήγορα, επειδή έχει μικρότερη μάζα.
- Και οι δύο ακινητοποιούνται στο ίδιο χρονικό διάστημα.
- Το αυτοκίνητο ακινητοποιείται πιο γρήγορα, επειδή έχει μικρότερη ταχύτητα.

6.6.2. Εάν ο ποδηλάτης και το αυτοκίνητο κινούνταν αρχικά με την ίδια ταχύτητα, ποιά από τις προηγούμενες απαντήσεις θα ήταν σωστή;

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Ένα ακίνητο σώμα δεν έχει ορμή.	
2	Η ορμή ενός σώματος είναι ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς.	
3	Δύο σώματα με την ίδια ταχύτητα έχουν πάντοτε την ίδια ορμή.	
4	Ένα αυτοκίνητο κινείται συνεχώς με ταχύτητα σταθερού μέτρου στον αυτοκινητόδρομο. Το αυτοκίνητο έχει σταθερή ορμή.	
5	Ένα σώμα το οποίο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχει ορμή που μεταβάλλεται με το χρόνο.	
6	Εάν η ορμή ενός σώματος παραμένει σταθερή σε κάποιο χρονικό διάστημα, η μέση συνισταμένη δύναμη στο σώμα είναι ίση με μηδέν στο ίδιο διάστημα.	
7	Εάν η μέση συνισταμένη δύναμη, που δρα σε ένα σώμα είναι μηδενική, η συνισταμένη δύναμη στο σώμα είναι μηδενική σε κάθε χρονική στιγμή.	
8	Εάν η συνισταμένη δύναμη, που δρα σε ένα σώμα είναι μηδενική σε κάθε στιγμή ενός χρονικού διαστήματος, η μέση συνισταμένη δύναμη στο σώμα είναι επίσης μηδενική στο ίδιο χρονικό διάστημα.	
9	Εάν το χρονικό διάστημα, στο οποίο ακινητοποιείται ένα σώμα, διπλασιασθεί, η μέση συνισταμένη δύναμη στο σώμα διπλασιάζεται.	
10	Ένας πυγμάχος φορά γάντια για να αυξήσει τη δύναμη των χτυπημάτων του.	
11	Η ζώνη ασφαλείας ελαττώνει το χρονικό διάστημα, στο οποίο ακινητοποιείται ο επιβάτης.	
12	Η Ώθηση Δύναμης είναι μονόμετρο μέγεθος.	
13	Η Ώθηση Δύναμης σε ένα σώμα ισούται με την ορμή του σώματος.	
14	Η Ώθηση Δύναμης ισούται με τη μεταβολή της ορμής μόνο όταν η συνισταμένη δύναμη είναι σταθερή.	
15	Για να υπολογίσουμε την Ώθηση Δύναμης σε ένα σώμα, πρέπει να γνωρίζουμε πώς μεταβάλλεται η συνισταμένη δύναμη στο σώμα με τον χρόνο.	

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
16	Εάν η Ώθηση Δύναμης είναι μηδενική για κάποιο χρονικό διάστημα, η μεταβολή της ορμής του σώματος είναι επίσης μηδενική στο ίδιο διάστημα.	
17	Από την Ώθηση Δύναμης μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση συνισταμένη δύναμη στο σώμα.	
18	Δύο σώματα κινούνται με την ίδια ορμή και ασκείται σε αυτά η ίδια συνισταμένη δύναμη:	
α	Τα σώματα ακινητοποιούνται στο ίδιο χρονικό διάστημα.	
β	Το σώμα μικρότερης μάζας ακινητοποιείται πιο γρήγορα.	
γ	Το σώμα μεγαλύτερης μάζας ακινητοποιείται πιο γρήγορα.	
19	Δύο σώματα κινούνται με την ίδια ταχύτητα και ασκείται σε αυτά η ίδια συνισταμένη δύναμη:	
α	Τα σώματα ακινητοποιούνται στο ίδιο χρονικό διάστημα.	
β	Το σώμα μικρότερης μάζας ακινητοποιείται πιο γρήγορα.	
γ	Το σώμα μεγαλύτερης μάζας ακινητοποιείται πιο γρήγορα.	

Ασκήσεις

Το Φυσικό Μέγεθος της Ορμής

1. Μια μοτοσυκλέτα μάζας $m = 255$ kg κινείται στον αυτοκινητόδρομο με σταθερή ταχύτητα μέτρου 110,0 km/h. Να υπολογίσετε το μέτρο της ορμής της σε μονάδες kg m/s και με τον σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων.

2. Δύο αθλητές Α και Β με μάζες $m_A = 60{,}0$ kg και $m_B = 70{,}0$ kg αντίστοιχα, κινούνται κατά μήκος ενός ευθύγραμμου δρόμου με σταθερή ταχύτητα. Ως προς το έδαφος, η ταχύτητα του Α έχει αλγεβρική τιμή + 15,0 km/h και του Β έχει αλγεβρική τιμή –15,0 km/h.

   Α. Να υπολογίσετε τις ορμές των δύο αθλητών ως προς το έδαφος και να προσδιορίσετε το διανυσματικό τους άθροισμα.

Β. Να υπολογίσετε την ορμή του αθλητή Α ως προς σημείο αναφοράς, που κινείται μαζί με τον αθλητή Β.

Γ. Αν οι δύο αθλητές είχαν αντίθετες ορμές, να προσδιορίσετε τον λόγο των ταχύτητων τους.

3 Ένα σώμα μάζας 2,0 kg διαγράφει κύκλο ακτίνας R = 0,5 m με ταχύτητα σταθερού μέτρου υ = 4,0 m/s. Να προσδιορίσετε το μέτρο της μεταβολής της ορμής του, όταν έχει διαγράψει τόξο με μήκος ίσο με **(α)** το 1/2 της περιφέρειας του κύκλου, και **(β)** το 1/4 της περιφέρειας του κύκλου.

4 Μια μπάλα από πλαστελίνη μάζας 2,0 kg πέφτει με αρχική μηδενική ταχύτητα και από ύψος 2,0 m πάνω σε ιμάντα, που κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου 2,5 m/s, και προσκολλάται σε αυτόν. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της ορμής της μπάλας από την χρονική στιγμή πριν ακριβώς χτυπήσει στον ιμάντα μέχρι τη χρονική στιγμή που αποκτά την ταχύτητα του ιμάντα.

Γενικευμένη Μορφή του Δεύτερου Νόμου

5 Ένα αυτοκίνητο μάζας m_1 = 750 kg κινείται στον αυτοκινητόδρομο με ταχύτητα μέτρου 90, 0 km/h. Σε κάποια στιγμή δρα στο αυτοκίνητο μία σταθερή δύναμη, που το ακινητοποιεί σε 8,0 s.

Α. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης.

Β. Το αυτοκίνητο κινείται με την ίδια ταχύτητα (90, 0 km/h) αλλά μεταφέρει έξτρα φορτίο μάζας 375 kg. Εάν δράσει σε αυτό η δύναμη του ερωτήματος Α, σε ποιό χρονικό διάστημα θα ακινητοποιηθεί;

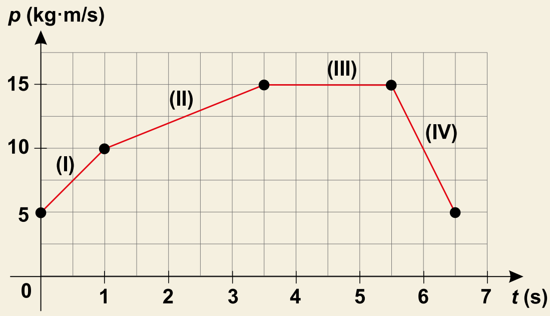
6 Δύο έλκυθρα με μάζες m_1 = 125 kg και m_2 = 750 kg ηρεμούν σε μία οριζόντια παγωμένη πεδιάδα. Να συγκρίνετε τα χρονικά διαστήματα, στα οποία τα έλκυθρα αποκτούν ταχύτητες μέτρων υ_1 = 27 m/s και υ_2 = 9 m/s εάν τους εφαρμόσουμε την **ίδια** σταθερή οριζόντια δύναμη.

7 Το 1996, ο ποδοσφαιριστής της Σπόρτινγκ Λισαβώνας Ronny Heberson πραγματοποίησε το πιο γρήγορο σουτ που έχει καταγραφεί σε κάμερα. Η μπάλα μάζας 450 g έφυγε από το πόδι του Heberson με ταχύτητα 211 km/h.

Α. Να υπολογίσετε τη μέση συνισταμένη δύναμη στη μπάλα, εάν η διάρκεια του χτυπήματος ήταν 0,2 s.

Β. Έστω ότι η μπάλα έφθανε στα χέρια του τερματοφύλακα με την ίδια ταχύτητα. Να υπολογίσετε τη μέση συνισταμένη δύναμη που θα έπρεπε να ασκήσει στη μπάλα ο τερματοφύλακας, για να την ακινητοποιήσει σε διάστημα 0,5 s.

❽ Το πιο κάτω σχήμα απεικονίζει το γράφημα ορμής-χρόνου ενός σωματιδίου που κινείται σε ευθεία γραμμή.



Α. Να περιγράψετε το είδος της κίνησης, που εκτελεί το σώμα στις περιοχές I - IV.

Β. Να υπολογίσετε το μέτρο της συνισταμένης δύναμης, που δρα στο σώμα στις περιοχές I - IV.

Γ. Να υπολογίσετε τη **μέση συνισταμένη δύναμη**, που δρά στο σώμα στο χρονικό διάστημα 0 s - 6,5 s.

❾ Μία μικρή μεταλλική σφαίρα και μία σφαίρα από πλαστελίνη ίσης μάζας 75,0 g αφήνονται να πέσουν με μηδενική αρχική ταχύτητα από το ίδιο ύψος h = 1,44 m. Η μεταλλική σφαίρα αναπηδά και φθάνει σε μέγιστο ύψος h = 0,36 m. Η σφαίρα από πλαστελίνη κολλά στο πάτωμα. Να συγκρίνετε τη μέση συνισταμένη δύναμη που ασκείται στις δύο σφαίρες, υποθέτοντας ότι η αλλαγή της ορμής των σφαιρών πραγματοποιείται στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt = 0,2 s.

Ώθηση Δύναμης

❿ Ένας αθλητής ασκεί μία σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου 45,0 N σε ακόντιο μάζας 0,800 kg για χρονικό διάστημα Δt = 0,50 s.

Α. Να υπολογίσετε τη συνολική Ώθηση Δύναμης στο ακόντιο, και να προσδιορίσετε την κατεύθυνσή της.

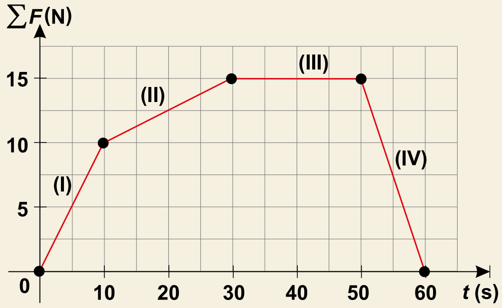
Β. Να υπολογίσετε το μέτρο της τελικής ταχύτητας, με την οποία εγκαταλείπει το ακόντιο το χέρι του αθλητή.

⓫ Ένα φορτηγό μάζας 1500,0 kg πέφτει σε έναν τοίχο με ταχύτητα μέτρου 15,0 m/s και ακινητοποιείται. Να υπολογίσετε την Ώθηση Δύναμης στο φορτηγό.

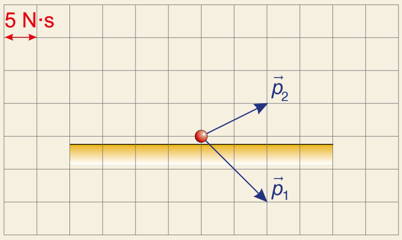
⓬ Ένα αυτοκινητάκι μάζας 25,0 kg κινείται σε μία ευθεία υπό την επίδραση μίας μεταβαλλόμενης συνισταμένης δύναμης. Το αντίστοιχο γράφημα συνισταμένης δύναμης - χρόνου απεικονίζεται στο σχήμα.

Α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα που αποκτά το αυτοκινητάκι τη χρονική στιγμή t = 60,0 s, εάν τη χρονική στιγμή t = 0,0 s είχε μηδενική ταχύτητα.

Β. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τη μέση συνισταμένη δύναμη, που δρα στο αυτοκινητάκι.



13 Μία μπάλα του τένις πέφτει στο έδαφος με ορμή $\vec{p}_1$ και αναπηδά με ορμή $\vec{p}_2$ όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να σχεδιάσετε το διάνυσμα της Ώθησης Δύναμης και να υπολογίσετε το μέτρο του, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος.



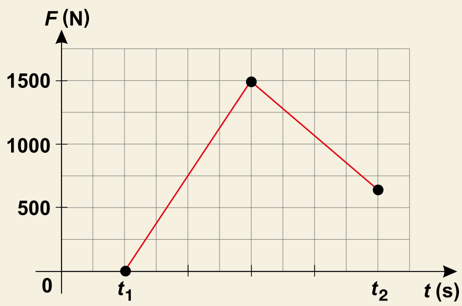
14 Ένας τοξοβόλος σημαδεύει έναν στόχο με βέλος μάζας $m = 25{,}4$ g. Εάν το τόξο εφαρμόζει μια μέση δύναμη μέτρου 125 N για χρονικό διάστημα 0,65 s, να υπολογίσετε την ταχύτητα του βέλους τη στιγμή της εκτόξευσης.

15 Ένα αυγό μάζας 45 g πέφτει από ύψος 1,5 m σε ένα σεντόνι, που είναι τεντωμένο σε ύψος 0,25 m από το έδαφος. Το αυγό ακινητοποιείται μετά από χρονικό διάστημα 2,0 s επαφής με το σεντόνι.

Α. Να υπολογίσετε τη μέση συνισταμένη δύναμη, που δρα στο αυγό κατά τη διάρκεια της επαφής του με το σεντόνι.

Β. Εάν η μέγιστη δύναμη που μπορεί να αντέξει το αυγό πριν σπάσει είναι 2,75 N, θα σπάσει κατά τη γνώμη σας; (Σκεφτείτε πώς μεταβάλλεται η πραγματική δύναμη, και συγκρίνετε με το αποτέλεσμα για τη μέση συνισταμένη δύναμη).

16 Ένας άλτης του ύψους, μάζας 65 kg, πέφτει από ύψος 2,40 m σε ένα στρώμα τοποθετημένο 1,40 m πάνω από το έδαφος. Το γράφημα δύναμης - χρόνου της δύναμης που δρα από το στρώμα στον αθλητή απεικονίζεται στο σχήμα.

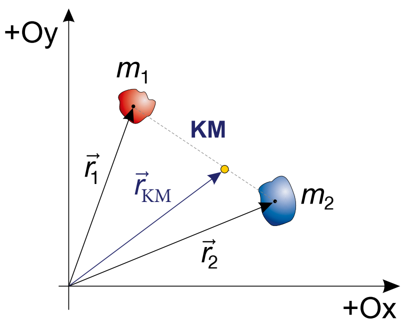


Το στρώμα ρυθμίζεται έτσι ώστε η μέγιστη τιμή της δύναμης να μην υπερβαίνει τα 1500 N. Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$, στο οποίο πρέπει να δρα η δύναμη για να σταματά την πτώση του αθλητή.

6.7. Η Έννοια του Απομονωμένου Συστήματος

Ένα σύστημα σωμάτων είναι απομονωμένο, όταν οι δυνάμεις που δρουν σε οποιοδήποτε σώμα του συστήματος είναι **εσωτερικές**, δηλαδή προέρχονται από τα άλλα σώματα του ίδιου συστήματος.

6.8. Η Έννοια του Κέντρου Μάζας Συστήματος Σωμάτων



Ας θεωρήσουμε δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2, που βρίσκονται στις θέσεις $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ και μπορούν να θεωρηθούν ως **υλικά σημεία**. Ορίζουμε ως **κέντρο μάζας** (ΚΜ) των σωμάτων αυτών το σημείο με διάνυσμα θέσης:

$$\vec{r}_{KM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

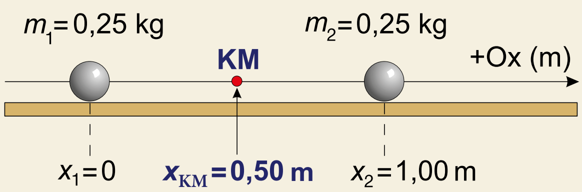
Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι το διάνυσμα θέσης του ΚΜ έχει συνιστώσες

$$x_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad \text{και} \quad y_{KM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

Παράδειγμα 1

Δύο Σώματα Ίσης Μάζας

Δύο μεταλλικές σφαίρες με μάζες $m_1 = m_2 = 0{,}25$ kg βρίσκονται πάνω σε ένα οριζόντιο τραπέζι, και απέχουν μεταξύ τους κατά 1,00 m. Θεωρώντας τις σφαίρες σαν υλικά σημεία θα προσδιορίσουμε τη θέση του ΚΜ τους.



Θεωρούμε ως άξονα Ox την ευθεία που ενώνει τις σφαίρες, με σημείο αναφοράς O τη σφαίρα 1 και θετική φορά από τη σφαίρα **1** προς τη σφαίρα **2.**

Οι θέσεις των δύο σφαιρών είναι $x_1 = 0$ και $x_2 = +1{,}00$ m. Συμπεραίνουμε ότι η θέση του ΚΜ είναι:

$$x_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{0 + (0{,}25\ \text{kg} \times 1{,}00\ \text{m})}{0{,}50\ \text{kg}} = 0{,}50\ \text{m}$$

Άρα, το ΚΜ των δύο σφαιρών βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει τις σφαίρες, και ισαπέχει από αυτές.

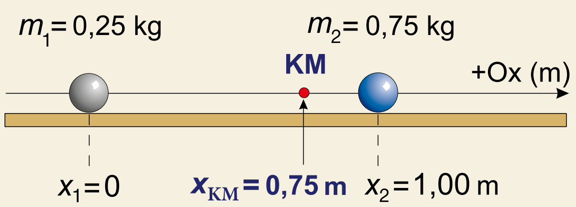
Παρατήρηση

Το ΚΜ ενός συστήματος σωμάτων είναι δυνατόν να μη συμπίπτει με κανένα από τα σώματα.

Παράδειγμα 2

Δύο Σώματα Διαφορετικής Μάζας

Αντικαθιστούμε τη σφαίρα **2** με μία σφαίρα μάζας $m_2 = 0{,}75$ kg. Θα προσδιορίσουμε τη θέση του νέου ΚΜ των σφαιρών **1** και **2**.



Θεωρούμε τον ίδιο άξονα Ox. Οι σφαίρες έχουν τις ίδιες θέσεις με πρίν, αλλά έχει μεταβληθεί η μάζα της σφαίρας 2. Συμπεραίνουμε:

$$x_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{0 + (0{,}75\ \text{kg} \times 1{,}00\ \text{m})}{1{,}00\ \text{kg}} = 0{,}75\ \text{m}$$

Παρατηρούμε ότι το ΚΜ των δύο σφαιρών μετατοπίζεται προς τη σφαίρα μεγαλύτερης μάζας. Η συμπεριφορά αυτή είναι γενική:

Παρατήρηση

Το ΚΜ ενός συστήματος σωμάτων βρίσκεται πιο κοντά στο σώμα μεγαλύτερης μάζας.

Εάν ένα σώμα έχει τεράστια μάζα σε σύγκριση με τα άλλα, το ΚΜ συμπίπτει με αυτό, όπως δείχνει το επόμενο παράδειγμα:

Παράδειγμα 3

Ένα Σώμα έχει Τεράστια Μάζα σε σχέση με τα υπόλοιπα
Το ΚΜ του Συστήματος Ήλιου - Γης

Θεωρώντας ότι ο Ήλιος και η Γη είναι υλικά σημεία τοποθετημένα στο κέντρο τους, να υπολογίσετε τη θέση του ΚΜ του συστήματος Ήλιου - Γης. Δίνεται ότι οι μάζες του Ήλιου και της Γης είναι $m_{\mathrm{H}} = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg και $m_{\Gamma} = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg, και η απόσταση Ήλιου - Γης είναι $1{,}5 \times 10^{11}$ m.

Θεωρούμε έναν άξονα Ox που διέρχεται από τα κέντρα του Ήλιου και της Γης, με θετική φορά από τον Ήλιο προς τη Γη, και έχει σημείο αναφοράς το κέντρο του Ήλιου. Ως προς αυτόν τον άξονα, η θέση του ΚΜ είναι:

$$x_{\mathrm{KM}} = \frac{m_{\mathrm{H}} x_{\mathrm{H}} + m_{\Gamma} x_{\Gamma}}{m_{\mathrm{H}} + m_{\Gamma}} = \frac{0 + (6{,}0 \times 10^{24}\ \mathrm{kg} \times 1{,}5 \times 10^{11}\ \mathrm{m})}{(2{,}0 \times 10^{30}\ \mathrm{kg} + 6{,}0 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})} = \frac{9{,}0 \times 10^{35}\ \mathrm{kg\ m}}{2{,}000006 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}} = 4{,}5 \times 10^{5}\ \mathrm{m} = 450\ \mathrm{km}$$

Άρα, το ΚΜ του συστήματος Ήλιου - Γης βρίσκεται στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα τους και απέχει μόλις 450 km από το κέντρο του Ήλιου. Λαμβάνοντας υπ΄ όψη ότι η απόσταση Ήλιου - Γης είναι $1{,}5 \times 10^{11}$ m συμπεραίνουμε ότι το ΚΜ συμπίπτει πρακτικά με το κέντρο του Ήλιου.

Εάν το σύστημα σωμάτων περιέχει N σώματα, ο ορισμός του ΚΜ γενικεύεται:

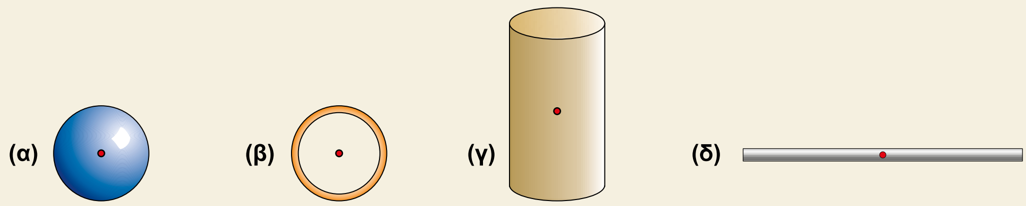
Ορισμός Κέντρου Μάζας Συστήματος N σωμάτων, που θεωρούνται ως υλικά σημεία:

$$\vec{r}_{\mathrm{KM}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_{\mathrm{N}}\vec{r}_{\mathrm{N}}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_{\mathrm{N}}}$$

Από τον προηγούμενο ορισμό, προκύπτει ότι το διάνυσμα θέσης του ΚΜ έχει συνιστώσες

$$x_{\mathrm{KM}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_{\mathrm{N}} x_{\mathrm{N}}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_{\mathrm{N}}} \quad \text{και} \quad y_{\mathrm{KM}} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_{\mathrm{N}} y_{\mathrm{N}}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_{\mathrm{N}}}$$

Κέντρο Μάζας Συμμετρικών και Ομογενών Στερεών Σωμάτων

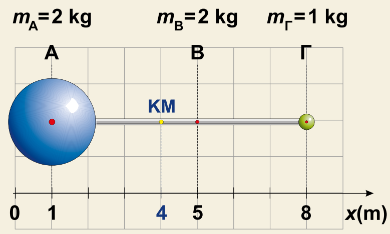


Στερεά σώματα με συμμετρικό σχήμα και ομοιόμορφη (ομογενή) κατανομή μάζας έχουν ΚΜ που συμπίπτει με το **κέντρο συμμετρίας** τους. Το σχήμα απεικονίζει το ΚΜ (κόκκινη κουκκίδα) διαφόρων συμμετρικών και ομογενών στερεών σωμάτων: **(α)** σφαίρας, **(β)** δαχτυλίου, **(γ)** κυλίνδρου, **(δ)** ράβδου.

Σημείωση
Για να υπολογίσουμε το ΚΜ ενός συστήματος από στερεά σώματα, θεωρούμε ότι η μάζα κάθε στερεού είναι συγκεντρωμένη στο ΚΜ του.

Παράδειγμα

Για να υπολογίσουμε το ΚΜ του διπλανού σύνθετου σώματος, το διαχωρίζουμε σε επιμέρους σώματα (τις σφαίρες Α και Γ και το ραβδί Β). Η θέση του ΚΜ του σύνθετου σώματος προσδιορίζεται ως εξής:



$$x_{\mathrm{KM}} = \frac{m_A x_{\mathrm{KMA}} + m_B x_{\mathrm{KMB}} + m_\Gamma x_{\mathrm{KM\Gamma}}}{m_A + m_B + m_\Gamma} = \frac{(2\ \mathrm{kg}) \times (1\ \mathrm{m}) + (2\ \mathrm{kg}) \times (5\ \mathrm{m}) + (1\ \mathrm{kg}) \times (8\ \mathrm{m})}{2\ \mathrm{kg} + 2\ \mathrm{kg} + 1\ \mathrm{kg}} = \frac{20\ \mathrm{kg\ m}}{5\ \mathrm{kg}} = 4\ \mathrm{m}$$

Ταχύτητα και Επιτάχυνση του Κέντρου Μάζας

Εάν οι θέσεις των σωμάτων μεταβάλλονται με τον χρόνο, η θέση του ΚΜ γενικά μεταβάλλεται επίσης. Η διανυσματική μετατόπιση του ΚΜ σε ένα χρονικό διάστημα Δt ισούται με $\Delta\vec{r}_{\mathrm{KM}} = \vec{r}_{\mathrm{KM}}(t+\Delta t) - \vec{r}_{\mathrm{KM}}(t)$. Η **στιγμιαία ταχύτητα** του ΚΜ προσδιορίζεται από τη διανυσματική μετατόπιση του ΚΜ, όπως και για οποιοδήποτε υλικό σημείο:

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{KM}} = \frac{\vec{r}_{\mathrm{KM}}(t+\Delta t) - \vec{r}_{\mathrm{KM}}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}_{\mathrm{KM}}}{\Delta t}$$
, Δt πολύ μικρό διάστημα γύρω από τη στιγμή t.

Η ταχύτητα του ΚΜ ενός συστήματος σωμάτων μπορεί να εκφρασθεί με βάση τις ταχύτητες των σωμάτων:

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{KM}} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + \ldots + m_N\vec{\upsilon}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}$$

Ομοίως, η **επιτάχυνση** του ΚΜ ορίζεται από τη μεταβολή στη στιγμιαία ταχύτητα του ΚΜ σε κάποιο πολύ μικρό χρονικό διάστημα γύρω από τη χρονική στιγμή t:

$$\vec{\alpha}_{KM} = \frac{\vec{\upsilon}_{KM}(t+\Delta t) - \vec{\upsilon}_{KM}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}_{KM}}{\Delta t}$$, Δt πολύ μικρό διάστημα γύρω από τη στιγμή t.

Η επιτάχυνση του ΚΜ εκφράζεται με βάση τις επιταχύνσεις των σωμάτων:

$$\vec{\alpha}_{KM} = \frac{m_1\vec{\alpha}_1 + m_2\vec{\alpha}_2 + ... + m_N\vec{\alpha}_N}{m_1 + m_2 + ... + m_N}$$

ΕΝΘΕΤΟ - Υπολογισμός της Ταχύτητας και Επιτάχυνσης του Κέντρου Μάζας από τις Ταχύτητες και τις Επιταχύνσεις των Σωμάτων του Συστήματος

Για να αποδείξουμε τη σχέση της **ταχύτητας του ΚΜ** ενός συστήματος σωμάτων, θεωρούμε τη θέση του ΚΜ σε δύο χρονικές στιγμές t και $t+\Delta t$:

$$\vec{r}_{KM}(t) = \frac{m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t) + ... + m_N\vec{r}_N(t)}{m_1 + m_2 + ... + m_N}$$

$$\vec{r}_{KM}(t+\Delta t) = \frac{m_1\vec{r}_1(t+\Delta t) + m_2\vec{r}_2(t+\Delta t) + ... + m_N\vec{r}_N(t+\Delta t)}{m_1 + m_2 + ... + m_N}$$

Συνεπώς, η διανυσματική μετατόπιση του ΚΜ, στο χρονικό διάστημα Δt ισούται με:

$$\Delta\vec{r}_{KM}(t) = \vec{r}_{KM}(t+\Delta t) - \vec{r}_{KM}(t) = \frac{m_1\left[\vec{r}_1(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)\right] + ... + m_N\left[\vec{r}_N(t+\Delta t) - \vec{r}_N(t)\right]}{m_1 + m_2 + ... + m_N} = \frac{m_1\Delta\vec{r}_1 + ... + m_N\Delta\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + ... + m_N}$$

Εάν το χρονικό διάστημα Δt είναι πολύ μικρό, συμπεραίνουμε:

$$\vec{\upsilon}_{KM} = \frac{\Delta\vec{r}_{KM}}{\Delta t} = \frac{m_1\Delta\vec{r}_1/\Delta t + ... + m_N\Delta\vec{r}_N/\Delta t}{m_1 + m_2 + ... + m_N} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + ... + m_N\vec{\upsilon}_N}{m_1 + m_2 + ... + m_N}$$

Όμοια, αποδεικνύεται ότι η επιτάχυνση του ΚΜ εκφράζεται με βάση τις επιταχύνσεις των σωμάτων και την επόμενη σχέση:

$$\vec{\alpha}_{KM} = \frac{m_1\vec{\alpha}_1 + m_2\vec{\alpha}_2 + ... + m_N\vec{\alpha}_N}{m_1 + m_2 + ... + m_N}$$

6.9. Εφαρμογή του Δεύτερου και Τρίτου Νόμου του Νεύτωνα στο Κέντρο Μάζας Συστήματος Σωμάτων

Το ΚΜ ενός συστήματος σωμάτων έχει σημαντικές ιδιότητες, τις οποίες θα μελετήσουμε φέτος και στη Γ΄ Λυκείου. Σε αυτή την ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε τον **Δεύτερο** και τον **Τρίτο** νόμο του Νεύτωνα, για να αποδείξουμε ότι η κίνηση του ΚΜ περιγράφεται από μία απλή εξίσωση.

Η Εικόνα 6-1 απεικονίζει έναν αστροναύτη, ο οποίος πραγματοποιεί εργασίες στο εξωτερικό του Διεθνούς Διαστημικού Σταθμού (ΔΔΣ).

Στο δεξιά κάτω σχήμα απεικονίζουμε τον ΔΔΣ (**Σ**) και τον αστροναύτη (**Α**) στην προσέγγιση υλικού σημείου. Στον αστροναύτη δρα η δύναμη $\vec{F}_{\Sigma\to\mathrm{A}}$ από τον ΔΔΣ και το βάρος του $\vec{B}_{\mathrm{A}}$ από τη Γη. Ομοίως, στον ΔΔΣ δρα η δύναμη $\vec{F}_{\mathrm{A}\to\Sigma}$ από τον αστροναύτη και το βάρος του $\vec{B}_{\Sigma}$.

Εφαρμόζοντας τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα στο ΔΔΣ και στον αστροναύτη, συμπεραίνουμε:

$$\vec{F}_{\mathrm{A}\to\Sigma} + \vec{B}_{\Sigma} = m_{\Sigma}\vec{\alpha}_{\Sigma}$$

$$\vec{F}_{\Sigma\to\mathrm{A}} + \vec{B}_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{A}}\vec{\alpha}_{\mathrm{A}}$$

Εάν προσθέσουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\vec{F}_{\mathrm{A}\to\Sigma} + \vec{B}_{\Sigma} + \vec{F}_{\Sigma\to\mathrm{A}} + \vec{B}_{\mathrm{A}} = m_{\Sigma}\vec{\alpha}_{\Sigma} + m_{\mathrm{A}}\vec{\alpha}_{\mathrm{A}}$$

Οι δυνάμεις $\vec{F}_{\mathrm{A}\to\Sigma}$ και $\vec{F}_{\Sigma\to\mathrm{A}}$ είναι αντίθετες, ως ζεύγος δράσης - αντίδρασης. Συνεπώς, η πιο πάνω εξίσωση απλοποιείται:

$$\vec{B}_{\Sigma} + \vec{B}_{\mathrm{A}} = m_{\Sigma}\vec{\alpha}_{\Sigma} + m_{\mathrm{A}}\vec{\alpha}_{\mathrm{A}} = (m_{\Sigma} + m_{\mathrm{A}})\,\frac{m_{\Sigma}\vec{\alpha}_{\Sigma} + m_{\mathrm{A}}\vec{\alpha}_{\mathrm{A}}}{(m_{\Sigma} + m_{\mathrm{A}})}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{\Sigma} + \vec{B}_{\mathrm{A}} = (m_{\Sigma} + m_{\mathrm{A}})\vec{\alpha}_{\mathrm{KM}}$$

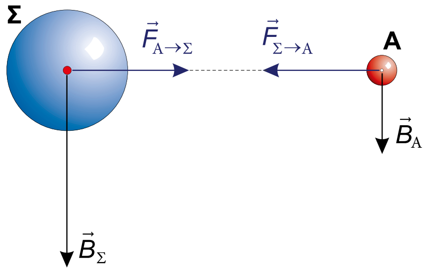
Η τελευταία εξίσωση είναι **πολύ βασική**. Στο αριστερό μέλος έχει εμφανισθεί το άθροισμα των **εξωτερικών** δυνάμεων, που δρούν στο σύστημα του αστροναύτη και του διαστημικού σταθμού. Στο δεξί μέλος εισέρχεται το **άθροισμα** των μαζών του αστροναύτη και του σταθμού, και η επιτάχυνση του ΚΜ του συστήματος αστροναύτη - σταθμού. Η συμπεριφορά αυτή γενικεύεται για περισσότερα σώματα, και περισσότερες δυνάμεις. Οι εσωτερικές δυνάμεις απαλείφονται στο διανυσματικό άθροισμα όλων των δυνάμεων, επειδή συνιστούν ζεύγη δράσης-αντίδρασης. Η επιτάχυνση του ΚΜ είναι ανάλογη με το άθροισμα **των εξωτερικών δυνάμεων** στο σύστημα:

Εξίσωση Δεύτερου Νόμου για το ΚΜ Συστήματος Σωμάτων

$$\left(\sum\vec{F}\right)_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \left(\sum m_{\mathrm{i}}\right)\vec{\alpha}_{\mathrm{KM}} = M\vec{\alpha}_{\mathrm{KM}},$$

όπου $\sum m_{\mathrm{i}} = M$ είναι η συνολική μάζα του συστήματος σωμάτων.

Εικόνα 6-1
Πάνω: Αστροναύτης που εκτελεί εργασίες στο εξωτερικό του Διεθνούς Διαστημικού Σταθμού.
Κάτω: Ο σταθμός (Σ) και ο αστροναύτης (Α) στην προσέγγιση υλικού σημείου.



Να παρατηρήσετε ότι:

- Η κίνηση κάθε σώματος εξαρτάται **τόσο από τις εξωτερικές, όσο και από τις εσωτερικές δυνάμεις** του συστήματος, που δρουν σε αυτό. Αντίθετα, η κίνηση του ΚΜ ενός συστήματος σωμάτων εξαρτάται μόνο από **τη συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων στο σύστημα**.

- Τα σώματα του συστήματος μπορούν να διαγράφουν πολύπλοκες τροχιές. Όμως το ΚΜ διαγράφει μία **απλούστερη** τροχιά:
    - Εάν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων στο σύστημα είναι ίση με μηδέν, το ΚΜ κινείται με σταθερή ταχύτητα, ή ηρεμεί.
    - Εάν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι σταθερή, το ΚΜ κινείται με σταθερή επιτάχυνση.

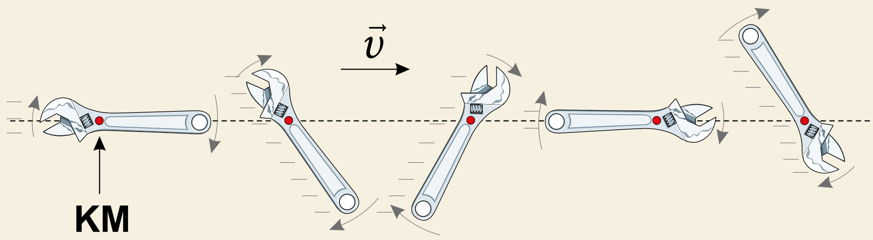
- Η σχέση αυτή ισχύει και για ένα **στερεό** σώμα, το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε σαν ένα σύνολο από υλικά σημεία.

Τα επόμενα παραδείγματα αναδεικνύουν τη χρησιμότητα του ΚΜ στην ανάλυση της κίνησης ενός συστήματος σωμάτων.

Παράδειγμα 1

Το επόμενο σχήμα απεικονίζει σε κάτοψη ένα εργαλείο, που κινείται πάνω σε *λείο* οριζόντιο τραπέζι. Το ΚΜ του εργαλείου συμβολίζεται με την κόκκινη τελεία.

Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων στο εργαλείο είναι μηδέν. Το ΚΜ κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος της ευθείας.



Οι εξωτερικές δυνάμεις στο εργαλείο είναι το βάρος του και η κάθετη δύναμη από το τραπέζι (δεν έχουν σχεδιαστεί). Οι δυνάμεις αυτές είναι αντίθετες, οπότε η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων μηδενίζεται:

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{εξωτ} = \vec{B} + \vec{N} = \vec{0}$$

Το εργαλείο μπορεί να εκτελεί μία πολύπλοκη κίνηση, όπως στο πιο πάνω σχήμα. Επειδή η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν, το ΚΜ κινείται με σταθερή ταχύτητα. Η τροχιά του ΚΜ αντιστοιχεί στη διακεκομμένη ευθεία.

Παράδειγμα 2
Κίνηση ενός σκιέρ

Η φωτογραφία που ακολουθεί απεικονίζει έναν σκιέρ, που εκτελεί άλμα και περιστρέφεται. Κατά τη διάρκεια του άλματος, η εξωτερική δύναμη στον σκιέρ είναι το βάρος του (θεωρούμε ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα). Άρα, το ΚΜ του σκιέρ κινείται με επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας:

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \vec{B} \Rightarrow m\vec{\alpha}_{\mathrm{KM}} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{\alpha}_{\mathrm{KM}} = \vec{g}$$

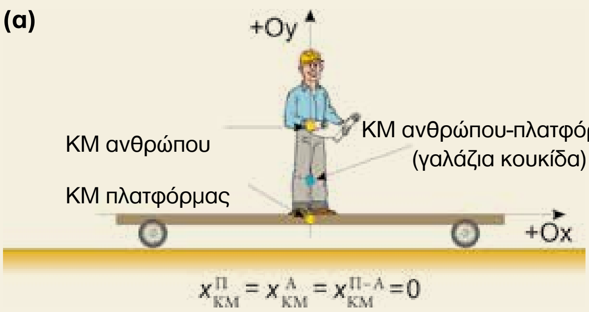
Πηγή: Φωτογραφία Ben Jackson, https://www.flickr.com/photos/bjackson photography/4230404806/

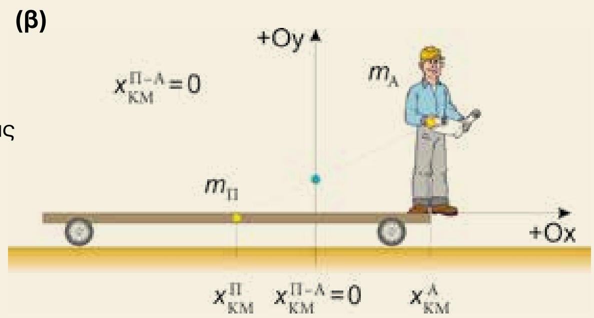
Έστω ότι ο σκιέρ αρχίζει το άλμα του με πλάγια αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$. Το σώμα του μπορεί να περιστρέφεται κατά τη διάρκεια του άλματος, αλλά το ΚΜ του κινείται σε παραβολική τροχιά, διότι εκτελεί πλάγια βολή με αυτή την αρχική ταχύτητα.

Παράδειγμα 3
Άνθρωπος και πλατφόρμα

Το πιο κάτω σχήμα απεικονίζει έναν άνθρωπο, που στέκεται ακίνητος στη μέση μίας πλατφόρμας μήκους $2d$ με ρόδες. Η πλατφόρμα μπορεί να κινείται σε **λείο** οριζόντιο έδαφος. Σε κάποια στιγμή, ο άνθρωπος αρχίζει να βαδίζει μέχρι να φθάσει στη δεξιά άκρη της πλατφόρμας.

Θα περιγράψουμε τη νέα θέση του ανθρώπου και της πλατφόρμας ως προς το έδαφος.





Το ΚΜ ανθρώπου-πλατφόρμας παραμένει ακίνητο

Θα χρησιμοποιήσουμε το σύστημα αξόνων Οx και Oy του σχήματος. Τα ΚΜ της πλατφόρμας και του ανθρώπου υποδεικνύονται με κίτρινες κουκκίδες, και το ΚΜ του συστήματος πλατφόρμας - ανθρώπου με τη γαλάζια κουκκίδα. Αρχικά, τα ΚΜ του ανθρώπου και της πλατφόρμας έχουν συντεταγμένες $x_{\text{KM}}^{\text{A}} = x_{\text{KM}}^{\Pi} = 0$ στον άξονα Οx. Άρα, το ΚΜ του συστήματος πλατφόρμας - ανθρώπου έχει x-συντεταγμένη

$$x_{\text{KM}}^{\Pi\text{-A}} = \frac{m_{\text{A}} x_{\text{KM}}^{\text{A}} + m_{\Pi} x_{\text{KM}}^{\Pi}}{m_{\text{A}} + m_{\Pi}} = 0$$

Όταν ο άνθρωπος αρχίσει να κινείται, αντίθετες οριζόντιες δυνάμεις τριβής $\vec{F}_{\text{A}\to\Pi}$ και $\vec{F}_{\Pi\to\text{A}}$ αναπτύσσονται ανάμεσα στον άνθρωπο και την πλατφόρμα (ζεύγος δράσης - αντίδρασης). Οι δυνάμεις αυτές είναι **εσωτερικές**. Στην οριζόντια διεύθυνση **δεν δρουν εξωτερικές δυνάμεις** στην πλατφόρμα ή τον άνθρωπο. Στην κατακόρυφη διεύθυνση, η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίση με μηδέν. Συνεπώς, **το ΚΜ παραμένει συνεχώς ακίνητο**.

Η x-συντεταγμένη του ΚΜ είναι ίση με $x_{\text{KM}}^{\Pi\text{-A}} = 0$. Έστω ότι οι τελικές x-συντεταγμένες των ΚΜ του ανθρώπου και της πλατφόρμας είναι x_{KM}^{A} και x_{KM}^{Π}, αντίστοιχα. Θα ισχύει:

$$x_{\text{KM}}^{\Pi\text{-A}} = 0 \Rightarrow m_{\text{A}} x_{\text{KM}}^{\text{A}} + m_{\Pi} x_{\text{KM}}^{\Pi} = 0$$

Η διαφορά των τιμών των x-συντεταγμένων ισούται με το μισό του μήκους της πλατφόρμας:

$$x_{\text{KM}}^{\text{A}} - x_{\text{KM}}^{\Pi} = d$$

Άρα:

$$m_{\text{A}} x_{\text{KM}}^{\text{A}} + m_{\Pi} x_{\text{KM}}^{\Pi} = 0 \Rightarrow x_{\text{KM}}^{\Pi} = -\frac{m_{\text{A}}}{m_{\Pi}} x_{\text{KM}}^{\text{A}}$$

$$x_{\text{KM}}^{\text{A}} - x_{\text{KM}}^{\Pi} = d \Rightarrow x_{\text{KM}}^{\text{A}} + \frac{m_{\text{A}}}{m_{\Pi}} x_{\text{KM}}^{\text{A}} = d \Rightarrow x_{\text{KM}}^{\text{A}} = \frac{d}{1+\dfrac{m_{\text{A}}}{m_{\Pi}}} = \frac{m_{\Pi}}{m_{\Pi} + m_{\text{A}}} d$$

Αριθμητική Εφαρμογή:

Έστω ότι ο άνθρωπος έχει μάζα $m_{\text{A}} = 60{,}0$ kg, η πλατφόρμα έχει μάζα $m_{\Pi} = 90{,}0$ kg, και το μήκος της πλατφόρμας είναι 6,0 m και άρα $d = 3{,}0$ m. Συμπεραίνουμε:

$$x_{\text{KM}}^{\text{A}} = \frac{m_{\Pi}}{m_{\Pi} + m_{\text{A}}} d = \frac{90{,}0}{150{,}0} \times (30{,}0\text{ m}) = 1{,}8\text{ m}$$

$$x_{\text{KM}}^{\Pi} = -\frac{m_{\text{A}}}{m_{\Pi}} x_{\text{KM}}^{\text{A}} = -\frac{60{,}0}{90{,}0} \times (1{,}8\text{ m}) = -1{,}2\text{ m}$$

Άρα, ο άνθρωπος έχει προχωρήσει κατά 1,8 m ως προς το έδαφος, και η πλατφόρμα έχει οπισθοχωρήσει κατά 1,2 m.

Παράδειγμα 4

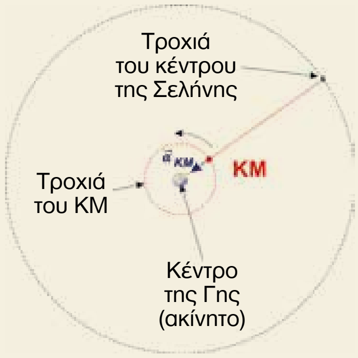
Περιφορά Σελήνης και Γης γύρω από το κοινό τους ΚΜ

Στη μελέτη του Νόμου Παγκόσμιας Έλξης είχαμε αναφέρει ότι η Σελήνη περιφέρεται κατά προσέγγιση σε κυκλική τροχιά με κέντρο το κέντρο της Γης. Θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση του ΚΜ για να δείξουμε ότι τόσο η Γη, όσο και η Σελήνη στην πραγματικότητα **περιφέρονται γύρω από το κοινό ΚΜ τους**.

Ανάμεσα στη Γη και τη Σελήνη δρουν δυνάμεις παγκόσμιας έλξης, οι οποίες είναι **εσωτερικές** και αντίθετες (δράση - αντίδραση). Από την εξίσωση του ΚΜ για το σύστημα Γης - Σελήνης,

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{\varepsilon\xi\omega\tau} = M\vec{\alpha}_{\text{KM}} = \vec{0}$$

συμπεραίνουμε ότι το ΚΜ πρέπει να έχει μηδενική επιτάχυνση.



Το ΚΜ του συστήματος Γης - Σελήνης είναι ένα σημείο στο ευθύγραμμο τμήμα, που ενώνει τα κέντρα της Γης και της Σελήνης. Εάν η Σελήνη περιφέρονταν σε κυκλική τροχιά γύρω από το ακίνητο κέντρο της Γης, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα Γης - Σελήνης θα έπρεπε να περιστρέφεται μαζί με τη Σελήνη. Άρα, το ΚΜ Γης - Σελήνης θα εκτελούσε κυκλική τροχιά, και θα **κινούνταν με κεντρομόλο επιτάχυνση.**

Οι μάζες Γης και Σελήνης είναι $5{,}98 \times 10^{24}$ kg και $7{,}35 \times 10^{22}$ kg, και η μέση απόσταση Γης - Σελήνης είναι $3{,}84 \times 10^{8}$ m. Θεωρώντας έναν άξονα **Οx** με σημείο αναφοράς στο κέντρο της Γης και θετική φορά από τη Γη προς τη Σελήνη, βρίσκουμε ότι το ΚΜ του συστήματος Γης - Σελήνης βρίσκεται στο εσωτερικό της Γης, σε απόσταση 4 660 km από το κέντρο της:

$$x_{\text{KM}}^{\Gamma\text{-}\Sigma} = \frac{m_\Gamma x_{\text{KM}}^{\Gamma} + m_\Sigma x_{\text{KM}}^{\Sigma}}{m_\Gamma + m_\Sigma} = \frac{0 + (7{,}35 \times 10^{22}\ \text{kg}) \times (3{,}84 \times 10^{8}\ \text{m})}{5{,}98 \times 10^{24}\ \text{kg} + 0{,}07 \times 10^{24}\ \text{kg}} =$$

$$\frac{(7{,}35 \times 10^{22}\ \text{kg}) \times (3{,}84 \times 10^{8}\ \text{m})}{6{,}05 \times 10^{24}\ \text{kg}} = \frac{2{,}82 \times 10^{31}\ \text{kg m}}{6{,}05 \times 10^{24}\ \text{kg}} = 4\ 660\ \text{km}$$

Στην πραγματικότητα, η Γη και η Σελήνη **περιφέρονται γύρω από το ΚΜ του συστήματός τους**.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΣ περιστρέφεται γύρω από το ΚΜ.
Σε κάθε στιγμή, το κέντρο της Γης βρίσκεται στο άκρο Γ και το κέντρο της Σελήνης στο άκρο Σ.

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Σε ένα σύστημα σωμάτων, η συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική.	
2	Όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα ενός συστήματος είναι εξωτερικές.	
3	Στο σύστημα Ήλιου - Γης η δύναμη της παγκόσμιας έλξης από τον Ήλιο στη Γη είναι εσωτερική δύναμη.	
4	Το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωμάτων, που μπορούν να θεωρηθούν ως υλικά σημεία, συμπίπτει με την θέση του σώματος με τη μεγαλύτερη μάζα.	
5	Να θεωρήσετε ότι οι πλανήτες Δίας και Γη είναι σφαιρικά σώματα με τη μάζα τους συμμετρικά κατανεμημένη γύρω από το κέντρο τους.	
α	Το κέντρο μάζας του συστήματος Δία - Γης βρίσκεται στην ευθεία που ενώνει τα δύο κέντρα.	
β	Το κέντρο μάζας του συστήματος Δία - Γης βρίσκεται στο μέσο της απόστασης των δύο πλανητών.	
6	Το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωμάτων δεν μπορεί να βρίσκεται σε σημείο όπου δεν υπάρχει ύλη.	
7	Το κέντρο μάζας ενός απομονωμένου συστήματος σωμάτων έχει μηδενική επιτάχυνση.	
8	Αν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν σε ένα σύστημα σωμάτων είναι μηδενική, το κέντρο μάζας του συστήματος παραμένει στην ίδια θέση εάν, η αρχική του ταχύτητα είναι μηδενική.	
9	Η κίνηση κάποιου σώματος ενός συστήματος εξαρτάται μόνο από τις εξωτερικές δυνάμεις, που δρουν στο σύστημα.	
10	Θεωρώντας τη Γη σαν απομονωμένο σύστημα, εάν λυώσουν οι πάγοι στους δύο πόλους της και η στάθμη της θάλασσας ανέβει, τότε θα μετακινηθεί το κέντρο μάζας της Γης.	

Ασκήσεις

Υπολογισμός του ΚΜ Συστήματος Σωμάτων

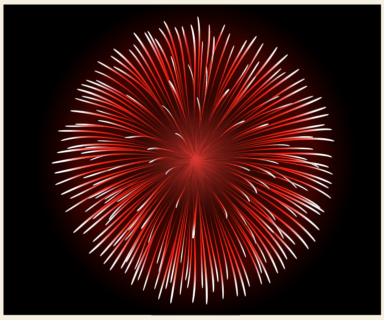
1 Οι μάζες του Ήλιου και του Δία είναι $m_H = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg και $m_\Delta = 2{,}0 \times 10^{27}$ kg, αντίστοιχα. Εάν η απόσταση Ήλιου - Δία είναι $r_{H\Delta} = 7{,}8 \times 10^8$ km, να υπολογίσετε τη θέση του ΚΜ του συστήματος Ήλιου - Δία. Πόσο απέχει το ΚΜ από την επιφάνεια του Ήλιου; (Η ακτίνα του Ήλιου είναι $r_H = 7{,}0 \times 10^5$ km).

Εφαρμογή του Δεύτερου και Τρίτου Νόμου του Νεύτωνα στο Κέντρο Μάζας Συστήματος Σωμάτων

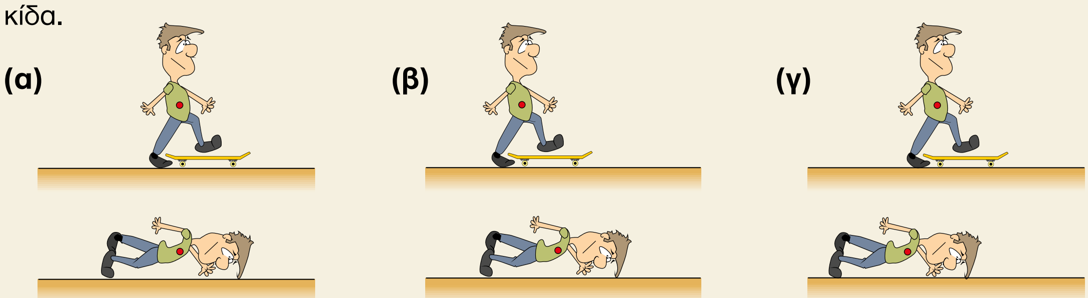
2 Μία ομάδα αλεξιπτωτιστών επιδείξεων πέφτουν όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Να προσδιορίσετε τις εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στο σύστημα των αλεξιπτωτιστών, και να περιγράψετε την κίνηση του ΚΜ της ομάδας τους.

(Πηγή: https://skydive2013.wordpress.com)

3 Μία κροτίδα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Όταν φθάσει στο ανώτατο σημείο της τροχιάς της εκρήγνυται σε πολλά μικρά κομμάτια που κινούνται προς όλες τις κατευθύνσεις, όπως στο διπλανό σχήμα. Να περιγράψετε την κίνηση του ΚΜ των κομματιών αυτών μετά την έκρηξη.



4 Ένας ακίνητος άνθρωπος αρχίζει να περπατά, αλλά στο πρώτο βήμα το πόδι του πατά σε ένα skateboard, οπότε πέφτει στο έδαφος. Το ΚΜ του ανθρώπου σημειώνεται με την κόκκινη κουκίδα.



Ποιό από τα σχήματα **(α)** - **(γ)** απεικονίζει σωστά τη θέση του ανθρώπου όταν φθάσει στο έδαφος; (Θεωρείστε ότι το skateboard έχει αμελητέα μάζα σε σχέση με τον άνθρωπο).

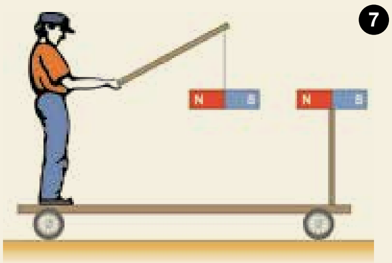
❺ Ένας ψαράς μάζας m_1 = 60,0 kg στέκεται στην άκρη μίας βάρκας, μήκους 3,0 m και μάζας m_2 = 120,0 kg, η οποία είναι προσανατολισμένη κάθετα προς την ακτή. Ο ψαράς και η βάρκα είναι ακίνητοι ως προς την παραλία. Σε κάποια στιγμή, ο ψαράς αρχίζει να βαδίζει προς τη δεύτερη άκρη της βάρκας, με ταχύτητα μέτρου υ = 2,0 m/s ως προς την παραλία. Όταν ο ψαράς φθάσει στην άλλη άκρη της βάρκας, πόσο θα έχουν μετακινηθεί ως προς την παραλία η βάρκα και ο ψαράς; Να θεωρήσετε ότι η αντίσταση του νερού είναι αμελητέα.

❻ Ένας ακροβάτης μάζας m στέκεται σε μία κατακόρυφη ανεμόσκαλα, που κρέμεται από ένα αερόστατο μάζας M. Το αερόστατο και ο ακροβάτης ισορροπούν ακίνητοι στον αέρα. Σε κάποια στιγμή, ο ακροβάτης αρχίζει να σκαρφαλώνει με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ ως προς το έδαφος. Το αερόστατο αρχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου V ως προς το έδαφος.

Α. Να σχεδιάσετε και να συζητήσετε τις εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις, που ασκούνται στο σύστημα αερόστατου - ακροβάτη. Να υπολογίσετε τη συνισταμένη των εσωτερικών και τη συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων του συστήματος.

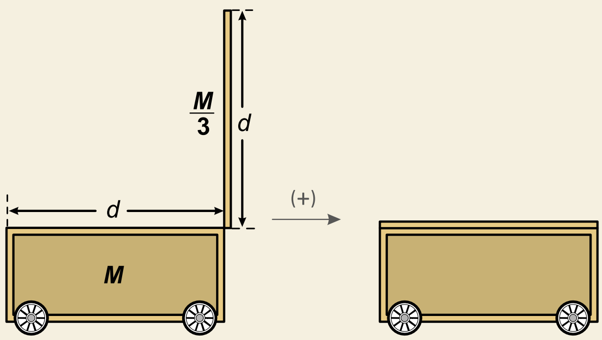
Β. Να περιγράψετε την κίνηση του ΚΜ του συστήματος αερόστατου - ακροβάτη.

Γ. Να εξαγάγετε μία σχέση ανάμεσα στις ταχύτητες του αερόστατου και του ακροβάτη.



❼ Ένας εφευρέτης ισχυρίζεται ότι ανακάλυψε έναν τρόπο να μετακινείται χωρίς να χρησιμοποιεί καύσιμα. Εάν στερεώσει ένα μαγνήτη πάνω στην πλατφόρμα που στέκεται, και προσπαθήσει να τον έλξει με ένα δεύτερο μαγνήτη (όπως στο σχήμα), θα καταφέρει να κινηθεί;

❽ Ένα καροτσάκι μπορεί να κινείται σε ένα οριζόντιο πάτωμα, χωρίς τριβές. Η μάζα του κυρίου τμήματος του καροτσιού είναι M και η μάζα του καπακιού είναι $M/3$. Το καρότσι είναι αρχικά ακίνητο και το καπάκι είναι ανοιχτό. Σε κάποια στιγμή το καπάκι αρχίζει να πέφτει, και τελικά έρχεται σε οριζόντια θέση. Να υποθέσετε ότι τα κέντρα μάζας του καροτσιού και του καπακιού ταυτίζονται με τα γεωμετρικά τους κέντρα, και ότι το καπάκι είναι πολύ λεπτό.



Α. Ποια είναι η μετατόπιση του καροτσιού, όταν κλείσει το καπάκι;

Β. Να περιγράψετε την κίνηση του καροτσιού κατά τη διάρκεια της κίνησης του καπακιού, και αφού το καπάκι έχει κλείσει.

6.10. Ορμή Συστήματος Σωμάτων

Ως ορμή ενός συστήματος σωμάτων ορίζεται το **διανυσματικό άθροισμα** των ορμών όλων των σωμάτων του συστήματος:

$$\vec{p}_{\text{ολ}} = \sum \vec{p}_i$$

Παράδειγμα

Δύο σφαίρες ίσης μάζας 0,250 kg κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις, με ταχύτητες μέτρου 60,0 cm/s. Θεωρούμε ως θετική τη φορά κίνησης της σφαίρας 1.

Οι ορμές των δύο σφαιρών έχουν αλγεβρικές τιμές

$p_1 = (0{,}250\ \text{kg}) \times (0{,}600\ \text{m/s}) = 1{,}50\ \text{kg m/s}$ και $p_2 = -1{,}50\ \text{kg m/s}$

Η συνολική ορμή είναι ίση με μηδέν:

$$p_{\text{ολ}} = p_1 + p_2 = (1{,}50\ \text{kg m/s}) + (-1{,}50\ \text{kg m/s}) = 0$$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

6.10.1. Η συνολική ορμή ενός συστήματος δύο σωμάτων με μάζες $m_1 = 0{,}500$ kg και $m_2 = 0{,}125$ kg είναι ίση με μηδέν. Το πρώτο σώμα έχει ταχύτητα μέτρου 0,50 m/s. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του δεύτερου σώματος. Ποια η κατεύθυνση κίνησης του δεύτερου σώματος ως προς το πρώτο;

6.11. Αρχή της Διατήρησης της Ορμής Συστήματος Σωμάτων

Όπως δείξαμε προηγουμένως, όταν **το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων**, που δρουν σε ένα σύστημα σωμάτων, μηδενίζεται, το ΚΜ του συστήματος ηρεμεί ή κινείται με σταθερή ταχύτητα:

$$\sum \vec{F}_{\text{εξωτ}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha}_{\text{KM}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\upsilon}_{\text{KM}} = \text{σταθερή (ή μηδέν)}$$

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα δύο σωμάτων με μάζες m_1 και m_2. Από τη σχέση υπολογισμού της ταχύτητας του ΚΜ, προκύπτει:

$$\vec{\upsilon}_{\text{KM}} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{m_1 + m_2}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η **συνολική ορμή** του συστήματος, $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$, είναι ανάλογη με την ταχύτητα του ΚΜ:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{\upsilon}_{\text{KM}}$$

Εάν το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων στο σύστημα μηδενίζεται, η ταχύτητα του ΚΜ παραμένει σταθερή. Άρα:

Αρχή της Διατήρηση της Ορμής ενός Συστήματος Σωμάτων

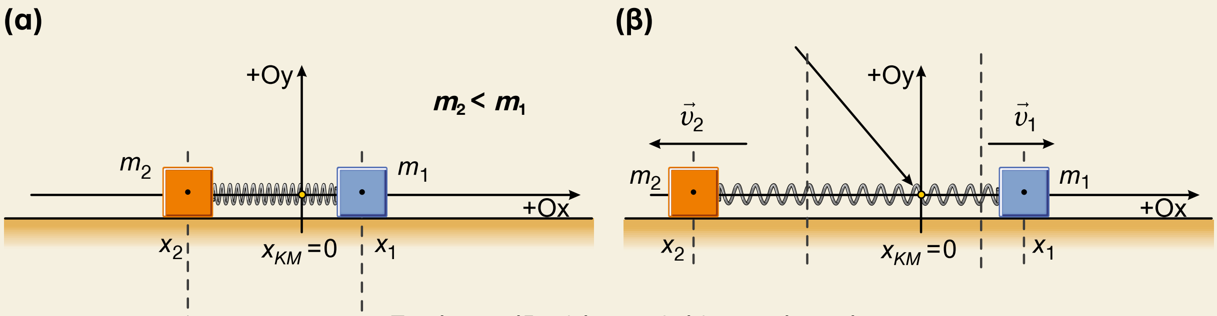
Εάν το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων, που δρουν σε ένα σύστημα σωμάτων, είναι ίσο με μηδέν, η συνολική ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή:

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \vec{0} \Rightarrow \sum \vec{p} = \text{σταθερή (ή μηδέν)}$$

Σημείωση
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το συμπέρασμα αυτό ισχύει για Ν σώματα.

Παράδειγμα
Δύο σώματα σε επαφή με ελατήριο

Το πιο κάτω σχήμα **(α)** απεικονίζει δύο κύβους με μάζες m_1 και $m_2 < m_1$ που εφάπτονται με ένα συμπιεσμένο ελατήριο αμελητέας μάζας. Οι κύβοι μπορούν να κινούνται σε ένα **λείο** οριζόντιο τραπέζι. Θα μελετήσουμε την κίνηση των κύβων, όταν αφήσουμε ελεύθερο το ελατήριο.



Το κέντρο μάζας (κίτρινη τελεία) παραμένει ακίνητο

Θα θεωρήσουμε το σύστημα, που αποτελείται από **τους κύβους και το ελατήριο.** Οι μοναδικές **εξωτερικές** δυνάμεις σε αυτό το σύστημα είναι τα βάρη των κύβων και οι κάθετες δυνάμεις στους κύβους από το τραπέζι. Η συνισταμένη αυτών των δυνάμεων είναι κατακόρυφη και μηδενίζεται, επειδή οι κύβοι δεν επιταχύνονται στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \vec{0}$$

Συνεπώς, το ΚΜ του συστήματος των κύβων και του ελατηρίου έχει μηδενική επιτάχυνση, και η συνολική ορμή του συστήματος διατηρείται. Το ελατήριο έχει μηδενική ορμή, επειδή έχει αμελητέα μάζα. Από τη διατήρηση της συνολικής ορμής, βρίσκουμε μία σχέση, που συνδέει τις ταχύτητες των κύβων:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow p_{1x} + p_{2x} = 0 \Rightarrow m_2 \upsilon_{2x} = -m_1 \upsilon_{1x} \Rightarrow \upsilon_{2x} = -\frac{m_1}{m_2}\upsilon_{1x}$$

Οι ταχύτητες έχουν αντίθετα πρόσημα, οπότε οι κύβοι κινούνται συνεχώς με αντίθετη φορά. Επειδή $m_1 > m_2$, ο κύβος 2 έχει ταχύτητα μεγαλύτερου μέτρου.

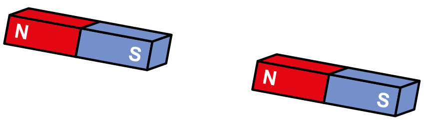
Χρησιμοποιώντας τη θέση του ΚΜ, προσδιορίζουμε μία σχέση για τις θέσεις των δύο κύβων. Το ΚΜ παραμένει ακίνητο στην αρχική του θέση, με x-συντεταγμένη $x_{\mathrm{KM}} = 0$. Άρα:

$$x_{\mathrm{KM}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{m_1}{m_2} x_1$$

Οι x-συντεταγμένες των δύο κύβων μεταβάλλονται με τον χρόνο, αλλά ικανοποιούν συνεχώς την τελευταία εξίσωση.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

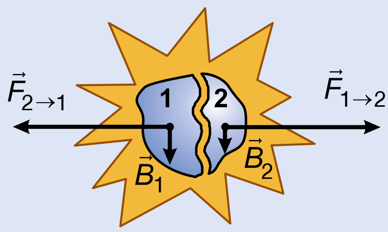
6.11.1. Δύο όμοιοι μαγνήτες κρατούνται ακίνητοι σε κοντινή απόσταση πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να εξηγήσετε πώς θα μεταβληθεί η ορμή του συστήματος όταν αφεθούν ελεύθεροι.



ΕΝΘΕΤΗ ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Εάν το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων **δεν** είναι μηδέν, αλλά η **Ώθηση Δύναμης** των εξωτερικών δυνάμεων είναι μικρή, η συνολική ορμή ενός συστήματος σωμάτων διατηρείται **κατά προσέγγιση.** Αναδεικνύουμε αυτή την περίπτωση με το επόμενο παράδειγμα.

Το διπλανό σχήμα απεικονίζει ένα πυροτέχνημα, που εκρήγνυται στον αέρα σε δύο θραύσματα **1** και **2**. Οι δυνάμεις $\vec{F}_{2\to1}$ και $\vec{F}_{1\to2}$ μεταξύ των θραυσμάτων (ζεύγος δράσης - αντίδρασης) είναι **εσωτερικές** και δεν επηρεάζουν τη συνολική ορμή του συστήματός τους.



Επιπρόσθετα, στο θραύσμα **1** δρα το βάρος του $\vec{B}_1$ και στο θραύσμα 2 το βάρος του $\vec{B}_2$. Οι δυνάμεις αυτές είναι **εξωτερικές.**

Έστω ότι η έκρηξη διαρκεί κατά ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt. Η μεταβολή της ορμής κάθε θραύσματος ισούται με την Ώθηση Δύναμης:

$$\vec{p}_{1\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{1\alpha\rho\chi} = (\vec{F}_{2\to1} + \vec{B}_1)\Delta t$$

$$\vec{p}_{2\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{2\alpha\rho\chi} = (\vec{F}_{1\to2} + \vec{B}_2)\Delta t$$

Εάν αθροίσουμε τις δύο εξισώσεις, βρίσκουμε:

$$(\vec{p}_{1\tau\varepsilon\lambda} + \vec{p}_{2\tau\varepsilon\lambda}) - (\vec{p}_{1\alpha\rho\chi} + \vec{p}_{2\alpha\rho\chi}) = (\vec{F}_{2\to1} + \vec{B}_1 + \vec{F}_{1\to2} + \vec{B}_2)\Delta t$$

Το άθροισμα $\vec{F}_{2\to1} + \vec{F}_{1\to2} = \vec{0}$ (ζεύγος δράσης - αντίδρασης). Άρα, η μεταβολή της συνολικής ορμής ισούται με την ώθηση των εξωτερικών δυνάμεων:

$$(\vec{p}_{1\tau\varepsilon\lambda} + \vec{p}_{2\tau\varepsilon\lambda}) - (\vec{p}_{1\alpha\rho\chi} + \vec{p}_{2\alpha\rho\chi}) = (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)\Delta t$$

Εάν το χρονικό διάστημα της έκρηξης Δt είναι πολύ μικρό, η ώθηση των εξωτερικών δυνάμεων είναι αμελητέα και η συνολική ορμή διατηρείται σταθερή **πριν** και **μετά** την έκρηξη.

Αριθμητική Εφαρμογή

Έστω ότι τα θραύσματα έχουν μάζες 50,0 g και η έκρηξη διαρκεί 0,010 s. Η μεταβολή της συνολικής ορμής θα είναι:

$$(m_1 + m_2)g\Delta t = (100{,}0\ \text{g}) \times (9{,}81\ \text{m/s}^2) \times (0{,}010\ \text{s}) = 0{,}0098\ \text{kg m/s}.$$

6.12. Σύγκριση Ορμής και Κινητικής Ενέργειας

Η Κινητική Ενέργεια ενός σώματος μπορεί να εκφραστεί με βάση το μέτρο της ορμής του p και τη μάζα του m:

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{(m\upsilon)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

Παρατηρούμε ότι:

- Δύο σώματα με ορμές ίσου μέτρου δεν έχουν απαραίτητα ίσες κινητικές ενέργειες.
- Εάν δύο σώματα έχουν ορμές ίσου μέτρου, το σώμα μικρότερης μάζας έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια.
- Εάν δύο σώματα έχουν ίσες μάζες, το σώμα με τη μεγαλύτερη ταχύτητα έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

6.12.1. Ένα μικρό αυτοκίνητο και ένα φορτηγό τριπλάσιας μάζας κινούνται με ορμές ίσου μέτρου. Να συγκρίνετε τις κινητικές τους ενέργειες.

6.12.2. Ένα τρένο αρχίζει να κινείται με επιτάχυνση σε κατηφορικό έδαφος, και μετά από λίγο η ταχύτητά του τριπλασιάζεται. Πώς θα μεταβληθεί η κινητική του ενέργεια;

6.12.3. Είναι δυνατόν ένα κουνούπι να έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια από ένα φορτηγό;

Όταν δύο σώματα ξεκινούν από την ηρεμία και επιταχύνονται υπό την επίδραση δυνάμεων δράσης - αντίδρασης, αποκτούν ορμές **ίσου μέτρου** και αντίθετης κατεύθυνσης. **Το σώμα με τη μικρότερη μάζα αποκτά μεγαλύτερη κινητική ενέργεια**, οπότε μπορεί να προκαλέσει μεγαλύτερη ζημιά κατά τη σύγκρουσή του με ένα τρίτο σώμα. Στο επόμενο παράδειγμα εξηγούμε αυτή τη συμπεριφορά.

Παράδειγμα

Εκπυρσοκρότηση Κανονιού

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται ένα κανόνι μάζας M, το οποίο εκπυρσοκροτεί σε οριζόντιο έδαφος και εκτοξεύει ένα βλήμα μάζας m σε οριζόντια διεύθυνση. Οι δυνάμεις, που ασκούνται ανάμεσα στο βλήμα και στο κανόνι *κατά τη διάρκεια της εκπυρσοκρότησης*, μεταβάλλονται χρονικά αλλά είναι συνεχώς αντίθετες μεταξύ τους (ζεύγος δράσης - αντίδρασης).

Συνεπώς, το κανόνι και το βλήμα αποκτούν ορμές ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς, μετά την εκπυρσοκρότηση:

$$\vec{p}_{\kappa\alpha\nu} = -\vec{p}_{\beta\lambda} \Rightarrow \left|\vec{p}_{\kappa\alpha\nu}\right| = \left|\vec{p}_{\beta\lambda}\right| = p$$

Επειδή οι μάζες του κανονιού και του βλήματος είναι πολύ διαφορετικές ($m_{\beta\lambda} << m_{\kappa\alpha\nu}$), οι κινητικές ενέργειες του κανονιού και του βλήματος **δεν είναι ίσες** μεταξύ τους:

$$\frac{E_{\kappa\iota\nu}^{\kappa\alpha\nu}}{E_{\kappa\iota\nu}^{\beta\lambda}} = \frac{p^2/(2m_{\kappa\alpha\nu})}{p^2/(2m_{\beta\lambda})} = \frac{m_{\beta\lambda}}{m_{\kappa\alpha\nu}}$$

Παρατηρείστε ότι το κανόνι έχει πολύ μικρότερη κινητική ενέργεια από το βλήμα, παρά το γεγονός ότι έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα. Αυτό οφείλεται στο ότι το κανόνι αποκτά πολύ μικρότερη ταχύτητα από το βλήμα:

$$\left|\vec{p}\right|_{\kappa\alpha\nu} = \left|\vec{p}\right|_{\beta\lambda} = p \Rightarrow m_{\kappa\alpha\nu}\upsilon_{\kappa\alpha\nu} = m_{\beta\lambda}\upsilon_{\beta\lambda} \Rightarrow \upsilon_{\kappa\alpha\nu} = \frac{m_{\beta\lambda}}{m_{\kappa\alpha\nu}}\,\upsilon_{\beta\lambda}$$

όπου $\upsilon_{\kappa\alpha\nu}$ και $\upsilon_{\beta\lambda}$ τα μέτρα των ταχυτήτων του κανονιού και του βλήματος αντίστοιχα.

Επειδή η κινητική ενέργεια είναι ανάλογη όχι μόνο με τη μάζα, αλλά και με το **τετράγωνο** της ταχύτητας, το βλήμα αποκτά μεγαλύτερη κινητική ενέργεια από το κανόνι.

Αριθμητική Εφαρμογή

Έστω ότι το κανόνι και το βλήμα έχουν μάζες $m_{καν} = 750$ kg και $m_{βλ} = 2{,}5$ kg και το βλήμα εκτοξεύεται με ταχύτητα 48 m/s. Μετά την εκπυρσοκρότηση, το κανόνι και το βλήμα έχουν ορμές **ίσου μέτρου**:

$$p = m_{βλ}\upsilon_{βλ} = (2{,}5 \text{ kg}) \times (48{,}0 \text{ m/s}) = 120 \text{ kg m/s}$$

Το κανόνι αποκτά ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{καν} = p/m_{καν} = (120 \text{ kg m/s})/(750 \text{ kg}) = 0{,}16 \text{ m/s}$

Η κινητική ενέργεια του κανονιού είναι:

$$E_{κιν}^{καν} = p^2/(2m_{καν}) = (120 \text{ kg m/s})^2/(2 \times 750 \text{ kg}) = 9{,}6 \text{ J}$$

Η κινητική ενέργεια του βλήματος είναι πολύ μεγαλύτερη:

$$E_{κιν}^{βλ} = p^2/(2m_{βλ}) = (120 \text{ kg m/s})^2/(2 \times 2{,}5 \text{ kg}) = 2\,880 \text{ J}$$

Συνεπώς, το βλήμα αποκτά 300 φορές μεγαλύτερη κινητική ενέργεια από το κανόνι.

Έστω ότι αμέσως μετά την εκπυρσοκρότηση το βλήμα και το κανόνι έρχονται σε επαφή με δύο πανομοιότυπους τοίχους. Το βλήμα θα προκαλέσει **πολύ μεγαλύτερη ζημιά στον τοίχο**, σε σύγκριση με το κανόνι, επειδή **έχει πολύ μεγαλύτερη κινητική ενέργεια.** Κατά τη σύγκρουση, η κινητική ενέργεια του βλήματος μετατρέπεται σε διάφορες μορφές ενέργειας (κυρίως εσωτερική ενέργεια), με τελικό αποτέλεσμα τη μόνιμη παραμόρφωση του τοίχου και του βλήματος.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

6.12.4. Θεωρείστε τα πιο κάτω ζευγάρια σωμάτων:

I. Τουφέκι και σφαίρα, μετά την εκπυρσοκρότηση του τουφεκιού.

II. Καταπέλτης και βράχος, μετά την εκτόξευση του βράχου.

Κάθε ζευγάρι αποτελεί **σύστημα σωμάτων.** Να θεωρήσετε ότι οι δυνάμεις που προσδίδουν ορμή στα σώματα του ζευγαριού είναι εσωτερικές. Να εξηγήσετε ποιό από τα δύο σώματα του ζευγαριού αποκτά **(1)** τη μεγαλύτερη ορμή, **(2)** τη μεγαλύτερη ταχύτητα, και **(3)** τη μεγαλύτερη κινητική ενέργεια. Ποιό σώμα είναι ικανό να προκαλέσει μεγαλύτερη βλάβη;

Η ορμή και η κινητική ενέργεια έχουν μία σημαντική διαφορά:

I. Μία δύναμη $\vec{F}$ προκαλεί την ίδια **μεταβολή ορμής** ($\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$) σε δύο σώματα διαφορετικής μάζας, όταν δρα για το ίδιο χρονικό διάστημα Δt.

Παράδειγμα

Μία σιδερένια σφαίρα και μία μπάλα του τένις ηρεμούν. Εάν δράσει στις δύο μπάλες μία συνισταμένη δύναμη μέτρου 6,0 N για 2,0 s, και οι δύο μπάλες αποκτούν ορμή μέτρου 12 N s.
Ομοίως, εάν οι δύο μπάλες κινούνται με την ίδια ορμή, μέτρου 18 N s, μία δύναμη 3,0 N τις σταματά στο ίδιο χρονικό διάστημα 6,0 s.

II. Η ίδια δύναμη $\vec{F}$ προκαλεί την ίδια μεταβολή **κινητικής ενέργειας** ($\Delta E_{κιν} = F\Delta x$) σε δύο σώματα διαφορετικής μάζας, όταν τα μετακινεί κατά τη διεύθυνσή της για το ίδιο διάστημα Δx.

Παράδειγμα

Εάν η ίδια συνισταμένη δύναμη μέτρου 6,0 N μετακινήσει τις μπάλες στη διεύθυνσή της κατά $\Delta x = 1{,}0$ m, τους προσδίδει κινητική ενέργεια $E_{κιν} = 6{,}0$ J.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

6.12.5. Γιατί αυξάνεται το βεληνεκές ενός κανονιού, εάν αυξήσουμε το μήκος της κάννης του;

6.12.6. Ένα φορτωμένο και ένα άδειο τάνκερ πλέουν με την ίδια ταχύτητα προς ένα λιμάνι. Ποιό από τα δύο πλοία χρειάζεται να σβήσει τις μηχανές του σε μεγαλύτερη απόσταση από το λιμάνι, για να σταματήσει με ασφάλεια; Να υποθέσετε ότι στα πλοία δρα ίση αντίσταση από το νερό.

6.12.7. Μιά πήλινη και μια μεταλλική σφαίρα ίδιας μάζας αφήνονται από ηρεμία από το ίδιο ύψος να πέσουν στο έδαφος. Η πήλινη σφαίρα θρυμματίζεται ενώ η μεταλλική αναπηδά ελαστικά.

Η μεταβολή της ορμής των δύο σφαιρών διαρκεί το ίδιο χρονικό διάστημα.

Α. Ποιά σφαίρα ασκεί μεγαλύτερη δύναμη στο έδαφος;
Β. Ποιά σφαίρα μεταφέρει μεγαλύτερη ενέργεια στο έδαφος;

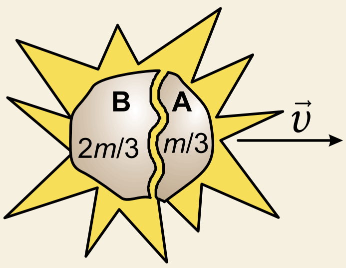
Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Η ταχύτητα του κέντρου μάζας ενός συστήματος σωμάτων είναι αντίρροπη με την ορμή του συστήματος.	
2	Ο ρυθμός της μεταβολής της ορμής ενός συστήματος σωμάτων είναι ανάλογος της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του συστήματος.	
3	Η ορμή ενός απομονωμένου συστήματος σωμάτων, ως προς σημείο αναφοράς που κινείται με το κέντρο μάζας, είναι μηδενική.	
4	Οι δυνάμεις παγκόσμιας έλξης, που αναπτύσσονται μεταξύ της Γης και της Σελήνης, δεν μεταβάλλουν την ορμή του συστήματος Γης - Σελήνης.	
5	Σε δύο σώματα διαφορετικής μάζας, τα οποία αρχικά ηρεμούν, ασκείται ίση σταθερή συνισταμένη δύναμη για το ίδιο χρονικό διάστημα. Στο τέλος του χρονικού διαστήματος τα δύο σώματα θα έχουν αποκτήσει την ίδια κινητική ενέργεια.	
6	Σε δύο σώματα διαφορετικής μάζας, τα οποία αρχικά ηρεμούν, ασκείται ίση σταθερή συνισταμένη δύναμη που προκαλεί την ίδια μετατόπιση και στα δύο. Στο τέλος της μετατόπισης:	
α	Τα δύο σώματα θα έχουν την ίδια κινητική ενέργεια.	
β	Το σώμα με την μικρότερη μάζα θα έχει αποκτήσει τη μεγαλύτερη ορμή.	
γ	Το σώμα με την μικρότερη μάζα θα έχει αποκτήσει τη μεγαλύτερη ταχύτητα.	

Ασκήσεις

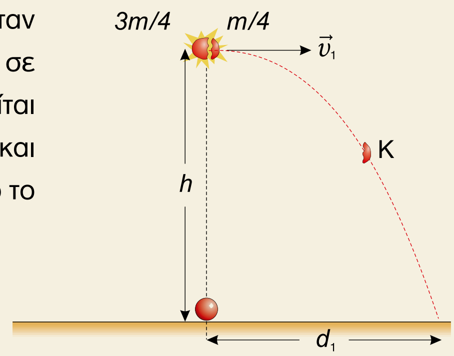
1 Ένα αρχικά ακίνητο σώμα, μάζας m, διασπάται σε δύο θραύσματα. Το θραύσμα **Α** έχει μάζα $m/3$ και εκτοξεύεται με οριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}$.



Α. Να περιγράψετε την κίνηση του ΚΜ των δύο θραυσμάτων, αμέσως μετά την έκρηξη.

Β. Να σχεδιάσετε το διάνυσμα της ταχύτητας του θραύσματος **Β** αμέσως μετά την έκρηξη, και να υπολογίσετε το μέτρο της.

2 Ένα βλήμα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Όταν φθάσει στο ανώτατο σημείο της τροχιάς του εκρήγνυται σε δύο θραύσματα **1** και **2.** Το θραύσμα **1** έχει μάζα $m/4$, κινείται αμέσως μετά την έκρηξη με αρχική οριζόντια ταχύτητα $\vec{v}_1$, και προσγειώνεται στο έδαφος σε οριζόντια απόσταση d_1 από το σημείο της έκρηξης.



Α. Να προσδιορίσετε την αρχική ταχύτητα του θραύσματος **2**, αμέσως μετά την έκρηξη.

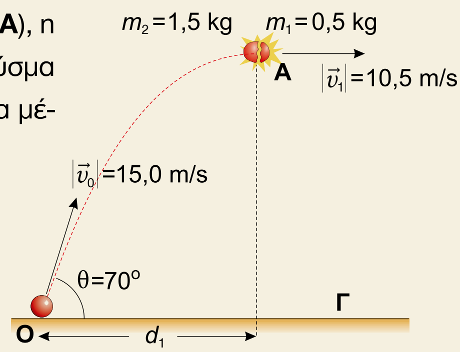
Β. Να προσδιορίσετε την οριζόντια απόσταση d_2 από το σημείο της έκρηξης, στην οποία θα βρίσκεται το θραύσμα **2** όταν προσγειωθεί.

Γ. Να περιγράψετε την κίνηση του ΚΜ των θραυσμάτων **1** και **2** μετά από την έκρηξη.

Δ. Να σχεδιάσετε το σημείο στο οποίο βρίσκεται το θραύσμα **2**, όταν το **1** βρίσκεται στο σημείο Κ.

Ε. Πώς μπορείτε, χρησιμοποιώντας την τροχιά του θραύσματος **1**, να σχεδιάσετε την τροχιά του **2**;

3 Μία κροτίδα εκτοξεύεται υπό γωνία 70^0 ως προς το οριζόντιο έδαφος από το σημείο **Ο**, με ταχύτητα μέτρου $|\vec{v}_0| = 15{,}0$ m/s. Όταν φθάνει στο ανώτατο ύψος της τροχιάς της (σημείο **Α**), η κροτίδα εκρήγνυται σε δύο θραύσματα **1** και **2.** Το θραύσμα **1** κινείται οριζόντια όπως στο σχήμα, με αρχική ταχύτητα μέτρου $|\vec{v}_1| = 10{,}5$ m/s.



Α. Να προσδιορίσετε την αρχική ταχύτητα του θραύσματος **2.**

Β. Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος της τροχιάς και την οριζόντια μετατόπιση d_1 της κροτίδας ως προς το σημείο Ο.

Γ. Τι κίνηση εκτελεί το ΚΜ των **1** και **2** μετά από την έκρηξη; Να σχεδιάσετε την τροχιά του ΚΜ.

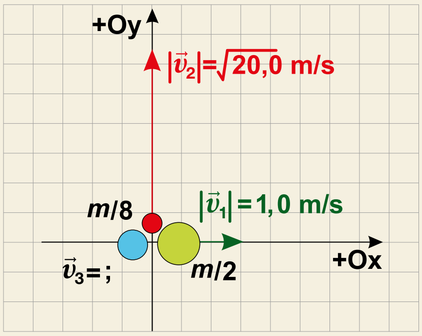
Δ. Να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου **Γ**, στο οποίο η τροχιά του ΚΜ τέμνει το έδαφος. Πόσο απέχει το σημείο Γ από το Ο;

Ε. Να χρησιμοποιήσετε το σημείο **Γ** για να προσδιορίσετε τις θέσεις των θραυσμάτων **1** και **2**, όταν χτυπούν στο έδαφος.

❹ Μια βόμβα μάζας *m* βρίσκεται ακίνητη στην επιφάνεια μιας παγωμένης λίμνης. Ξαφνικά εκρήγνυται σε τρία θραύσματα, τα οποία γλιστρούν πάνω στον πάγο σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Για κάποιο άτομο που κοιτάζει την έκρηξη από ψηλά, το μεγαλύτερο θραύσμα μάζας $m/2$ κινείται προς τη θετική διεύθυνση του άξονα Ox με ταχύτητα μέτρου $|\vec{\upsilon}_1| = 1{,}0$ m/s. Το δεύτερο θραύσμα έχει μάζα $m/8$ και κινείται προς τη θετική διεύθυνση του άξονα Oy με ταχύτητα μέτρου $|\vec{\upsilon}_2| = \sqrt{20{,}0}$ m/s.

Α. Να προσδιορίσετε την ταχύτητα του τρίτου θραύσματος.

Β. Πώς κινείται το ΚΜ των τριών θραυσμάτων μετά την έκρηξη;



❺ Δύο κύβοι με μάζες $m_1 = 1{,}0$ kg και $m_2 = 2{,}0$ kg εφάπτονται με τις δύο άκρες ενός αβαρούς ελατηρίου, σταθεράς $k = 1{,}5 \times 10^3$ N/m. Οι κύβοι και το ελατήριο εφάπτονται σε ένα λείο, οριζόντιο τραπέζι και ηρεμούν. Το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά 40,0 cm σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Εάν το σύστημα αφεθεί ελεύθερο:

Α. Να σχεδιάσετε τις εξωτερικές και τις εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος κύβων - ελατηρίου, και να υπολογίσετε τη συνισταμένη των εξωτερικών και τη συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων.

Β. Να περιγράψετε την κίνηση του ΚΜ του συστήματος.

Γ. Χρησιμοποιώντας έναν οριζόντιο άξονα με σημείο αναφοράς στη θέση του ΚΜ, να εξαγάγετε μία σχέση για τον λόγο των αλγεβρικών τιμών των θέσεων και των ταχυτήτων των δύο κύβων, σαν συνάρτηση των μαζών τους.

Δ. Να συγκρίνετε τις κινητικές ενέργειες των δύο κύβων.

Ε. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κάθε σώματος όταν το ελατήριο αποκτήσει το φυσικό του μήκος.

❻ Ένας τερματοφύλακας πρέπει να σταματήσει, σε διαδοχικές επεμβάσεις, μία μπάλα ποδοσφαίρου μάζας 450 g, και μία μπάλα του μπέιζ-μπώλ, μάζας 145 g. Οι δύο μπάλες φθάνουν στον τερματοφύλακα με ορμές **ίσου μέτρου**, και αυτός τους ασκεί δυνάμεις ίσου μέτρου.

Α. Να συγκρίνετε τα χρονικά διαστήματα, μέσα στα οποία ακινητοποιούνται οι δύο μπάλες.

Β. Σε ποιά περίπτωση, το χέρι του ποδοσφαιριστή πρέπει να μετακινηθεί κατά μεγαλύτερη απόσταση, για να σταματήσει τη μπάλα;

Γ. Ποιά από τις δύο μπάλες είναι πιο πιθανόν να τραυματίσει τον τερματοφύλακα, και γιατί;

6.13. Ελαστικές και Ανελαστικές Κρούσεις

Θα λέμε ότι δύο σώματα συγκρούονται, όταν ασκούν δυνάμεις το ένα στο άλλο, οι οποίες επηρεάζουν την κινητική τους κατάσταση.

Οι δυνάμεις μεταξύ συγκρουόμενων σωμάτων είναι συνήθως **δυνάμεις επαφής**. Για παράδειγμα, δύο σφαίρες του μπιλιάρδου που συναντώνται, δύο συγκρουόμενα αυτοκίνητα του λούνα-παρκ, μία ρακέτα που χτυπά μία μπάλα του τένις, μία μπάλα ποδοσφαίρου που σταματά στα χέρια του τερματοφύλακα, ένα πιάτο που χτυπά στο πάτωμα, αποτελούν παραδείγματα συγκρουόμενων αντικειμένων, που αλληλεπιδρούν με δυνάμεις επαφής. Η χρονική διάρκεια αυτών των κρούσεων είναι συνήθως πολύ μικρή.

Σε κάποια παραδείγματα κρούσεων, τα εμπλεκόμενα σώματα δεν χρειάζεται να έλθουν σε επαφή, αλλά αλληλεπιδρούν με **δυνάμεις από απόσταση**. Δύο μαγνήτες που πλησιάζουν επειδή έλκονται, δύο φορτισμένα σφαιρίδια που απομακρύνονται επειδή απωθούνται, ένα διαστημόπλοιο που αλλάζει πορεία υπό τη βαρυτική επίδραση ενός ουράνιου σώματος, αποτελούν παραδείγματα κρούσεων, στις οποίες δρουν δυνάμεις από απόσταση. Η χρονική διάρκεια αυτών των κρούσεων μπορεί να είναι αρκετά μεγάλη.

Διατήρηση της Συνολικής Ορμής κατά τη Διάρκεια μίας Κρούσης

Τα σώματα, που συμμετέχουν σε μία κρούση, αποτελούν ένα **σύστημα σωμάτων**. Κατά τη διάρκεια μίας κρούσης αναπτύσσονται δυνάμεις δράσης - αντίδρασης μεταξύ των συγκρουόμενων σωμάτων, οι οποίες ενδέχεται να είναι πολύ ισχυρές. Επειδή οι δυνάμεις αυτές είναι **εσωτερικές**, δεν επηρεάζουν την ταχύτητα του ΚΜ του **συστήματος**. Εάν το άθροισμα των **εξωτερικών** δυνάμεων, που δρούν στα σώματα κατά τη διάρκεια της κρούσης, είναι ίσο με μηδέν, **η συνολική ορμή** του συστήματος **διατηρείται.** Όπως εξηγήσαμε στο **Ένθετο** της **Ενότητας 6.11.**, η συνολική ορμή διατηρείται *κατά προσέγγιση*, ακόμη κι εάν το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων δεν μηδενίζεται, αρκεί η Ώθηση αυτών των δυνάμεων να είναι μικρή (το χρονικό διάστημα της κρούσης να είναι πολύ μικρό).

Θα θεωρούμε ότι **η συνολική ορμή των συγκρουόμενων σωμάτων διατηρείται** κατά τη διάρκεια των κρούσεων που θα μελετήσουμε:

$$\vec{p}_{\text{αρχ}}^{\,\text{ολ}} = \vec{p}_{\text{τελ}}^{\,\text{ολ}}$$

Διατήρηση της Συνολικής Κινητικής Ενέργειας κατά τη Διάρκεια μίας Κρούσης

Οι δυνάμεις, που δρουν σε ένα σώμα κατά τη διάρκεια της κρούσης, μεταβάλλουν γενικά την ορμή του και την κινητική του ενέργεια. Εάν θεωρήσουμε τη **συνολική κινητική ενέργεια** του συστήματος των συγκρουόμενων σωμάτων, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(1) Τα συγκρουόμενα σώματα έχουν την **ίδια συνολική κινητική ενέργεια** πριν και μετά την κρούση:

$$E_{\text{κιν ολ}}^{\text{αρχ}} = E_{\text{κιν ολ}}^{\text{τελ}}$$

Σε αυτή την περίπτωση, η κρούση ονομάζεται **ελαστική.** Παραδείγματα ελαστικών κρούσεων είναι η αναπήδηση μίας λαστιχένιας σφαίρας σε ένα σκληρό πάτωμα και η σύγκρουση δύο σφαιρών του μπιλιάρδου.

(2) Τα συγκρουόμενα σώματα έχουν διαφορετική **συνολική κινητική ενέργεια** πριν και μετά την κρούση:

$$E_{\text{κιν ολ}}^{\text{αρχ}} \neq E_{\text{κιν ολ}}^{\text{τελ}}$$

Σε αυτή την περίπτωση, η κρούση ονομάζεται **ανελαστική.** Παραδείγματα ανελαστικών κρούσεων είναι η σύγκρουση μιας υφασμάτινης μπάλας ή ενός αυγού με το πάτωμα και η σύγκρουση δύο αυτοκινήτων.

Ανασκόπηση από την Α΄ Λυκείου

Στο Κεφάλαιο της Ενέργειας της Α΄ Λυκείου είχαμε διατυπώσει την ακόλουθη **Αρχή της Διατήρησης της Ενέργειας**:

Κατά την αλληλεπίδραση μεταξύ δύο ή περισσοτέρων σωμάτων πραγματοποιούνται μετατροπές μεταξύ διαφόρων μορφών ενέργειας ή/και μεταφορά ενέργειας μεταξύ των σωμάτων ή και του περιβάλλοντός τους, αλλά δεν δημιουργείται ούτε χάνεται ενέργεια.

Σύμφωνα με την πιο πάνω αρχή, τόσο στις ελαστικές, όσο και στις ανελαστικές κρούσεις, **η συνολική ενέργεια των συγκρουόμενων σωμάτων και του περιβάλλοντος διατηρείται.**

Συνήθως, μία ανελαστική κρούση συνοδεύεται από μόνιμη παραμόρφωση ή/και θέρμανση των συγκρουόμενων σωμάτων. Ένα αυγό σπάει κατά την πτώση του στο πάτωμα, ένα αυτοκίνητο αλλάζει σχήμα και θραύεται κατά τη σύγκρουσή του με ένα άλλο, ένας μετεωρίτης εξαϋλώνεται κατά τη σύγκρουσή του με τη Γη. Εάν η κρούση είναι ανελαστική, **ένα μέρος ή όλη η κινητική ενέργεια των συγκρουόμενων σωμάτων μετατρέπεται σε κάποια άλλη μορφή ενέργειας** (π.χ. εσωτερική ενέργεια των σωμάτων και του περιβάλλοντος).

Παράδειγμα ανελαστικής σύγκρουσης είναι η πτώση ενός αστεροειδούς σε ένα ουράνιο σώμα.

Αντίθετα, εάν η κρούση είναι ελαστική, τα σώματα παραμορφώνονται παροδικά (κατά τη διάρκεια της επαφής τους), αλλά η παραμόρφωση δεν είναι μόνιμη. Επίσης, τα σώματα δεν θερμαίνονται λόγω της κρούσης, και **η κινητική ενέργεια των σωμάτων γενικά δεν μετατρέπεται σε κάποια άλλη μορφή ενέργειας.**

Σημείωση
Οι περισσότερες κρούσεις είναι ανελαστικές. Μία κρούση θεωρείται ελαστική όταν η μετατροπή της συνολικής κινητικής ενέργειας σε άλλη μορφή ενέργειας είναι αρκετά μικρή και μπορεί να αγνοηθεί.

6.14. Μελέτη της Ελαστικής Κρούσης

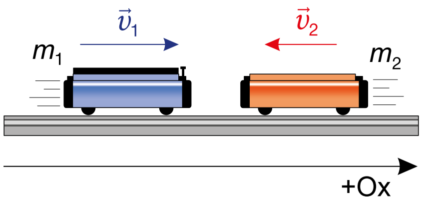
Θα μελετήσουμε κρούσεις δύο σωμάτων που κινούνται στην ίδια ευθεία, κατά τις οποίες οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης που αναπτύσσονται έχουν διεύθυνση που συμπίπτει με τη διεύθυνση των ταχυτήτων των δύο σωμάτων. Οι κρούσεις αυτές ονομάζονται **κεντρικές**, και τα σώματα πριν και μετά την κρούση διατηρούν την αρχική διεύθυνση κίνησής τους.

Στην Εικόνα 6-2 απεικονίζονται δύο σώματα **1** και **2**, που κινούνται με ταχύτητες $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ σε μια ευθεία. Θα υπολογίσουμε τις **άγνωστες ταχύτητες** $\vec{v}'_1$ και $\vec{v}'_2$ που αποκτούν τα σώματα μετά από μια κεντρική και ελαστική κρούση. Αφού η κρούση είναι κεντρική, μετά την κρούση τα σώματα θα κινούνται στην ίδια με την αρχική ευθεία. Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

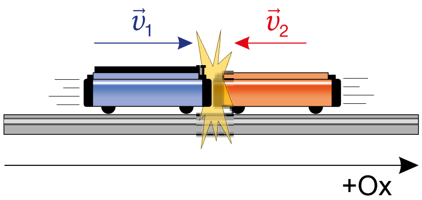
(1) Επιλέγουμε ως άξονα την ευθεία κίνησης των δύο σωμάτων, και ορίζουμε τη θετική φορά του άξονα.

Εικόνα 6-2
Τα σώματα 1 και 2 συγκρούονται και αποκτούν νέες ταχύτητες. Η συνολική ορμή διατηρείται στην κρούση.

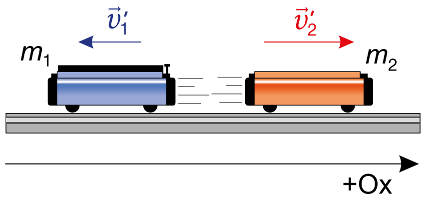
ΠΡΙΝ την κρούση



Κρούση



ΜΕΤΑ την κρούση



$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}'_1 + m_2\vec{\upsilon}'_2 \Rightarrow$$
$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon'_1 + m_2\upsilon'_2$$

(2) Σχεδιάζουμε τις τελικές ταχύτητες **με αυθαίρετη φορά.** Η πραγματική φορά μίας τελικής ταχύτητας θα καθοριστεί από το πρόσημο της αλγεβρικής της τιμής, την οποία θα υπολογίσουμε.

(3) Εφαρμόζουμε την αρχή της διατήρησης της συνολικής ορμής πριν και μετά την κρούση:

Διατήρηση Συνολικής Ορμής:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}'_1 + m_2\vec{\upsilon}'_2$$

(4) Μετατρέπουμε την πιο πάνω διανυσματική εξίσωση σε σχέση **αλγεβρικών τιμών**:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon'_1 + m_2\upsilon'_2$$

Προσοχή

Στη σχέση αυτή, τα σύμβολα (υ) είναι οι **αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων** και έχουν πρόσημο. (Π.χ., εάν το σώμα 2 κινείται αρχικά προς την αρνητική φορά του άξονα, η ταχύτητα υ_2 είναι αρνητική).

(5) Φέρουμε τα γινόμενα του σώματος 1 στο ένα μέλος, και του σώματος 2 στο άλλο μέλος της εξίσωσης:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon'_1 + m_2\upsilon'_2 \Rightarrow m_1(\upsilon_1 - \upsilon'_1) = m_2(\upsilon'_2 - \upsilon_2)$$

Σχέση 1

(6) Επειδή η κρούση είναι ελαστική, η συνολική κινητική ενέργεια διατηρείται:

Διατήρηση Συνολικής Κινητικής Ενέργειας:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1(\upsilon'_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\upsilon'_2)^2$$

$$\Rightarrow m_1\left[\upsilon_1^2 - (\upsilon'_1)^2\right] = m_2\left[(\upsilon'_2)^2 - \upsilon_2^2\right]$$

Στην τελευταία ισότητα εμφανίζονται διαφορές τετραγώνων, οπότε τη γράφουμε με τον πιο κάτω τρόπο:

$$m_1(\upsilon_1 - \upsilon'_1)(\upsilon_1 + \upsilon'_1) = m_2(\upsilon'_2 - \upsilon_2)(\upsilon'_2 + \upsilon_2)$$

Σχέση 2

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις **1** και **2**:

$$\left.\begin{aligned} m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1')(\upsilon_1 + \upsilon_1') &= m_2(\upsilon_2' - \upsilon_2)(\upsilon_2' + \upsilon_2) \\ m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1') &= m_2(\upsilon_2' - \upsilon_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2 + \upsilon_2'$$

Σχέση 3

Συνοψίζουμε:

Εξισώσεις Ελαστικής Κρούσης σε μία Ευθεία:

$$m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1') = m_2(\upsilon_2' - \upsilon_2)$$

$$\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2 + \upsilon_2'$$

Οι τελευταίες δύο σχέσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη όλων των κεντρικών και ελαστικών κρούσεων. Θα μελετήσουμε τρεις σημαντικές περιπτώσεις:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: Τα Σώματα έχουν την Ίδια Μάζα: $m_1 = m_2 = m$.

Οι μάζες απλοποιούνται, και οι άγνωστες ταχύτητες είναι:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_1 - \upsilon_1' &= \upsilon_2' - \upsilon_2 \\ \upsilon_1 + \upsilon_1' &= \upsilon_2' + \upsilon_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &2\upsilon_1 = 2\upsilon_2' \Rightarrow \upsilon_2' = \upsilon_1 \\ &\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_1 + \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1' = \upsilon_2 \end{aligned}\right.$$

Να παρατηρήσετε ότι τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Το σώμα 2 αποκτά την αρχική ταχύτητα του σώματος 1, και αντιστρόφως.

Ειδικότερα: Εάν το σώμα 2 ήταν αρχικά ακίνητο, μετά την κρούση θα κινείται με την ταχύτητα του σώματος 1, ενώ το σώμα 1 θα είναι ακίνητο.

Παράδειγμα
Μπάλα του μπιλιάρδου

Μία μπάλα του μπιλιάρδου κινείται με ταχύτητα μέτρου 45,0 cm/s και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με μία ακίνητη μπάλα ίσης μάζας. Πώς κινούνται οι δύο μπάλες μετά την κρούση;

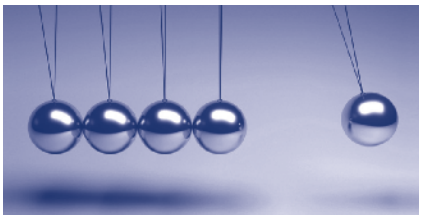
Επειδή οι μπάλες έχουν ίσες μάζες, ανταλλάσσουν ταχύτητες: Η κινούμενη μπάλα θα σταματήσει, ενώ η ακίνητη μπάλα θα αρχίσει να κινείται με ταχύτητα 45,0 cm/s στην κατεύθυνση που είχε η κινούμενη μπάλα.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

6.14.1. Τοποθετούμε πέντε μπάλες του μπιλιάρδου Α-Ε, ίσης μάζας, έτσι ώστε τα κέντρα τους να είναι ευθυγραμμισμένα κατά μήκος της ευθείας **ΑΕ**, και γειτονικές μπάλες να εφάπτονται. Σε κάποια στιγμή, χτυπούμε την μπάλα **Α** με μία στέκα. Η μπάλα **Α** αρχίζει να κινείται με ταχύτητα μέτρου 25,0 cm/s πάνω στην ευθεία **ΑΕ**.

Να περιγράψετε πώς θα κινηθούν οι υπόλοιπες μπάλες του μπιλιάρδου, όταν η **Α** συγκρουστεί μαζί τους. Οι κρούσεις μεταξύ των μπαλών είναι κεντρικές και ελαστικές.

6.14.2. Το πιο κάτω σχήμα απεικονίζει την κούνια του Newton. Εάν απομακρύνουμε την ακραία δεξιά σφαίρα και την αφήσουμε να συγκρουστεί με τις υπόλοιπες, θα παρατηρήσουμε ότι η κίνηση μεταδίδεται μόνο στην ακραία αριστερή σφαίρα. Να εξηγήσετε αυτή την παρατήρηση.



ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: Τα Σώματα έχουν Αντίθετες Ορμές πριν την Κρούση: $m_2 v_2 = -m_1 v_1$.

Από την πρώτη εξίσωση, συμπεραίνουμε:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \Rightarrow m_1 v_1' + m_2 v_2' = 0 \Rightarrow m_2 v_2' = -m_1 v_1'$$

Άρα, **τα σώματα έχουν αντίθετες ορμές και μετά από την κρούση.**

Από τη δεύτερη εξίσωση συμπεραίνουμε:

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \Rightarrow v_1 + v_1' = -\frac{m_1}{m_2} v_1 - \frac{m_1}{m_2} v_1' \Rightarrow v_1 + v_1' = -\frac{m_1}{m_2} (v_1 + v_1')$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύση μόνο εάν:

$$\upsilon_1 + \upsilon_1' = 0 \Rightarrow \quad \upsilon_1' = -\upsilon_1$$

$$\upsilon_2 + \upsilon_2' = \upsilon_1 + \upsilon_1' \Rightarrow \upsilon_2 + \upsilon_2' = 0 \Rightarrow \upsilon_2' = -\upsilon_2$$

Άρα, τα σώματα 1 και 2 αντιστρέφουν τις ορμές τους μετά την κρούση.

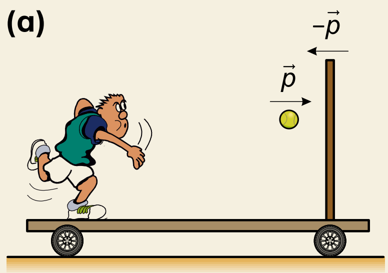
Παράδειγμα

Σύγκρουση Μπάλας με Πλατφόρμα (ελαστική κρούση)

Ο άνθρωπος του σχήματος (α) στέκεται πάνω σε μία **ακίνητη** πλατφόρμα, που εφάπτεται σε μία λεία επιφάνεια. Σε κάποια στιγμή, ο άνθρωπος ρίχνει μία μπάλα με οριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ ως προς το έδαφος. Θα περιγράψουμε την κίνηση της πλατφόρμας μετά τη ρίψη της μπάλας. (Θα υποθέσουμε ότι η μπάλα κινείται πολύ γρήγορα, και θα αγνοήσουμε την κατακόρυφη ορμή που αποκτά λόγω του βάρους της).

Επειδή ο άνθρωπος, η μπάλα και η πλατφόρμα ήταν αρχικά ακίνητοι, η αρχική ορμή του συστήματος ανθρώπου-μπάλας-πλατφόρμας ήταν ίση με μηδέν: $\vec{p}^{\,\text{ολ}}_{\text{αρχ}} = \vec{0}$.

(α)



Μετά τη ρίψη της μπάλας, η συνολική ορμή παραμένει ίση με μηδέν (διατήρηση της ορμής). Η μπάλα αποκτά οριζόντια ορμή προς τα δεξιά:

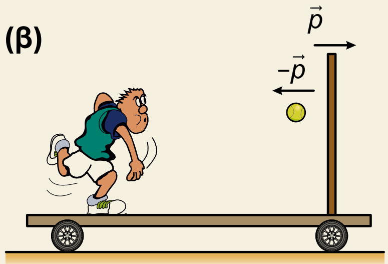
$$\vec{p}_{\text{μπαλ}} = m_{\text{μπαλ}}\,\vec{\upsilon} = \vec{p}$$

Ο άνθρωπος και η πλατφόρμα κινούνται προς τα αριστερά με αντίθετη ορμή:

$$\vec{p}^{\,\text{ολ}}_{\text{τελ}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_{\text{ανθρ/πλατ}} = -\,\vec{p}_{\text{μπαλ}} = -\,\vec{p}.$$

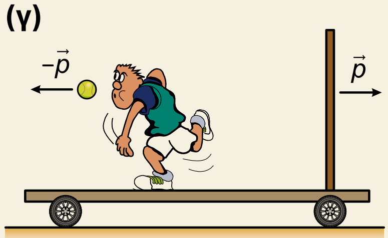
Η μπάλα συγκρούεται με ένα σκληρό κατακόρυφο πέτασμα στην άκρη της πλατφόρμας, και ανακρούεται **ελαστικά** (σχήμα **(β)**). Επειδή η μπάλα και το σύστημα πλατφόρμας-ανθρώπου κινούνται με αντίθετες ορμές, μετά την ελαστική κρούση της μπάλας στο πέτασμα οι ορμές τους **αντιστρέφονται.** Άρα, το σύστημα πλατφόρμας-ανθρώπου θα κινείται προς τα δεξιά με ορμή $\vec{p}$ και η μπάλα προς τα αριστερά με ορμή $-\vec{p}$. Το ΚΜ του συστήματος πλατφόρμας-ανθρώπου-μπάλας παραμένει σταθερό.

(β)



Ας υποθέσουμε ότι ο άνθρωπος ρίχνει αρχικά τη μπάλα προς την **αντίθετη** κατεύθυνση, με ταχύτητα $-\vec{\upsilon}$ (σχήμα **(γ)**). Η μπάλα κινείται με ορμή $-\vec{p}$ και το σύστημα πλατφόρμας - ανθρώπου αποκτά ορμή $\vec{p}$. Η τελική κατάσταση είναι **ίδια** με αυτή του σχήματος **(β)**. Το πέτασμα απλώς αντιστρέφει την ορμή της μπάλας. Το ΚΜ του συστήματος πλατφόρμας - ανθρώπου - μπάλας παραμένει και πάλι σταθερό.

(γ)



ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: Ένα από τα Σώματα έχει Τεράστια Μάζα: $m_2 >> m_1$.

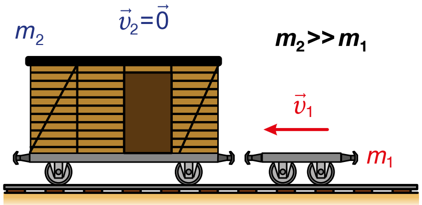
Γράφουμε την εξίσωση διατήρησης της ορμής ως εξής:

$$m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1') = m_2(\upsilon_2' - \upsilon_2) \Rightarrow \upsilon_2' - \upsilon_2 = \frac{m_1}{m_2}(\upsilon_1 - \upsilon_1')$$

Εάν ο λόγος $m_1/m_2 \cong 0$ το δεξί μέλος της εξίσωσης είναι **κατά προσέγγιση** μηδέν. Άρα, γράφουμε:

$$\upsilon_2' - \upsilon_2 \approx 0 \Rightarrow \upsilon_2' \approx \upsilon_2$$

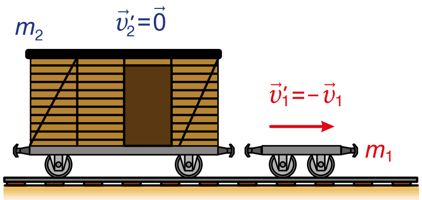
ΠΡΙΝ την κρούση



Να παρατηρήσετε ότι το σώμα **πολύ μεγάλης μάζας** συνεχίζει να κινείται με την **ίδια ταχύτητα**. Η ταχύτητα του σώματος 1 (μικρότερης μάζας) ισούται με:

$$\upsilon_1' + \upsilon_1 = \upsilon_2' + \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1' + \upsilon_1 = 2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1' = 2\upsilon_2 - \upsilon_1$$

ΜΕΤΑ την κρούση



Εάν το σώμα **μεγάλης μάζας** ήταν ακίνητο πριν την κρούση, παραμένει ακίνητο μετά την κρούση ($\upsilon_2' = \upsilon_2 = 0$) ενώ, η ταχύτητα του σώματος **μικρής μάζας** αντιστρέφεται:

$$\upsilon_1' = 2\upsilon_2 - \upsilon_1 = -\upsilon_1$$

Σημείωση

Η συμπεριφορά που περιγράψαμε **φαίνεται** να παραβιάζει την Αρχή της Διατήρησης της Ορμής (π.χ. το σώμα μεγάλης μάζας παραμένει ακίνητο, αλλά το σώμα μικρής μάζας αντιστρέφει την ταχύτητά του). Στην πραγματικότητα, η ορμή και των δύο σωμάτων μεταβάλλεται έτσι ώστε **η συνολική ορμή να διατηρείται:** $\Delta\vec{p}_2 = -\Delta\vec{p}_1$. Όμως, επειδή η μάζα του μεγάλου σώματος είναι τεράστια, η ταχύτητά του **φαίνεται να μην μεταβάλλεται**:

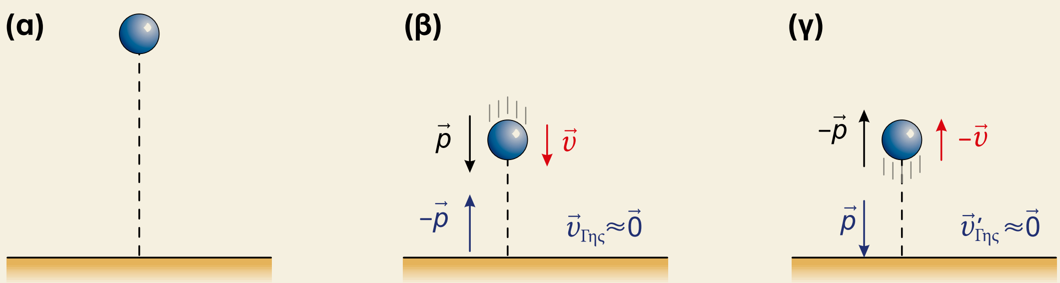
$$\Delta\upsilon_2 = \frac{\Delta p_2}{m_2} \approx 0.$$

Αυτό εξηγείται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1

Μπάλα που συγκρούεται ελαστικά με το έδαφος

Αφήνουμε από ηρεμία μία ελαστική μπάλα να πέσει σε σκληρό έδαφος, από ύψος $h = 2$ m. Η κρούση θεωρείται **ελαστική** και η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.



Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, υπολογίζουμε την ταχύτητα της μπάλας όταν φθάνει στο έδαφος:

$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gh}.$$

Για μία μπάλα με τυπική μάζα 1 kg ο λόγος

$$m/M_{Γης} = (1{,}0\ \text{kg})/(6{,}0 \times 10^{24}\ \text{kg}) = 0{,}17 \times 10^{-24} \approx 0.$$

Άρα, η ταχύτητα του εδάφους παραμένει μηδενική μετά την κρούση, ενώ η ταχύτητα της μπάλας αντιστρέφεται: $\upsilon' = -\sqrt{2gh}$. Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας συμπεραίνουμε ότι η μπάλα θα ανέλθει στο ίδιο αρχικό ύψος:

$$0 + mgh' = \frac{1}{2}m(\upsilon')^2 + 0 \Rightarrow h' = \frac{\left(-\sqrt{2gh}\right)^2}{2g} = \frac{2gh}{2g} = h.$$

Είναι **σημαντικό** να μελετήσουμε το ίδιο παράδειγμα **από τη σκοπιά των ορμών, για να δείξουμε ότι η συνολική ορμή διατηρείται συνεχώς**:

- Σχήμα **(α)**: Η **αρχική συνολική ορμή** του συστήματος μπάλας - Γης είναι μηδενική: $p_{μπάλας} = p_{Γης} = 0 \Rightarrow p_{ολ}^{αρχ} = 0.$
- Σχήμα **(β)**: Όταν αφήσουμε τη μπάλα ελεύθερη, η μπάλα και η Γη αποκτούν **αντίθετες** ορμές, εξ΄αιτίας των δυνάμεων παγκόσμιας έλξης μεταξύ τους (ζεύγος δράσης - αντίδρασης): $p_{μπάλας} = -p_{Γης} \Rightarrow p_{ολ} = 0.$

  Η συνολική ορμή του συστήματος μπάλας - Γης παραμένει ίση με μηδέν. Όμως, επειδή η Γη έχει τεράστια μάζα, μπορούμε να θεωρούμε ότι η ταχύτητα και η κινητική ενέργεια του εδάφους είναι **συνεχώς μηδενικές**, επειδή ο λόγος $m/M_{Γης} \approx 0$:

$$p_{Γης} = -p_{μπάλας} \Rightarrow M_{Γης}\,\upsilon_{Γης} = -m\upsilon_{μπάλας} \Rightarrow \upsilon_{Γης} = -\frac{m}{M_{Γης}}\upsilon_{μπάλας} \approx 0$$

$$E_{Γης}^{κιν} = \frac{1}{2}M_{Γης}\,\upsilon_{Γης}^2 = \frac{1}{2}M_{Γης}\left(-\frac{m}{M_{Γης}}\upsilon_{μπάλας}\right)^2 = \frac{m}{M_{Γης}}\left(\frac{1}{2}m\,\upsilon_{μπάλας}^2\right) \approx 0$$

- Σχήμα **(γ)**: Επειδή η Γη έχει τεράστια μάζα και είναι (κατά προσέγγιση) ακίνητη, θα συνεχίσει να είναι (πρακτικά) ακίνητη μετά την κρούση. Η μπάλα θα κινείται με **αντίθετη ταχύτητα**, από αυτή που είχε αμέσως πριν την κρούση, $\upsilon' = -\sqrt{2gh}$.

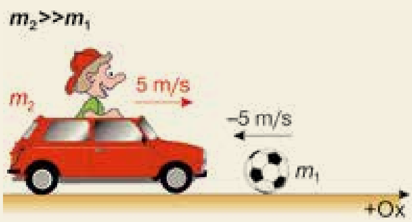
Παράδειγμα 2

Μπάλα που συγκρούεται ελαστικά με κινούμενο αμαξάκι μεγάλης μάζας

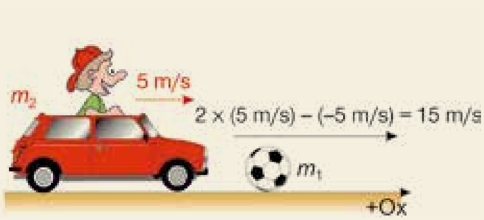
Μία λαστιχένια μπάλα κινείται σε λείο οριζόντιο έδαφος με σταθερή ταχύτητα μέτρου 5 m/s. Η μπάλα συγκρούεται **ελαστικά** με ένα αμαξάκι πολύ μεγαλύτερης μάζας, που κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα ίσου μέτρου 5 m/s. Θα υπολογίσουμε τις ταχύτητες της μπάλας και του αμαξιού αμέσως μετά τη σύγκρουση.

Θεωρούμε έναν οριζόντιο άξονα Ox, και ορίζουμε τη **θετική** κατεύθυνση προς τη φορά κίνησης του αμαξιού. Άρα, η μπάλα έχει ταχύτητα $\upsilon_1 = -5$ m/s και το αμαξάκι έχει ταχύτητα $\upsilon_2 = +5$ m/s.

ΠΡΙΝ την κρούση



ΜΕΤΑ την κρούση



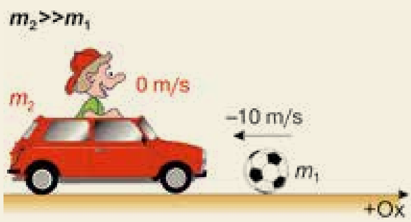
Επειδή το αμαξάκι έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα, θα συνεχίσει να κινείται με την ίδια ταχύτητα μετά την κρούση, $\upsilon_2' = +5$ m/s. Η μπάλα θα αποκτήσει ταχύτητα:

$$\upsilon_1' = 2\upsilon_2 - \upsilon_1 = 2 \times (5\text{ m/s}) - (-5\text{ m/s}) = +15\text{ m/s}$$

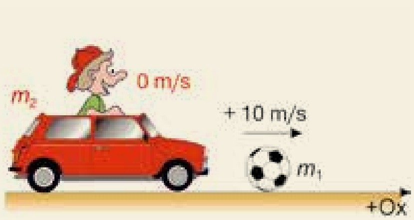
Άρα, η μπάλα θα κινηθεί σε αντίθετη κατεύθυνση, με ταχύτητα τριπλάσιου μέτρου.

Ως προς παρατηρητή που κινείται μαζί με το σώμα μεγάλης μάζας:

ΠΡΙΝ την κρούση



ΜΕΤΑ την κρούση



Σημείωση

Είναι πολύ βοηθητικό να εξετάσουμε το ίδιο πρόβλημα ως προς έναν παρατηρητή που κινείται μαζί με το αμαξάκι. **Ως προς αυτόν τον παρατηρητή, το αμαξάκι είναι ακίνητο πριν την κρούση:**

$$\upsilon_2 - \upsilon_2 = (5\text{ m/s}) - (5\text{ m/s}) = 0\text{ m/s}$$

και η μπάλα κινείται προς το αμαξάκι με σχετική ταχύτητα:

$$\upsilon_1 - \upsilon_2 = (-5\ \text{m/s}) - (5\ \text{m/s}) = -10\ \text{m/s}$$

Το πρόβλημα είναι όμοιο με τη κρούση σώματος μικρής μάζας με ακίνητο σώμα μεγάλης μάζας.

Άρα, μετά την κρούση, η μπάλα αποκτά αντίθετη ταχύτητα (+10 m/s) ως προς τον παρατηρητή που βρίσκεται στο αμαξάκι. **Ως προς το έδαφος** η μπάλα θα έχει ταχύτητα:

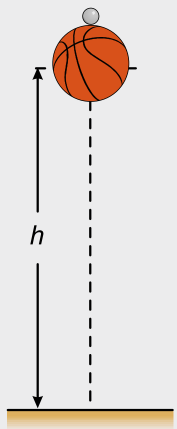
$$(+10\ \text{m/s}) + (+5\ \text{m/s}) = +15\ \text{m/s}$$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών:

6.14.3. Ένας αθλητής του γκόλφ χτυπά μια ακίνητη μπάλα του γκόλφ με το μπαστούνι του. Εάν το μπαστούνι του κινούνταν με οριζόντια ταχύτητα 3 m/s πριν την κρούση, να προσδιορίσετε την ταχύτητα της μπάλας αμέσως μετά την κρούση. Να υποθέσετε ότι η μάζα της μπάλας του γκόλφ είναι πολύ μικρότερη από τη μάζα του μπαστουνιού.

Δραστηριότητα

Να τοποθετήσετε μία μπάλα επιτραπέζιας αντισφαίρισης (πινγκ-πονγκ) πάνω σε μία μπάλα του μπάσκετ, έτσι ώστε τα κέντρα τους να είναι ευθυγραμμισμένα κατά μήκος μίας κατακόρυφη ευθείας και οι μπάλες να εφάπτονται. Κατόπιν, να αφήσετε προσεκτικά τις μπάλες να πέσουν από ηρεμία σε σκληρό έδαφος, από ύψος $h = 1{,}5$ m. (Να κοιτάζετε από πλάγια). Τι θα παρατηρήσετε; **Πώς εξηγείται αυτή η συμπεριφορά;**

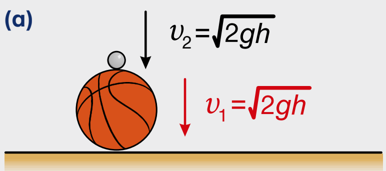


Για να μελετήσουμε τις διάφορες κρούσεις, θα λάβουμε υπ΄ όψη μας ότι **(1)** η μπάλα του μπάσκετ έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από τη μπάλα του πινγκ-πονγκ, και **(2)** το έδαφος έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από τη μπάλα του μπάσκετ. Επίσης θα αγνοήσουμε τις διαστάσεις της μπάλας του μπάσκετ, δηλαδή θα υποθέσουμε ότι τα κέντρα και των δύο σφαιρών ξεκινούν από το ίδιο ύψος $h = 1{,}5$ m.

Θεωρούμε κατακόρυφο άξονα, με **θετική κατεύθυνση προς τα κάτω.**

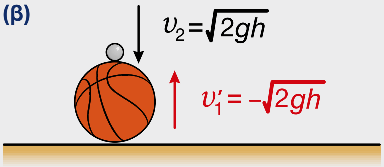
- Σχήμα **(α)**: Οι μπάλες πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση (αγνοώντας την αντίσταση του αέρα). Επειδή ξεκινούν από το ίδιο ύψος, φθάνουν στο έδαφος με ίσες ταχύτητες $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \sqrt{2gh}$.

(α)



ΠΡΙΝ την κρούση

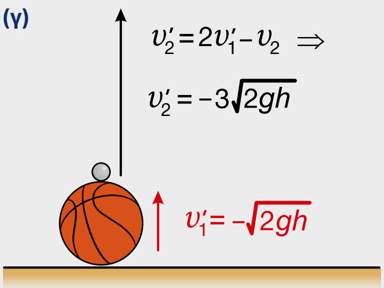
(β)



ΑΜΕΣΩΣ ΜΕΤΑ τη συγκρούση της μπάλας του μπάσκετ με το έδαφος

- Σχήμα **(β)**: **1η κρούση** - Μπάλα του μπάσκετ - έδαφος. Η μπάλα του μπάσκετ συγκρούεται με το έδαφος και αρχίζει να κινείται **προς τα πάνω** με ταχύτητα $\upsilon_1' = -\sqrt{2gh}$. Εκείνη τη στιγμή η μπάλα του πινγκ-πονγκ δεν έχει αντιστρέψει ακόμη την ταχύτητά της, οπότε κινείται **προς τα κάτω** με ταχύτητα $\upsilon_2 = \sqrt{2gh}$.

(γ)



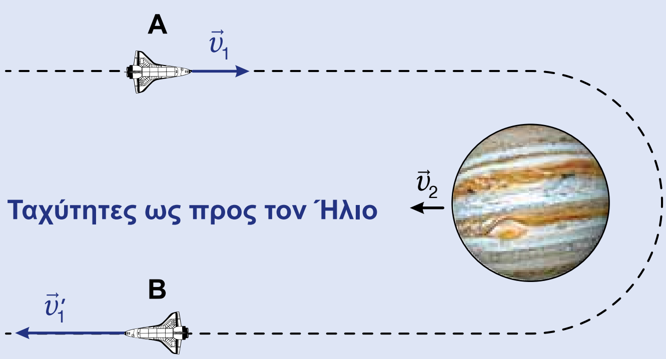
ΑΜΕΣΩΣ ΜΕΤΑ τη συγκρούση της μπάλας του πινγκ-πονγκ με τη μπάλα του μπάσκετ

- Σχήμα **(γ)**: **2η κρούση** - Μπάλα του μπάσκετ - μπάλα του πινγκ -πονγκ. Οι δύο μπάλες κινούνται με **αντίθετες ταχύτητες** και συγκρούονται. Όπως στο **Παράδειγμα 2**, η μπάλα του πινγκ-πονγκ θα κινηθεί στην αντίθετη κατεύθυνση **(προς τα επάνω)**, και η ταχύτητά της αποκτά τριπλάσιο μέτρο: $\upsilon_2' = -3\sqrt{2gh}$. Η μπάλα του μπάσκετ έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα, οπότε συνεχίζει να κινείται προς τα επάνω με την ίδια ταχύτητα $\upsilon_1' = -\sqrt{2gh}$.

Με βάση αυτή την ταχύτητα, η μπάλα του πινγκ-πονγκ εκτινάσσεται σε εννιαπλάσιο ύψος από το αρχικό! Στην πραγματικότητα, το τελικό ύψος της μπάλας του πινγκ- πονγκ είναι μικρότερο, επειδή οι κρούσεις δεν είναι απόλυτα ελαστικές, και μέρος της κινητικής ενέργειας κάθε μπάλας μετατρέπεται σε εσωτερική κατά τις κρούσεις. Μελετούμε ανελαστικές κρούσεις στην επόμενη ενότητα.

ΕΝΘΕΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΚΡΟΥΣΗΣ: Η Βαρυτική Σφεντόνα

Στα διαστημικά ταξίδια, τα διαστημόπλοια εκμεταλλεύονται συχνά τα βαρυτικά πεδία διαφόρων ουράνιων σωμάτων για να **επιταχύνονται.** Σε αυτό το παράδειγμα εξηγούμε πώς γίνεται αυτό.



Στο σχήμα της προηγούμενης σελίδας απεικονίζεται ένα διαστημόπλοιο, το οποίο πλησιάζει τον πλανήτη Δία. Λόγω του βαρυτικού πεδίου του Δία, το διαστημόπλοιο διαγράφει τη διακεκομμένη τροχιά και τελικά απομακρύνεται προς την αντίθετη κατεύθυνση.

Η αλληλεπίδραση του διαστημοπλοίου με τον Δία αποτελεί ένα παράδειγμα «κρούσης», στην οποία το διαστημόπλοιο και ο Δίας αλληλεπιδρούν από απόσταση με δυνάμεις παγκόσμιας έλξης.

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διαστημοπλοίου - Δία ισούται με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών και της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας:

$$E_{\mu\eta\chi} = E^{\delta}_{\kappa\iota\nu} + E^{\Delta}_{\kappa\iota\nu} + E^{\beta\alpha\rho}_{\delta\upsilon\nu} = \frac{1}{2} m_{\delta} \upsilon_{\delta}^{2} + \frac{1}{2} m_{\Delta} \upsilon_{\Delta}^{2} - G \frac{m_{\Delta} m_{\delta}}{r_{\Delta-\delta}}$$

Στα σημεία **Α** και **Β** (στην αρχή και στο τέλος της κρούσης), η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος διαστημοπλοίου - Δία είναι ίση με μηδέν επειδή η απόσταση μεταξύ τους είναι πολύ μεγάλη. Άρα, η συνολική μηχανική ενέργεια ισούται με την κινητική ενέργεια:

$$E_{\mu\eta\chi}(\mathrm{A}) = E^{\delta}_{\kappa\iota\nu}(\mathrm{A}) + E^{\Delta}_{\kappa\iota\nu}(\mathrm{A}) \quad \text{και} \quad E_{\mu\eta\chi}(\mathrm{B}) = E^{\delta}_{\kappa\iota\nu}(\mathrm{B}) + E^{\Delta}_{\kappa\iota\nu}(\mathrm{B})$$

Επειδή η μηχανική ενέργεια διατηρείται, η συνολική κινητική ενέργεια είναι ίδια στα Α και Β, δηλαδή **η κρούση είναι ελαστική:**

$$E_{\mu\eta\chi}(\mathrm{A}) = E_{\mu\eta\chi}(\mathrm{B}) \Rightarrow E^{\delta}_{\kappa\iota\nu}(\mathrm{A}) + E^{\Delta}_{\kappa\iota\nu}(\mathrm{A}) = E^{\delta}_{\kappa\iota\nu}(\mathrm{B}) + E^{\Delta}_{\kappa\iota\nu}(\mathrm{B})$$

Η συνολική ορμή του συστήματος διαστημοπλοίου - Δία επίσης διατηρείται, επειδή οι δυνάμεις μεταξύ τους είναι ζεύγος δράσης - αντίδρασης.

Έστω ότι στο σημείο Α το διαστημόπλοιο πλησιάζει τον Δία με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 25$ km/s ως προς τον Ήλιο. Ο Δίας κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2 = 13$ km/s ως προς τον Ήλιο, με φορά αντίθετη προς το διαστημόπλοιο. Επειδή ο Δίας έχει τεράστια μάζα, η ταχύτητά του δεν επηρεάζεται από την κρούση. Στο σημείο Β, το διαστημόπλοιο θα απομακρύνεται από τον Δία με ταχύτητα

$$\upsilon_1' = 2\upsilon_2 - \upsilon_1 = 2 \times (-13\ \text{km/s}) - (25\ \text{km/s}) = -51\ \text{km/s}$$

Άρα, το μέτρο της ταχύτητας του διαστημοπλοίου υπερδιπλασιάζεται.

6.15. Μελέτη της Ανελαστικής Κρούσης

Στις ανελαστικές κρούσεις, η συνολική ορμή του συστήματος των συγκρουόμενων σωμάτων διατηρείται, αλλά η συνολική κινητική ενέργεια δεν διατηρείται.

Σε ένα σημαντικό παράδειγμα ανελαστικών κρούσεων, τα δύο σώματα συνεχίζουν να κινούνται μετά την κρούση με κοινή ταχύτητα, σαν ένα σώμα. Σε αυτή την περίπτωση, η κρούση ονομάζεται **πλαστική**.

Η κοινή ταχύτητα των δύο σωμάτων μετά την πλαστική κρούση υπολογίζεται από την εξίσωση διατήρησης της συνολικής ορμής:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon' \Rightarrow \upsilon' = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

Ειδική περίπτωση: Εάν τα σώματα κινούνταν αρχικά με αντίθετες ορμές, ακινητοποιούνται:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = 0 \Rightarrow \upsilon' = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = 0$$

Παράδειγμα 1
Ανάκρουση όπλου

Ένα όπλο μάζας m_1 = 2 450,0 g εκπυρσοκροτεί και εκτοξεύει μία σφαίρα μάζας m_2 = 45,0 g με ταχύτητα μέτρου 775 m/s. Θα υπολογίσουμε την ταχύτητα ανάκρουσης του όπλου.

Σε αυτή την περίπτωση, η συνολική ορμή του συστήματος όπλου - σφαίρας διατηρείται, αλλά η συνολική κινητική ενέργεια δεν διατηρείται (χημική ενέργεια από την καύση της πυρίτιδας μετατρέπεται σε κινητική και εσωτερική). Από τη διατήρηση της ορμής, παίρνουμε:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon'_1 + m_2\upsilon'_2 = 0 \Rightarrow \upsilon'_1 = -\frac{m_2}{m_1}\upsilon'_2$$

Αριθμητική αντικατάσταση:
Η ταχύτητα του όπλου θα είναι:

$$\upsilon'_1 = -\frac{45{,}0}{2450{,}0}\,(775\text{ m/s}) = -14{,}2\text{ m/s}$$

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι:

$$\frac{1}{2}m_2(\upsilon'_2)^2 = \frac{1}{2}(0{,}0450\text{ kg}) \times (775\text{ m/s})^2 = 13\,500\text{ Joule}$$

και του όπλου είναι:

$$\frac{1}{2}m_1(\upsilon'_1)^2 = \frac{1}{2}(2{,}450\text{ kg}) \times (14{,}2\text{ m/s})^2 = 247\text{ Joule}$$

Άρα, το όπλο έχει πολύ μικρότερη κινητική ενέργεια από τη σφαίρα (γι αυτό προκαλεί και μικρότερη ζημιά από τη σφαίρα).

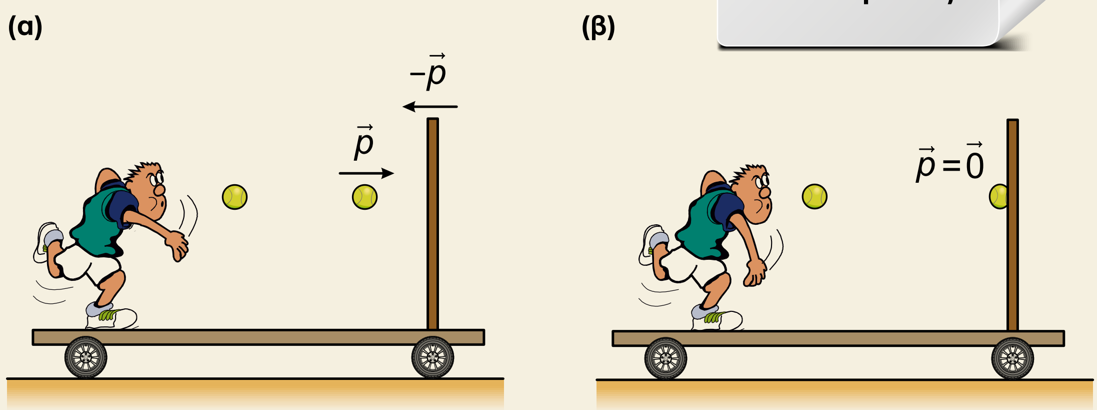
Παράδειγμα 2
Σφαίρες από Πλαστελίνη

Δύο σφαίρες από πλαστελίνη με μάζες 14 g και 6 g κινούνται η μία προς την άλλη σε μία ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα τους, με ταχύτητες $\upsilon_1 = 35$ cm/s και $\upsilon_2 = -15$ cm/s. Μετά την κρούση κινούνται σαν ένα σώμα. Να υπολογίσετε την κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος των δύο σφαιρών.

$$\upsilon' = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = \frac{(14\text{ g}) \times (35\text{ cm/s}) + (6\text{ g}) \times (-15\text{ cm/s})}{14\text{ g} + 6\text{ g}} = 20\text{ cm/s}$$

Παράδειγμα 3
Μπάλα και πλατφόρμα

Θα μελετήσουμε ξανά το πρόβλημα του ανθρώπου - πλατφόρμας, αλλά θα υποθέσουμε τώρα ότι οι μπάλες που ρίχνει ο άνθρωπος κολλούν επάνω στο κατακόρυφο πέτασμα.



- Σχήμα **(α)**: Η ολική αρχική ορμή του συστήματος ανθρώπου-μπάλας-πλατφόρμας είναι μηδενική. Μετά τη ρίψη, η μπάλα κινείται με οριζόντια ορμή $\vec{p}_{\mu\pi\alpha\lambda} = m_{\mu\pi\alpha\lambda}\vec{\upsilon} = \vec{p}$ προς τα δεξιά. Ο άνθρωπος και η πλατφόρμα κινούνται με αντίθετη ορμή προς τα αριστερά:

$$\vec{p}_{\text{ολ}}^{\,\text{τελ}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_{\text{ανθρ/πλατ}}^{\,\text{τελ}} = -\vec{p}_{\mu\pi\alpha\lambda} = -\vec{p}$$

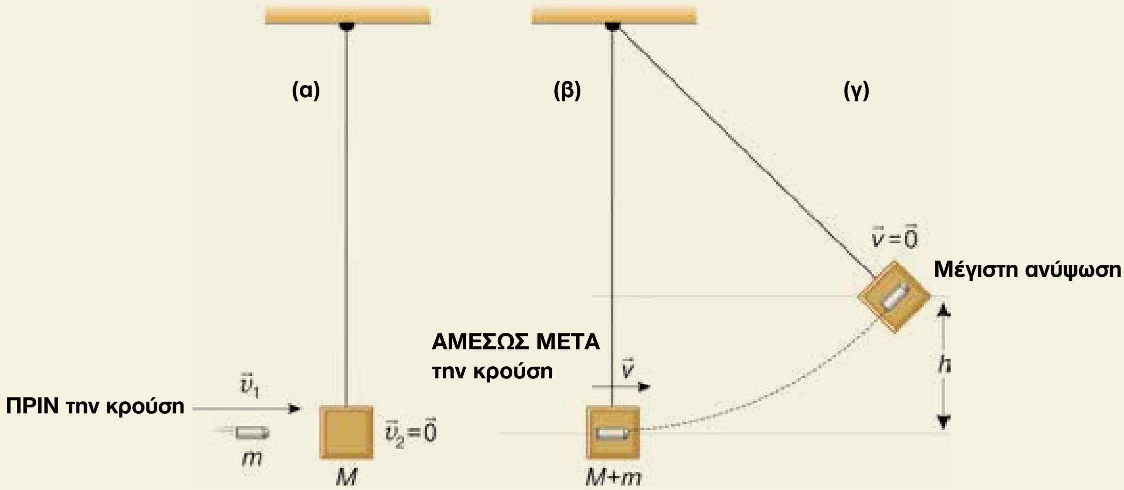
- Σχήμα **(β)**: Η μπάλα προσκολλάται στο κατακόρυφο πέτασμα στην άκρη της πλατφόρμας. Επειδή η μπάλα και το σύστημα πλατφόρμας-ανθρώπου κινούνται με αντίθετες ορμές πριν την κρούση, μετά την κρούση της μπάλας στο πέτασμα οι ορμές τους **μηδενίζονται.**

Να παρατηρήσετε ότι η κίνηση της πλατφόρμας εξαρτάται από το εάν η κρούση είναι ελαστική ή πλαστική. Εδώ η πλατφόρμα ακινητοποιείται, ενώ στην ελαστική κρούση κινείται.

Παράδειγμα 4

Το βαλλιστικό εκκρεμές

Η διάταξη του επόμενου σχήματος αποτελείται από ένα ξύλινο σώμα μάζας *M* αναρτημένο από σχοινί, και ονομάζεται βαλλιστικό εκκρεμές. Με χρήση του βαλλιστικού εκκρεμούς μπορούμε να προσδιορίσουμε την ταχύτητα μίας σφαίρας.



Έστω ότι μία σφαίρα μάζας *m* κινείται οριζόντια με άγνωστη ταχύτητα υ_1 (σχήμα **(α)**) και σφηνώνεται στο ξύλινο σώμα του εκκρεμούς. Το σύστημα των δύο σωμάτων ξεκινά με αρχική ταχύτητα μέτρου *V* (σχήμα **(β)**), και ανασηκώνεται σε τελικό ύψος *h* από την αρχική του θέση (σχήμα **(γ)**). Από το ύψος και τις μάζες της σφαίρας και του εκκρεμούς μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική ταχύτητα της σφαίρας σαν συνάρτηση του ύψους *h*.

Από τη **διατήρηση της μηχανικής ενέργειας** του συστήματος σφαίρας-εκκρεμούς-Γης, προσδιορίζουμε το μέτρο *V* της ταχύτητας του συσσωματώματος εκκρεμούς-σφαίρας αμέσως μετά την κρούση:

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2=(M+m)gh \Rightarrow V=\sqrt{2gh}$$

Κατά τη διάρκεια της κρούσης της σφαίρας με το εκκρεμές, διατηρείται η ορμή του συστήματος σφαίρας-εκκρεμούς. Από τη διατήρηση της ορμής, υπολογίζουμε τη ζητούμενη ταχύτητα της σφαίρας:

$$m\upsilon=(M+m)V \Rightarrow \upsilon=\frac{M+m}{m}V$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις, εκφράζουμε την ταχύτητα της σφαίρας σαν συνάρτηση του ύψους *h*:

$$\upsilon=\frac{M+m}{m}\sqrt{2gh}$$

Αριθμητική Αντικατάσταση:

Έστω ότι η σφαίρα έχει μάζα m = 10,0 g, το ξύλινο σώμα του εκκρεμούς έχει μάζα m = 690,0 g, και το εκκρεμές ανασηκώνεται κατά h = 0,25 m. Η ταχύτητα της σφαίρας είναι:

$$\upsilon = \frac{10{,}0\ \text{g} + 690{,}0\ \text{g}}{10{,}0\ \text{g}}\sqrt{2 \times (9{,}81\ \text{m/s}^2) \times (0{,}25\ \text{m})} \Rightarrow \upsilon = 70{,}0 \times 2{,}2\ \text{m/s} = 150\ \text{m/s}$$

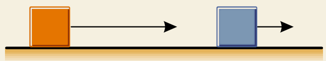
Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω Πίνακα με την Ένδειξη Σωστό/Λάθος. Σε κάθε περίπτωση, να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας στο τετράδιό σας.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Σε μία ελαστική κρούση ενός συστήματος δύο σωμάτων, η συνολική ορμή και η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρούνται.	
2	Σε μία ανελαστική κρούση ενός συστήματος δύο σωμάτων, η συνολική ορμή και η κινητική ενέργεια του συστήματος δεν διατηρούνται.	
3	Σε μία ελαστική κρούση ενός συστήματος δύο σωμάτων, η κινητική ενέργεια κάθε σώματος διατηρείται.	
4	Η συνολική ορμή διατηρείται μόνο στις ελαστικές κρούσεις.	
5	Κατά την αναπήδηση μίας μπάλας του τένις στο έδαφος, η συνολική ορμή του συστήματος μπάλας - Γης δεν διατηρείται.	
6	Η συνολική ορμή διατηρείται σε μία κρούση μόνο όταν η συνισταμένη εξωτερική δύναμη είναι μηδενική.	
7	Η συνολική κινητική ενέργεια διατηρείται μόνο όταν διατηρείται η συνολική ορμή.	
8	Δύο σώματα κινούνται στην ίδια ευθεία με ταχύτητες διαφορετικού μέτρου και συγκρούονται πλαστικά. Το συσσωμάτωμα θα κινείται με ταχύτητα ίση με την μεγαλύτερη ταχύτητα εκ των δύο σωμάτων πρίν την κρούση.	
9	Σε μία πλαστική κρούση δεν είναι δυνατόν όλη η αρχική κινητική ενέργεια να μετατραπεί σε εσωτερική ενέργεια του συστήματος.	
10	Ένα βαρύ φορτηγό συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ένα αρχικά ακίνητο mini cooper. Μετά την κρούση το mini cooper θα κινείται με ταχύτητα διπλάσια του φορτηγού.	

Ασκήσεις

1 Δύο κύβοι κινούνται σε λείο οριζόντιο έδαφος και συγκρούονται. Στο διπλανό σχήμα σημειώνονται οι **ορμές** τους **πριν** την κρούση. Να επιλέξετε ποιό απο τα επόμενα σχήματα **α-γ** αποδίδει σωστά τις ορμές των δύο κύβων **μετά** την κρούση.

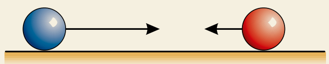


(α)

(β)

(γ)

2 Δύο σφαίρες κινούνται σε λείο οριζόντιο έδαφος και συγκρούονται. Στο διπλανό σχήμα σημειώνονται οι **ορμές** τους **πριν** την κρούση. Να επιλέξετε ποιό απο τα επόμενα σχήματα **α-γ** αποδίδει σωστά τις ορμές των δύο σφαιρών **μετά** την κρούση.



(α)

(β)

(γ)

3 Ένα γυάλινο ποτήρι πέφτει στο πάτωμα, σπάει και ακινητοποιείται. Το έδαφος ήταν πριν και μετά την κρούση ακίνητο, ενώ η αρχική ορμή του ποτηριού μηδενίζεται. Είναι σωστό να συμπεράνουμε ότι η ορμή του συστήματος ποτηριού-Γης δεν διατηρείται;

4 Μία συμμαθήτριά σας ισχυρίζεται ότι κάθε φορά που κάνει ένα κατακόρυφο άλμα προς τα πάνω, η Γη αποκτά αντίθετη ορμή. Ένας συμμαθητής σας απαντά ότι η Γη συνεχίζει να έχει μηδενική ορμή, επειδή έχει τεράστια μάζα. Ποιός έχει δίκιο;

5 Δύο μπάλες του μπιλιάρδου έχουν ίσες μάζες m και βρίσκονται σε μία λεία οριζόντια επιφάνεια. Οι μπάλες κινούνται με ταχύτητες $-\vec{\upsilon}$ και $2\vec{\upsilon}$ πάνω σε μία ευθεία γραμμή πλησιάζοντας η μία την άλλη. Σε κάποια στιγμή συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά.

Α. Να περιγράψετε την κίνηση του ΚΜ των μπαλών πριν και μετά την κρούση.

Β. Να προσδιορίσετε τις ταχύτητες των μπαλών μετά την κρούση.

Γ. Ποιά είναι η μεταβολή στην κιντική ενέργεια της κάθε μπάλας με το πέρας της κρούσης;

6 Δύο μικροί μαγνήτες είναι στερεωμένοι σε δύο αυτοκινητάκια με συνολικές μάζες m και $3m$. Τα αυτοκινητάκια κινούνται κατά μήκος ενός ευθύγραμμου οριζόντιου αλουμινένιου διαδρόμου, χωρίς τριβές.

Τα αυτοκινητάκια πλησιάζουν το ένα το άλλο και συγκρούονται με ταχύτητες υ και -3υ, αυτό της μάζας m και $3m$ αντίστοιχα. Μετά τη σύγκρουση κινούνται σαν ένα σώμα. Να υπολογίσετε την κοινή ταχύτητα των δύο αυτοκινήτων μετά τη σύγκρουση.

7. Δύο αμαξάκια Α και Β κινούνται στην ίδια κατεύθυνση κατά μήκος ενός ευθύγραμμου οριζόντιου αλουμινένιου διαδρόμου, χωρίς τριβές. Το αμαξάκι Α έχει μάζα 2,0 kg και ταχύτητα 3,0 m/s και προπορεύεται ενώ το αμαξάκι Β που έχει μάζα 2,0 kg και ταχύτητα 4,0 m/s το ακολουθεί. Κάποια στιγμή τα δύο αμαξάκια συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά μεταξύ τους.

Α. Να υπολογίσετε τις ταχύτητές τους μετά τη σύγκρουση.

Β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του ΚΜ του συστήματος των δύο σωμάτων πριν και μετά τη σύγκρουσή τους.

8. Ο Πάνος έχει μάζα 77 kg και βρίσκεται ακίνητος στη μέση μιας πίστας παγοδρομίου φορώντας τα παγοπέδιλά του. Επειδή δεν ξέρει να πατινάρει, ζητά από την Πελαγία να τον βοηθήσει να φτάσει στην άκρη της πίστας. Η Πελαγία του πετά μία μπάλα μάζας 3,0 kg με ταχύτητα 4,0 m/s για να την πιάσει.

Α. Να προσδιορίσετε την ταχύτητα του Πάνου αφού πιάσει τη μπάλα.

Β. Να υπολογίσετε την αρχική και τελική κινητική ενέργεια του συστήματος Πάνου - μπάλας.

Γ. Να υπολογίσετε την ώθηση που ασκεί η μπάλα στον Πάνο.

Δ. Εάν ο Πάνος αντί να πιάσει τη μπάλα την είχε αποκρούσει, στέλνοντάς την προς την Πελαγία με ταχύτητα 3,0 m/s ποιά ταχύτητα θα είχε αποκτήσει μετά την απόκρουση;

Ε. Σε ποιά από τις δύο περιπτώσεις μεταφέρεται στον Πάνο μεγαλύτερη ποσότητα κινητικής ενέργειας;

9. Ένα σώμα μάζας 5,0 kg κινείται με ταχύτητα 4,0 m/s και συγκρούεται κεντρικά με ένα σώμα μάζας 10,0 kg, που κινείται αντίθετα με το πρώτο και με ταχύτητα μέτρου 3,0 m/s. Σαν αποτέλεσμα της σύγκρουσης το σώμα μάζας 10,0 kg ακινητοποιείται.

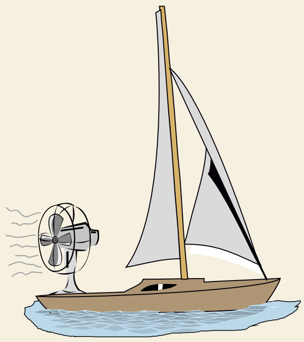
Α. Να υπολογίσετε την τελική ταχύτητα του σώματος μάζας 5,0 kg.

Β. Τί είδους σύγκρουση λαμβάνει χώρα μεταξύ των δύο σωμάτων;

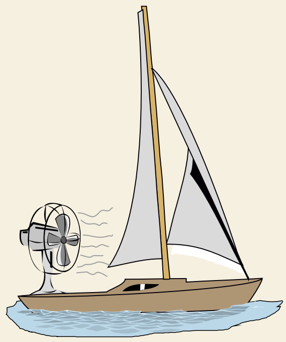
10. Ένας λάτρης της ιστιοπλοΐας είναι απογοητευμένος, επειδή περιμένει μάταια να φυσήξει αέρας. Τελικά, αποφασίζει να κινήσει το σκάφος του με έναν ανεμιστήρα.

Α. Να περιγράψετε την κίνηση του ιστιοφόρου, εάν προσανατολίσει τον ανεμιστήρα **αντίθετα** με

(A)



(B)



το πανί (σχήμα **A**) και τον θέσει σε κίνηση.

Β. Να περιγράψετε την κίνηση του ιστιοφόρου, εάν προσανατολίσει τον ανεμιστήρα **προς** το πανί (σχήμα **B**) και τον θέσει σε κίνηση. Να υποθέσετε ότι ο αέρας χτυπά στο πανί και σταματά.

Γ. Το ίδιο με το ερώτημα Β, αλλά τώρα να υποθέσετε ότι ο αέρας ανακρούεται ελαστικά από το πανί.

Δ. Στην πραγματικότητα, ποιός από τους δύο προσανατολισμούς νομίζετε ότι είναι περισσότερο αποδοτικός;

11 Μία σφαίρα μάζας m_1 βάλεται με ταχύτητα υ προς σώμα από ξύλο μάζας m_2 το οποίο αποτελεί μέρος ενός βαλλιστικού εκκρεμούς. Το ξύλινο σώμα είναι στερεωμένο στο άκρο μιας ράβδου αμελητέας μάζας και μήκους L που μπορεί, να περιστραφεί ως προς το άλλο άκρο της. Αν η σφαίρα διαπερνά το ξύλινο σώμα και εξέρχεται από αυτό με ταχύτητα $\upsilon/2$, να υπολογίσετε το ύψος h στο οποίο φθάνει το εκκρεμές.

Απαντήσεις Ελέγχου Κατανόησης Εννοιών

6.1.1. Η ορμή εξαρτάται από την ταχύτητα και τη μάζα του σώματος. Δύο σώματα με την ίδια ταχύτητα έχουν διαφορετική ορμή, εάν έχουν διαφορετικές μάζα.

6.1.2. Ναι, εάν το τρένο έχει πολύ μικρή (ή μηδενική) ταχύτητα και η σφαίρα έχει μεγάλη ταχύτητα.

6.1.3. Όχι, γιατί η ορμή είναι διανυσματικό μέγεθος. Η τελική ορμή έχει ίσο μέτρο αλλά αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική, οπότε

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi} = -\vec{p} - \vec{p} = -2\vec{p}$$

6.2.1. Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα μπορεί να εκφραστεί σε μονάδες N s (Newton × second).

6.4.1. Το μέτρο της μέσης δύναμης είναι αντιστρόφως ανάλογο με το χρονικό διάστημα, στο οποίο προκαλείται η μεταβολή της ορμής. Στο παράδειγμα, το μέτρο της μέσης δύναμης είναι μικρό, επειδή το χρονικό διάστημα, στο οποίο υπολογίζουμε τη μέση δύναμη, είναι σχετικά μεγάλο (60,0 s).

6.4.2. Όχι. Η πραγματική δύναμη είναι ίση με τη μέση δύναμη μόνο εάν το φορτηγό κινείται με σταθερή επιτάχυνση σε όλη τη διάρκεια των 60,0 s.

6.4.3. Αν διπλασιαστεί η μάζα του σώματος τότε: $F_\mu \to 2F_\mu$.

Αν διπλασιαστεί το χρονικό διάστημα τότε: $F_\mu \to F_\mu/2$.

Αν διαπλασιαστεί η τελική ταχύτητα τότε: $F_\mu \to 2F_\mu$.

6.4.4. Ναι. Η δύναμη στο φορτηγό θα πρέπει να δράσει για πολύ μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, από τη δύναμη στο αυτοκίνητο.

6.4.5. Όχι. Εάν τα πλοιάρια έχουν διαφορετικές μάζες, η μεταβολή της ορμής τους είναι διαφορετική στο ίδιο χρονικό διάστημα. Γι΄ αυτό, θα διαφέρει η μέση δύναμη.

6.4.6. Επειδή η μπάλα του παίκτη Β υφίσταται μεγαλύτερη μεταβολή ορμής, δρα σε αυτήν μεγαλύτερη μέση δύναμη. Από τον 3ο νόμο του Νεύτωνα συμπεραίνουμε ότι η μπάλα ασκεί μεγαλύτερη μέση δύναμη στην κορίνα.

6.4.7. Επειδή προκαλεί μεγαλύτερη μεταβολή στην ορμή του νερού, ασκεί στο νερό μεγαλύτερη μέση δύναμη. Από τον 3ο νόμο συμπεραίνουμε ότι το νερό ασκεί μεγαλύτερη μέση δύναμη στον τροχό.

6.4.8. Πρέπει το χέρι του αθλητή να έχει μεγάλη ορμή όταν συναντήσει τα ξύλα, και να ακινητοποιηθεί γρήγορα. Με αυτό τον τρόπο, η μέση δύναμη στο χέρι και στα ξύλα θα έχουν μεγάλο μέτρο.

6.4.9. Η ίδια μεταβολή ορμής των χεριών του πυγμάχου θα πραγματοποιείται σε μικρότερο χρονικό διάστημα, οπότε το μέτρο της μέσης δύναμης στα χέρια του πυγμάχου και στο σώμα του αντιπάλου θα είναι πολύ μεγαλύτερο.

6.5.1. **(α)** Με διπλασιασμό του μέτρου της δύναμης,
(β) με διπλασιασμό του χρονικού διαστήματος, στο οποίο επενεργεί η δύναμη.

6.5.2. Το πρώτο συμπέρασμα δεν είναι σωστό, επειδή δεν αναφέρεται στη **μέση** συνισταμένη δύναμη. Το δεύτερο συμπέρασμα είναι σωστό, επειδή η Ώθηση Δύναμης ισούται με τη μεταβολή της ορμής.

6.5.3. Όχι, επειδή η Ώθηση Δύναμης είναι διανυσματικό μέγεθος. Στην κυκλική κίνηση το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό, αλλά το διάνυσμα της ταχύτητας και της ορμής μεταβάλλεται.

6.6.1. Το δεύτερο είναι σωστό, από τον ορισμό της μέσης δύναμης $F_\mu = \Delta p/\Delta t \Rightarrow \Delta t = \Delta p/F_\mu$.

6.6.2. Η πρώτη: Επειδή ο ποδηλάτης έχει μικρότερη μάζα, θα έχει μικρότερη ορμή. Άρα στο ίδιο χρονικό διάστημα υφίσταται μικρότερη μεταβολή ορμής, και απαιτεί μικρότερη μέση δύναμη.

6.10.1. Η ορμή του συστήματος των σωμάτων είναι μηδενική και επομένως τα δύο σώματα έχουν αντίθετες ορμές. Η ταχύτητα του ενός είναι αντίρροπη του άλλου.

Το μέτρο της ταχύτητας της μάζας m_2 είναι $|\vec{\upsilon}_2| = \dfrac{|\vec{p}_1|}{m_2} = \dfrac{m_1}{m_2}|\vec{\upsilon}_1| = 2{,}0$ m/s.

6.11.1. Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική και άρα η συνολική μεταβολή της ορμής του συστήματος των δύο μαγνητών θα είναι μηδενική.

6.12.1. Το αυτοκίνητο έχει τριπλάσια κινητική ενέργεια.

6.12.2. Θα εννιαπλασιαστεί.

6.12.3. Ναι, εάν το φορτηγό έχει πολύ μικρή (ή μηδενική) ταχύτητα.

6.12.4. **(1)** Και τα δύο σώματα κάθε ζευγαριού αποκτούν αντίθετες ορμές.
(2) Η σφαίρα και ο βράχος αποκτούν μεγαλύτερη ταχύτητα (μικρότερη μάζα).
(3) Η σφαίρα και ο βράχος αποκτούν μεγαλύτερη κινητική ενέργεια (μικρότερη μάζα).

6.12.5. Η δύναμη ασκείται σε μεγαλύτερη απόσταση, οπότε το έργο της μεγαλώνει. Από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας προκύπτει ότι το βλήμα αποκτά μεγαλύτερη ταχύτητα.

6.12.6. Το φορτωμένο πλοίο έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια, άρα η μέση δύναμη (αντίσταση του νερού) χρειάζεται να επενεργήσει για μεγαλύτερο διάστημα, για να μηδενισθεί η κινητική ενέργεια.

6.12.7. **(Α)** Η μεταλλική σφαίρα γιατί η μεταβολή της ορμής της είναι διπλάσια από τη μεταβολή της ορμής της πήλινης σφαίρας.

(Β) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας της μεταλλικής σφαίρας είναι μηδενική και άρα δεν μεταφέρει ενέργεια στο έδαφος ενώ η πήλινη σφαίρα σταματά και άρα μεταφέρει όλη την κινητική της ενέργεια.

6.14.1. Η ορμή της μπάλας **Α** μεταδίδεται στη μπάλα **Β**, οπότε η **Α** μένει ακίνητη. Το ίδιο συμβαίνει διαδοχικά στις μπάλες **Γ** - **Ε**. Τελικά, η μπάλα **Ε** θα κινηθεί με την ορμή της **Α**, και οι υπόλοιπες θα μείνουν ακίνητες.

6.14.2. Η εξήγηση είναι ίδια με την προηγούμενη ερώτηση: Επειδή οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες, η ορμή μεταδίδεται διαδοχικά από την μία σφαίρα στην επόμενη.

6.14.3. Από τη σχέση $\upsilon_1' = 2\upsilon_2 - \upsilon_1 = 2\upsilon_2$, προκύπτει ότι η μπάλα του γκόλφ θα φύγει με διπλάσια ταχύτητα (6 m/s).

Σημειώσεις

Σημειώσεις