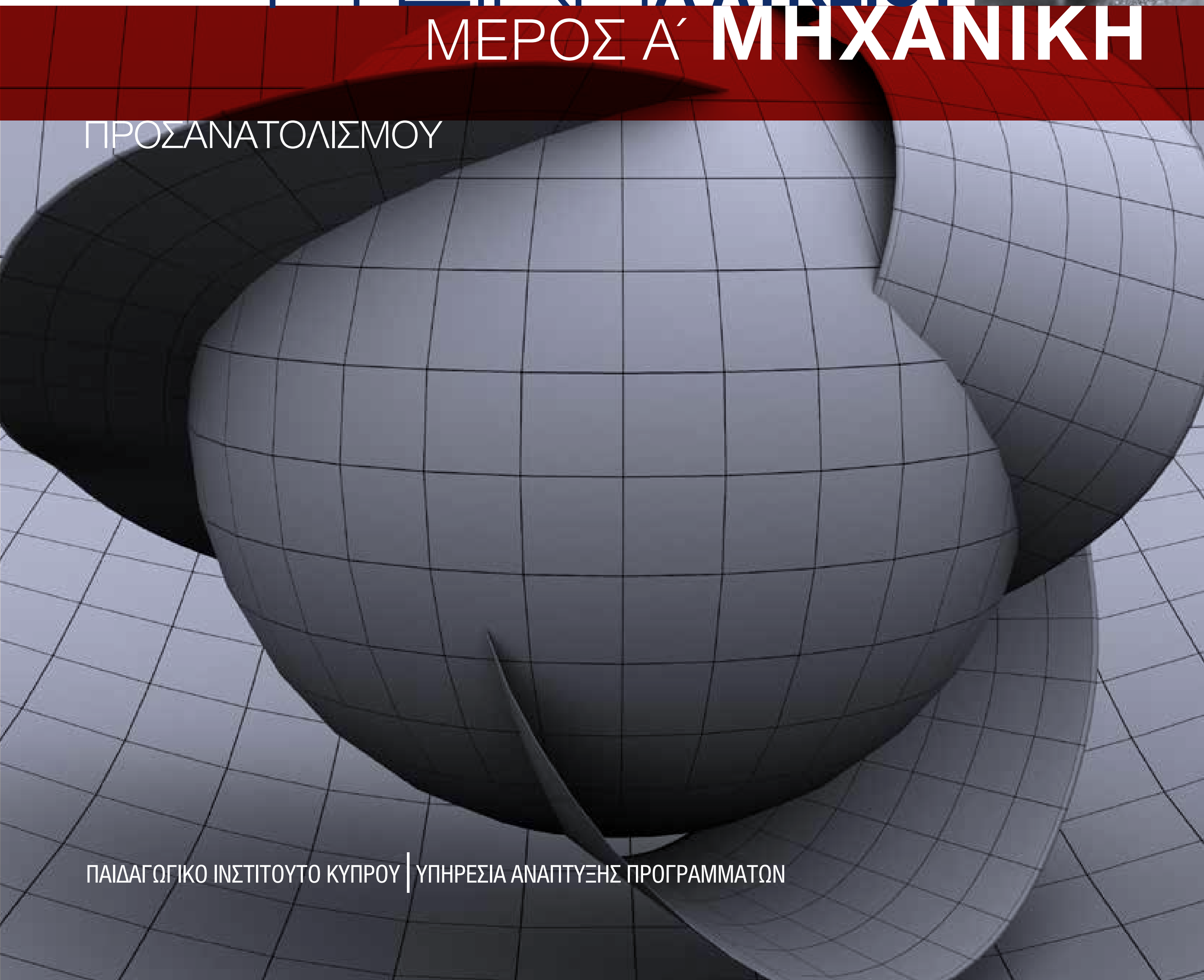
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΦΥΣΙΚΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄ ΜΗΧΑΝΙΚΗ



ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ | ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΦΥΣΙΚΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Συγγραφή:

Γεώργιος Αρχοντής, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Φώτιος Πτωχός, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Νικόλαος Τούμπας, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Ζαχαρίας Ζαχαρία, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Ιωάννης Καρμιώτης, Φυσικός, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Σάββας Πολυδωρίδης, Φυσικός Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Δημήτριος Φιλίππου, Φυσικός, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Ανδρέας Παπαστυλιανού
Πρώτος Λειτουργός Μέσης Εκπαίδευσης

Παναγιώτης Ελευθερίου
Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης Φυσικής

Γιαννάκης Χατζηκωστής
Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης Φυσικής

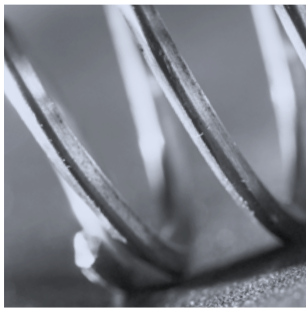
Σχεδιασμός έκδοσης: Έλενα Ηλιάδου, Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων

Επιμέλεια έκδοσης: Μαρίνα Άστρα Ιωάννου, Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων

Συντονισμός έκδοσης: Χρίστος Παρπούνας, Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων

Α΄ Έκδοση 2016
Β΄ Έκδοση 2017
Ανατύπωση 2018 (Με μικροδιορθώσεις)
Εκτύπωση: Printco Manufacturing & Trading Ltd

ISBN: 978-9963-54-081-5



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

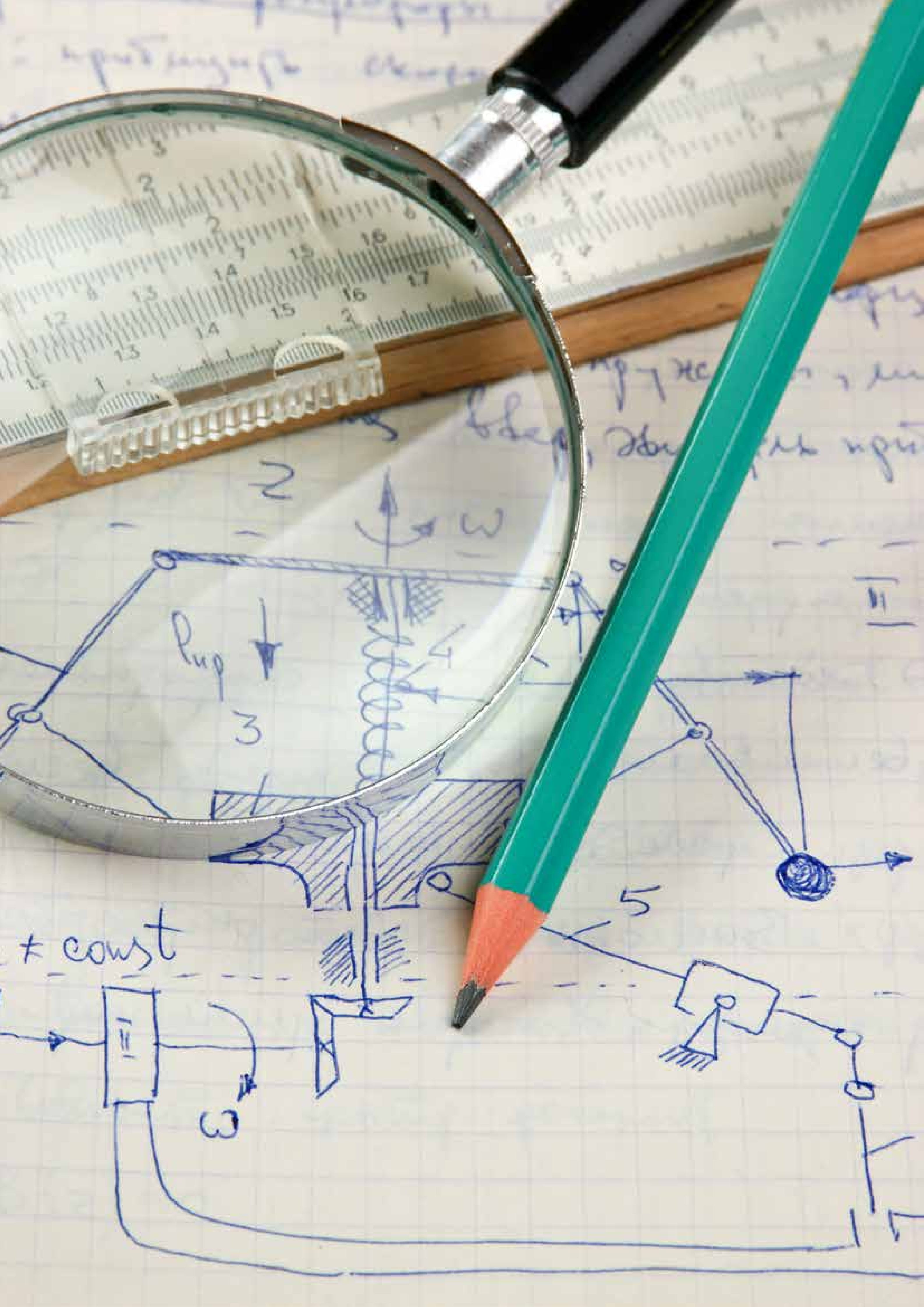
Η διασφάλιση της ποιότητας ζωής στον αιώνα που διανύουμε, βασίζεται ολοένα και περισσότερο στην επιστημονική και τεχνολογική πρόοδο. Η απόκτηση εκπαίδευσης και δεξιοτήτων στην επιστήμη είναι απαραίτητη για την επίτευξη βιώσιμης ανάπτυξης και εδραίωσης της πραγματικής δημοκρατίας.

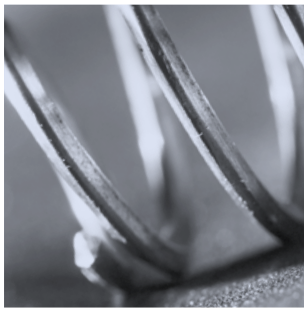
Με ιδιαίτερη χαρά προλογίζω την έκδοση του βιβλίου «Φυσική Α΄ Λυκείου». Το βιβλίο αυτό γράφτηκε με τη σκέψη ότι εσείς, οι σημερινοί μαθητές και οι αυριανοί πολίτες, θα πρέπει να δομήσετε ένα συνεκτικό σώμα γνώσεων, να αναπτύξετε τις αναγκαίες δεξιότητες και ικανότητες για συμμετοχή σε μια κοινωνία ενεργών και κριτικά σκεπτόμενων ανθρώπων και να διαμορφώσετε θετικές στάσεις και συμπεριφορές έναντι της επιστήμης. Γι' αυτό τον λόγο σε αυτό το βιβλίο τα θέματα της Φυσικής συνδέονται με την καθημερινή ζωή, τη φύση και την εξέλιξη της επιστήμης.

Επιθυμώ να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους εκπαιδευτικούς της ομάδας, Ιωάννη Καρμιώτη, Σάββα Πολυδωρίδη και Δημήτριο Φιλίππου, στον Πρώτο Λειτουργό Μέσης Εκπαίδευσης Ανδρέα Παπαστυλιανού, στους Επιθεωρητές Φυσικής Παναγιώτη Ελευθερίου και Γιαννάκη Χατζηκωστή, καθώς και στους πανεπιστημιακούς Γεώργιο Αρχοντή, Φώτιο Πτωχό, Νικόλαο Τούμπα και Ζαχαρία Ζαχαρία που ασχολήθηκαν με τη συγγραφή του βιβλίου.

Τέλος, ευχαριστώ την Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων που είχε την ευθύνη για την έκδοση του βιβλίου αυτού.

Δρ Κυπριανός Λούης
Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης





ΛΙΓΑ ΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΝΕΟ ΒΙΒΛΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ ΤΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Αγαπητοί και αγαπητές μαθήτριες και μαθητές,

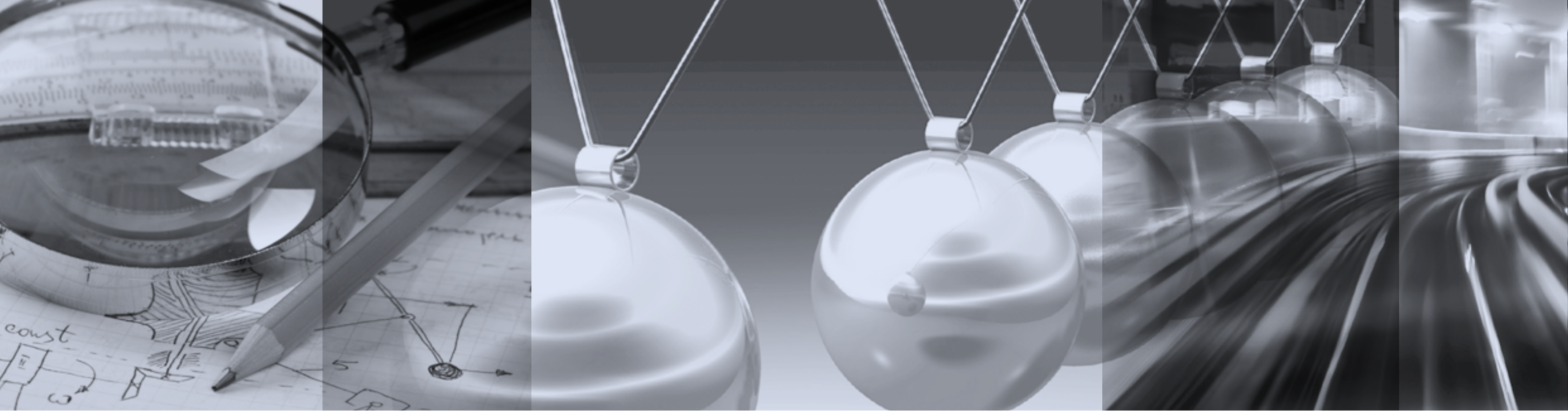
Σας καλωσορίζουμε στη νέα σχολική χρονιά, και σας ευχόμαστε, με αφετηρία αυτό το βιβλίο, να κάνετε ένα συναρπαστικό ταξίδι στον θαυμαστό κόσμο της Φυσικής.

Από τα βάθη της αρχαιότητας, οι άνθρωποι προσπαθούν να ερμηνεύσουν τα φαινόμενα του φυσικού κόσμου. Τον 6ο αιώνα π.Χ. οι αρχαίοι Έλληνες φυσικοί φιλόσοφοι της Ιωνίας βασίσθηκαν σε λογικά επιχειρήματα και διατύπωσαν τις πρώτες θεωρίες για την αρχή των όντων. Η σύγχρονη επιστημονική μεθοδολογία θεμελιώθηκε τον 17ο αιώνα από τον Γαλιλαίο (Galileo Galilei) και θέτει ως προϋπόθεση τη διεξαγωγή και ερμηνεία κατάλληλα σχεδιασμένων πειραμάτων. Σε συνδυασμό με την πειραματική μεθοδολογία, ο Γαλιλαίος τόνιζε ότι για την ερμηνεία των νόμων της Φύσης είναι απαραίτητη η χρήση των μαθηματικών (“το βιβλίο της Φύσης είναι γραμμένο με μαθηματικούς χαρακτήρες”). Τον ίδιο αιώνα, ο Ισαάκ Νεύτωνας διατύπωσε τους νόμους της κίνησης και τον νόμο της παγκόσμιας έλξης, στο φημισμένο έργο του *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

Οι σύγχρονες Φυσικές θεωρίες και πειράματα μελετούν και ερμηνεύουν σε μεγάλο βαθμό φαινόμενα που παρατηρούνται τόσο σε υποατομική, όσο και σε αστρονομική κλίμακα, από τη συμπεριφορά των στοιχειωδών σωματιδίων μέχρι τη δημιουργία αστέρων και την εξέλιξη του Σύμπαντος.

Σε συνδυασμό με την κατανόηση της συμπεριφοράς του Φυσικού κόσμου, η Φυσική έχει αναρίθμητες **πρακτικές εφαρμογές**. Η λειτουργία των συσκευών που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή ζωή για την παραγωγή φωτός, την παραγωγή και χρήση ηλεκτρικής ενέργειας, την απορρόφηση ηλιακής ενέργειας, την κίνηση, την επικοινωνία και την ψυχαγωγία, βασίζεται σε φυσικές αρχές.

Στα μέσα του 20ου αιώνα, ο φημισμένος Αυστριακός Φυσικός Erwin Schroedinger, διατύπωσε στο βιβλίο του “*What is Life*” την άποψη ότι η Φυσική μπορεί να συνεισφέρει και στην κατανόηση των φαινομένων που παρατηρούνται σε ζωντανούς οργανισμούς (**έμβια** ύλη). Η



αλματώδης ανάπτυξη όλων των Φυσικών Επιστημών, ιδιαίτερα από τις αρχές του εικοστού αιώνα, καθιστά δυνατή τη μελέτη και την ερμηνεία της συμπεριφοράς της έμβιας ύλης με μία **διεπιστημονική προσέγγιση**, στην οποία συνδυάζονται μέθοδοι από πολλές επιστημονικές περιοχές (Φυσική, Χημεία, Βιολογία, κλάδοι Μηχανικής). Πειραματικές συσκευές που βασίζονται σε φυσικές αρχές, όπως το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο, το μικροσκόπιο φθορισμού, το μικροσκόπιο ατομικής δύναμης και το σύγχροτρο προσφέρουν λεπτομερείς εικόνες της δομής του κυττάρου και των βιολογικών μορίων. Οι εικόνες αυτές, μαζί με θεωρητικά φυσικά μοντέλα για τη δομή και τις δυνάμεις μεταξύ μορίων, χρησιμοποιούνται στο στοχευμένο σχεδιασμό φαρμάκων. Ταυτόχρονα, η Φυσική συνεισφέρει ουσιαστικά σε πολλές διαγνωστικές και θεραπευτικές τεχνικές της σύγχρονης Ιατρικής, όπως η χρήση υπερήχων, ο πυρηνικός μαγνητικός συντονισμός (MRI), η τομογραφία ποζιτρονίου-ηλεκτρονίου (PET scan), η ακτινοβόληση καρκινικών όγκων.

Οι αλματώδεις εξελίξεις που περιγράψαμε υποδεικνύουν ότι η Φυσική είναι ένας εξαιρετικά υποσχόμενος τομέας απασχόλησης για τους νέους ανθρώπους, που θα συνεισφέρουν στην πρόοδο της ανθρωπότητας, παίρνοντας τη σκυτάλη από τους παλαιότερους.

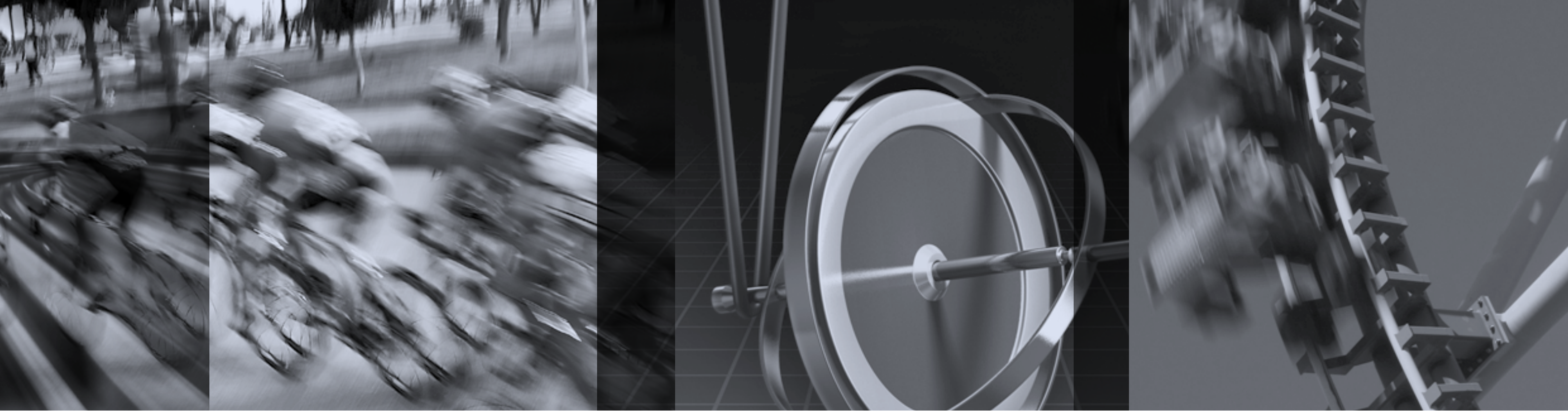
Το βιβλίο που έχετε στα χέρια σας αποτελεί ένα περιεκτικό και πλήρες κείμενο αναφοράς, που συμβαδίζει πιστά με το Αναλυτικό Πρόγραμμα.

Κάθε κεφάλαιο περιλαμβάνει:

- Αρχική σύνοψη των διδακτικών στόχων,
- Ανάπτυξη της αντίστοιχης θεωρίας με συνδυασμό αναπαραστάσεων (κείμενο και εικόνες, διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις, πίνακες).
- Ερωτήσεις ελέγχου κατανόησης εννοιών
- Πολυάριθμα λυμένα παραδείγματα
- Τελικές ερωτήσεις ανακεφαλαίωσης και κατανόησης
- Άλυτες ασκήσεις.

Η **σύνοψη των διδακτικών στόχων** συνιστά έναν οδηγό για το τι πρέπει να γνωρίζετε με την ολοκλήρωση της μελέτης του κεφαλαίου. Οι συνοδευτικές αναπαραστάσεις (εικόνες, διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις, πίνακες) επεξηγούν πτυχές της θεωρίας και πρέπει να μελετώνται σε συνδυασμό με το γραπτό κείμενο.

Η **μελέτη των λυμένων παραδειγμάτων** είναι **απαραίτητη** προϋπόθεση για την κατανόηση της θεωρίας και πρέπει να προηγείται της επίλυσης των άλυτων ασκήσεων στο τέλος του βιβλίου. Ο στόχος των παραδειγμάτων είναι διπλός: **(1)** παρουσιάζουν τη μεθοδολογία επί-



λυσης μίας κατηγορίας προβλημάτων. **(2)** αναδεικνύουν λεπτομερώς τον τρόπο γραφής και τον χειρισμό μαθηματικών συμβόλων, εξισώσεων και μονάδων μέτρησης, που υιοθετείται στη διεθνή πρακτική.

Οι **ερωτήσεις ελέγχου κατανόησης** αναφέρονται σε επιλεγμένα σημεία του κειμένου, και αποσκοπούν στον έλεγχο της κατανόησης βασικών εννοιών. Εάν διαπιστώνετε έλλειψη κατανόησης, πρέπει να αφιερώνετε επιπλέον χρόνο πριν προχωρήσετε στα επόμενα σημεία του κειμένου.

Οι **τελικές ερωτήσεις κατανόησης** ελέγχουν την κατανόηση του συνολικού περιεχομένου του κεφαλαίου, και βοηθούν στην ανακεφαλαίωση. Σε περίπτωση που εντοπίζετε δυσκολίες, πρέπει να μελετήσετε ξανά το σχετικό περιεχόμενο και τα συνοδευτικά παραδείγματα.

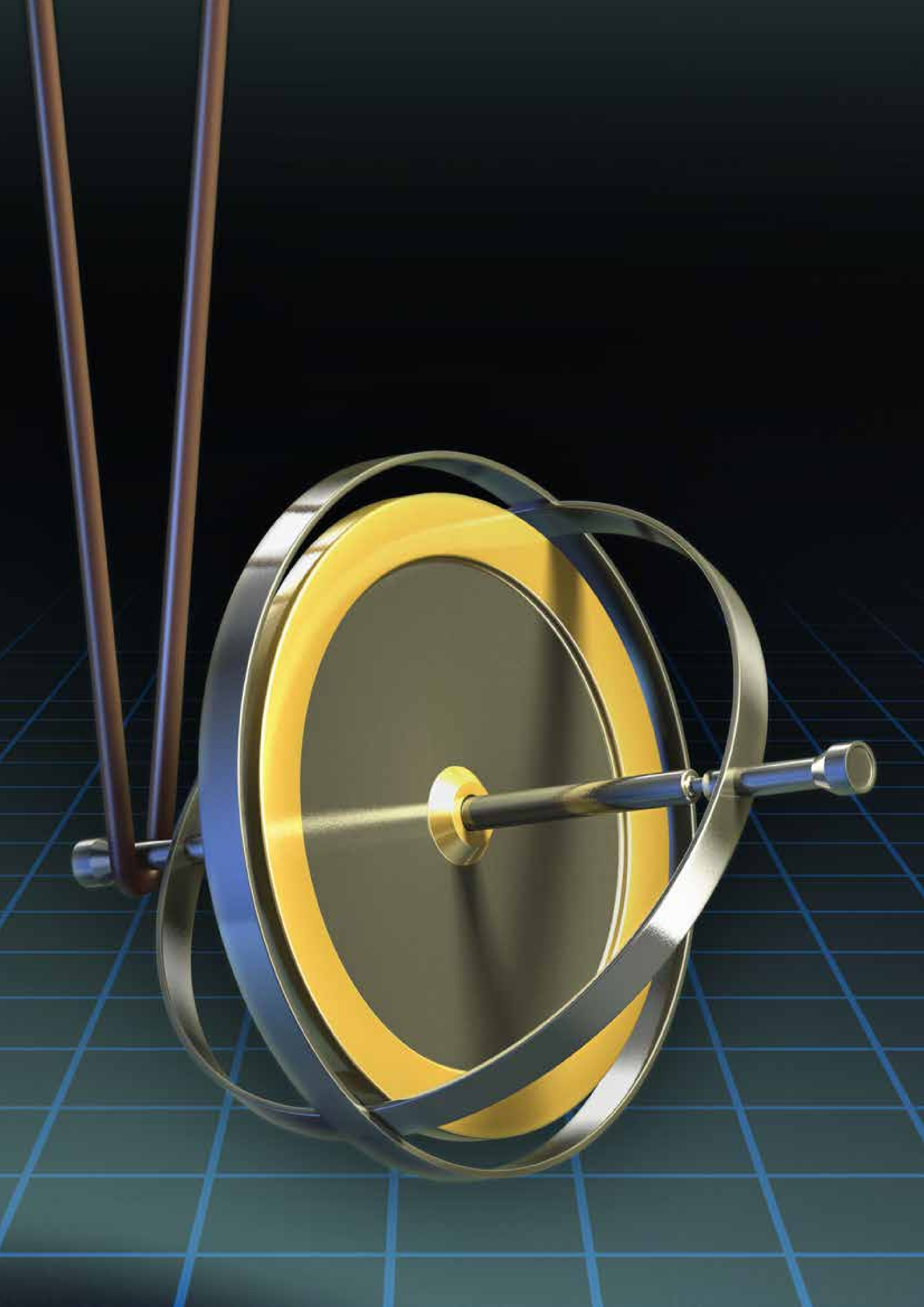
Η **επίλυση προβλημάτων** είναι **απαραίτητο και αναντικατάστατο στοιχείο** της εκπαίδευσης στη Φυσική. Τόσο η Πειραματική, όσο και η Θεωρητική Φυσική έχουν σημαντική ποσοτική συνιστώσα. Μαζί με την ανάπτυξη ικανοτήτων διερεύνησης και διατύπωσης συμπερασμάτων, είναι απαραίτητη και η σταδιακή ωρίμανση σας στην ποσοτική επεξεργασία δεδομένων. Γι΄ αυτό το λόγο έχουμε συμπεριλάβει στο βιβλίο πολυάριθμα λυμένα παραδείγματα και ασκήσεις κλιμακούμενης δυσκολίας. Επίσης, είναι σημαντικό να γνωρίζετε ότι φροντίσαμε ώστε το κείμενο να βασίζεται στις ήδη αποκτηθείσες γνώσεις Μαθηματικών σας, χωρίς να τις υπερβαίνει.

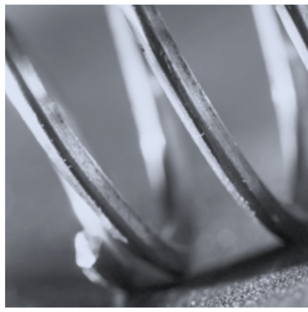
Για να επιτύχετε το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα, σας εισηγούμαστε όπως μελετάτε πρώτα το επιστημονικό περιεχόμενο μίας ενότητας, τα αντίστοιχα λυμένα παραδείγματα και τις ερωτήσεις ελέγχου κατανόησης εννοιών, πριν προχωρήσετε στο επόμενο μέρος. Στο τέλος, ασχοληθείτε με την επίλυση των άλυτων ασκήσεων. Οι άλυτες ασκήσεις βασίζονται στη θεωρία και τα λυμένα παραδείγματα. **Μην** προσπαθείτε να λύσετε τις ασκήσεις πριν συμβουλευτείτε το κείμενο, γιατί θα δυσκολευτείτε πολύ περισσότερο.

Το βιβλίο αποτελεί οδηγό μελέτης, αλλά το βασικό και αναντικατάστατο σημείο αναφοράς είναι ο/η εκπαιδευτικός σας. Πρέπει να δίνετε εξαιρετική προσοχή στις διαλέξεις, να συμμετέχετε ενεργά, και να συμβουλεύεστε εγκαίρως τον/την εκπαιδευτικό σας για σημεία στα οποία εντοπίζετε έλλειψη κατανόησης.

Ευχόμαστε να βρείτε το βιβλίο χρήσιμο, και σας ευχόμαστε **Καλή Νέα Σχολική Χρονιά**.

Η Συγγραφική Ομάδα





ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Στο Κεφάλαιο 1:

- **Διακρίνουμε** τα φυσικά μεγέθη σε θεμελιώδη και παράγωγα
- **Εξηγούμε** τη φυσική σημασία των μετρήσεων
- **Αναφέρουμε** τις μονάδες μέτρησης των θεμελιωδών μεγεθών στο σύστημα SI, και τα πολλαπλάσιά τους
- **Εκτελούμε** μετατροπές μεταξύ μονάδων μέτρησης
- **Ταξινομούμε** τα φυσικά μεγέθη σε μονόμετρα και διανυσματικά
- **Εξηγούμε** την ορθή επιλογή και χρήση οργάνων μέτρησης
- **Επισημαίνουμε** παράγοντες που προσδίδουν αβεβαιότητα στις μετρούμενες τιμές
- **Προσδιορίζουμε** τα σημαντικά ψηφία των μετρούμενων τιμών
- **Εκτελούμε** πράξεις μεταξύ μετρούμενων τιμών

1.1. Θεμελιώδη και Παράγωγα Φυσικά Μεγέθη

Για να περιγράψουμε τη φύση, μετρούμε φυσικά μεγέθη όπως το μήκος, ο χρόνος, η μάζα, η πυκνότητα, η πίεση, η θερμοκρασία και η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος.

Τα φυσικά μεγέθη διακρίνονται σε **θεμελιώδη** και **παράγωγα**. Το **μήκος**, ο **χρόνος** και η **μάζα** αποτελούν θεμελιώδη μεγέθη στο διεθνές σύστημα μονάδων SI (Système Internationale). Επιπρόσθετα θεμελιώδη μεγέθη, κάποια από τα οποία θα μελετήσουμε σε επόμενες τάξεις, είναι η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος, το γραμμομόριο (mole), η θερμοδυναμική θερμοκρασία και η ένταση φωτεινής ακτινοβολίας.

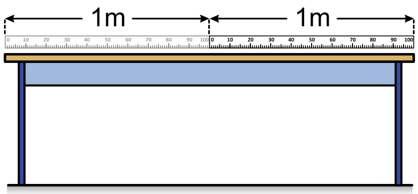
Τα υπόλοιπα φυσικά μεγέθη, ονομάζονται **παράγωγα**, διότι ορίζονται από σχέσεις που εμπλέκουν τα θεμελιώδη μεγέθη. Παράγωγα μεγέθη είναι το εμβαδόν, ο όγκος, η πυκνότητα, η ταχύτητα, η επιτάχυνση και η δύναμη. Για παράδειγμα:

- Ως **μέση αριθμητική ταχύτητα** ενός κινούμενου σώματος ορίζεται το πηλίκο της διανυόμενης απόστασης προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα ($\upsilon = s/\Delta t$).
- Ως **πυκνότητα** ενός σώματος ορίζεται το πηλίκο της μάζας του σώματος προς τον όγκο του ($\rho = m/V$).

Στους Πίνακες 1-1, 1-2 και 1-3 αναφέρουμε χαρακτηριστικά μήκη, χρόνους και μάζες.

1.2. Φυσική Σημασία των Μετρήσεων και Μονάδες Μέτρησης

Για να **μετρήσουμε** ένα φυσικό μέγεθος, το συγκρίνουμε με ένα χαρακτηριστικό **πρότυπο** που το ονομάζουμε **μονάδα μέτρησης** του μεγέθους. Στο σύστημα SI, ως μονάδα μέτρησης του μήκους ορίζεται το μέτρο (m), χρόνου το δευτερόλεπτο (s) και μάζας το χιλιόγραμμο (kg).



Για παράδειγμα, για να μετρήσουμε το μήκος της πλευράς ενός τραπεζιού, το συγκρίνουμε με ένα χαρακτηριστικό (πρότυπο) μήκος, το μέτρο (m). Εάν η πλευρά του τραπεζιού είναι δύο φορές μεγαλύτερη από αυτό, συμπεραίνουμε ότι το μήκος της πλευράς του τραπεζιού ισούται με 2 m.

Από τις σχέσεις ορισμού των παραγώγων φυσικών μεγεθών προκύπτουν και οι αντίστοιχες μονάδες των παραγώγων μεγεθών. Για παράδειγμα, μονάδα επιφάνειας είναι το τετραγωνικό μέτρο (m^2), και μονάδα όγκου το κυβικό μέτρο (m^3). Μονάδα πυκνότητας είναι το kg/m^3, και μονάδα ταχύτητας το m/s.

Οι μονάδες κάποιων παραγώγων μεγεθών αποδίδονται με ιδιαίτερο όνομα. Η μονάδα μέτρησης της δύναμης είναι το $kg\ m/s^2$ στο σύστημα SI, και ονομάζεται Newton (N).

Πίνακας 1-1
Χαρακτηριστικά μήκη (σε m), κατά προσέγγιση.

Ακτίνα πρωτονίου	10^{-15}
Διάμετρος ατόμου υδρογόνου	10^{-10}
Τυπικό κύτταρο	10^{-6}
Μήκος μύγας	10^{-2}
Ύψος Εβερεστ	9×10^{3}
Ακτίνα της Γης	$6,4 \times 10^{6}$
Απόσταση Γης - Σελήνης	$3,8 \times 10^{8}$
Ακτίνα του ηλιακού συστήματος	$4,5 \times 10^{12}$
Ακτίνα του Γαλαξία μας	10^{21}
Απόσταση των πιο απομακρυσμένων Γαλαξιών	10^{26}

Πίνακας 1-2
Χαρακτηριστικοί χρόνοι (σε s), κατά προσέγγιση.

Χρόνος ζωής του μιονίου	10^{-6}
Χρονικό διάστημα μεταξύ σφυγμών της καρδιάς	10^{0}
Διάρκεια ημέρας	$8,6 \times 10^{4}$
Διάρκεια έτους	$3,2 \times 10^{7}$
Πρώτοι ανθρωπίδες	10^{14}
Ηλικία Γης	10^{17}
Ηλικία Σύμπαντος	5×10^{17}

Πίνακας 1-3
Χαρακτηριστικές μάζες (σε kg), κατά προσέγγιση.

Ηλεκτρόνιο	10^{-30}
Πρωτόνιο	10^{-27}
Άτομο Ουρανίου	4×10^{-25}
Βακτήριο Ecoli	10^{-15}
Κόκκος γύρης	10^{-10}
Κουνούπι	10^{-5}
Άνθρωπος	7×10^{1}
Μπλέ Φάλαινα	10^{5}
Έβερεστ	10^{15}
Γη	6×10^{24}
Ήλιος	10^{30}
Ο Γαλαξίας μας	10^{41}

Η χρήση μονάδων είναι απαραίτητη στη Φυσική: Η φράση «η μάζα της πέτρας είναι 25» δεν έχει νόημα, αν δεν προσδιορίσουμε σε ποια μονάδα αναφέρεται η αριθμητική τιμή.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερώτηση 1.2.1., σελ. 43.

1.3. Πολλαπλάσια Μονάδων Μέτρησης

Περιγράφουμε τα πολλαπλάσια των μονάδων με προθέματα που δηλώνουν πόσο μεγαλύτερη ή μικρότερη είναι η εξεταζόμενη ποσότητα από τη μονάδα που ακολουθεί το πρόθεμα. Τα πιο συνηθισμένα προθέματα αναφέρονται στον Πίνακα 1-4. Για παράδειγμα, το πρόθεμα «kilo» («k», «χιλιο») δηλώνει το 10^3 , το «milli» («m», «χιλιοστό») το 10^{-3}, και το «micro» («μ», «μικρο») το 10^{-6} . Ένα χιλιόγραμμο (kg) ισούται με 10^3 g, ένα μιλίμετρο (mm) με 10^{-3} m, και 1 μικροδευτερόλεπτο (μs) με 10^{-6} s.

Οι δυνάμεις των υποπολλαπλασίων και πολλαπλασίων μονάδων γράφονται με απλούστερη μορφή: Π.χ., γράφουμε cm^2 αντί για $(cm)^2$, mm^3 αντί για $(mm)^3$ κ.ο.κ.

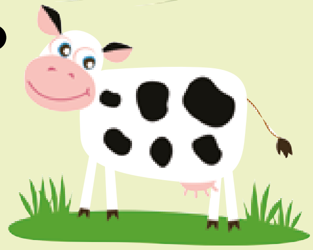
Κάποια πολλαπλάσια μονάδων αποδίδονται με ιδιαίτερο όνομα και όχι με χρήση προθέματος. Για παράδειγμα, ένα λίτρο (L) ισούται με 10^{-3} m^3, ένας τόνος (t) με 1000 kg, ένα λεπτό (min) με 60 s και μία ώρα (h) ισούται με 3600 s.

Πίνακας 1-4
Προθέματα μονάδων μέτρησης.

Πρόθεμα	Δύναμη
peta (P)	10^{15}
terra (T)	10^{12}
giga (G)	10^{9}
mega (M)	10^{6}
kilo (k)	10^{3}
deka (da)	10^{1}
deci (d)	10^{-1}
centi (c)	10^{-2}
milli (m)	10^{-3}
micro (μ)	10^{-6}
nano (n)	10^{-9}
pico (p)	10^{-12}
femto (f)	10^{-15}

❶

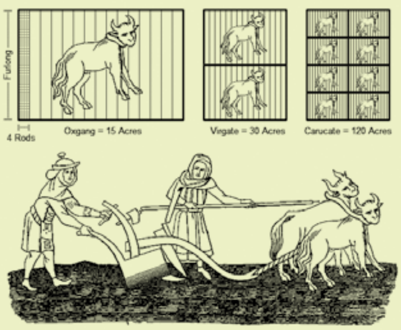
❷



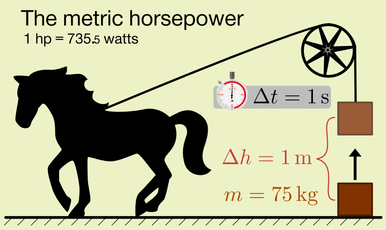
❸

By JKBrooks85 - Own work, Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7516001

❹ ❺



❼



Original version in German by Sgbeer - File: Pferdestaerke.svg, CC BY-SA 3.0, http: //commons.wikimedia.org/w/ index.php?curid=35217113

Ασυνήθιστες Μονάδες Μέτρησης

Στις διάφορες καθημερινές δραστηριότητες επινοήθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν πολλές μονάδες μέτρησης, οι οποίες δεν αντιστοιχούν στο σύστημα SI. **Μερικά παραδείγματα:**

❶ Το **χέρι** (hand) είναι ίσο με 10,16 cm (4 ίντσες) και χρησιμοποιείται σε κάποιες χώρες για τη μέτρηση του ύψους των αλόγων.

❷ Το **γρασίδι της αγελάδας** («cow's grass») είναι μονάδα επιφάνειας. Χρησιμοποιούνταν πριν τον 19ο αιώνα στην Ιρλανδία και δήλωνε την επιφάνεια του εδάφους, που μπορούσε να παράγει αρκετό γρασίδι για να συντηρεί μία αγελάδα.

❸ Το **cord** είναι μονάδα μέτρησης όγκου, και χρησιμοποιείται στις ΗΠΑ και στον Καναδά για να δηλώσει την ποσότητα ξύλου, που καταλαμβάνει όγκο 128 κυβικά πόδια (ένα πόδι (ft) είναι ίσο με 0,3 m).

❹ Στη γεωργία επινοήθηκαν πολλές μονάδες μέτρησης μήκους και επιφάνειας, που βασίζονταν σε γεωργικές δραστηριότητες. Ένα **furlong** περιγράφει την απόσταση που μπορούσε να οργώσει ένα ζευγάρι βόδια χωρίς ανάπαυση. Ισούται με 201,168 μέτρα (το 1/8 του μιλίου), και υποδιαιρείται σε 10 αλυσίδες (**chains**) ή 40 ραβδιά (**rods**).

❺ Η **acre** είναι μονάδα επιφάνειας, και περιγράφει την επιφάνεια του χωραφιού που μπορούσε να οργώσει ένας άνθρωπος πίσω από ένα βόδι, στο διάστημα μίας ημέρας. Είχε μήκος 1 furlong και πλάτος 1 αλυσίδα (4 ραβδιά), και είναι περίπου ίση με 4047 m^2.

❻ Το **fortnight** είναι μονάδα μέτρησης χρόνου και ισούται με 14 ημέρες (από μία παλιά αγγλική έκφραση που σημαίνει fourteen nights). Το πηλίκο 1 furlong/fortnight ισούται περίπου με 1 cm/min.

❼ Η **ισχύς ενός αλόγου** (horsepower) εκφράζει την ενέργεια που απαιτείται για να ανυψωθεί μία μάζα 75 kg κατά 1 m σε χρόνο 1 s. Χρησιμοποιείται για να περιγράψει την ισχύ (ενέργεια/χρόνο) που παράγουν διάφορες μηχανές.

1.4. Μετατροπές Μονάδων Μέτρησης

Χρησιμοποιώντας τα προθέματα του Πίνακα 1 - 4, μπορούμε να γράψουμε ισότητες μεταξύ μιας μονάδας και των πολλαπλασίων της. Έτσι, 1 cm = 10^{-2} m, 1 ps = 10^{-12} s, 1 kg = 10^{3} g. Κάθε τέτοια ισότητα ορίζει ένα λόγο ίσο με 1 (μία αναλογία). Για παράδειγμα,

$$1 = \frac{10^{-2}\,\text{m}}{1\,\text{cm}}, \quad 1 = \frac{10^{3}\,\text{m}}{1\,\text{km}}, \quad 1 = \frac{3\,600\,\text{s}}{1\,\text{h}}, \quad 1 = \frac{10^{3}\,\text{g}}{1\,\text{kg}}$$

Σε πολλές εφαρμογές χρειάζεται να πραγματοποιήσουμε μετατροπές μεταξύ πολλαπλασίων μιας μονάδας μέτρησης. Για να μετατρέψουμε ένα πολλαπλάσιο μονάδας σε ένα άλλο, το πολλαπλασιάζουμε με τον κατάλληλο (ίσο με 1) λόγο, γραμμένο έτσι ώστε να **απαλείφεται η αρχική μονάδα και να εμφανίζεται η νέα μονάδα**.

Παράδειγμα
Ο χρόνος περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο (γήινο έτος) ισούται (περίπου) με 365 ημέρες. Να μετατρέψετε 1 γήινο έτος σε δευτερόλεπτα.

Μετατρέπουμε το γήινο έτος σε δευτερόλεπτα (s), πολλαπλασιάζοντας διαδοχικά με λόγους ίσους με τη μονάδα:

$$1\ \text{έτος} = 1\ \text{έτος} \times \underbrace{\frac{365\ \text{ημέρες}}{1\ \text{έτος}}}_{=1} \times \underbrace{\frac{24\ \text{h}}{1\ \text{ημέρα}}}_{=1} \times \underbrace{\frac{60\ \text{min}}{1\ \text{h}}}_{=1} \times \underbrace{\frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}}}_{=1} = 31\,536\,000\ \text{s}$$

Να παρατηρήσετε ότι **οι μονάδες πολλαπλασιάζονται, διαιρούνται και απαλείφονται μεταξύ τους, όπως οι αριθμοί.**

ΠΡΟΣΟΧΗ
Στην πιο πάνω μετατροπή, θα μπορούσε κάποιος να γράψει απευθείας: 1 έτος = 365 x 24 x 60 x 60 s = 31 536 000 s. Αυτός ο τρόπος εργασίας **δεν συστήνεται**, επειδή δίνει την παραπλανητική εντύπωση ότι οι αριθμοί «365», «24», κ.τ.λ. είναι καθαροί (χωρίς μονάδες), ενώ στην πραγματικότητα είναι αναλογίες (365 μέρες)/(1έτος), (24 h)/(1 ημέρα), κ.τ.λ. Η χρήση αναλογιών (και η απαλοιφή μονάδων) καθοδηγεί τις μετατροπές λιγότερο γνωστών μονάδων, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

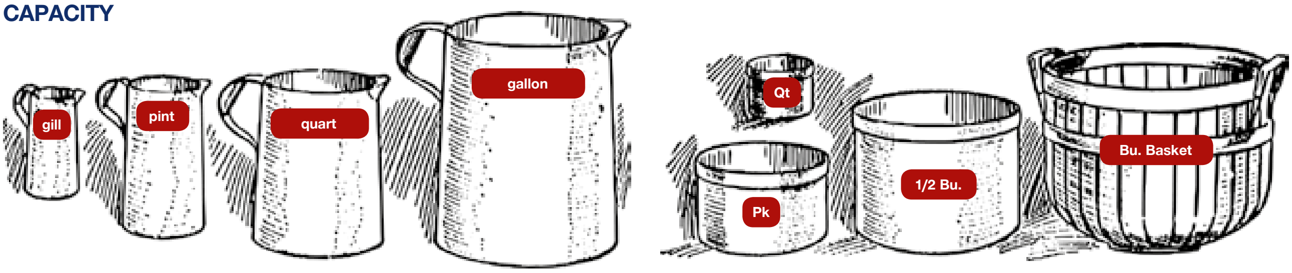
Παράδειγμα

Μία γυάρδα (yd) περιέχει 3 πόδια (ft), ένα πόδι (ft) περιέχει 12 ίντσες (in), και μία ίντσα ισούται με 2,540 cm. Να μετατρέψετε μία γυάρδα σε μέτρα.

$$1\text{ yd} = 1\text{ yd} \times \frac{3\text{ ft}}{1\text{ yd}} \times \frac{12\text{ in}}{1\text{ ft}} \times \frac{2{,}540\text{ cm}}{1\text{ in}} \times \frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}} = \frac{3 \times 12 \times 2{,}540}{100}\text{ m} = 0{,}9144\text{ m}$$

Μερικές μονάδες που χρησιμοποιούνται στη μέτρηση όγκου υγρών και στερεών. Η χρήση μονάδων SI απλοποιεί τους υπολογισμούς.

CAPACITY



Liquid Measure
4 gills = 1 pint (pt.)
2 pints = 1 quart (qt.)
4 quarts = 1 gallon (gal.)
1 gallon = 231 cubic inches

Dry Measure
2 pints (pt.) = 1 quart (qt.)
8 quarts = 1 peck (pk.)
4 pecks = 1 bushel (bu.)
10 pecks, 2 1/2 bushels = 1 barrel (bbl.)
1 bushel = 2150.42 cu. in.

Παράδειγμα

Να μετατρέψετε τη μονάδα επιφάνειας (cm^2) στην αντίστοιχη μονάδα επιφάνειας στο SI, (m^2)

Όπως και προηγουμένως, πολλαπλασιάζουμε με το σωστό λόγο, έτσι ώστε να απαλειφθεί το cm και να εμφανισθεί το m:

$$1\text{ cm}^2 = 1\text{ (cm)}^2 = 1\left(\text{cm} \times \frac{10^{-2}\text{ m}}{1\text{ cm}}\right)^2 = 10^{-4}\text{ m}^2$$

Παρομοίως, μετατρέπουμε και τις μονάδες παραγώγων μεγεθών.

Η ταχύτητα περιφοράς της Σελήνης γύρω από τη Γη είναι 3 683 km/h. Να την μετατρέψετε σε m/s.

$$3\,683\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \left(3\,683\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \times \underbrace{\frac{10^3\text{ m}}{1\text{ km}}}_{=1} \times \underbrace{\frac{1\text{ h}}{3\,600\text{ s}}}_{=1} = \frac{3\,683 \times 10^3}{3\,600}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 1\,023\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Όταν εκτελούμε πράξεις μεταξύ μεγεθών, **μετατρέπουμε όλες τις ανόμοιες μονάδες του ίδιου φυσικού μεγέθους στην ίδια μονάδα** (π.χ., όλα τα μήκη σε m, όλες τις μάζες σε kg, κ.τ.λ.). Το μέγεθος που εμφανίζεται στο τελικό αποτέλεσμα είναι λανθασμένο, αν δεν συνοδεύεται από τις σωστές μονάδες.

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε πόσα μπουκαλάκια χωρητικότητας 0,25 L, γεμάτα νερό, χρειάζεται να αδειάσουμε σε ένα δοχείο όγκου 0,50 m^3, για να γεμίσει εντελώς με νερό.

Για να υπολογίσουμε τον αριθμό μπουκαλιών, διαιρούμε τον όγκο του δοχείου με τον όγκο ενός μπουκαλιού. Περιμένουμε ότι **το αποτέλεσμα πρέπει να είναι καθαρός αριθμός (να μην έχει μονάδες)**.

$$\text{Αριθμός} = \frac{\text{Όγκος Δοχείου}}{\text{Όγκος Μπουκαλιού}} = \frac{0{,}50\,\mathrm{m^3}}{0{,}25\,\mathrm{L}} = \frac{0{,}50\,\mathrm{m^3}}{0{,}25\,\mathrm{L}} \times \frac{1\,\mathrm{L}}{10^{-3}\,\mathrm{m^3}} = 2\,000$$

Παράδειγμα

Το νερό έχει πυκνότητα $\rho = 1$ g/cm^3. Να υπολογίσετε τον όγκο μίας δεξαμενής που περιέχει 500 kg νερού.

Από τον ορισμό της πυκνότητας προκύπτει:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho}$$

Εάν αντικαταστήσουμε τις τιμές της μάζας και της πυκνότητας, χωρίς να κάνουμε μετατροπές μονάδων, συμπεραίνουμε:

$$V = \frac{500}{1}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{g/cm^3}} = 500\ \mathrm{cm^3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{g}}$$

Να παρατηρήσετε ότι **το πιο πάνω αποτέλεσμα δεν είναι ολοκληρωμένο**, επειδή, δεν είναι εκφρασμένο σε μονάδες όγκου. Για να καταλήξουμε σε ολοκληρωμένο αποτέλεσμα, πρέπει να απαλειφθεί ο λόγος kg/g:

$$V = 500\ \mathrm{cm^3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{g}} \times \frac{1000\ \mathrm{g}}{1\ \mathrm{kg}} \Rightarrow V = 500\,000\ \mathrm{cm^3}$$

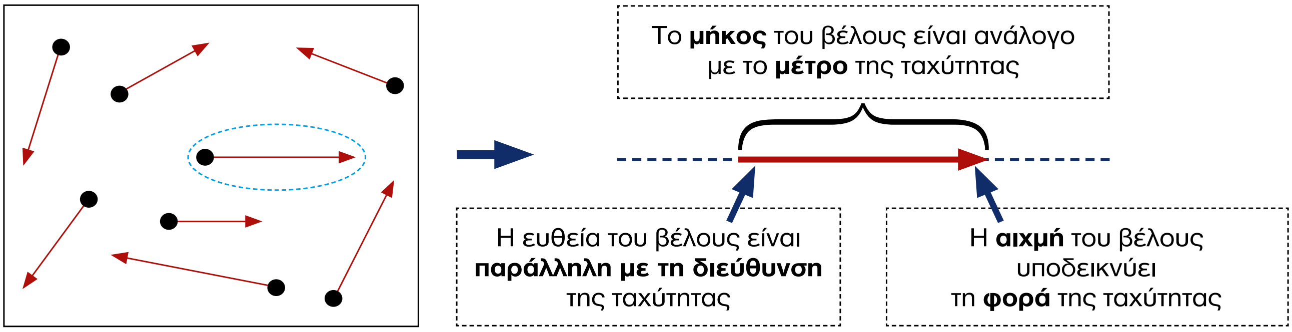
Συμπέρασμα

Η χρήση μονάδων βοηθά στον έλεγχο της ορθότητας των αποτελεσμάτων μας.

1.5. Μονόμετρα και Διανυσματικά μεγέθη

Μερικά φυσικά μεγέθη περιγράφονται πλήρως αν είναι γνωστό το μέτρο τους (η αριθμητική τιμή και η αντίστοιχη μονάδα μέτρησης). Αυτά τα μεγέθη ονομάζονται **μονόμετρα**. Παραδείγματα τέτοιων μεγεθών είναι το μήκος, το εμβαδόν, ο όγκος, ο χρόνος, η μάζα, η πυκνότητα και η θερμοκρασία.

Πολλά φυσικά μεγέθη έχουν όχι μόνο μέτρο αλλά και κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά). Αυτά τα μεγέθη ονομάζονται **διανυσματικά**. Παραδείγματα τέτοιων μεγεθών είναι η θέση, η μετατόπιση, η ταχύτητα, η επιτάχυνση και η δύναμη.



Εικόνα 1-1
Τα μόρια ενός αερίου (μαύρες κουκκίδες) κινούνται με διάφορες ταχύτητες, που αναπαρίστανται γραφικά από τα κόκκινα βέλη. Κάθε ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος, δηλαδή έχει μέτρο και κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά). Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του βέλους, που αναπαριστά μια ταχύτητα, σχετίζονται με το μέτρο και την κατεύθυνσή της.

Κάθε διανυσματικό μέγεθος μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά με ένα βέλος. Το μήκος του βέλους είναι ανάλογο με το μέτρο του μεγέθους, η ευθεία του βέλους είναι παράλληλη με τη διεύθυνση του μεγέθους και η αιχμή του βέλους υποδηλώνει τη φορά του.

Το παράδειγμα της Εικόνας 1-1 απεικονίζει τα μόρια ενός αερίου (μαύρες κουκκίδες) στο εσωτερικό ενός δοχείου. Τα κόκκινα βέλη αναπαριστούν τις ταχύτητες των μορίων. Επειδή οι ταχύτητες των μορίων διαφέρουν γενικά ως προς το μέτρο και την κατεύθυνση, τα βέλη έχουν διαφορετικά μήκη και προσανατολισμούς.

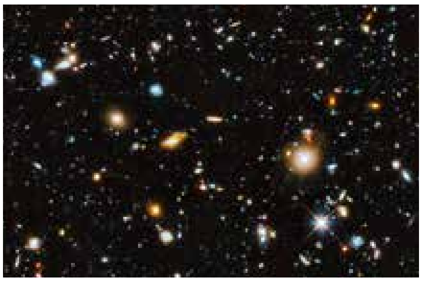
Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 1.5.1. - 1.5.2., σελ. 43.

1.6. Ορθή Επιλογή Οργάνων Μέτρησης

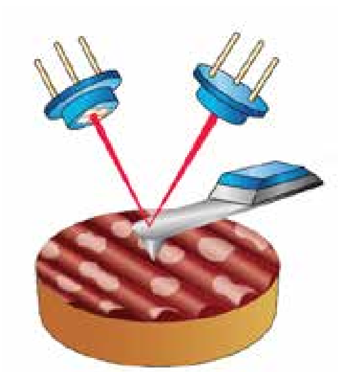
Όπως αναφέρθηκε στην αρχή του Κεφαλαίου, για να μετρήσουμε την τιμή ενός μεγέθους, το συγκρίνουμε με ένα χαρακτηριστικό πρότυπο, τη μονάδα μέτρησης. Στην καθημερινή μας ζωή πραγματοποιούμε συνεχώς μετρήσεις. Για παράδειγμα, μετρούμε το μήκος ενός τραπεζιού με τη βοήθεια ενός χάρακα, τη χρονική διάρκεια ενός φαινομένου με ένα ρολόι, τη θερμοκρασία του δωματίου με ένα θερμόμετρο.

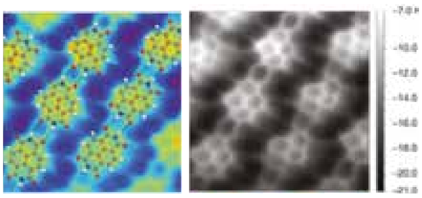
Το **ατομικό ρολόι καισίου**, FOCS 1, το οποίο βρίσκεται στην Ελβετία, μετρά χρονική διάρκεια 30 000 000 ετών με αβεβαιότητα ενός δευτερολέπτου.

Το **διαστημικό τηλεσκόπιο** Hubble χρησιμοποιείται για την απεικόνιση και τη χαρτογράφηση πολύ απομακρυσμένων περιοχών του σύμπαντος.



Εικόνα νεαρών γαλαξιών στο απομακρυσμένο σύμπαν, από το διαστημόπλοιο Hubble.





Το **μικροσκόπιο ατομικής δύναμης** χρησιμοποιείται για την καταγραφή του σχήματος μίας επιφάνειας, και μπορεί να παρέχει εικόνες μορίων.

Για την πραγματοποίηση και την εκτίμηση μιας μέτρησης είναι απαραίτητο να καθορίσουμε το **αντικείμενο** της μέτρησης (το μέγεθος που θα μετρήσουμε), το χαρακτηριστικό **πρότυπο** (τη μονάδα μέτρησης), τη **μέθοδο** μέτρησης (τον τρόπο και τα βήματα της μέτρησης). Επίσης, πρέπει να εκτιμήσουμε την **αβεβαιότητα** της μέτρησης, δηλαδή πρέπει να εκφράσουμε πόσο καλή είναι η εκτίμηση της τιμής του μεγέθους, που προκύπτει από τη μέτρηση.

Παράδειγμα

Έστω ότι μετρούμε με ένα χρονόμετρο χεριού τη χρονική διάρκεια της κίνησης ενός μικρού αυτοκινήτου πάνω σε ένα κεκλιμένο διάδρομο.

- Το αντικείμενο της μέτρησης είναι η χρονική διάρκεια της κίνησης του αυτοκινήτου.
- Η μονάδα μέτρησης επιλέγεται με βάση την τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Επειδή η κίνηση του αυτοκινήτου αναμένεται να διαρκεί μερικά δευτερόλεπτα, δεν είναι πρακτικό να επιλέξουμε σαν μονάδα μέτρησης το έτος, την ώρα, το ps (= 10^{-12} s) ή το μs (= 10^{-6} s). Μια κατάλληλη μονάδα θα ήταν το δευτερόλεπτο ή κάποιο κοντινό υποπολλαπλάσιό του (π.χ. το δέκατο ή το εκατοστό του δευτερολέπτου).

Για να μετρήσουμε τον χρόνο κίνησης του αυτοκινήτου, χρειάζεται να επιλέξουμε χρονόμετρο με ένδειξη δευτερολέπτου (ή κοντινού υποπολλαπλασίου του).

Η επιλογή της μονάδας μέτρησης καθορίζει και τις προδιαγραφές του οργάνου που θα χρησιμοποιηθεί στη μέτρηση. **Η μικρότερη υποδιαίρεση του οργάνου** εκφράζει την ελάχιστη μονάδα μέτρησης, στην οποία εκφράζονται αξιόπιστα οι μετρήσεις με το όργανο.

Ερωτήσεις

1. Να συζητήσετε ποια μονάδα μέτρησης μήκους θα επιλέγατε για να μετρήσετε: (α) τη διάμετρο ενός κυττάρου, (β) το μήκος μιας μύγας, (γ) το ύψος ενός ανθρώπου, (δ) την απόσταση δύο σημείων σε μια πόλη, (ε) την απόσταση της Λευκωσίας από διάφορες Ευρωπαϊκές πρωτεύουσες, (ζ) το ύψος του Έβερεστ, (η) την απόσταση Γης - Σελήνης. Συμβουλευτείτε, όπου χρειάζεται, τον Πίνακα 1-1.

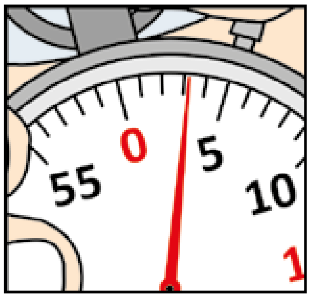
2. Στην αστρονομία χρησιμοποιείται συχνά ως μονάδα μέτρησης αποστάσεων μέσα στο ηλιακό σύστημα η «αστρονομική μονάδα» (astronomical unit AU), η οποία ισούται περίπου με την μέση απόσταση Γης - Ήλιου (150 000 000 km). Για παράδειγμα, η απόσταση Δία - Ήλιου είναι περίπου 5 AU και η απόσταση Ποσειδώνα - Ήλιου είναι περίπου 30 AU. Είναι πρακτική αυτή η μονάδα για μετρήσεις αποστάσεων πάνω στη Γη ή για αποστάσεις μεταξύ Γαλαξιών;

3. Ποια μονάδα μέτρησης **χρόνου** θα επιλέγατε για να μετρήσετε: (α) τη διάρκεια ενός αγώνα δρόμου 100 m (β) το χρονικό διάστημα μίας περιστροφής του πλανήτη Άρη γύρω από τον Ήλιο, (γ) τη διάρκεια μίας μέσης ανθρώπινης ζωής, (δ) τη διάρκεια διαφόρων περιόδων πολιτισμού (Παλαιολιθική εποχή, εποχή του χαλκού, Ελληνιστική περίοδος), (ε) την διάρκεια της ύπαρξης ανθρωπίδων, (στ) την ηλικία της Γης.

4. Ποια μονάδα μέτρησης **μάζας** θα χρησιμοποιούσατε για να μετρήσετε τη μάζα (α) ενός κουνουπιού, (β) ενός μέτριου βράχου, (γ) ενός ελέφαντα, (δ) ενός βουνού.

1.7. Παράγοντες που συνεισφέρουν στην Αβεβαιότητα μίας Μέτρησης

Έστω ότι στο προηγούμενο παράδειγμα μέτρησης της ταχύτητας του αυτοκινήτου, χρησιμοποιούμε ένα χρονόμετρο χειρός με ένδειξη δευτερολέπτου. Εάν η πραγματική τιμή για την επίδοση του αυτοκινήτου είναι 3,4 s, το αυτοκίνητο θα φθάσει στο τελικό σημείο ανάμεσα στις ενδείξεις του χρονομέτρου « 3 s » και « 4 s ». Επειδή η ελάχιστη ένδειξη του χρονομέτρου είναι το δευτερόλεπτο, η χρονική διάρκεια *του τμήματος της κίνησης ανάμεσα στο τέλος του 3ου και στο τέλος του 4ου δευτερολέπτου* δεν μπορεί να μετρηθεί από το συγκεκριμένο χρονόμετρο και χρειάζεται *να εκτιμηθεί*.



Έστω ότι η εκτίμησή μας για την διάρκεια της κίνησης του αυτοκινήτου μεταξύ των 3 s και 4 s είναι 0,2 s. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η συνολική διάρκεια της κίνησης είναι 3,2 s. Η εκτίμηση αυτή έχει αβεβαιότητα, επειδή το τελευταίο ψηφίο της τιμής (2) δεν προέκυψε από τη μέτρηση αλλά εκτιμήθηκε.

Επιπρόσθετα, **το αποτέλεσμα μιας μέτρησης εξαρτάται γενικά από τον τρόπο με τον οποίο έγινε η μέτρηση.** Σε διαδοχικά πειράματα, αφήνουμε το αυτοκίνητο με μηδενική ταχύτητα από κάποιο σημείο εκκίνησης Α, και μετρούμε το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να φθάσει σε κάποιο σημείο Β. Το ακριβές αρχικό ή/και τελικό σημείο της κίνησης ενδέχεται να διαφέρει από πείραμα σε πείραμα. Επιπλέον, σε κάποια πειράματα ενδέχεται να προσδίδεται εσφαλμένα στο αυτοκίνητο μικρή αρχική ταχύτητα. Γενικά, τα αποτελέσματα των μετρήσεων από επαναλαμβανόμενα πειράματα θα διαφέρουν, εξ΄αιτίας διαφοροποιήσεων στον τρόπο εκτέλεσης των πειραμάτων.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

Τα αποτελέσματα των μετρήσεων ενός μεγέθους είναι συνήθως συνδεδεμένα με κάποια αβεβαιότητα, η οποία εξαρτάται από το όργανο της μέτρησης, τη μέθοδο της μέτρησης, και άλλους παράγοντες. Εξαιτίας των παραγόντων αυτών, η πραγματική τιμή ενός μεγέθους δεν μπορεί να μετρηθεί επακριβώς.

1.8. Σημαντικά Ψηφία Αριθμητικών Τιμών

Α. Αριθμοί που θεωρούνται ακριβώς γνωστοί

Πολλοί από τους αριθμούς που χρησιμοποιούνται στη Φυσική, θεωρούνται επακριβώς γνωστοί. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

❶ Οι αριθμοί που χρησιμοποιούνται σε ορισμούς μεγεθών θεωρούνται γνωστοί χωρίς αβεβαιότητα.

Για παράδειγμα, ένα λεπτό της ώρας περιέχει ακριβώς 60 s, ένας αιώνας περιέχει 100 χρόνια, και μια ντουζίνα αυγών περιέχει ακριβώς 12 αυγά. Οι αριθμοί «60», «100» και «12» συνδέονται με τον ορισμό του λεπτού της ώρας, του αιώνα και της ντουζίνας, οπότε θεωρούνται γνωστοί επακριβώς.

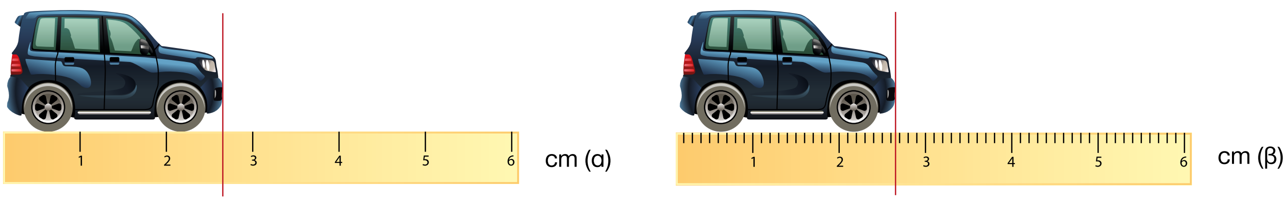
❷ Οι αριθμοί που χρησιμοποιούνται σε παραδείγματα (π.χ. σε αριθμητικές αντικαταστάσεις τύπων) θεωρούνται επίσης γνωστοί χωρίς αβεβαιότητα.

Στην εφαρμογή του τύπου για τον ορισμό της ταχύτητας, μπορεί να αναφέρεται ένα παράδειγμα σώματος, το οποίο «διανύει απόσταση s = 8 m σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 5$ s ». Υπολογίζουμε ότι η ταχύτητα του σώματος ισούται με $\upsilon = s/\Delta t = 1{,}6$ m/s. Οι αριθμοί που εκφράζουν την απόσταση και το χρονικό διάστημα, και το αποτέλεσμα που προκύπτει για την ταχύτητα, δεν προκύπτουν από μετρήσεις και δεν έχουν αβεβαιότητα.

Β. Τιμές από πειραματικές μετρήσεις

Σε αντίθεση με τις πιο πάνω περιπτώσεις, **τιμές που προκύπτουν από μετρήσεις φυσικών μεγεθών έχουν αβεβαιότητα**, όπως εξηγήσαμε προηγουμένως.

Έστω ότι μετρούμε το μήκος ενός πολύ μικρού αυτοκινήτου-μοντέλου με δύο διαφορετικούς χάρακες, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1-2. Ο χάρακας (α) έχει υποδιαιρέσεις σε cm. Η αριστερή άκρη του μοντέλου είναι ευθυγραμμισμένη με την αριστερή άκρη του χάρακα (0 cm), και η δεξιά άκρη του μοντέλου βρίσκεται ανάμεσα στις ενδείξεις 2 cm και 3 cm (Εικόνα 1-2).



Εικόνα 1-2 (όχι σε κλίμακα)
Μέτρηση ενός αυτοκινήτου - παιχνιδιού με δύο χάρακες. Στον χάρακα **(α)** η μικρότερη υποδιαίρεση είναι το 1 cm, και στο χάρακα **(β)** το 1 mm.

Παρατηρώντας τον χάρακα **(α)**, εκτιμούμε ότι η δεξιά άκρη του μοντέλου βρίσκεται στα 6/10 του διαστήματος που μεσολαβεί ανάμεσα στις ενδείξεις 2 cm και 3 cm. Με βάση αυτό, δίνουμε εκτίμηση για την τιμή του μήκους του αυτοκινήτου ως 2,6 cm. Η εκτίμηση αυτή έχει δύο ψηφία, από τα οποία το τελευταίο (6) είναι αβέβαιο. Η τάξη του τελευταίου ψηφίου (mm) εκφράζει την ακρίβεια της μέτρησης.

Στον χάρακα **(β)**, οι μικρότερες υποδιαιρέσεις αντιστοιχούν σε χιλιοστά του μέτρου. Επαναλαμβάνουμε την μέτρηση και βρίσκουμε ότι η δεξιά άκρη του μοντέλου βρίσκεται ανάμεσα στις ενδείξεις 2 cm 6 mm, και 2 cm 7 mm. Από το σχήμα εκτιμούμε ότι η άκρη βρίσκεται στα 7/10 του διαστήματος που ορίζουν οι υποδιαιρέσεις του 6ου και 7ου χιλιοστού. Γράφουμε την εκτίμησή μας σαν 2,67 cm, με τρία ψηφία, από τα οποία το τελευταίο (7) είναι αβέβαιο.

❸ **Οι τιμές που προκύπτουν από μετρήσεις έχουν αβεβαιότητα. Σημαντικά ψηφία μίας πειραματικής τιμής είναι όλα τα ψηφία για τα οποία είμαστε βέβαιοι, και το αμέσως επόμενο, εκτιμώμενο ψηφίο.**

Στο παράδειγμα της Εικόνας 1-2(α), η τιμή 2,6 cm έχει δύο σημαντικά ψηφία. Στο παράδειγμα της Εικόνας 1-2(β), η τιμή 2,67 cm έχει τρία σημαντικά ψηφία.

Σημείωση
Όταν καταγράφουμε την τιμή ενός μετρούμενου μεγέθους πρέπει να την αποδίδουμε με τον ορθό αριθμό σημαντικών ψηφίων.

Παράδειγμα
Κάποιος μαθητής μετρά το μήκος ενός τραπεζιού και δίδει σαν αποτέλεσμα την τιμή 2,413 m. Εάν η τιμή έχει αποδοθεί σωστά, θεωρούμε ότι το προτελευταίο ψηφίο (1) είναι *βέβαιο*, και το τελευταίο ψηφίο (3) είναι *αβέβαιο*.

Επειδη το τελευταίο βέβαιο ψηφίο (1) αντιστοιχεί στο εκατοστό του μέτρου, συμπεραίνουμε ότι η μετρητική ταινία, που χρησιμοποίησε ο μαθητής, είχε υποδιαιρέσεις *εκατοστού του μέτρου*. Συνεπώς, ο μαθητής εκτίμησε το αβέβαιο ψηφίο (3). Το ψηφίο αυτό εκφράζει την ακρίβεια της μέτρησης (χιλιοστό του μέτρου).

Ερώτηση

Η επίδοση ενός μαθητή στους σχολικούς αγώνες 100 m ήταν 14,6 s. Εάν η τιμή έχει αποδοθεί σωστά, τι μπορείτε να συμπεράνετε για την ελάχιστη υποδιαίρεση χρόνου του χρονομέτρου που χρησιμοποιήθηκε; Ποια είναι η ακρίβεια της μέτρησης;

Απάντηση

Το τελευταίο *βέβαιο* ψηφίο (4) αντιστοιχεί σε χρόνο δευτερολέπτου. Συμπεραίνουμε ότι χρησιμοποιήθηκε χρονόμετρο με ελάχιστη υποδιαίρεση δευτερολέπτου. Το αβέβαιο ψηφίο 6 αντιστοιχεί σε δέκατο του δευτερολέπτου, και εκφράζει την ακρίβεια της μέτρησης.

Προσδιορισμός Σημαντικών Ψηφίων Τιμών που προκύπτουν από Μετρήσεις

Για την εύρεση των σημαντικών ψηφίων μιας τιμής από μέτρηση, ακολουθούμε τους εξής κανόνες:

1. Το **πρώτο σημαντικό** ψηφίο είναι το πρώτο μη-μηδενικό ψηφίο από τα *αριστερά*.
2. Αν ο αριθμός είναι **ακέραιος**, το **τελευταίο σημαντικό** ψηφίο του είναι το δεξιότερο μη μηδενικό ψηφίο.
3. Αν ο αριθμός περιέχει **υποδιαστολή**, το **τελευταίο σημαντικό** ψηφίο είναι το τελευταίο ψηφίο στα δεξιά, *ακόμα κι αν είναι μηδενικό*.

Παραδείγματα αυτών των κανόνων συνοψίζονται στον Πίνακα 1-5.

Πίνακας 1-5
Παραδείγματα πειραματικών τιμών. Τα σημαντικά ψηφία κάθε τιμής σημειώνονται με κόκκινο χρώμα.

Αριθμός	Πλήθος σημαντικών ψηφίων	Κανόνας
1417	4 σημαντικά ψηφία	Κανόνες 1 και 2
001417	4 σημαντικά ψηφία	Κανόνες 1 και 2
141700	4 σημαντικά ψηφία	Κανόνες 1 και 2
1,417	4 σημαντικά ψηφία	Κανόνες 1 και 3
0,00001417	4 σημαντικά ψηφία	Κανόνες 1 και 3
1417,00	6 σημαντικά ψηφία	Κανόνες 1 και 3
141700,0	7 σημαντικά ψηφία	Κανόνες 1 και 3

Οι αριθμοί 1417 και 001417 έχουν τέσσερα σημαντικά ψηφία. Ο αριθμός 141700 έχει επίσης τέσσερα σημαντικά ψηφία, επειδή τα *μηδενικά ψηφία στο τέλος ακεραίων δεν είναι σημαντικά* [1]. Ο ίδιος αριθμός θα μπορούσε να εκφρασθεί σαν 14170×10^1 ή 1417000×10^{-1}. Ο αριθμός 0,00001417 έχει τέσσερα σημαντικά ψηφία, επειδή τα μηδενικά

[1] Εάν επιθυμούμε να δηλώσουμε ότι τα τελευταία μηδενικά ψηφία ενός ακεραίου είναι σημαντικά, προσθέτουμε στο τέλος μία υποδιαστολή: δηλαδή, γράφουμε τον ακέραιο «141700» με τη μορφή «141700,» για να δηλώσουμε ότι έχει 6 σημαντικά ψηφία.

ψηφία μετά την υποδιαστολή και *πριν από το πρώτο μη-μηδενικό ψηφίο* δεν έχουν σημαντικότητα και απλά δηλώνουν την θέση της υποδιαστολής. Ο ίδιος αριθμός θα μπορούσε να εκφρασθεί σαν 0,1417 x 10^{-4} ή 0,001417 x 10^{-2}, χωρίς να αλλάζει η ακρίβειά του. Αντίθετα, ο αριθμός 1417,00 έχει έξι σημαντικά ψηφία. Τα μηδενικά ψηφία στο τέλος του αριθμού είναι σημαντικά, γιατί δηλώνουν ότι το μέγεθος έχει μετρηθεί με ακρίβεια μέχρι το δεύτερο δεκαδικό ψηφίο.

Τιμές από μετρήσεις έχουν πεπερασμένο αριθμό σημαντικών ψηφίων. Για παράδειγμα, η επιτάχυνση της βαρύτητας, $g = 9{,}81\ m/s^2$, αντιπροσωπεύει πειραματικά μετρήσιμη ποσότητα και στην μορφή αυτή έχει τρία σημαντικά ψηφία.

Αριθμητικές σταθερές με άπειρο αριθμό ψηφίων

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, οι αριθμοί που δεν προκύπτουν από κάποια μέτρηση θεωρούνται ακριβείς και έχουν άπειρα σημαντικά ψηφία. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν οι αριθμητικές σταθερές. Όμως, πολλές σταθερές έχουν άπειρα ψηφία, που δεν ακολουθούν κάποιο επαναλαμβανόμενο μοτίβο και δεν είναι όλα γνωστά.

Ένα παράδειγμα είναι ο αριθμός π, που αντιστοιχεί στο πηλίκο του μήκους της περιφέρειας και της διαμέτρου ενός κύκλου. Η αντικατάσταση $\pi = 3{,}14$ σε μια σχέση δηλώνει ότι ο αριθμός π εκφράζεται με τρία σημαντικά ψηφία, οπότε και το αποτέλεσμα που προκύπτει θα έχει μέχρι τρία σημαντικά ψηφία.

Γνωρίζατε ότι...

Ο αριθμός π είναι γνωστός σήμερα σε **δέκα τρισεκατομμύρια ψηφία**. Το δεκάκις - τρισεκατομμυριοστό του ψηφίο είναι το 5.

Πηγή: https://commons.wikimedia.org/wiki/File: Thousand_digits_of_pi.jpg

Ερώτηση

Πολλές τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι ρίζες πολλών αριθμών περιέχουν άπειρα ψηφία, χωρίς επαναλαμβανόμενο μοτίβο.

Να διερευνήσετε με πόσα ψηφία εμφανίζεται το ημίτονο της γωνίας 10^o και ο αριθμός $\sqrt{2}$ στην οθόνη της υπολογιστικής σας. Να γράψετε τις τιμές αυτών των αριθμών με πέντε (5) σημαντικά ψηφία.

Σημείωση
Σε υπολογισμούς με πειραματικές τιμές, *τέτοιες αριθμητικές σταθερές πρέπει να εισάγονται με μεγαλύτερο πλήθος σημαντικών ψηφίων, από τον αριθμό σημαντικών ψηφίων των πειραματικών τιμών.*

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 1.8.1.- 1.8.2., σελ. 43.

1.9. Πράξεις μεταξύ Πειραματικών Τιμών

Το τελευταίο σημαντικό ψηφίο της τιμής ενός μεγέθους, που προκύπτει από κάποια μέτρηση, εκφράζει την **ακρίβεια** με την οποία είναι γνωστό το μέγεθος. Έστω ότι μετρήσεις του ίδιου χρονικού διαστήματος με διαφορετικά χρονόμετρα δίνουν αποτελέσματα 75,4 s και 75,42 s. Η πρώτη τιμή έχει ακρίβεια δεκάτου του δευτερολέπτου, ενώ η δεύτερη τιμή έχει ακρίβεια εκατοστού του δευτερολέπτου. Η πρώτη τιμή έχει μικρότερη ακρίβεια.

Συχνά χρειάζεται να εκτελέσουμε πράξεις μεταξύ τιμών που έχουν προσδιορισθεί με διαφορετική ακρίβεια. Για να εκφράσουμε το τελικό αποτέλεσμα με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων, ακολουθούμε τους εξής κανόνες:

Κανόνας Πρόσθεσης και Αφαίρεσης Πειραματικών Τιμών

Όταν πρόκειται να εκτελέσουμε **προσθέσεις και αφαιρέσεις** μεταξύ πειραματικών τιμών, προσδιορίζουμε **την τιμή με τη μικρότερη ακρίβεια**. Αφού εκτελέσουμε τις πράξεις, εκφράζουμε το αποτέλεσμα με την **ακρίβεια** αυτής της τιμής.

Παραδείγματα πρόσθεσης/αφαίρεσης τιμών που προέρχονται από μετρήσεις δίνονται στον Πίνακα 1-6:

Πίνακας 1-6
Στην πρόσθεση και αφαίρεση τιμών, η ακρίβεια του αποτελέσματος καθορίζεται από την τιμή με τη μικρότερη ακρίβεια. Με μπλε χρώμα σημειώνεται το σημαντικό ψηφίο της τιμής με τη μικρότερη ακρίβεια, που καθορίζει την ακρίβεια του αποτελέσματος.

Πρόσθεση - Αφαίρεση Τιμών από Μετρήσεις			
Πράξη	Μικρότερη ακρίβεια	Αριθμητικό αποτέλεσμα της πράξης	Αποτέλεσμα εκφρασμένο στην αποδεκτή ακρίβεια
5,1+ 0,0032	10^{-1}	5,1032	5,1
82,54 - 23,3374	10^{-2}	59,2026	59,20
1390 + 12	10^{1}	1402	1400
4,52 - 4,42	10^{-2}	0,10	0,10
9,28 + 1,02	10^{-2}	10,30	10,30

Στο τρίτο παράδειγμα του Πίνακα 1-6, ο ακέραιος αριθμός 1390 είναι εκφρασμένος με ακρίβεια 10^1, διότι το τελευταίο ψηφίο του (0) δεν είναι σημαντικό.

Στα τελευταία δύο παραδείγματα του Πίνακα 1.6, όλες οι τιμές είναι γνωστές με ακρίβεια εκατοστού (10^{-2}), και έχουν τρία σημαντικά ψηφία. Στη σωστή τελική μορφή, τα αποτελέσματα εκφράζονται με την ίδια ακρίβεια, 10^{-2} , αλλά έχουν δύο σημαντικά ψηφία (τέταρτο παράδειγμα), και τέσσερα σημαντικά ψηφία (πέμπτο παράδειγμα).

Συνεπώς:

Στην πρόσθεση και αφαίρεση τιμών είναι δυνατόν το τελικό αποτέλεσμα να έχει διαφορετικό αριθμό σημαντικών ψηφίων από όλες τις θεωρούμενες τιμές.

Σε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις ακολουθούμε διαφορετικό κανόνα:

Κανόνας Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Πειραματικών Τιμών

Σε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις μεταξύ πειραματικών τιμών, προσδιορίζουμε την τιμή **με τον μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων**. Αφού εκτελέσουμε τις πράξεις, εκφράζουμε το αποτέλεσμα με τον **αριθμό σημαντικών ψηφίων** αυτής της τιμής.

Παραδείγματα πολλαπλασιασμού / διαίρεσης τιμών που προέρχονται από μετρήσεις δίνονται στον Πίνακα 1-7:

Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση Τιμών από Μετρήσεις			
Πράξη	Μικρότερος αριθμός σημαντικών ψηφίων	Αριθμητικό αποτέλεσμα της πράξης	Αποτέλεσμα εκφρασμένο με το μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων
1,10 x 1,70	3	1,87	1,87
1,10 x 1,7	2	1,87	1,9
1,98 / 1,1	2	1,8	1,8
1,98 / 1,10	3	1,8	1,80
12 x 1,4	2	16,8	17

Πίνακας 1-7
Πολλαπλασιασμός και διαίρεση τιμών από μετρήσεις. Για κάθε πράξη σημειώνεται με κόκκινο χρώμα η τιμή με τον μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων. Το αποτέλεσμα έχει τον ίδιο αριθμό σημαντικών ψηφίων με αυτή την τιμή.

Στο τέλος του Κεφαλαίου 1 παρουσιάζουμε δύο επιπρόσθετα παραδείγματα, που περιλαμβάνουν πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις μετρούμενων τιμών.

Στα παραδείγματα πράξεων μεταξύ τιμών από μετρήσεις, διαπιστώσαμε ότι συχνά χρειάζεται να τροποποιήσουμε τις τελικές τιμές, έτσι ώστε να περιέχουν το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων. Κατά την τροποποίηση αυτή γενικά απορρίπτουμε κάποια ψηφία και στρογγυλοποιούμε τις τελικές τιμές, ακολουθώντας τους εξής κανόνες:

Κανόνες Στρογγυλοποίησης Αποτελεσμάτων από Πράξεις Πειραματικών Τιμών

α) Καθορίζουμε τον αριθμό σημαντικών ψηφίων, με τον οποίο πρέπει να εκφραστεί το τελικό αποτέλεσμα.

β) Εξετάζουμε το πρώτο ψηφίο *μετά από το τελευταίο, δεξιότερο σημαντικό ψηφίο* που θα διατηρήσουμε:

- Αν αυτό το πρώτο ψηφίο είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5, εκτελούμε «στρογγυλοποίηση προς τα πάνω»: απορρίπτουμε όλα τα ψηφία στα δεξιά του τελευταίου σημαντικού ψηφίου, και αυξάνουμε το αποτέλεσμα στην αμέσως επόμενη δύναμη του 10.
- Αν το πρώτο ψηφίο μετά από το τελευταίο δεξιό σημαντικό ψηφίο είναι μικρότερο του 5, εκτελούμε «στρογγυλοποίηση προς τα κάτω»: απορρίπτουμε όλα τα ψηφία στα δεξιά του τελευταίου σημαντικού ψηφίου.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να αποδώσουμε τον αριθμό 30,4747 με **τέσσερα** σημαντικά ψηφία. Επειδή το πρώτο μη σημαντικό ψηφίο (4) είναι μικρότερο του 5, ο αριθμός στρογγυλοποιείται στην τιμή 30,47. Αντίστοιχα, ο αριθμός 30,4761 στρογγυλοποιείται στην τιμή 30,48, επειδή το πρώτο μη σημαντικό ψηφίο (6) είναι μεγαλύτερο του 5. Ο αριθμός 27,499 στρογγυλοποιείται με **δύο** σημαντικά ψηφία στην τιμή 27, και ο αριθμός 27,539 στην τιμή 28.

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι **δεν στρογγυλοποιούμε κατά την διάρκεια των υπολογισμών**, αλλά πάντοτε αφού έχουμε καταλήξει στην απάντηση. Όταν χρησιμοποιείτε την υπολογιστική σας, θα πρέπει πάντοτε να συνδέετε τα ενδιάμεσα αποτελέσματά σας με τους επόμενους υπολογισμούς χωρίς να στρογγυλοποιείτε το ενδιάμεσο αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 1

Μια μέτρηση έχει εκτιμήσει ότι η διάμετρος D ενός κύκλου έχει μήκος 4,2 m. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου.

Λύση

Το εμβαδόν του κύκλου δίνεται από την σχέση $E = \frac{\pi}{4} D^2$. Στην εφαρμογή της σχέσης, λαμβάνουμε υπ΄ όψη τα εξής:

- Η διάμετρος D είναι γνωστή από τη μέτρηση με δύο σημαντικά ψηφία.

- Η αριθμητική σταθερά 4 έχει άπειρη ακρίβεια και δεν επηρεάζει τα σημαντικά ψηφία του αποτελέσματος.
- Η αριθμητική σταθερά π δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει άπειρη ακρίβεια, διότι έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν είναι όλα γνωστά. Η σταθερά π πρέπει να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό με περισσότερα από τα δύο σημαντικά ψηφία της τιμής της διαμέτρου *D*.

Εισάγοντας κατευθείαν την τιμή του π από την υπολογιστική, παίρνουμε το αποτέλεσμα

$$E = \frac{\pi}{4}(4{,}2)^2\ \mathrm{m}^2 = 13{,}854424\ \mathrm{m}^2$$

Επειδή η διάμετρος *D* χρησιμοποιήθηκε με δύο σημαντικά ψηφία και η πράξη έχει πολλαπλασιασμούς/διαιρέσεις, η τελική εκτίμηση για το εμβαδόν πρέπει να εκφραστεί με δύο σημαντικά ψηφία. Στρογγυλοποιώντας, δηλώνουμε ότι $E = 14\ \mathrm{m}^2$.

Παράδειγμα 2

Ο Usain Bolt διάνυσε στο παγκόσμιο πρωτάθλημα στίβου στο Βερολίνο τα 100,0 m σε χρόνο 9,58 s . Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα του αθλητή.

Λύση

Η μέση αριθμητική ταχύτητα του αθλητή ισούται με το πηλίκο της απόστασης που διένυσε ο αθλητής προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια της κίνησής του.

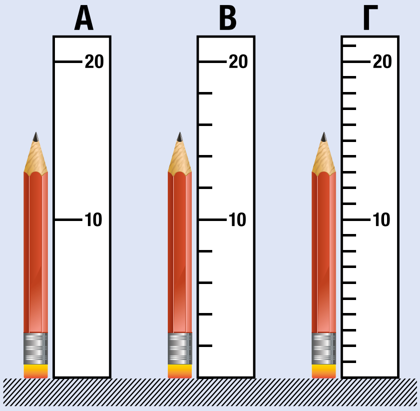
$$\text{Μέση ταχύτητα} = \frac{\text{Διανυόμενη Απόσταση}}{\text{Χρονικό Διάστημα}} = \frac{100{,}0}{9{,}58}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 10{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Πηγή
https://en.wikipedia.org/wiki/Usain_Bolt#/media/File:Usain_Bolt_wining-cropped.jpg (Wikipedia).

Η υπολογιστική δίνει ως αποτέλεσμα της διαίρεσης 100,0/9,58 τον αριθμό 10,438413361169. Για να εκφράσουμε τη μέση ταχύτητα του αθλητή με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων, παρατηρούμε ότι η απόσταση (100,0 m) είναι γνωστή με τέσσερα σημαντικά ψηφία και το χρονικό διάστημα (9,58 s) με τρία σημαντικά ψηφία. Στον υπολογισμό της ταχύτητας τα δύο αυτά μεγέθη διαιρούνται μεταξύ τους. Συνεπώς, το αποτέλεσμα πρέπει να εκφραστεί με τρία σημαντικά ψηφία, όσα και το χρονικό διάστημα. Η τελική εκτίμηση μετά τη στρογγυλοποίηση είναι 10,4 m/s.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 1.9.1. - 1.9.3., σελ. 43.

ΕΝΘΕΤΟ - Διάκριση μεταξύ Ακρίβειας και Πιστότητας Μετρήσεων



Εικόνα 1-3
Μέτρηση του μήκους του μολυβιού με τρεις διαφορετικά βαθμονομημένους χάρακες. Στην Α περίπτωση, ο χάρακας έχει υποδιαιρέσεις κάθε 10 cm και το μήκος ενός μολυβιού μπορεί να εκτιμηθεί με ακρίβεια εκατοστού. Στην Β περίπτωση, ο χάρακας έχει υποδιαιρέσεις κάθε 2 cm και το μήκος του μολυβιού μπορεί να εκτιμηθεί με ακρίβεια εκατοστού. Στην Γ περίπτωση, ο χάρακας έχει υποδιαιρέσεις κάθε 1 cm και το μήκος του μολυβιού μπορεί να εκτιμηθεί με ακρίβεια χιλιοστού.

Δύο πολύ σημαντικές έννοιες είναι η **ακρίβεια** και η **πιστότητα** των μετρήσεων. Οι έννοιες αυτές χαρακτηρίζουν την ποιότητα των μετρήσεων. Όταν οι τιμές που προκύπτουν από επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ίδιου μεγέθους είναι παρόμοιες μεταξύ τους, οι μετρήσεις είναι **ακριβείς**. Όταν οι τιμές που προκύπτουν από τις μετρήσεις είναι κοντά στην πραγματική τιμή, οι μετρήσεις είναι **πιστές**. Διερευνούμε τη σημασία αυτών των εννοιών με το ακόλουθο παράδειγμα.

Θέλουμε να μετρήσουμε το μήκος ενός μολυβιού και έχουμε στην διάθεσή μας 3 διαφορετικούς χάρακες όπως φαίνονται στην Εικόνα 1-3.

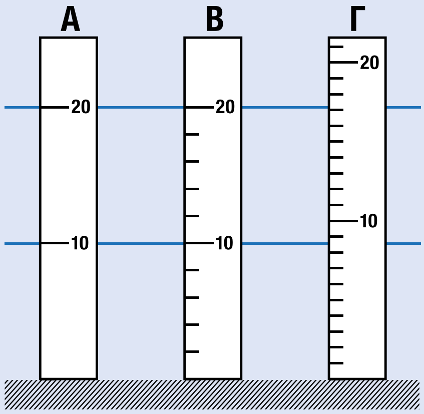
Ο χάρακας Α έχει υποδιαιρέσεις κάθε 10 cm, ο χάρακας Β έχει υποδιαιρέσεις κάθε 2 cm, ενώ ο χάρακας Γ έχει υποδιαιρέσεις κάθε 1cm. Χρησιμοποιώντας τον χάρακα Α, παρατηρούμε ότι το μήκος του μολυβιού είναι περίπου στο μισό της απόστασης μεταξύ των δύο κύριων υποδιαιρέσεων του χάρακα, συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι το μήκος του μολυβιού είναι περίπου 15 cm.

Χρησιμοποιώντας τον χάρακα Β, παρατηρούμε ότι το μήκος του μολυβιού είναι μεταξύ της $2^{ης}$ και $3^{ης}$ υποδιαίρεσης μετά τα 10 cm και εκτιμούμε ότι το μήκος του μολυβιού είναι περίπου 15 cm. Χρησιμοποιώντας τον χάρακα Γ, διαπιστώνουμε ότι το μήκος του μολυβιού είναι μεταξύ της $5^{ης}$ και $6^{ης}$ υποδιαίρεσης μετά τα 10 cm. Δεδομένου ότι η απόσταση μεταξύ διαδοχικών υποδιαιρέσεων είναι 1 cm εκτιμούμε ότι το μολύβι εκτείνεται 0,3 cm μετά τα 15 cm και το συνολικό εκτιμώμενο μήκος του είναι 15,3 cm.

Επαναλαμβανόμενες μετρήσεις από διαφορετικούς μαθητές με το χάρακα Α είναι πιθανόν να δώσουν αρκετά διαφορετικά αποτελέσματα, επειδή η εκτίμηση του τμήματος του μολυβιού ανάμεσα στις υποδιαιρέσεις μπορεί να διαφέρει αρκετά μεταξύ μαθητών. Το εύρος των αποτελεσμάτων θα είναι μεγαλύτερο για το χάρακα Α, μικρότερο για το χάρακα Β και ακόμα μικρότερο για το χάρακα Γ, ο οποίος έχει τις μικρότερες υποδιαιρέσεις. *Η ακρίβεια των μετρήσεων μεγαλώνει από τον χάρακα Α προς το χάρακα Γ.*

Όμως, μεγαλύτερη ακρίβεια στις μετρήσεις δεν συνδέεται πάντα και με μεγαλύτερη πιστότητα. Θεωρείστε τους 3 χάρακες της Εικόνας 1-4.

Οι χάρακες Α και Β είναι λιγότερο ακριβείς από τον Γ διότι έχουν μεγαλύτερες υποδιαιρέσεις. Το πρότυπο μήκος του Γ είναι διαφορετικό, ενώ αυτά των Α και Β ταιριάζουν μεταξύ τους. Αν οι υποδιαιρέσεις του χάρακα Γ είναι λανθασμένες, οι τιμές που θα προκύπτουν από τη χρήση του θα είναι πιο ακριβείς, αλλά θα δίνουν λανθασμένη εκτίμηση (θα έχουν μικρότερη πιστότητα από τις εκτιμήσεις των Α και Β). Στην πραγματικότητα, η ακρίβεια του Γ υποβαθμίζεται εξ αιτίας της μειωμένης πιστότητάς του. Ο χάρακας Γ δεν θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για μετρήσεις.



Εικόνα 1-4
Σύγκριση της πιστότητας μεταξύ τριών χαράκων διαφορετικής ακρίβειας. Ο χάρακας Γ έχει μεγαλύτερη ακρίβεια από τους χάρακες Α και Β, αλλά λανθασμένες υποδιαιρέσεις. Οι μετρήσεις του Γ έχουν μικρότερη πιστότητα από αυτές των Α και Β.

Ασκήσεις
Φυσικά Μεγέθη και Μονάδες

1 Ποιες από τις επόμενες προτάσεις έχουν σωστό (Σ) ή λανθασμένο (Λ) περιεχόμενο στη Φυσική;

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Ένα λίτρο ισούται με 1000 γραμμάρια.	
2	Μονάδα μέτρησης του μήκους στο σύστημα SI είναι το 1 m.	
3	Το τυπικό βάρος ενός μέσου άνδρα είναι 70 kg.	
4	Το έτος φωτός είναι μονάδα χρόνου.	
5	Ο αθλητής ολοκλήρωσε τον αγώνα δρόμου σε 25.	
6	Το πράσινο μολύβι είναι μεγαλύτερο από το κόκκινο γιατί έχει μήκος 17, ενώ το κόκκινο έχει μήκος 13.	

2 **Α.** Ένας χτίστης πρέπει να επισκευάσει το χαλασμένο πάτωμα της εικόνας που ακολουθεί. Για να υπολογίσει την ποσότητα τσιμέντου που θα χρειαστεί, πρέπει να γνωρίζει την επιφάνεια του πατώματος. Έχει στη διάθεσή του μία χάρτινη κόλλα μεγάλων διαστάσεων, και ένα χάρακα μήκους 1 m. Πώς θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει το χαρτί για να υπολογίσει το εμβαδόν του πατώματος;

Β. Έχετε στη διάθεσή σας έναν κυλινδρικό σωλήνα με διαβαθμίσεις όγκου. Πώς θα τον χρησιμοποιήσετε για να συγκρίνετε τον όγκο δύο πετρών ακανόνιστου σχήματος;

3 Να συμπληρώσετε την τιμή των μεγεθών στον πίνακα που ακολουθεί, αντικαθιστώντας τη δύναμη με κάποιο πρόθεμα από τον Πίνακα 1-4. Σας δίνεται ένα παράδειγμα.

Μέγεθος	Τιμή (προσεγγιστικά)	
Διάμετρος ατόμου υδρογόνου	10^{-10} m	0,1 nm
Διάσταση βακτηρίου Ecoli	10^{-6} m	
Μήκος μύγας	10^{-3} m	
Ύψος Έβερεστ	10^{4} m	
Ακτίνα της Γης	$6{,}4 \times 10^{6}$ m	
Μάζα βακτηρίου Ecoli	10^{-15} kg	
Μάζα κουνουπιού	10^{-5} kg	
Μάζα μπλε Φάλαινας	10^{5} kg	
Χρόνος ζωής του μιονίου	10^{-6} s	

4 Να διακρίνετε τα πιο κάτω μεγέθη σε μονόμετρα (Μ) και διανυσματικά (Δ):

Α/Α	Μέγεθος	Μ/Δ
1	Η απόσταση Γης - Σελήνης.	
2	Η μάζα της μπλε φάλαινας.	
3	Το χρονικό διάστημα ενός αιώνα.	

4	Η θέση του πολικού αστέρα στον ουρανό.	
5	Ο όγκος ενός παγόβουνου.	
6	Η μετατόπιση του ήλιου στον ουρανό από την Ανατολή ως τη Δύση.	
7	Η απόσταση Λάρνακας - Νέας Υόρκης.	
8	Η ταχύτητα ενός αεροπλάνου που πετά με κατεύθυνση Βορρά - Νότου.	
9	Η αντίσταση του αέρα σε ένα ανοικτό αλεξίπτωτο.	
10	Το ύψος της κορυφής Mont Blanc των Άλπεων.	
11	Το μέσο πλάτος της Διώρυγας του Σουέζ.	
12	Η τριβή από μία ανώμαλη επιφάνεια σε ένα σπίρτο.	
13	Το μέγιστο βάθος του Ειρηνικού Ωκεανού	
14	Η επιφάνεια της Κασπίας θάλασσας.	
15	Η πυκνότητα του ξύλου.	

Μετατροπές Μονάδων

5 **Α.** Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 1-1 και τη σχέση $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ για τον όγκο μιας σφαίρας ακτίνας R, να υπολογίσετε τον όγκο της Γης (θεωρώντας ότι έχει σχήμα τέλειας σφαίρας).

Β. Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 1-3, να υπολογίσετε την πυκνότητα της Γης. Να την συγκρίνετε με την πυκνότητα του νερού (1 000 kg/m^3).

6 **Α.** Με τη βοήθεια του Πίνακα 1-2, να υπολογίσετε την ηλικία του σύμπαντος σε χρόνια.

Β. Να υπολογίσετε την πυκνότητα του νερού σε g/cm^3.

7 Σε ένα διαφορετικό σύστημα μονάδων, η μονάδα δύναμης ονομάζεται δύνη (dyn) και ισούται με 1g cm/s^2. Να μετατρέψετε την dyn σε N.

8 Στην αστρονομία χρησιμοποιείται σαν μονάδα μέτρησης μήκους το **έτος φωτός**, που ορίζεται ως *η απόσταση που διανύει το φώς στο κενό σε ένα έτος*. Αν η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι περίπου 300 000 km/s, να υπολογίσετε το έτος φωτός σε m.

9 Ο πλανήτης Δίας χρειάζεται 9 ώρες, 55 λεπτά και 30 δευτερόλεπτα για να ολοκληρώσει μία περιστροφή γύρω από τον άξονά του.

Α. Να υπολογίσετε τη διάρκεια της **ημέρας του Δία** σε δευτερόλεπτα.

Β. Ο Δίας χρειάζεται 11,8618 γήινα χρόνια για να ολοκληρώσει μία περιφορά γύρω από τον ήλιο.

Δεδομένου ότι το γήινο έτος διαρκεί 365,2564 μέρες, να υπολογίσετε τη διάρκεια του έτους του Δία σε ημέρες του Δία, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος Α.

(Απάντηση: 10476,8 ημέρες)

Επιλογή Οργάνων και Μονάδων Μέτρησης

10 Η δεύτερη στήλη του επόμενου πίνακα περιέχει διάφορα όργανα μέτρησης μήκους (αναφέρεται η μικρότερη υποδιαίρεση κάθε οργάνου), και διάφορες μονάδες μέτρησης μήκους. Η τέταρτη στήλη του πίνακα περιέχει χαρακτηριστικά μήκη. Για κάποια μήκη μπορείτε να συμβουλευθείτε τον Πίνακα 1-1 του βιβλίου.

Να ταιριάξετε το όργανο/μονάδα μέτρησης που θεωρείτε πιο κατάλληλο για να μετρήσει/περιγράψει το μήκος κάθε μεγέθους. Σας δίδεται ένα παράδειγμα.

Αντιστοιχία οργάνων / μονάδων μέτρησης μήκους και μεγεθών με διάφορα μήκη			
Α/Α	Όργανο/ Μονάδα Μέτρησης	Α/Α	Μέγεθος
1	Μετρητική ταινία με ένδειξη σε m		Πυρήνας ενός κυττάρου
2	1 Έτος φωτός		Διάμετρος ενός κρατήρα στην επιφάνεια της Σελήνης
3	Μικροσκόπιο με διακριτική ικανότητα σε μm		Απόσταση Γης - Κρόνου
4	Ηλεκτρονικό Μικροσκόπιο με διακριτική ικανότητα σε nm		Το μήκος μίας αμοιβάδας
5	1 Αστρονομική μονάδα (απόσταση Γης -Ήλιου)		Το συνολικό μήκος των ακτών της Κύπρου
6	Χάρακας με ένδειξη σε mm		Απόσταση του Γαλαξία μας από τον Γαλαξία της Ανδρομέδας
7	Μετρητής αποστάσεων με ένδειξη σε km		Το πάχος ενός καρφιού
8	Χάρακας με ένδειξη σε cm	1	Μήκος χωραφιού
9	Τηλεσκόπιο		Μήκος ενός μολυβιού

11 Η δεύτερη στήλη του επόμενου πίνακα περιέχει όργανα μέτρησης χρόνου (αναφέρεται η μικρότερη υποδιαίρεση κάθε οργάνου), και διάφορες μονάδες μέτρησης χρόνου. Η τέταρτη στήλη περιέχει μεγέθη που αντιστοιχούν σε διάφορες χρονικές διάρκειες. Να ταιριάξετε το όργανο/μονάδα μέτρησης που θεωρείτε πιο κατάλληλο για να περιγράψει τη χρονική διάρκεια κάθε μεγέθους. Σας δίδεται ένα παράδειγμα.

Αντιστοιχία οργάνων / μονάδων μέτρησης χρόνου και μεγεθών με διάφορες χρονικές διάρκειες			
Α/Α	Όργανο/ Μονάδα Μέτρησης	Α/Α	Μέγεθος
1	Χρονόμετρο με ένδειξη λεπτών	1	Διάρκεια ταξιδιού με αυτοκίνητο από τη Λευκωσία στον Αγρό
2	Ημέρα		Ηλικία Σύμπαντος
3	Αιώνας		Διάρκεια αγώνα 200 m
4	Χρονόμετρο με ένδειξη δευτερολέπτου		Διάρκεια Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας
5	Χρονόμετρο με ένδειξη εκατοστού δευτερολέπτου		Διάρκεια αγώνα βάδην 50 km
6	Εκατομμύριο χρόνια		Στέγνωμα ρούχων στο ύπαιθρο
7	Ώρα		Μέση διάρκεια ζωής κουνουπιού
8	Δισεκατομμύρια χρόνια		Χρονική διάρκεια από την εμφάνιση ανθρωπίδων (*hominids*) μέχρι την εμφάνιση του *homo sapiens*.

12 Η δεύτερη στήλη του επόμενου πίνακα περιέχει όργανα μέτρησης μάζας (αναφέρεται η μικρότερη υποδιαίρεση κάθε οργάνου), και διάφορες μονάδες μέτρησης μάζας. Η τέταρτη στήλη περιέχει μεγέθη που αντιστοιχούν σε διάφορες μάζες. Να ταιριάξετε το όργανο/μονάδα μέτρησης που θεωρείτε πιο κατάλληλο για να περιγράψει τη μάζα κάθε μεγέθους. Σας δίδεται ένα παράδειγμα.

Αντιστοιχία οργάνων / μονάδων μέτρησης μάζας και μεγεθών με διαφορετικές μάζες			
Α/Α	Όργανο/ Μονάδα Μέτρησης	Α/Α	Μέγεθος
1	Μηχανική ζυγαριά με ένδειξη 0,1 kg		Μάζα Μπλε Φάλαινας
2	Ζυγιστικός σταθμός με ένδειξη 0,1 tn	1	Μάζα μίας μέτριας σακκούλας με φρούτα
3	Ζυγαριά με ένδειξη σε g		Μάζα μεγάλης βαλίτσας
4	Ηλεκτρονική ζυγαριά με ένδειξη σε mg		Τυπικό βάρος γράμματος
5	Νανογραμμάριο (ng)		Μάζα του Τροόδους
6	Ζυγαριά με ένδειξη kg		Μάζα ανθρώπινου κυττάρου
7	Τόνος (t)		Μάζα φορτηγού
8	Γιγατόνος (Gt)		Μάζα κουνουπιού

Σημαντικά Ψηφία Αριθμητικών Σταθερών

13 Ένα μίλι ισούται με 1602 m, ένας κύκλος περιέχει 360 μοίρες, ένας αιώνας ισούται με 100 χρόνια, και ένα χιλιόμετρο ισούται με 1000 μέτρα. Πόσα σημαντικά ψηφία έχουν αυτοί οι αριθμοί;

14 Η μαθηματική σταθερά $e = 2{,}718281828459045235360287 47\ldots$ περιέχει άπειρα ψηφία. Να γράψετε τη σταθερά αυτή με οκτώ σημαντικά ψηφία.

15 Να καταγράψετε τις τιμές που δίνει η υπολογιστική σας για τους αριθμούς που ακολουθούν στην πρώτη στήλη του πίνακα. Στην τελευταία στήλη του πίνακα να τους γράψετε με έξι (6) σημαντικά ψηφία.

Αριθμός	Αποτέλεσμα Υπολογιστικής	Γραφή με 6 σημαντικά ψηφία
$\sqrt{2}$		
$\sqrt{3}$		
$συν70^{\circ}$		
$ημ50^{\circ}$		

Σημαντικά Ψηφία Πειραματικών Τιμών

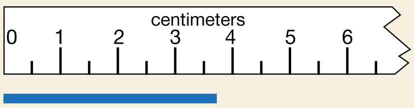
16 Πόσα σημαντικά ψηφία έχουν οι ακόλουθες πειραματικές τιμές;

(α) 380 **(β)** 0,3800 **(γ)** 0,00380 **(δ)** 0,00038

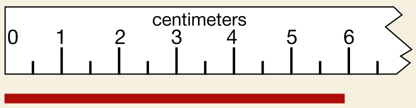
17 Οι ακόλουθοι αριθμοί αντιπροσωπεύουν τις τιμές που προκύπτουν από τις μετρήσεις διαφόρων μεγεθών: (α) 0,08135, (β) 00,00394, (γ) 060, (δ) 4,3940, (ε) «300,» και (στ) 10,34520. Να προσδιορίσετε τα σημαντικά ψηφία κάθε τιμής.

18 Να εκτιμήσετε και να καταγράψετε τα μήκη των γραμμών που θα μετρούσατε στα σχήματα (α) και (β), και την ένδειξη του δείκτη των δευτερολέπτων στα σχήματα (γ) και (δ).

(α)

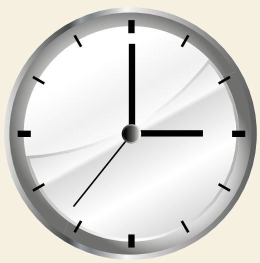


(β)



(γ)

(δ)



19 Ο χάρακας του σχήματος που ακολουθεί χρησιμοποιείται για τη μέτρηση του μήκους διαφόρων μικρών αντικειμένων.

Λαμβάνοντας υπ΄ όψη τις υποδιαιρέσεις του χάρακα, να προσδιορίσετε ποιά από τις επόμενες τριάδες μετρήσεων είναι εκφρασμένη με τη σωστή ακρίβεια.

Α. 1,8 cm, 2,0 cm, 4,1 cm **Β.** 2 cm, 5 cm, 7 cm

Γ. 3,600 cm, 4,555 cm, 6,725 cm **Δ.** 6,50 cm, 6,55 cm, 8,35 cm

20 Μια σειρά από ζυγούς διαφορετικής ακρίβειας χρησιμοποιείται για να μετρηθούν οι μάζες τεσσάρων θραυσμάτων από ένα ορυχείο χρυσού. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων είναι 0,52865 g, 39,42 g, 15,1 g, και 0,02896 g. Ακολουθώντας τον κανόνα που εφαρμόζεται στην πρόσθεση πειραματικών τιμών, να εκφράσετε τη συνολική μάζα των θραυσμάτων με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων.

21 Μετρήσεις του μήκους διαφόρων αποστάσεων, με κατάλληλα όργανα, έχουν σαν αποτέλεσμα τις ακόλουθες τιμές: Α = 38,275 cm, Β = 0,134 cm, Γ = 38,322 cm και Δ = 1/ 3 cm. Τα μεγέθη Α, Β, Γ, Δ υπεισέρχονται σε διάφορους φυσικούς τύπους με τους ακόλουθους συνδυασμούς:

(α) Α x Β **(β)** Α – Β **(γ)** (Γ – Α)/Γ **(δ)** Δ x Γ – Δ x Α **(ε)** 23 x Δ

Να υπολογίσετε τους συνδυασμούς (α) - (ε), και να τους εκφράσετε με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων.

22 Σε ένα ποτήρι νερού όγκου 200,0 cm^3 ρίχνετε ένα κουταλάκι καφέ μάζας 20,0 g. Ποια είναι η συγκέντρωση (μάζα/όγκος) του καφέ στο ποτήρι; Να την εκφράσετε με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων.

23 Μετρήσεις με διάφορους χάρακες έχουν εκτιμήσει τα μήκη των τριών πλευρών ενός κουτιού με σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ως 8,32 cm, 6,425 cm και 12,431 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο του κουτιού, και να τον εκφράσετε με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων.

24 Ένας μαθητής μετρά τις διαστάσεις ενός κυλίνδρου. Βρίσκει ότι το ύψος του είναι h = 3,42 m, και η ακτίνα της βάσης του είναι R = 2,05 m. Η σχέση υπολογισμού του όγκου του κυλίνδρου είναι $V = \pi R^2 h$. Να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου με τον σωστό πλήθος σημαντικών ψηφίων. Με πόσα σημαντικά ψηφία εισάγατε στη σχέση τη σταθερά π;

25 Ο Πλούτωνας διαγράφει μια πολύ ασυμμετρική ελλειπτική τροχιά γύρω από τον Ήλιο. Στο μακρινότερο σημείο (αφήλιο) απέχει κατά $d_{μεγ}$ = 7375927931 km από τον Ήλιο, και στο κοντινότερο (περιήλιο) απέχει κατά $d_{ελ}$ = 4436824613 km.

Α. Να υπολογίσετε τη μέση απόσταση του Πλούτωνα από τον Ήλιο, $d_{μ} = (d_{μεγ} + d_{ελ}) / 2$.

Β. Θεωρώντας ότι η μέση απόσταση Γης - Ήλιου (αστρονομική μονάδα) είναι κατά προσέγγιση ίση με 150 000 000 km, να εκφράσετε τη μέση απόσταση Πλούτωνα - Ήλιου, $d_{μ}$, σε αστρονομικές μονάδες, με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων.

Ερωτήσεις Ελέγχου Κατανόησης Εννοιών

1.2.1. Να εξηγήσετε τη φυσική σημασία των πιο κάτω προτάσεων:

(α) Το τραπέζι έχει μήκος 2,5 m.

(β) Το αυτοκίνητο έχει μάζα 675 kg.

(γ) Η χρονική διάρκεια του ηχητικού σήματος ήταν 15 s.

1.5.1. Ένα μονόμετρο μέγεθος έχει πάντοτε θετική τιμή;

1.5.2. Τι πληροφορία περιέχει η πρόταση "Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 10 m/s"; Επαρκεί αυτή η πρόταση για να καθορισθεί πλήρως η ταχύτητα του αυτοκινήτου;

1.8.1. Σε ποιες από τις επόμενες προτάσεις, ο αριθμός 1000 είναι γνωστός χωρίς αβεβαιότητα;

Α. Η χιλιετηρίδα αποτελείται από 1000 χρόνια.

Β. Το αυτοκίνητο χρειάζεται 1000 λεπτά για να καλύψει την απόσταση από την πόλη Α στην πόλη Β.

Γ. Το φως χρειάζεται περίπου 1000 δευτερόλεπτα για να ταξιδέψει από τον Ήλιο στη Γη και πίσω.

Δ. Ένα δευτερόλεπτο χωρίζεται σε 1000 χιλιοστά του δευτερολέπτου.

1.8.2. Ποιοι από τους επόμενους αριθμούς έχουν 4 σημαντικά ψηφία;

(α) 0,0028 **(β)** 0,2800 **(γ)** 02,80 **(δ)** 0028,00

1.9.1. Για να εκφράσουμε το άθροισμα ή τη διαφορά μετρούμενων τιμών με τον σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων, πιο από τα πιο κάτω λαμβάνουμε υπ΄ όψη μας:

(α) τον αριθμό σημαντικών ψηφίων των τιμών που προσθέτουμε ή αφαιρούμε.

(β) την ακρίβεια των τιμών που προσθέτουμε ή αφαιρούμε.

1.9.2. Η θερμοκρασία ενός θερμομέτρου σε επαφή με έναν άνθρωπο αυξάνεται από 36,60 °C σε 36,62 °C.

(α) Με πόσα σημαντικά ψηφία πρέπει να εκφράσουμε την αύξηση θερμοκρασίας του θερμομέτρου;

(β) Με ποια ακρίβεια πρέπει να εκφράσουμε την αύξηση θερμοκρασίας του θερμομέτρου;

1.9.3. Χρησιμοποιώντας μία ζυγαριά και έναν ογκομετρικό σωλήνα, προσδιορίζουμε ότι μία πέτρα έχει μάζα $m = 25{,}1$ g και όγκο $V = 6{,}5$ cm^3.

(α) Ποιά είναι τα αβέβαια ψηφία των τιμών για τη μάζα και τον όγκο της πέτρας; Ποιά η μικρότερη υποδιαίρεση της ζυγαριάς και του ογκομετρικού σωλήνα;

(β) Με πόσα σημαντικά ψηφία πρέπει να εκφράσουμε την πυκνότητα ρ (= m/V) της πέτρας;

(γ) Με ποια ακρίβεια πρέπει να εκφράσουμε την πυκνότητα ρ;

• **Οι απαντήσεις των ερωτήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου, σελ. 300.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ

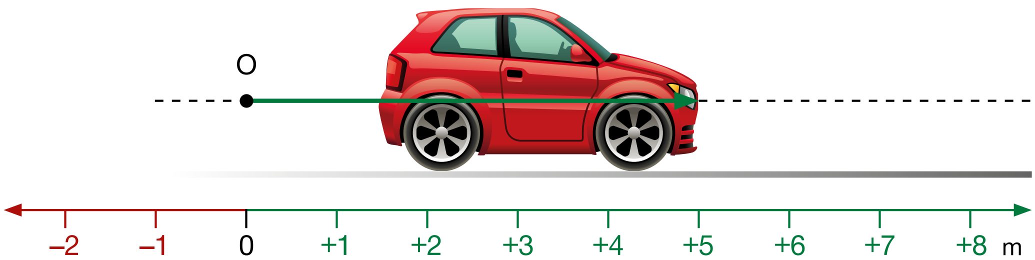
Στο Κεφάλαιο 2:

- **Εντοπίζουμε** ένα σώμα σε μια ευθεία, χρησιμοποιώντας τα φυσικά μεγέθη της **θέσης** και της **μετατόπισης**
- **Περιγράφουμε** τον ρυθμό μεταβολής της θέσης (με τον χρόνο), χρησιμοποιώντας την έννοια της **ταχύτητας**
- **Περιγράφουμε** τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας, χρησιμοποιώντας την έννοια της **επιτάχυνσης**
- **Κατασκευάζουμε** γραφικές παραστάσεις θέσης - χρόνου και ταχύτητας - χρόνου
- **Υπολογίζουμε** τη μέση διανυσματική ταχύτητα και τη στιγμιαία ταχύτητα από τη γραφική παράσταση θέσης - χρόνου
- **Προσδιορίζουμε** τη μετατόπιση, χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου
- **Υπολογίζουμε** τη μέση διανυσματική επιτάχυνση και τη στιγμιαία επιτάχυνση από τη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου
- **Εξάγουμε** και εφαρμόζουμε τις εξισώσεις της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης
- **Εξάγουμε** και εφαρμόζουμε τις εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης
- **Μελετούμε** προβλήματα ελεύθερης πτώσης (κίνησης ενός σώματος υπό την επίδραση του βάρους του)

Για να περιγράψουμε την κίνηση ενός σώματος, χρειάζεται να καθορίσουμε τη **θέση** του στο χώρο, και τη μεταβολή της θέσης του σε κάποιο **χρονικό διάστημα**. Για την περιγραφή της μεταβολής της θέσης χρησιμοποιούμε τις έννοιες της **μετατόπισης** και της **διανυόμενης απόστασης**. Στην Ενότητα 2.1. ορίζουμε αυτές τις έννοιες.

Θέση

Στην Εικόνα 2-1 απεικονίζεται ένα αυτοκίνητο, το οποίο μπορεί να μετακινείται σε έναν ευθύγραμμο, οριζόντιο δρόμο.



Εικόνα 2-1
Ένα αυτοκίνητο κινείται σε ευθύγραμμο, οριζόντιο δρόμο. Το πράσινο βέλος αναπαριστά γραφικά το διάνυσμα θέσης του μπροστινού φαναριού ως προς το σημείο αναφοράς O.

Καθώς το αυτοκίνητο μετακινείται, το μπροστινό δεξί φανάρι διαγράφει μια οριζόντια ευθεία, που παριστάνεται από τη διακεκομμένη γραμμή. Επιλέγουμε αυθαίρετα ένα **σταθερό** σημείο της ευθείας κίνησης ως **σημείο αναφοράς O**, και αντιστοιχούμε σε αυτό τον αριθμό μηδέν. Το σημείο αναφοράς χωρίζει την ευθεία σε δύο ημιευθείες, τις οποίες ονομάζουμε «θετική» και «αρνητική». Σε κάθε θέση της θετικής ημιευθείας αντιστοιχούμε έναν θετικό αριθμό, και σε κάθε θέση της αρνητικής ημιευθείας έναν αρνητικό αριθμό. Η απόλυτη τιμή του αριθμού μαζί με τη μονάδα μέτρησης είναι το **μέτρο** της θέσης, και δηλώνει την απόσταση της θέσης από το σημείο αναφοράς. Ορίζουμε ως **θετική κατεύθυνση** αυτή προς την οποία αυξάνονται οι τιμές των αριθμών, και ως **αρνητική** την αντίθετη κατεύθυνση. Το πρόσημο του αριθμού, που αντιστοιχεί σε μία θέση, δηλώνει προς ποιά κατεύθυνση βρίσκεται η θέση αυτή σε σχέση με το σημείο αναφοράς. Το πρόσημο μαζί με το μέτρο είναι η **αλγεβρική τιμή** της θέσης.

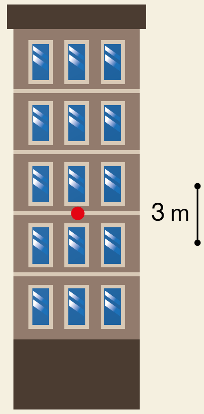
Στην Εικόνα 2-1, η θέση του φαναριού έχει αλγεβρική τιμή +5 m. Αυτό σημαίνει ότι το φανάρι απέχει 5 m από το σημείο αναφοράς, *προς τη θετική κατεύθυνση*.

Η θέση ενός αντικειμένου (ως προς το σημείο αναφοράς) μπορεί επίσης να παρασταθεί γραφικά με ένα βέλος που έχει αρχή το σημείο αναφοράς και τέλος (αιχμή) το αντικείμενο. Στην Εικόνα 2-1 απεικονίζεται το βέλος που παριστάνει τη θέση του φαναριού. Το *μήκος* του βέλους ισούται με την απόσταση του φαναριού από το σημείο αναφοράς (στην κλίμακα αποστάσεων του σχήματος). Η αιχμή του βέλους είναι προσανατολισμένη προς τη θετική κατεύθυνση, σε συμφωνία με τη θετική αλγεβρική τιμή της θέσης του φαναριού. Παρομοίως, αν η αλγεβρική τιμή μιας θέσης είναι αρνητική, η αιχμή του αντίστοιχου βέλους είναι προσανατολισμένη προς την αρνητική κατεύθυνση.

Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1, μεγέθη που ορίζονται πλήρως αν είναι γνωστά το μέτρο και η κατεύθυνσή τους, ονομάζονται διανυσματικά. **Η θέση είναι διανυσματικό μέγεθος**.

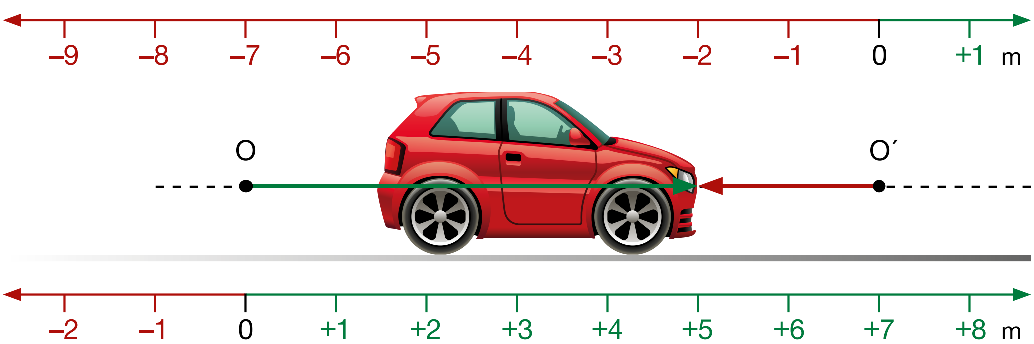
Το **διάνυσμα της θέσης** ενός σώματος παριστάνεται γραφικά με ένα βέλος, που έχει αρχή το σημείο αναφοράς και τέλος το σημείο στο οποίο βρίσκεται το σώμα.

Άσκηση
Το διπλανό σχήμα απεικονίζει έναν ουρανοξύστη. Χρησιμοποιώντας σαν σημείο αναφοράς την κόκκινη βούλα, να προσδιορίσετε τις θέσεις των διαφόρων ορόφων στον κατακόρυφο άξονα (κατακόρυφη ευθεία). Να επιλέξετε αυθαίρετα την θετική και αρνητική κατεύθυνση. Στο σχήμα σημειώνεται ένα μήκος ίσο με 3 m.



Η αλγεβρική τιμή της θέσης ενός σώματος εξαρτάται από την επιλογή του σημείου αναφοράς. Ο επάνω άξονας της Εικόνας 2-2 περιέχει τις αλγεβρικές τιμές θέσεων που έχουν υπολογιστεί ως προς το σταθερό σημείο αναφοράς Ο΄. Η θέση του μπροστινού φαναριού του αυτοκινήτου έχει τιμή –2 m ως προς το Ο΄ και απεικονίζεται γραφικά με το κόκκινο βέλος.

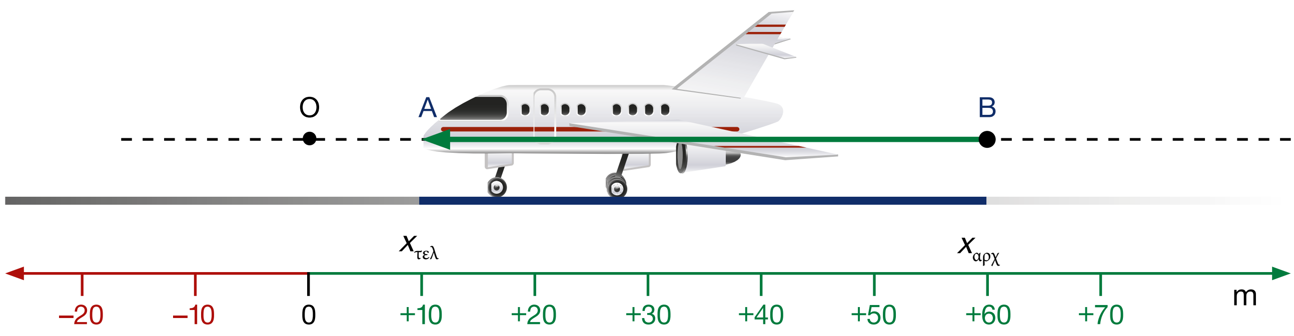
Εικόνα 2-2
Το πράσινο βέλος και το κόκκινο βέλος παριστάνουν γραφικά τα διανύσματα θέσης του μπροστινού φαναριού ως προς τα σημεία αναφοράς Ο και Ο΄, αντίστοιχα. Συμπέρασμα: Το διάνυσμα θέσης εξαρτάται από το σημείο αναφοράς.



Μετατόπιση

Η γραμμή που συνδέει τις θέσεις από τις οποίες διέρχεται το αντικείμενο κατά τη διάρκεια της κίνησής του ονομάζεται **τροχιά**. Δύο μεγέθη που χρησιμοποιούνται στην περιγραφή της κίνησης ενός αντικειμένου είναι η **μετατόπιση** και **η διανυόμενη απόσταση**. Θα μελετήσουμε αυτά τα δύο μεγέθη για κίνηση σε μία ευθεία. Στο τέλος της ενότητας θα συζητήσουμε τη γενίκευσή τους για καμπυλόγραμμες κινήσεις.

Η Εικόνα 2-3 απεικονίζει ένα αεροπλάνο που τροχιοδρομεί σε έναν ευθύγραμμο διάδρομο απογείωσης. Η μύτη του αεροπλάνου διαγράφει τη διακεκομμένη ευθεία. Η θέση της μύτης υπολογίζεται ως προς το σημείο αναφοράς Ο. Οι διάφορες τιμές της θέσης αναγράφονται στο κάτω μέρος της Εικόνας. Η μύτη βρίσκεται αρχικά στο σημείο Β με θέση $x_{αρχ}$ = + 60 m και μετακινείται στο σημείο Α με θέση $x_{τελ}$ = + 10 m. Η τροχιά της μύτης είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΒΑ.



Εικόνα 2-3
Ένα αεροπλάνο τροχιοδρομεί πάνω σε ευθύγραμμο διάδρομο απογείωσης. Η μύτη του αεροπλάνου κινείται πάνω στη διακεκομμένη γραμμή από το σημείο Β στο σημείο Α. Η μετατόπιση της μύτης ισούται με τη διαφορά της αρχικής από την τελική θέση και αναπαρίσταται γραφικά με το πράσινο βέλος.

Ως **μετατόπιση** ενός αντικειμένου ορίζεται η αλλαγή στη θέση του. **Η μετατόπιση είναι διανυσματικό μέγεθος** όπως η θέση. Για ευθύγραμμη κίνηση, η διεύθυνση της μετατόπισης συμπίπτει με την ευθεία κίνησης και η φορά της είναι από την αρχική στην τελική θέση. Η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης Δx, υπολογίζεται *αφαιρώντας την αρχική από την τελική θέση:*

$$\Delta x = x_{τελ} - x_{αρχ}\text{, κίνηση σε ευθεία γραμμή}$$

Η απόλυτη τιμή της διαφοράς είναι το μέτρο της μετατόπισης, και ισούται με την απόσταση ανάμεσα στην τελική και στην αρχική θέση. Το πρόσημο της διαφοράς δηλώνει την κατεύθυνση της μετατόπισης: η μετατόπιση είναι θετική αν το σώμα μετακινείται προς τη θετική κατεύθυνση και αρνητική αν κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση.

Όταν δηλώνουμε τη μετατόπιση σε μία ευθεία, πρέπει να συμπεριλαμβάνουμε το πρόσημο για να καθορίσουμε την κατεύθυνσή της. Στο παράδειγμα της Εικόνας 2-3, η μετατόπιση της μύτης του αεροπλάνου έχει τιμή:

$$\Delta x = x_{\tau\varepsilon\lambda} - x_{\alpha\rho\chi} = (+10\text{ m}) - (+60\text{ m}) = -50\text{ m}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η τελική θέση της μύτης έχει μικρότερη τιμή από ό,τι η αρχική θέση, γι' αυτό η μετατόπιση της μύτης είναι προς την αρνητική κατεύθυνση.

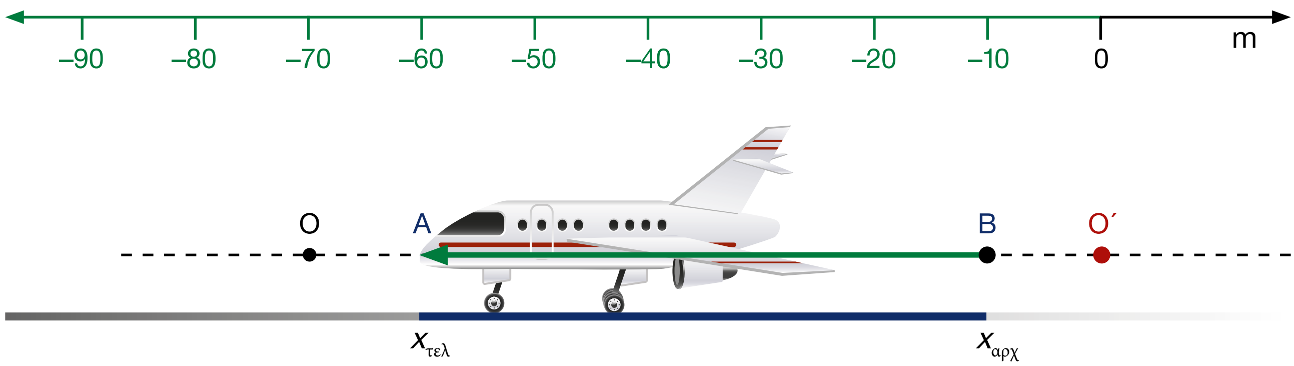
Η μετατόπιση παριστάνεται γραφικά με ένα βέλος που ενώνει την αρχική και τελική θέση και έχει φορά από την αρχική προς την τελική θέση. Το μήκος του βέλους ισούται με το μέτρο της μετατόπισης (στην κλίμακα του σχήματος). Στην Εικόνα 2-3, το διάνυσμα της μετατόπισης της μύτης του αεροπλάνου απεικονίζεται με το πράσινο βέλος.

Η μετατόπιση ενός σώματος είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σταθερού σημείου αναφοράς. Στην Εικόνα 2-4 απεικονίζονται οι τιμές των θέσεων της μύτης του αεροπλάνου ως προς ένα δεύτερο σταθερό σημείο αναφοράς Ο΄ (ακίνητο ως προς το σημείο αναφοράς Ο). Η αρχική και τελική θέση έχουν τιμές –10 m και –60 m αντίστοιχα, ως προς το σημείο Ο΄. Η μετατόπιση ως προς το Ο΄ ισούται με τη διαφορά των τιμών της αρχικής και τελικής θέσης ως προς το Ο΄:

$$\Delta x = x_{\tau\varepsilon\lambda} - x_{\alpha\rho\chi} = (-60\text{ m}) - (-10\text{ m}) = -50\text{ m}$$

Η ίδια τιμή είχε υπολογιστεί ως προς το σημείο αναφοράς Ο (Εικόνα 2-3).

Εικόνα 2-4
Ο άξονας καταγράφει τις θέσεις ως προς το σταθερό σημείο αναφοράς Ο΄. Για μετακίνηση από το Β στο Α, η τιμή της μετατόπισης είναι -50 m. Η ίδια τιμή υπολογίζεται ως προς το σταθερό σημείο αναφοράς Ο (Εικόνα 2-3). Το διάνυσμα της μετατόπισης παριστάνεται με το πράσινο βέλος. Συμπέρασμα: Η μετατόπιση ενός αντικειμένου δεν εξαρτάται από το σταθερό σημείο αναφοράς.



Διανυόμενη Απόσταση

Ένα άλλο χρήσιμο μέγεθος για την περιγραφή της κίνησης είναι η **διανυόμενη απόσταση**, η οποία ορίζεται ως το *συνολικό μήκος της διαδρομής* που διαγράφει το κινούμενο αντικείμενο. **Η διανυόμενη απόσταση είναι μονόμετρο μέγεθος**, όπως και το μήκος, και έχει πάντα θετική τιμή, ανεξάρτητα από τη φορά της κίνησης. Στα παραδείγματα των Εικόνων 2-3 και 2-4, η απόσταση που διανύεται από τη μύτη του αεροπλάνου ισούται με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΑ, $s = 50$ m.

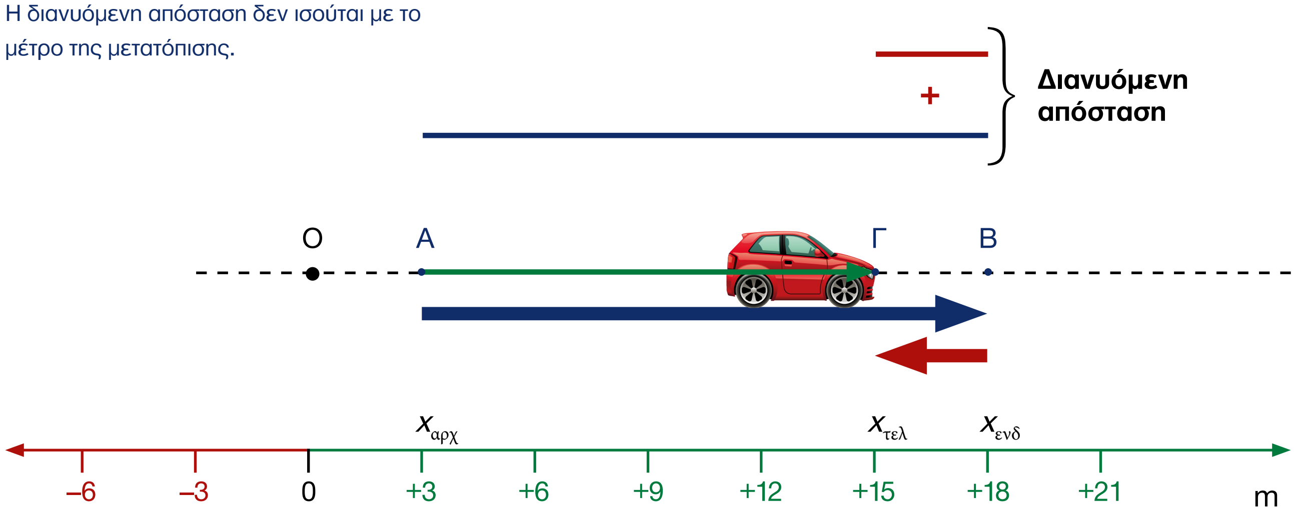
Στη γενική περίπτωση, η διανυόμενη απόσταση δεν ισούται με το μέτρο της μετατόπισης. Το παράδειγμα της Εικόνας 2-5 περιγράφει μια πιο σύνθετη κίνηση: Το αυτοκίνητο ξεκινά από το σημείο Α ($x_{αρχ} = +3$ m) κάνει μια ενδιάμεση στάση στο σημείο Β ($x_{ενδ} = +18$ m) και στη συνέχεια οπισθοδρομεί και σταματά στο σημείο Γ($x_{τελ} = +15$ m). Για να υπολογίσουμε τη συνολική μετατόπιση αφαιρούμε την τιμή της αρχικής θέσης από την τιμή της τελικής θέσης:

$$\Delta x = x_{τελ} - x_{αρχ} = (+15\text{ m}) - (+3\text{ m}) = +12\text{ m}$$

Το διάνυσμα της μετατόπισης παριστάνεται γραφικά από το πράσινο βέλος.

Η συνολική διανυόμενη απόσταση ισούται με το *συνολικό μήκος* της διαδρομής. Για να την υπολογίσουμε πρέπει να αθροίσουμε τα μήκη

Εικόνα 2-5
Η άκρη του αυτοκινήτου μετακινείται από το σημείο Α στο ενδιάμεσο σημείο Β και οπισθοδρομεί στο σημείο Γ. Η μετατόπιση της άκρης (πράσινο βέλος) έχει μέτρο 12 m. Η συνολική διανυόμενη απόσταση είναι το άθροισμα των μηκών ΑΒ + ΒΓ (18 m). Η διανυόμενη απόσταση δεν ισούται με το μέτρο της μετατόπισης.



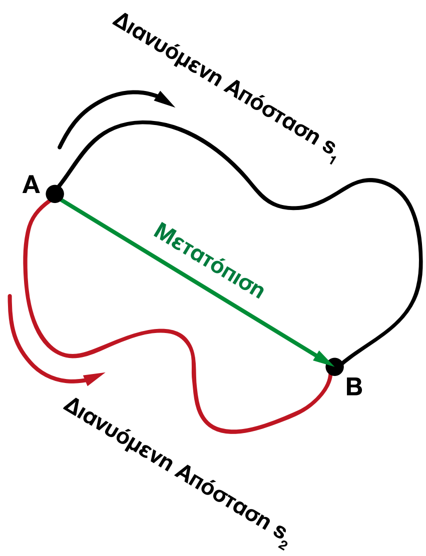
των διαδρομών ΑΒ και ΒΓ, αγνοώντας ότι οι διαδρομές διαγράφονται με αντίθετη φορά:

$$s = (15\ m) + (3\ m) = 18\ m$$

Συνεπώς, στο παράδειγμα της Εικόνας 2-5 η διανυόμενη απόσταση είναι μεγαλύτερη από το μέτρο της μετατόπισης.

Μετατόπιση και Διανυόμενη Απόσταση σε Καμπυλόγραμμη Κίνηση

Μπορούμε να κατανοήσουμε τη διαφορά ανάμεσα στη μετατόπιση και τη διανυόμενη απόσταση με τη βοήθεια ενός γενικότερου παραδείγματος καμπυλόγραμμης κίνησης.



Εικόνα 2-6
Διανυόμενη απόσταση και μετατόπιση σε καμπυλόγραμμη κίνηση.

Στην Εικόνα 2-6, η μύτη ενός μολυβιού έχει μετακινηθεί πάνω σε μια επίπεδη κόλλα χαρτιού από το σημείο Α στο σημείο Β ακολουθώντας δύο διαφορετικές διαδρομές, που υποδεικνύονται αντίστοιχα από τη μαύρη και την κόκκινη γραμμή. Φαντασθείτε ότι τοποθετούμε μια κλωστή επάνω στη μαύρη γραμμή, έτσι ώστε η κλωστή να αναπαράγει ακριβώς το σχήμα της γραμμής. Αν τεντώσουμε την κλωστή και μετρήσουμε το μήκος της, θα έχουμε προσδιορίσει τη **διανυόμενη απόσταση** κατά μήκος της μαύρης γραμμής. Το μήκος αυτό είναι πάντα θετικό και δεν εξαρτάται από τη φορά της κίνησης. Αν η μύτη κινηθεί πάνω στη μαύρη γραμμή από το Β στο Α, θα έχει διανύσει την ίδια απόσταση.

Το πράσινο ευθύγραμμο βέλος, που ξεκινά από την αρχική θέση Α και καταλήγει στην τελική θέση Β, αναπαριστά τη **μετατόπιση** της μύτης του μολυβιού. Το μέτρο της μετατόπισης ισούται με το μήκος του βέλους. Αν η μύτη του μολυβιού καταλήξει στο ίδιο σημείο από όπου ξεκίνησε, η μετατόπιση θα έχει μηδενικό μέτρο. Η κατεύθυνση του βέλους εκφράζει τον προσανατολισμό του τελικού σημείου ως προς το αρχικό. Αν η μετακίνηση γίνει με την αντίθετη φορά (από το Β στο Α), το βέλος της μετατόπισης αντιστρέφεται.

Παρόλο που η κόκκινη και μαύρη γραμμή έχουν διαφορετικά μήκη, αντιστοιχούν στην ίδια μετατόπιση. *Η μετατόπιση καθορίζεται από την αρχική και τελική θέση*, και όχι από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα για να μεταβεί από την αρχική στην τελική θέση.

Γενικά, το μέτρο της μετατόπισης δεν ισούται με τη *διανυόμενη* απόσταση. Τα μήκη της μαύρης και της κόκκινης γραμμής, είναι μεγαλύτερα από το μήκος του βέλους της μετατόπισης.

Χρονική Στιγμή και Χρονικό Διάστημα

Χρησιμοποιούμε την έννοια της **χρονικής στιγμής** για να προσδιορίσουμε πότε έλαβε χώρα ένα στιγμιαίο γεγονός. Το **χρονικό διάστημα** Δt μεταξύ δύο χρονικών στιγμών ισούται με τη διαφορά της αρχικής στιγμής t_1 από την τελική στιγμή t_2:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Για παράδειγμα, έστω ότι σε έναν αγώνα της κλασσικής διαδρομής Μαραθωνίου δρόμου, το όπλο του κριτή εκπυρσοκροτεί όταν η ένδειξη του ρολογιού είναι 9:00:00 π.μ., και ένας αθλητής αγγίζει τη γραμμή τερματισμού όταν η ένδειξη γίνει 12:40:08 μ.μ. Το χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο αυτών στιγμών είναι ίσο με 3 ώρες, 40 λεπτά και 8 δευτερόλεπτα, και αντιστοιχεί στην επίδοση του αθλητή.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 2.1.1. - 2.1.2., σελ. 123.

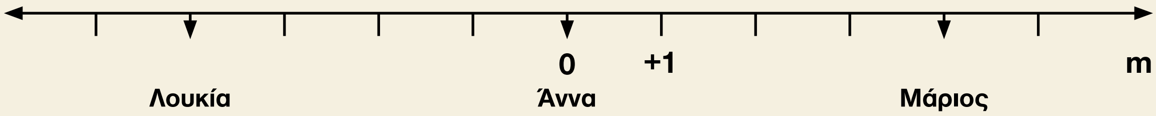
Ερωτήσεις Κατανόησης

Έστω ότι θέλετε να εντοπίσετε ένα σώμα που μπορεί να μετακινείται πάνω σε μια ευθεία. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με την ένδειξη Σωστό / Λάθος.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Το σημείο αναφοράς, ως προς το οποίο γίνεται η μέτρηση των θέσεων, μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα.	
2	Η θέση είναι μονόμετρο μέγεθος.	
3	Όταν ένα σώμα μετακινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, η διανυόμενη απόσταση είναι αρνητική.	
4	Όταν η αρχική και τελική θέση ενός κινούμενου σώματος είναι αρνητικές, η μετατόπιση του σώματος είναι αρνητική.	
5	Όταν η αρχική και τελική θέση ενός κινούμενου σώματος είναι θετικές, η μετατόπιση του σώματος είναι θετική.	
6	Η μετατόπιση δεν εξαρτάται από την επιλογή του σταθερού σημείου αναφοράς.	
7	Η διανυόμενη απόσταση εξαρτάται από την επιλογή του σταθερού σημείου αναφοράς.	
8	Η διανυόμενη απόσταση ισούται πάντα με το μέτρο της μετατόπισης.	

Ασκήσεις

1 Το πιο κάτω σχήμα απεικονίζει τη γραμμή εκκίνησης ενός μαθητικού αγώνα δρόμου. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών υποδιαιρέσεων έχει μήκος 1 m.



Α. Το σημείο αναφοράς τοποθετείται στη θέση της Άννας και οι τιμές των θέσεων αυξάνονται από τη Λουκία προς το Μάριο. Να συμπληρώσετε τις τιμές των θέσεων της Λουκίας και του Μάριου.

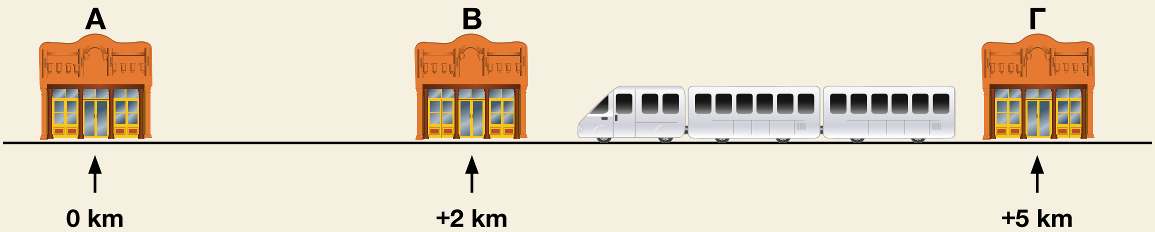
Β. Να προσδιορίσετε τη μετατόπιση του κριτή και την απόσταση που διανύει καθώς μετακινείται από τη θέση του Μάριου στη θέση της Λουκίας.

2 Ένας οδηγός κινείται σε έναν ευθύγραμμο δρόμο, με διεύθυνση Βορρά - Νότου. Ξεκινά την κίνησή του 6 km βόρεια μιας διασταύρωσης και διανύει 30 km προς τον Νότο, όπου και σταματά.

Να θεωρήσετε σαν σημείο αναφοράς το κέντρο της διασταύρωσης. Αφού επιλέξετε τη θετική κατεύθυνση, να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της αρχικής και τελικής θέσης του οδηγού. Να σχεδιάσετε τον δρόμο και να τοποθετήσετε την αρχική και τελική θέση του οδηγού.

3 Να επιχειρηματολογήσετε κατά πόσο ο οδογράφος ενός αυτοκινήτου καταγράφει το μέτρο της μετατόπισης, ή την διανυόμενη απόσταση από το αυτοκίνητο.

4 Ένα τρένο εκτελεί ευθύγραμμη διαδρομή μεταξύ των σταθμών Α, Β και Γ, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Οι θέσεις των σταθμών **ως προς σημείο αναφοράς το κέντρο του σταθμού Α** υποδεικνύονται κάτω από κάθε σταθμό.



Α. Να υπολογίσετε τη **συνολική μετατόπιση** του τρένου και τη **συνολική διανυόμενη απόσταση** για τις εξής διαδρομές:

(1) Α → Β → Γ

(2) Γ → Β → Α

(3) Β → Γ → Β → Α

(4) Β → Α → Β → Γ → Β

Β. Έστω ότι χρησιμοποιείται ως σημείο αναφοράς *το κέντρο του σταθμού Β* και οι τιμές των θέσεων *μεγαλώνουν από αριστερά προς τα δεξιά*, όπως κοιτάμε το σχήμα. Να υπολογίσετε την τιμή των θέσεων των σταθμών Α, Β και Γ ως προς το νέο σημείο αναφοράς. Πώς μεταβάλλονται τα αποτελέσματα του ερωτήματος Α αν χρησιμοποιηθεί ο σταθμός Β ως σημείο αναφοράς;

5 Στην ευθύγραμμη κίνηση, να αποδείξετε ότι η μετατόπιση ενός σώματος δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου αναφοράς, εάν τα σημεία αναφοράς είναι ακίνητα το ένα ως προς το άλλο. **Υπόδειξη:** Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τις αλγεβρικές τιμές της θέσης του σώματος ως προς δύο σημεία αναφοράς Ο και Ο΄, με την αλγεβρική τιμή της θέσης του Ο΄ ως προς το Ο.

2.2. Η Έννοια της Ταχύτητας

Η θέση και η μετατόπιση χρησιμοποιούνται για τον εντοπισμό ενός σώματος. Για την περιγραφή της κίνησης ενός σώματος χρειάζεται να καθορίσουμε πώς μεταβάλλεται η θέση του με τον χρόνο. Ο ρυθμός μεταβολής της θέσης εκφράζεται από το φυσικό μέγεθος της **ταχύτητας**. Στις επόμενες ενότητες θα συζητήσουμε τις έννοιες της μέσης αριθμητικής και μέσης διανυσματικής ταχύτητας.

2.3. Ορισμός της Μέσης Αριθμητικής Ταχύτητας

Το αυτοκίνητο ThrustSS (Thrust Supersonic car) κατέχει το ρεκόρ ταχύτητας με 1,228 km/h, από τις 15 Οκτωβρίου 1997.

Πηγή:https://en.wikipedia.org/wiki/Thrust SSC #/media/File:ThrustSSC_front.jpg

- *Ο Michael Johnson έκανε παγκόσμιο ρεκόρ 43,18 s στο μήκος των 400 m σε ανοιχτό στίβο (Σεβίλλη, 1999).*

- *Ένα αυτοκίνητο κινείται αργά μέσα σε μια κατοικημένη περιοχή και γρήγορα σε έναν αυτοκινητόδρομο.*

Προτάσεις όπως οι παραπάνω χρησιμοποιούνται συχνά στην καθημερινή ζωή για να εκφράσουν κάποιες συγκρίσεις: Ο Michael Johnson έτρεξε τη συγκεκριμένη απόσταση των 400 m σε μικρότερο χρονικό διάστημα από κάθε άλλο άνθρωπο μέχρι σήμερα. Το αυτοκίνητο διανύει στο ίδιο χρονικό διάστημα μεγαλύτερη απόσταση στον αυτοκινητόδρομο από ό,τι στην κατοικημένη περιοχή.

Το φυσικό μέγεθος που εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο διανύεται μια απόσταση, είναι η **μέση αριθμητική ταχύτητα** $\upsilon_{\mu\alpha}$:

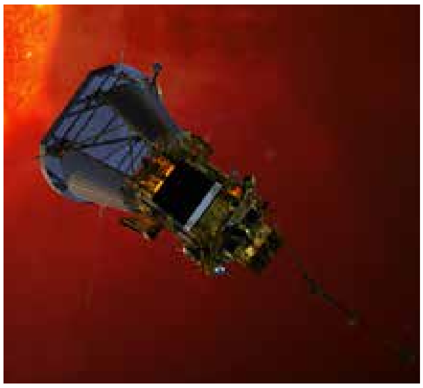
$$\upsilon_{\mu\alpha} = \frac{\text{Διανυόμενη Απόσταση}}{\text{Χρονικό Διάστημα}} = \frac{s}{\Delta t}$$

Η διανυόμενη απόσταση και το χρονικό διάστημα είναι μονόμετρα, θετικά μεγέθη. Συνεπώς:

Η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι μονόμετρο μέγεθος και έχει θετική τιμή.

Από τον πιο πάνω ορισμό προκύπτει ότι η μονάδα μέτρησης της ταχύτητας είναι το m/s.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 2.3.1. - 2.3.2., σελ. 123.



Το διαστημόπλοιο Solar Plus σχεδιάζεται για να ταξιδέψει το 2018. Προγραμματίζεται να πλησιάσει σε απόσταση 8,5 ηλιακών ακτίνων από τον ήλιο, και να κινείται με μέγιστη ταχύτητα 720,000 km/h. Με αυτή την ταχύτητα θα μπορούσε να καλύψει την απόσταση Γης-σελήνης σε μισή ώρα.

Πηγή: http://www.jhuapl.edu/newscenter/pressreleases/2014/140318.asp(NASA/Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory).

2.4. Υπολογισμοί με τη Μέση Αριθμητική Ταχύτητα

Για να υπολογισθεί η μέση αριθμητική ταχύτητα ενός σώματος, πρέπει να είναι γνωστή η απόσταση που διανύει το σώμα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Ομοίως, εάν είναι γνωστή η μέση αριθμητική ταχύτητα και το χρονικό διάστημα, προσδιορίζεται η διανυόμενη απόσταση.

Παράδειγμα

Ένα πλοίο κινείται κατά μήκος μιας στενής ευθύγραμμης διώρυγας, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Να απαντήσετε στις εξής ερωτήσεις:

Α. Το πλοίο εκτελεί τη διαδρομή 1 → 2 → 3 → 2 → 1 σε 25 λεπτά. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα.

Για να υπολογίσουμε τη μέση αριθμητική ταχύτητα, χρειάζεται να προσδιορίσουμε τη συνολική διανυόμενη απόσταση, δηλαδή το συνολικό μήκος της διαδρομής. Το πλοίο κινείται προς τη θετική κατεύθυνση στο τμήμα της διαδρομής 1 → 3 και προς την αρνητική κατεύθυνση στο τμήμα 3 → 1. Και στα δύο τμήματα, η διανυόμενη απόσταση είναι θετική.

Η συνολική διανυόμενη απόσταση υπολογίζεται από το άθροισμα των αποστάσεων στα δύο τμήματα: $s = (1\,750 \text{ m}) + (1\,750 \text{ m}) = 3\,500$ m. Συνεπώς, η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι:

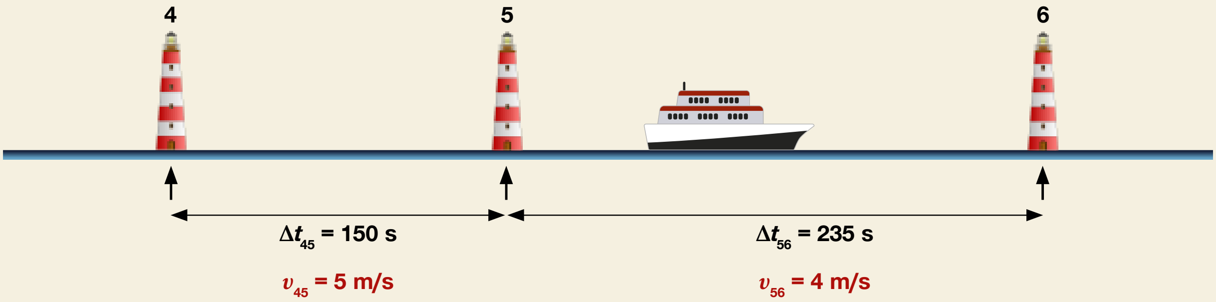
$$\upsilon_{\mu\alpha} = \frac{s}{\Delta t} = \frac{3\,500}{25}\frac{\text{m}}{\text{min}} = \frac{3\,500}{25}\frac{\text{m}}{\text{min}}\frac{1 \text{ km}}{1\,000 \text{ m}}\frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} = 8{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Β. Το πλοίο εκτελεί τη διαδρομή 1 → 2 με μέση αριθμητική ταχύτητα 4 m/s. Ποια είναι η χρονική διάρκεια της διαδρομής;

Από τον ορισμό της μέσης αριθμητικής ταχύτητας μπορούμε να λύσουμε ως προς τη χρονική διάρκεια:

$$\upsilon_{\mu\alpha} = \frac{s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{s}{\upsilon_{\mu\alpha}} = \frac{500}{4}\frac{\text{m}}{\text{m/s}} = 125 \text{ s}$$

Γ. Ο οδηγός του πλοίου εισέρχεται σε μια περιοχή του καναλιού, όπου δεν υπάρχει σήμανση για την απόσταση μεταξύ των φάρων 4, 5 και 6. Για να διανύσει την απόσταση 4 → 5 με μέση αριθμητική ταχύτητα 5 m/s χρειάζεται 150 s, και για να διανύσει την απόσταση 5 → 6 με μέση αριθμητική ταχύτητα 4 m/s χρειάζεται 235 s. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις 4 → 5 και 5 → 6.



Από τον ορισμό της μέσης αριθμητικής ταχύτητας μπορούμε να λύσουμε ως προς τη διανυόμενη απόσταση:

$$\upsilon_{\mu\alpha} = \frac{s}{\Delta t} \Rightarrow s = \upsilon_{\mu\alpha}\,\Delta t$$

Για την απόσταση 4 → 5 :

$$s_{4\rightarrow 5} = \upsilon_{4\rightarrow 5} \times \Delta t_{4\rightarrow 5} = (5 \text{ m/s}) \times (150 \text{ s}) = 750 \text{ m}$$

Για την απόσταση 5 → 6 :

$$s_{5\rightarrow 6} = \upsilon_{5\rightarrow 6} \times \Delta t_{5\rightarrow 6} = (4 \text{ m/s}) \times (235 \text{ s}) = 940 \text{ m}$$

Δ. Ποιά η μέση αριθμητική ταχύτητα του πλοίου **για τη συνολική διαδρομή** 4 → 6 ;

Από τον ορισμό της μέσης αριθμητικής ταχύτητας:

$$\upsilon_{\mu\alpha} = \frac{s_{4\rightarrow 6}}{\Delta t_{4\rightarrow 6}} = \frac{s_{4\rightarrow 5} + s_{5\rightarrow 6}}{\Delta t_{4\rightarrow 5} + \Delta t_{5\rightarrow 6}} = \frac{750 + 940}{150 + 235}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 4{,}39\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2.5. Μέση Διανυσματική Ταχύτητα

Στο Κεφάλαιο 1 μάθαμε ότι η απόσταση που διανύει ένα κινούμενο σώμα δεν εκφράζει, στη γενική περίπτωση, την αλλαγή της θέσης του. Για παράδειγμα, έστω ότι ένα αυτοκίνητο κινήθηκε για διάστημα μιας ώρας με μέση αριθμητική ταχύτητα 60 km/h. Από αυτή την πληροφορία υπολογίζουμε ότι η συνολική απόσταση που διάνυσε το αυτοκίνητο ήταν 60 km αλλά δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα μοναδικό συμπέρασμα για *τη μεταβολή στη θέση του αυτοκινήτου*. Είναι πιθανό το αυτοκίνητο να μετατοπίσθηκε κατά 60 km ή τελικά να επέστρεψε στο ίδιο αρχικό σημείο.

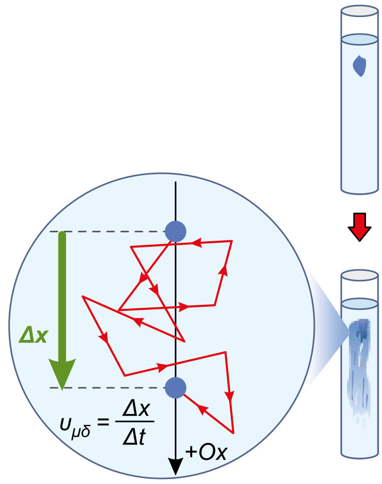
Το φυσικό μέγεθος που συνδέει την αλλαγή της θέσης ενός κινούμενου σώματος με το χρονικό διάστημα της κίνησής του είναι η **μέση διανυσματική ταχύτητα** $\upsilon_{\mu\delta}$:

$$\upsilon_{\mu\delta} = \frac{\text{Μετατόπιση}}{\text{Χρονικό Διάστημα}}$$

Η μέση διανυσματική ταχύτητα ενός σώματος, που κινείται πάνω σε μια ευθεία και μετατοπίζεται κατά Δx στο χρονικό διάστημα Δt, δίδεται από τη σχέση:

$$\upsilon_{\mu\delta} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \text{, μετατόπιση σε ευθεία}$$

Η κατεύθυνση της μέσης διανυσματικής ταχύτητας συμπίπτει με την κατεύθυνση της μετατόπισης.



Μια σταγόνα μελανιού εξαπλώνεται αργά μέσα σε ένα σωλήνα με νερό.

Ένα μόριο μελανιού διαγράφει την **κόκκινη τεθλασμένη γραμμή με μεγάλη μέση αριθμητική ταχύτητα.**

Στο ίδιο χρονικό διάστημα, το μόριο μετατοπίζεται κατά μήκος του σωλήνα **με πολύ μικρότερη μέση διανυσματική ταχύτητα**.

Φυσική Σημασία της Μέσης Διανυσματικής Ταχύτητας

Η μέση διανυσματική ταχύτητα εκφράζει τον μέσο ρυθμό **μεταβολής της θέσης** ενός σώματος σε κάποιο χρονικό διάστημα. Όσο μεγαλύτερο είναι το μέτρο της μέσης διανυσματικής ταχύτητας, τόσο μεγαλύτερο είναι το μέτρο της μετατόπισης του σώματος στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

Για να υπολογισθεί η μέση διανυσματική ταχύτητα ενός σώματος, πρέπει να είναι γνωστή η μετατόπιση του σώματος σε κάποιο χρονικό διάστημα. Ομοίως, εάν είναι γνωστή η μέση διανυσματική ταχύτητα σε κάποιο χρονικό διάστημα, μπορεί να προσδιοριστεί η μετατόπιση.

Παράδειγμα

Το πλοίο στο προηγούμενο παράδειγμα εκτελεί τη διαδρομή 1 → 2 → 3 → 2 → 1. Σε κάθε τμήμα της διαδρομής μεταξύ δύο διαδοχικών φάρων, η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι ίση με 5 m/s. Να υπολογίσετε τη μέση διανυσματική ταχύτητα του πλοίου στις διαδρομές 1 → 3, 1 → 3 → 2, 1 → 3 → 1.

Λύση

Για να υπολογίσουμε τη μέση διανυσματική ταχύτητα σε μία διαδρομή, χρειάζεται να γνωρίζουμε τη χρονική της διάρκεια και τη μετατόπιση του πλοίου. Η χρονική διάρκεια κάθε διαδρομής μπορεί να υπολογιστεί από τη διανυόμενη απόσταση και τη μέση αριθμητική ταχύτητα.

Ας θεωρήσουμε τη διαδρομή 1 → 3. Η συνολική διανυόμενη απόσταση από το πλοίο είναι $s_{1\to 3}$, όση και η απόσταση μεταξύ των φάρων 1 και 3. Η χρονική διάρκεια της διαδρομής 1 → 3 είναι:

$$\Delta t_{1\to 3} = \frac{s_{1\to 3}}{\upsilon_{\mu\alpha}} = \frac{1750}{5}\,\frac{\text{m}}{\text{m/s}} = 350\ \text{s}$$

Για να βρούμε το μήκος της διαδρομής 1 → 3 → 2 πρέπει να προσθέσουμε τα μήκη των επιμέρους διαδρομών 1 → 3 και 3 → 2. Το μήκος της διαδρομής 3 → 2 είναι η απόσταση μεταξύ των φάρων 2 και 3:

$$s_{3\to 2} = (1\,750\ \text{m}) - (500\ \text{m}) = 1\,250\ \text{m}$$

Έτσι, η συνολική διανυόμενη απόσταση είναι το άθροισμα

$$s_{1\to 3} + s_{3\to 2} = (1\,750\ \text{m}) + (1\,250\ \text{m}) = 3\,000\ \text{m}$$

και η διάρκεια της διαδρομής είναι:

$$\Delta t_{1\to 3\to 2} = \frac{3\,000}{5}\,\frac{\text{m}}{\text{m/s}} = 600\ \text{s}$$

Όμοια, η συνολική διανυόμενη απόσταση από το πλοίο για τη διαδρομή 1 → 3 → 1 είναι

$$2 \times 1\,750 \text{ m} = 3\,500 \text{ m}$$

Συνεπώς, η χρονική διάρκεια είναι:

$$\Delta t_{1 \to 3 \to 1} = \frac{1\,750 + 1\,750}{5} \frac{\text{m}}{\text{m/s}} = 700 \text{ s}$$

Για να υπολογίσουμε τη μέση διανυσματική ταχύτητα, χρησιμοποιούμε τη μετατόπιση (τελική θέση – αρχική θέση). Σε αντίθεση με τον υπολογισμό της διανυόμενης απόστασης, *για τον υπολογισμό της μετατόπισης δεν χρειάζεται να χωρίσουμε τη διαδρομή σε επιμέρους τμήματα*. Για κάθε διαδρομή, η συνολική μετατόπιση προσδιορίζεται αν από την τελική θέση αφαιρέσουμε την αρχική:

α) Διαδρομή 1 → 3 : $$\upsilon_{\mu\delta} = \frac{\Delta x_{1 \to 3}}{\Delta t_{1 \to 3}} = \frac{x_3 - x_1}{\Delta t_{1 \to 3}} = \frac{1\,750}{350} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Διαδρομή 1 → 3 → 2 : $$\upsilon_{\mu\delta} = \frac{\Delta x_{1 \to 2}}{\Delta t_{1 \to 3 \to 2}} = \frac{500}{600} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Διαδρομή 1 → 3 → 1 : $$\upsilon_{\mu\delta} = \frac{\Delta x_{1 \to 1}}{\Delta t_{1 \to 3 \to 1}} = \frac{0}{700} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Στις διαδρομές 1 → 3 → 2 και 1 → 3 → 1 *η τιμή της μετατόπισης δεν συμπίπτει με τη διανυόμενη απόσταση*, επειδή η κατεύθυνση της κίνησης αλλάζει κατά το χρονικό διάστημα, στο οποίο υπολογίζουμε τη μέση διανυσματική ταχύτητα. Στη διαδρομή 1 → 3 → 1 η μέση διανυσματική ταχύτητα είναι ίση με μηδέν, επειδή η αρχική και η τελική θέση συμπίπτουν.

Ερώτηση

Να συγκρίνετε τη μέση διανυσματική ταχύτητα του πλοίου για τις διαδρομές 1 → 2 και 1 → 3 → 2.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 2.5.1. - 2.5.3., σελ. 123.

2.6. Στιγμιαία Ταχύτητα

Στο τελευταίο παράδειγμα είδαμε ότι *η μέση διανυσματική ταχύτητα του πλοιαρίου εξαρτάται από το χρονικό διάστημα*. Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα ενός αντικειμένου σε *κάποια χρονική στιγμή t,* πρέπει να προσδιορίσουμε τη μετατόπισή του *σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt γύρω από αυτή τη στιγμή*. Η ταχύτητα που προκύπτει ονομάζεται στιγμιαία ταχύτητα. Για **κίνηση σε ευθεία γραμμή, η**

στιγμιαία ταχύτητα $\upsilon(t)$ δίδεται από τη σχέση

$$\upsilon(t)=\frac{\Delta x}{\Delta t},\ \Delta t \text{ πολύ μικρό γύρω από την χρονική στιγμή } t$$

Η στιγμιαία ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος, όπως και η μέση διανυσματική ταχύτητα, και η κατεύθυνσή της συμπίπτει με την κατεύθυνση της μετατόπισης του αντικειμένου (στο μικρό χρονικό διάστημα Δt).

Παράδειγμα

Δύο αδέλφια, ο Χρίστος και ο Σοφοκλής, πηγαίνουν στο σχολείο ακολουθώντας μια ευθύγραμμη λεωφόρο μήκους 2,5 km. Ο Χρίστος χρησιμοποιεί το σχολικό λεωφορείο, ενώ ο Σοφοκλής πηγαίνει πεζός. Τα αδέλφια φθάνουν στο σχολείο 30 λεπτά μετά από την αναχώρησή τους.

Κατά τη διάρκεια της διαδρομής, η στιγμιαία ταχύτητα του Χρίστου αλλάζει συνεχώς. Στο αρχικό τμήμα της διαδρομής η ένδειξη του ταχυμέτρου ισούται με 30 km/h. Για κάποιο μικρό χρονικό διάστημα το λεωφορείο σταματά στα φώτα τροχαίας. Στο τελευταίο τμήμα της διαδρομής η ένδειξη μειώνεται σε 1 km/h λόγω κυκλοφοριακής συμφόρησης.

Οι στιγμιαίες ταχύτητες των δύο αδελφών είναι διαφορετικές και μεταβάλλονται συνεχώς. Επειδή όμως διανύουν το ίδιο μήκος διαδρομής στο ίδιο χρονικό διάστημα, έχουν την ίδια μέση αριθμητική ταχύτητα:

$$\upsilon_{\mu\alpha}=\frac{s}{\Delta t}=\frac{2{,}5\ \text{km}}{30\ \text{min}}=\frac{2{,}5\ \text{km}}{30\ \text{min}}\times\frac{60\ \text{min}}{1\ \text{h}}=5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Η ένδειξη του ταχυμέτρου ενός αυτοκινήτου καταγράφει το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας. Το όριο ταχύτητας σε έναν αυτοκινητόδρομο καθορίζει τη μέγιστη επιτρεπόμενη στιγμιαία ταχύτητα.

Αναπαράσταση Ταχυτήτων με Βέλη

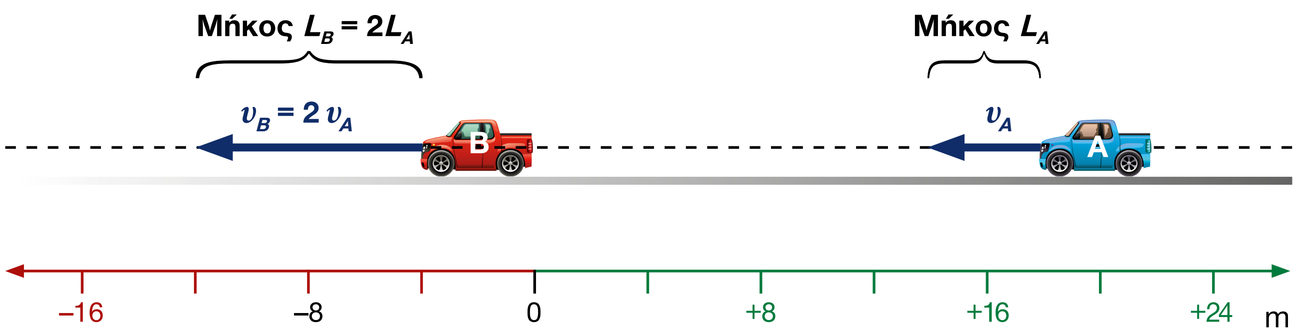
Το μήκος του βέλους ενός διανύσματος θέσης αναπαριστά την απόσταση του σημείου της θέσης από το σημείο αναφοράς, στην κλίμακα του σχήματος. Για παράδειγμα, σε κλίμακα 1: 100 η θέση +1 m σημειώνεται στο σχήμα σε απόσταση 1 cm από το σημείο αναφοράς, προς τη θετική κατεύθυνση, και το βέλος της θέσης σχεδιάζεται με μήκος 1 cm. Όμοια, το μήκος του βέλους ενός διανύσματος μετατόπισης αναπαριστά το μέτρο της μετατόπισης, δηλαδή την απόσταση μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης. Μια μετατόπιση +2 m θα αναπαρίσταται σε σχήμα κλίμακας 1: 100 από ένα βέλος μήκους 2 cm.

Στην αναπαράσταση ενός διανύσματος ταχύτητας αντιστοιχίζουμε ένα συγκεκριμένο μήκος βέλους σε *ένα συγκεκριμένο μέτρο ταχύτητας*. Για παράδειγμα, έστω ότι αποφασίζουμε να αναπαραστήσουμε μια ταχύτητα μέτρου 1 m/s με ένα βέλος μήκους 1 cm. Αυτή η αντιστοιχία καθορίζει και την αναπαράσταση όλων των ταχυτήτων του ίδιου σχήματος: μια ταχύτητα με μέτρο 3 m/s θα απεικονίζεται από βέλος μήκους 3 cm κ.ο.κ.

Η κατεύθυνση του βέλους της ταχύτητας συμπίπτει με την κατεύθυνση της μετατόπισης. Συνεπώς, το βέλος της θετικής ταχύτητας είναι στραμμένο προς την κατεύθυνση που αυξάνονται οι τιμές της θέσης.

Στην Εικόνα 2-7 σχεδιάζονται οι στιγμιαίες ταχύτητες δύο αυτοκινήτων Α και Β, που κινούνται σε ευθεία γραμμή. Η θετική κατεύθυνση είναι προς τα δεξιά και τα αυτοκίνητα κινούνται προς την αρνητική κατεύθυνση. Το αυτοκίνητο Β έχει ταχύτητα διπλάσιου μέτρου από το αυτοκίνητο Α. Τα βέλη των ταχυτήτων υ_A και υ_B είναι στραμμένα προς την αρνητική κατεύθυνση. Ζωγραφίζουμε το βέλος της ταχύτητας υ_A με κάποιο αυθαίρετο μήκος L_A και το βέλος της ταχύτητας υ_B με διπλάσιο μήκος, $L_B = 2\ L_A$.

Εικόνα 2-7
Το βέλος του διανύσματος ταχύτητας έχει μήκος ανάλογο με το μέτρο της ταχύτητας.



Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 2.6.1. - 2.6.3., σελ. 124.

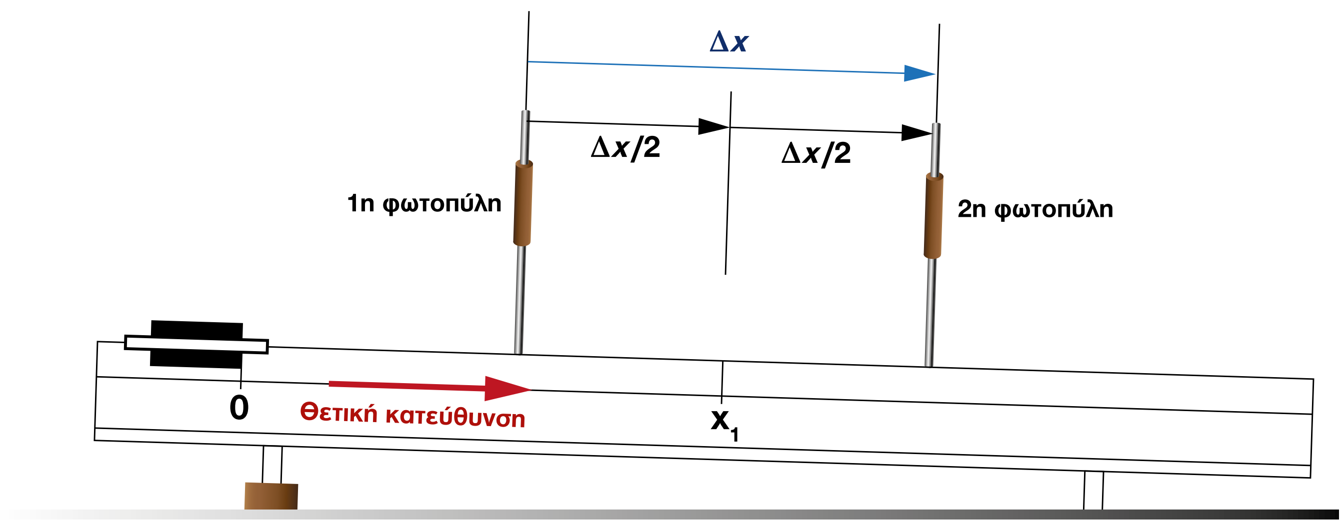
2.7. Πειραματική Μέτρηση της Στιγμιαίας Ταχύτητας

Η στιγμιαία ταχύτητα ενός μικρού αυτοκινήτου μπορεί να μετρηθεί χρησιμοποιώντας μία πειραματική διάταξη, η οποία αποτελείται από ένα κεκλιμένο διάδρομο, φωτοπύλες, διεπαφή (interface), υπολογιστή, το αυτοκίνητο, και διάφορα διαφράγματα.

Κάθε φωτοπύλη παράγει μια φωτεινή δέσμη, που διακόπτεται όταν περάσει ανάμεσά της το αυτοκίνητο. Στη **διάταξη 1** καταγράφεται το χρονικό διάστημα, από τη στιγμή που διακόπτεται η φωτεινή δέσμη της 1^{ης} φωτοπύλης μέχρι τη στιγμή που διακόπτεται η δέσμη της 2^{ης} φωτοπύλης. Επιλέγουμε μία θέση x_1 πάνω στο διάδρομο, και τοποθετούμε τις δύο φωτοπύλες **συμμετρικά ως προς αυτή τη θέση**, έτσι ώστε η μεταξύ τους απόσταση να είναι ίση με Δx. Εάν το χρονικό διάστημα που καταγράφεται από τις φωτοπύλες είναι ίσο με Δt, η μέση διανυσματική ταχύτητα του αμαξιού για την κίνησή του ανάμεσα στις φωτοπύλες υπολογίζεται ως $\upsilon_{μδ} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$. Όταν το χρονικό διάστημα Δt είναι αρκετά μικρό, αυτή η τιμή προσεγγίζει τη στιγμιαία ταχύτητα του αμαξιού καθώς διέρχεται από τη θέση x_1.

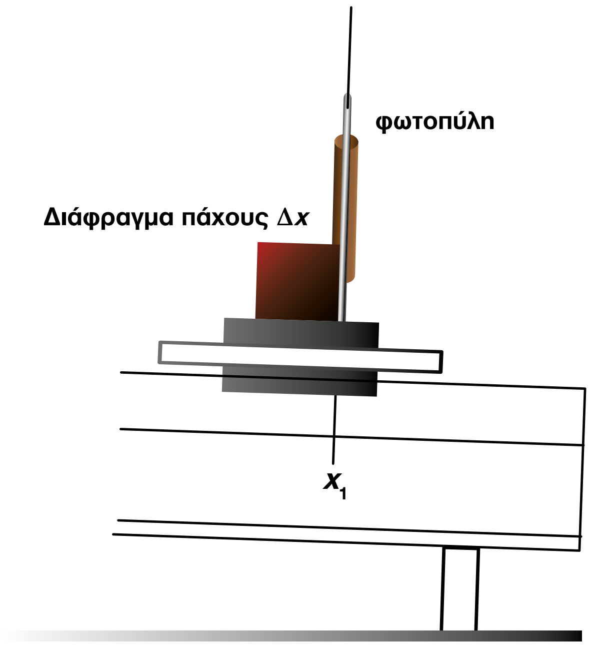
Διάταξη 1

Το σύστημα των φωτοπυλών μετρά το χρονικό διάστημα Δt από τη στιγμή που διακόπτεται η φωτεινή δέσμη της 1ης φωτοπύλης (το αμαξάκι φθάνει στην πρώτη φωτοπύλη), μέχρι τη στιγμή που διακόπτεται η δέσμη της 2ης φωτοπύλης (το αμαξάκι φθάνει στη δεύτερη φωτοπύλη). Στο διάστημα Δt, η μπροστινή πλευρά του αμαξιού μετατοπίζεται κατά Δx.

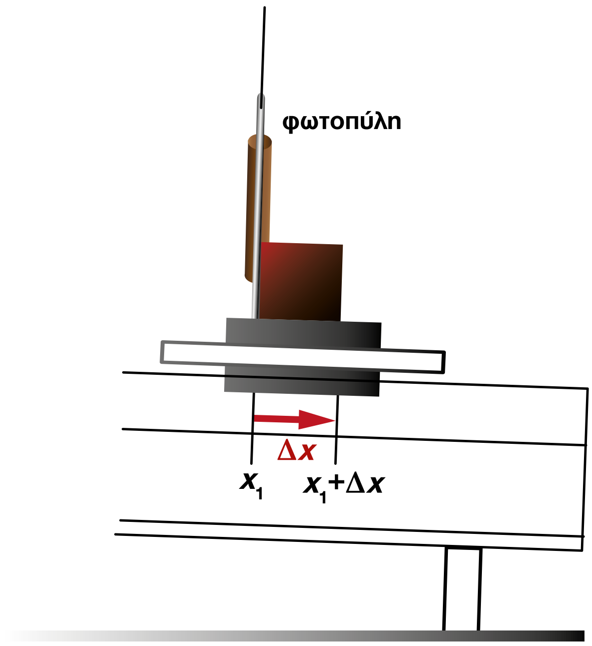


Η στιγμιαία ταχύτητα του αυτοκινήτου μπορεί να μετρηθεί **χρησιμοποιώντας μόνο μία φωτοπύλη**, όπως εξηγείται στη **διάταξη 2**. Πάνω στο αυτοκίνητο είναι στερεωμένο ένα διάφραγμα μικρού πάχους Δx. Καταγράφεται το χρονικό διάστημα Δt ανάμεσα στις χρονικές στιγμές, στις οποίες αρχίζει και ολοκληρώνεται η διέλευση του διαφράγματος διαμέσου της φωτοπύλης. Αν το διάφραγμα έχει πάχος Δx, η εκτίμηση για τη στιγμιαία ταχύτητα του αυτοκινήτου, καθώς διέρχεται από τη φωτοπύλη, ισούται με $\upsilon = \Delta x / \Delta t$.

(α) Χρονική στιγμή *t*



(β) Χρονική στιγμή *t* + Δ*t*



Διάταξη 2
Μία φωτοπύλη μετρά το χρονικό διάστημα από την στιγμή που διακόπτεται η φωτεινή δέσμη (το διάφραγμα πάχους Δx αρχίζει να διέρχεται από τη φωτοπύλη), μέχρις ότου αποκαθίσταται η δέσμη (το διάφραγμα ολοκληρώνει τη διέλευσή του από τη φωτοπύλη).

Ερωτήσεις Κατανόησης

Έστω ότι θέλετε να προσδιορίσετε την ταχύτητα με την οποία κινείται ένα σώμα επάνω σε μια ευθεία. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με την ένδειξη Σωστό / Λάθος.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Η μέση αριθμητική ταχύτητα εξαρτάται από τη φορά της κίνησης.	
2	Η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι πάντα ίση με μηδέν, όταν η αρχική και η τελική θέση συμπίπτουν.	
3	Δύο σώματα, που ξεκινούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο και καταλήγουν ταυτόχρονα στο ίδιο σημείο, έχουν πάντα την ίδια μέση αριθμητική ταχύτητα.	
4	Όταν η θέση ενός σώματος είναι θετική, η μέση διανυσματική ταχύτητά του είναι πάντα θετική.	

5	Όταν ένα σώμα κινείται προς την κατεύθυνση, στην οποία αυξάνονται οι τιμές των θέσεων, η μέση διανυσματική ταχύτητά του είναι πάντα θετική.	
6	Το μέτρο της μέσης διανυσματικής ταχύτητας είναι πάντα ίσο με μηδέν, όταν η αρχική και η τελική θέση συμπίπτουν.	
7	Δύο σώματα, που ξεκινούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο και καταλήγουν ταυτόχρονα στο ίδιο σημείο, έχουν πάντα την ίδια μέση διανυσματική ταχύτητα.	
8	Δύο αυτοκίνητα, που διανύουν μία απόσταση με τον ίδιο ρυθμό, έχουν την ίδια ταχύτητα.	

Ασκήσεις
Μέση Αριθμητική Ταχύτητα

1. Η Πελαγία διανύει με το ποδήλατό της μία απόσταση 4 km σε 20 min. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητά της σε km/h και σε m/s.

2. Η διαστημική ρουκέτα Solar Plus προγραμματίζεται να ταξιδέψει το 2018, και να κινείται με μέγιστη ταχύτητα 720 000 km/h. Να υπολογίσετε σε πόση ώρα θα καλύπτει αυτή η ρουκέτα την απόσταση 9 000 km, που χωρίζει τη Λευκωσία από τη Νέα Υόρκη, εάν κινείται συνεχώς με αυτή την ταχύτητα.

3. Ένα αυτοκίνητο κινείται σε ένα ευθύγραμμο δρόμο, διατηρώντας την ίδια φορά κίνησης. Το μήκος του δρόμου είναι 60 km. Το αυτοκίνητο διάνυσε το πρώτο μισό της διαδρομής με μέση αριθμητική ταχύτητα 30 km/h, και το δεύτερο μισό με μέση αριθμητική ταχύτητα 40 km/h. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα του αυτοκινήτου για τη συνολική διαδρομή.

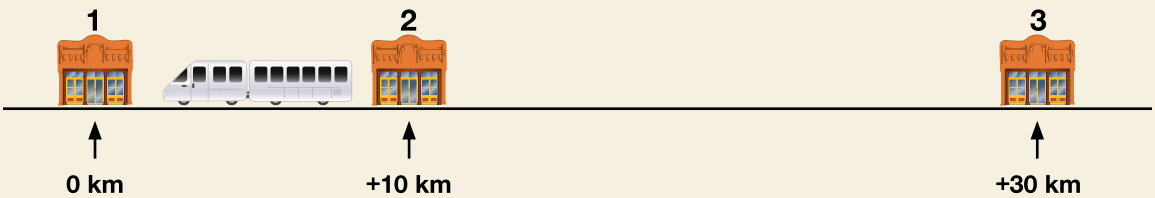
Πηγή: Paolo Salmaso from Roma, Italy - European Athletics Championships Zürich 2014, CC BY 2.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid =34870217

4. Ο πρωταθλητής του βάδην Γιοάν Ντενίζ, έκανε παγκόσμιο ρεκόρ στην απόσταση 50 km. Ο Ντενίζ διάνυσε το πρώτο μισό της διαδρομής σε 1 ώρα, 40 λεπτά και 20 δευτερόλεπτα, και το δεύτερο μισό σε 1 ώρα, 52 λεπτά και 13 δευτερόλεπτα. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα του πρωταθλητή σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του.

❺ Στις 20 Ιουλίου 2009 στο Βερολίνο, ο παγκόσμιος πρωταθλητής Usain Bolt έτρεξε την απόσταση των 200 m σε 19,19 s, επίδοση που αποτελεί παγκόσμιο ρεκόρ. Ο αγώνας έγινε σε ανοιχτό στίβο, με συνολική περιφέρεια 400 m. Από αυτές τις πληροφορίες, μπορείτε να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα, τη μέση διανυσματική ταχύτητα, ή τη στιγμιαία ταχύτητα του αθλητή; Να εξηγήσετε το συλλογισμό σας.

Πηγή: AFP

❻ Ένα τρένο εκτελεί το δρομολόγιο μεταξύ των σταθμών 1, 2, και 3 του σχήματος.



Ο πιο κάτω πίνακας περιέχει τις ώρες αναχώρησης και άφιξης του τρένου στους διάφορους σταθμούς.

Σταθμός	Αναχώρηση (h:min)	Σταθμός	Άφιξη (h:min)
1	12:00	2	12:06
2	12:08	3	12:18
3	12:25	2	12:40
2	12:42	1	12:50

Α. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα του τρένου στις διαδρομές 1 → 2 , 2 → 3, 3 → 2 και 2 → 1.

Β. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα του τρένου στη συνολική διαδρομή 1 → 2 → 3 → 2 → 1.

Γ. Ένα δεύτερο τρένο εκτελεί τη διαδρομή 1 → 2 με μέση αριθμητική ταχύτητα 60 km/h, τη διαδρομή 2 → 3 με μέση αριθμητική ταχύτητα 80 km/h, και τις διαδρομές 3 → 2 και 2 → 1 με μέση αριθμητική ταχύτητα 90 km/h. Σε κάθε σταθμό σταματά 5 λεπτά. Ποιο χρονικό διάστημα μεσολαβεί από τη στιγμή της αναχώρησης μέχρι τη στιγμή της επιστροφής του τρένου στον σταθμό 1; Ποια είναι η μέση αριθμητική ταχύτητα του δεύτερου τρένου για τη συνολική διαδρομή 1 → 2 → 3 → 2 → 1;

7 Ένα αυτοκίνητο κινείται σε ένα ευθύγραμμο δρόμο μήκους s, διατηρώντας την ίδια φορά κίνησης. Έστω ότι στο πρώτο μισό της διαδρομής το αυτοκίνητο κινείται με μέση αριθμητική ταχύτητα υ_1 και στο δεύτερο μισό με μέση αριθμητική ταχύτητα υ_2. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα του αυτοκινήτου για τη συνολική διαδρομή. Να εκφράσετε το αποτέλεσμα παραμετρικά, χρησιμοποιώντας τα μεγέθη υ_1 και υ_2.

Μέση Διανυσματική Ταχύτητα

Ιούλιος Βέρν

8 Στο μυθιστόρημα του Ιουλίου Βέρν «Ο γύρος του κόσμου σε 80 μέρες», ο Φιλέας Φόγκ αναχωρεί από τη Μεταρρυθμιστική Λέσχη του Λονδίνου και επιστρέφει στο ίδιο σημείο μετά από 80 μέρες ακριβώς.
Υποθέστε ότι η τροχιά του κ. Φόγκ αντιστοιχεί σε ένα μέγιστο κύκλο πάνω στην επιφάνεια της Γης. Η ακτίνα R του κύκλου είναι η ακτίνα της Γης, και δίνεται στον Πίνακα 1-1. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα και τη μέση διανυσματική ταχύτητα του πρωταγωνιστή.

9 Η Γη διαγράφει προσεγγιστικά κυκλική τροχιά γύρω από τον Ήλιο, με ακτίνα R = 150 000 000 km. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική και τη μέση διανυσματική ταχύτητα της Γης για μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον Ήλιο.

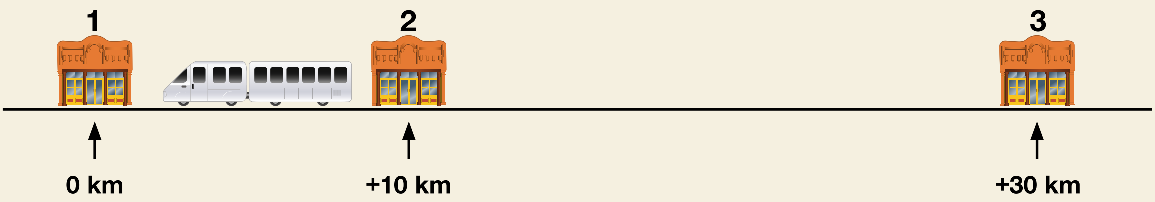
10 Μία κολυμβήτρια διασχίζει μια πισίνα μήκους 50 m σε 55 s και επιστρέφει στην αφετηρία σε 60 s. Να υπολογίσετε τη μέση διανυσματική ταχύτητα της κολυμβήτριας στα δύο τμήματα της διαδρομής ξεχωριστά, και σε ολόκληρη τη διαδρομή.

11 Ένα πλοίο χρειάζεται 14 ώρες για να διανύσει τη διώρυγα του Σουέζ, η οποία έχει μήκος 193 km.

Α. Υποθέτοντας ότι η διώρυγα είναι ευθύγραμμη, να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα και τη μέση διανυσματική ταχύτητα του πλοίου, κατά τη διάρκεια της διέλευσής του από τη διώρυγα.

Β. Ένα δεύτερο πλοίο περιπλέει την Αφρική με διπλάσια μέση αριθμητική ταχύτητα από το πρώτο. Το δεύτερο πλοίο ξεκινά επίσης από το ένα άκρο και καταλήγει στο άλλο άκρο της διώρυγας του Σουέζ. Εάν το δεύτερο πλοίο διανύει απόσταση 9 000 km, να υπολογίσετε το χρόνο που θα χρειαστεί, και τη μέση διανυσματική του ταχύτητα.

12 Το τρένο της άσκησης 6 εκτελεί τη διαδρομή 1 → 2 → 3 → 2 → 1. Σε κάθε τμήμα της διαδρομής μεταξύ δύο διαδοχικών σταθμών, η μέση αριθμητική ταχύτητα του τρένου είναι ίση με 100 km/h. Θεωρώντας ότι το τρένο δεν σταματά σε ενδιάμεσους σταθμούς, να υπολογίσετε τη μέση **διανυσματική** ταχύτητά του για τις συνολικές διαδρομές 1 → 2 → 3, 1 → 2 → 3 → 2, και 1 → 2 → 3 → 2 → 1.

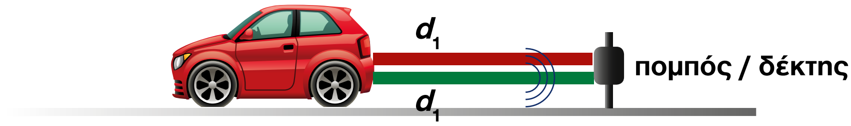


2.8. Πειραματική Μελέτη της Κίνησης με Σταθερή Ταχύτητα

Στις επόμενες ενότητες μελετούμε την απλούστερη περίπτωση κίνησης, στην οποία το σώμα κινείται σε ευθεία με σταθερή ταχύτητα.

Ένας μαθητής πειραματίζεται με ένα μοντέλο αυτοκινήτου. Ο μαθητής χρησιμοποιεί μία πειραματική διάταξη, που περιλαμβάνει ένα αυτοκίνητο με μπαταρία, έναν αισθητήρα κίνησης και έναν υπολογιστή.

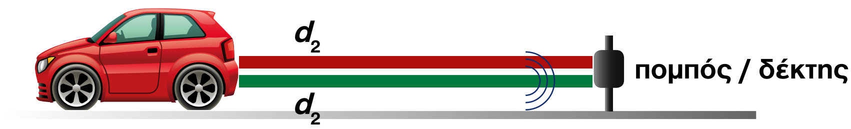
Ο παλμός φεύγει τη στιγμή t_1



... και επιστρέφει μετά από διάστημα Δt_1

$$2d_1 = \upsilon_{\text{ήχου}}\, \Delta t_1 \Rightarrow d_1 = \frac{\upsilon_{\text{ήχου}}\, \Delta t_1}{2}$$

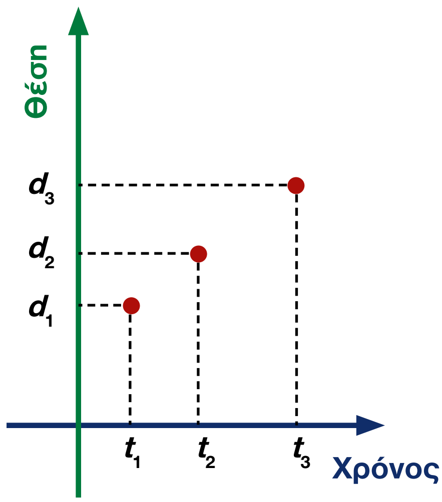
Ένας νέος παλμός φεύγει τη στιγμή t_2



... και επιστρέφει μετά από διάστημα Δt_2

$$2d_2 = \upsilon_{\text{ήχου}}\, \Delta t_2 \Rightarrow d_2 = \frac{\upsilon_{\text{ήχου}}\, \Delta t_2}{2}$$

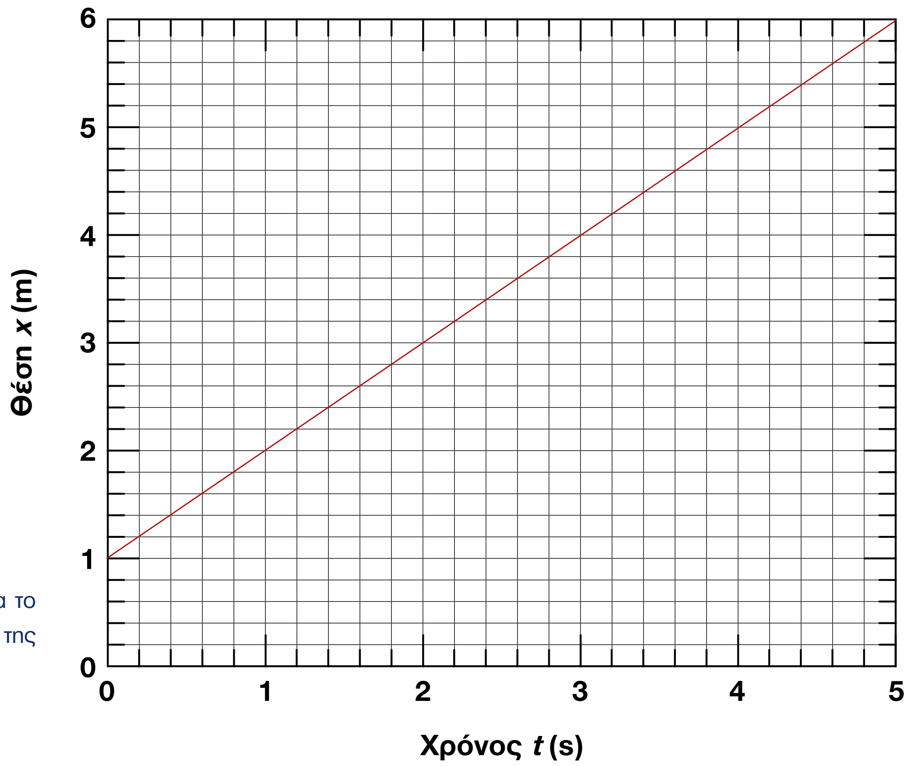
Εικόνα 2-8
Πειραματική μελέτη της κίνησης ενός αυτοκινήτου - μοντέλου με αισθητήρα κίνησης.



Ο αισθητήρας κίνησης παράγει συνεχώς ηχητικούς παλμούς. Όταν ο αισθητήρας είναι στραμμένος προς το αυτοκίνητο, οι παλμοί ανακλώνται στο αυτοκίνητο και επιστρέφουν σε έναν ηχητικό δέκτη (Εικόνα 2-8). Από το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί ανάμεσα στην εκπομπή και την επιστροφή ενός παλμού, και από την ταχύτητα του ήχου στον αέρα ($\upsilon_{ήχου}$ = 340 m/s), ο αισθητήρας υπολογίζει το μήκος της διαδρομής ($2d$) του ηχητικού παλμού: $2d = \upsilon_{ήχου}\,\Delta t$. Η απόσταση του αυτοκινήτου είναι το μισό αυτού του μήκους (d).

Γραφική Παράσταση Θέσης - Χρόνου

Στην οθόνη του υπολογιστή προκύπτει η **γραφική παράσταση θέσης - χρόνου** της Εικόνας 2-9.



Εικόνα 2-9
Γραφική παράσταση θέσης-χρόνου για το αυτοκίνητο της πειραματικής διάταξης της Εικόνας 2-8.

Η γραφική παράσταση της Εικόνας 2-9 είναι ευθεία γραμμή, οπότε το αυτοκίνητο *μετατοπίζεται κατά το ίδιο διάστημα* Δx *σε ίσα χρονικά διαστήματα* Δt.

Άσκηση
Για να επιβεβαιώσετε την πιο πάνω παρατήρηση, να υπολογίσετε τη μετατόπιση του αυτοκινήτου στα χρονικά διαστήματα 0 s - 1 s, 2,6 s - 3,6 s, 3,4 s - 4,4 s.

Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι η *μετατόπιση είναι ανάλογη με το χρονικό διάστημα,* $\Delta x \propto \Delta t$. Αν διπλασιάσουμε, τριπλασιάσουμε, κ.ο.κ. το χρονικό διάστημα, αντίστοιχα διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.ο.κ. η μετατόπιση.

Άσκηση
Για να επιβεβαιώσετε αυτή την παρατήρηση, να υπολογίσετε τη μετατόπιση στα χρονικά διαστήματα 0 s - 1 s, 1,6 s - 3,6 s, 2 s - 5 s.

Όταν το πηλίκο $\Delta x/\Delta t$ είναι σταθερό για αυθαίρετα χρονικά διαστήματα, η μέση διανυσματική ταχύτητα είναι αμετάβλητη. Συνεπώς, και η στιγμιαία ταχύτητα υ είναι σταθερή, ίση με τη σταθερά αναλογίας. Άρα,

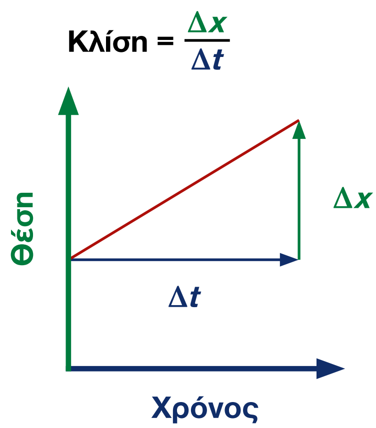
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \upsilon$$

Μια κίνηση με σταθερή στιγμιαία ταχύτητα ονομάζεται **ευθύγραμμη ομαλή κίνηση**.

Η Κλίση της Ευθείας Θέσης - Χρόνου ισούται με την Ταχύτητα

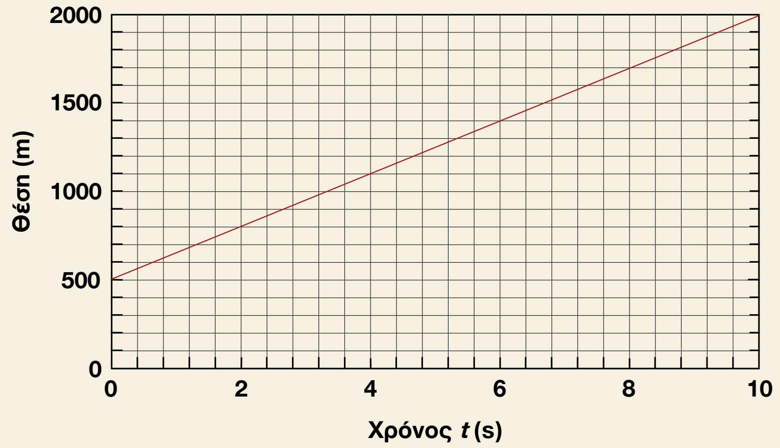
Όπως προκύπτει από την Εικόνα 2-10, *η κλίση της ευθείας στη γραφική παράσταση θέσης - χρόνου ισούται με τη σταθερή ταχύτητα* της κίνησης:

$$\text{Κλίση} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \upsilon$$



Εικόνα 2-10
Η κλίση της ευθείας στη γραφική παράσταση θέσης - χρόνου ισούται με το πηλίκο $\Delta x/\Delta t$.

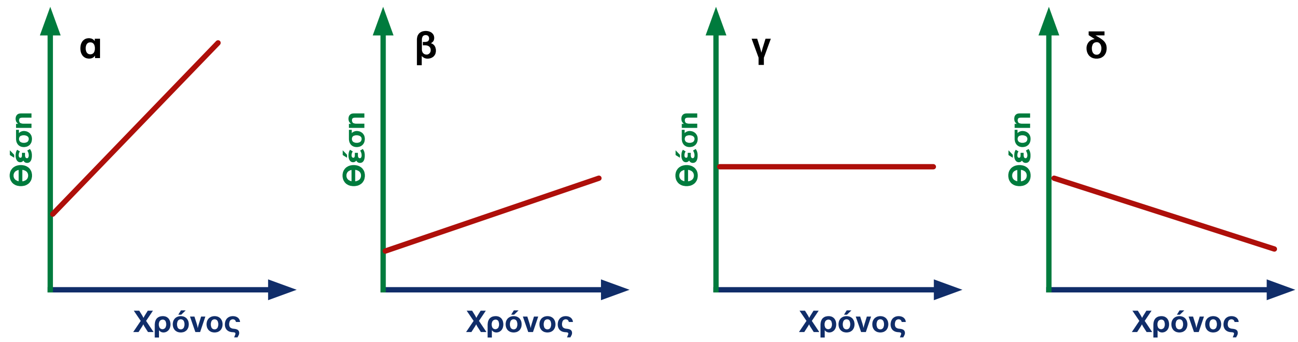
Άσκηση
Το 2007, η υπερταχεία της διαδρομής Παρίσι - Στρασβούργο έσπασε το ρεκόρ ταχύτητας συμβατικών τρένων. Σε ένα ευθύγραμμο τμήμα της διαδρομής της κινούνταν συνεχώς με σταθερή ταχύτητα κοντά στο ρεκόρ. Η γραφική παράσταση θέσης - χρόνου της υπερταχείας σε αυτό το τμήμα φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του τρένου και να τη μετατρέψετε σε km/h.



Η κλίση της ευθείας θέσης - χρόνου δίνει συνοπτικές πληροφορίες για την κίνηση. Όσο πιο απότομη είναι η κλίση, τόσο πιο γρήγορα κινείται το αντικείμενο. Όταν η κλίση είναι μηδενική (οριζόντια ευθεία), το σώμα είναι ακίνητο. Όταν η κλίση είναι αρνητική, το σώμα κινείται με αρνητική ταχύτητα.

Εικόνα 2-11
Η κλίση της ευθείας θέσης - χρόνου δίνει πληροφορίες για την κίνηση: (α) μεγάλη θετική κλίση αντιστοιχεί σε μεγάλη θετική ταχύτητα, (β) μικρή θετική κλίση σε μικρή θετική ταχύτητα, (γ) μηδενική κλίση (οριζόντια ευθεία) σε μηδενική ταχύτητα, (δ) αρνητική κλίση σε αρνητική ταχύτητα.

Η Εικόνα 2-11 περιλαμβάνει παραδείγματα κινήσεων με διαφορετικές ταχύτητες.

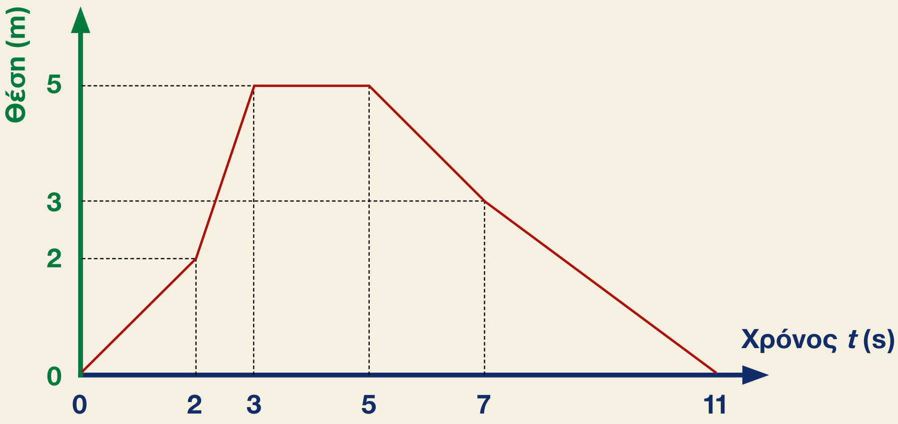


Άσκηση

Στο πιο κάτω σχήμα απεικονίζεται το διάγραμμα θέσης-χρόνου μίας μπάλας, που κινείται σε οριζόντιο διάδρομο.

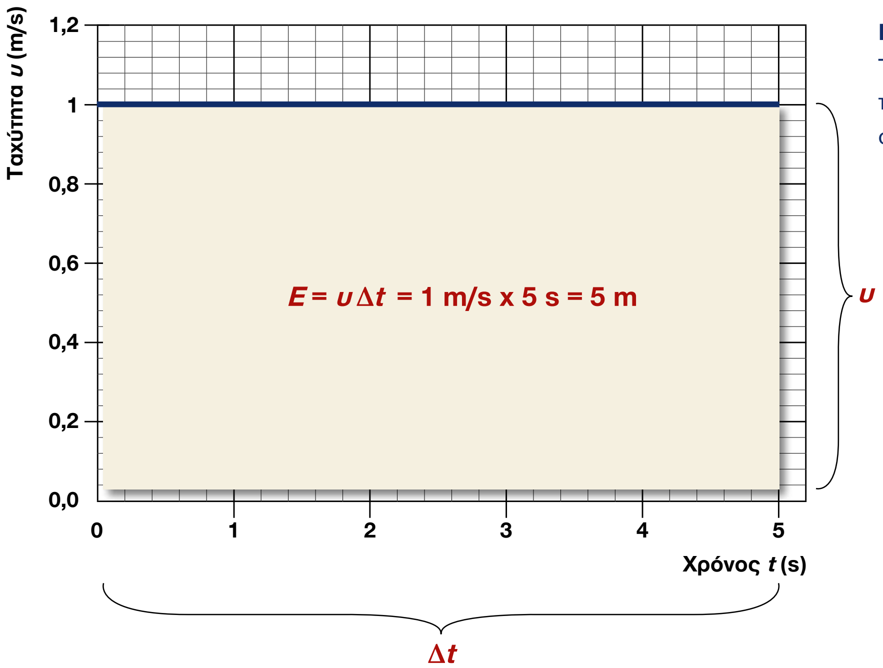
Α. Με βάση την κλίση, να περιγράψετε την ταχύτητα της μπάλας στα χρονικά διαστήματα 0 - 2 s, 2 - 3 s, 3 - 5 s, 5 - 7 s, 7 - 11 s, χρησιμοποιώντας τις λέξεις μεγάλη, μικρή, θετική, αρνητική, μηδενική.

Β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα της μπάλας στα ίδια χρονικά διαστήματα.



Γραφική Παράσταση Ταχύτητας - Χρόνου

Η γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου, για την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση του αυτοκινήτου μοντέλου της Εικόνας 2-8, φαίνεται στην Εικόνα 2-12. Επειδή η ταχύτητα είναι σταθερή, το γράφημα αντιστοιχεί σε μία οριζόντια ευθεία.



Εικόνα 2-12
Το σκιασμένο εμβαδόν στην ευθεία ταχύτητας-χρόνου ισούται με τη μετατόπιση του σώματος στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

Φυσική Σημασία του Εμβαδού της Γραφικής Παράστασης Ταχύτητας - Χρόνου

Το εμβαδόν της επιφάνειας, που περικλείεται ανάμεσα στη γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου και στον οριζόντιο άξονα της Εικόνας 2-12, ισούται με:

$$\text{Εμβαδόν} = (1\ \text{m/s}) \times (5\ \text{s}) = 5\ \text{m}$$

Το εμβαδόν αυτό ισούται με τη μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα 0 - 5 s. Συμπεραίνουμε ότι:

Το σκιασμένο εμβαδόν της επιφάνειας, που περικλείεται ανάμεσα στην ευθεία ταχύτητας - χρόνου και στον οριζόντιο άξονα, ισούται με τη μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα Δt:

$$\text{Εμβαδόν} = \upsilon \Delta t = \Delta x$$

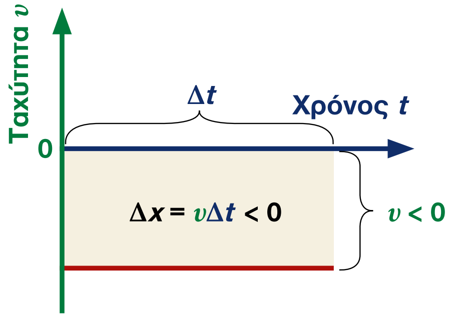
Το εμβαδόν αυτό έχει μονάδες μήκους (m).

Όπως θα δείξουμε αργότερα, αυτό το αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό διότι **έχει γενική ισχύ και για κινήσεις με μεταβαλλόμενη ταχύτητα.**

Για ένα σώμα με σταθερή *αρνητική* ταχύτητα, η γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου αποκτά τη μορφή της Εικόνας 2-13.

Εικόνα 2-13

Γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου για κίνηση με σταθερή αρνητική ταχύτητα. Η συνολική μετατόπιση στο διάστημα Δt είναι αρνητική. Το εμβαδόν ανάμεσα στην ευθεία της ταχύτητας και στον χρονικό άξονα θεωρείται αρνητικό, και υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας. Το εμβαδόν αυτό ισούται με τη μετατόπιση, όπως και στην περίπτωση της θετικής ταχύτητας.



Για κάθε τμήμα της καμπύλης ταχύτητας - χρόνου, που βρίσκεται κάτω από τον άξονα του χρόνου, το εμβαδόν της αντίστοιχης επιφάνειας θεωρείται αρνητικό.

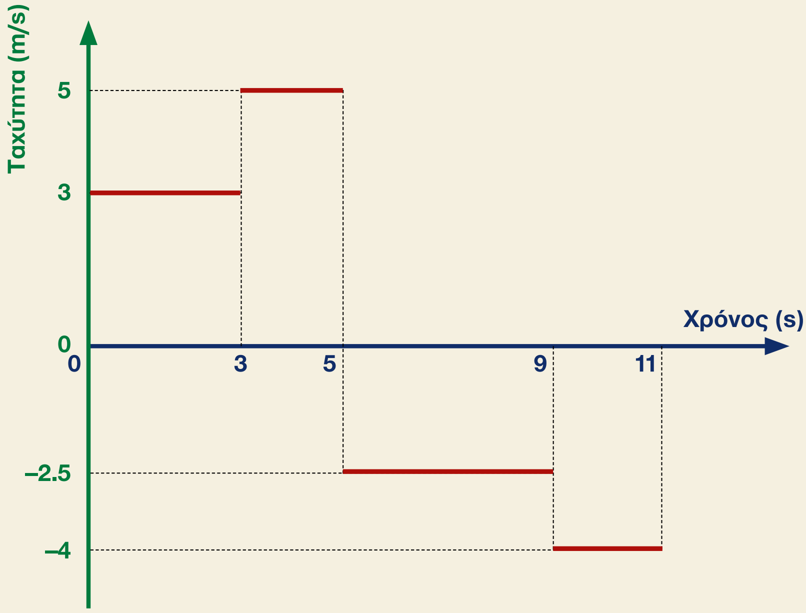
Με αυτή τη σύμβαση, το εμβαδόν αυτής της επιφάνειας ισούται με τη μετατόπιση του σώματος στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

Άσκηση

Το σχήμα στην διπλανή σελίδα απεικονίζει τη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου μίας μπάλας που κινείται σε ευθεία γραμμή.

Α. Να υπολογίσετε τη συνολική μετατόπιση της μπάλας.

Β. Εάν τη χρονική στιγμή $t = 0$ s, η μπάλα ήταν στη θέση $x = 1$ m, σε ποια θέση βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 11$ s ;



Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερώτηση 2.8.1., σελ. 124.

2.9. Εξίσωση Θέσης - Χρόνου στην Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_0 το σώμα βρίσκεται στη θέση x_0 και κινείται με σταθερή ταχύτητα υ. Στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t - t_0$, το σώμα μετατοπίζεται κατά $\Delta x = x - x_0$. Από τον ορισμό της ταχύτητας προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$\Delta x = \upsilon\, \Delta t \Rightarrow x - x_0 = \upsilon\,(t - t_0) \Rightarrow x = x_0 + \upsilon\,(t - t_0)$$

Η εξίσωση αυτή προσδιορίζει τη θέση ενός σώματος, που κινείται με σταθερή ταχύτητα υ, σαν συνάρτηση του χρόνου.

Εξίσωση Θέσης - Χρόνου στην Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση

$$x = x_0 + \upsilon\,(t - t_0)$$

Αν το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$, τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, η εξίσωση παίρνει την απλούστερη μορφή:

$$x = \upsilon\, t$$

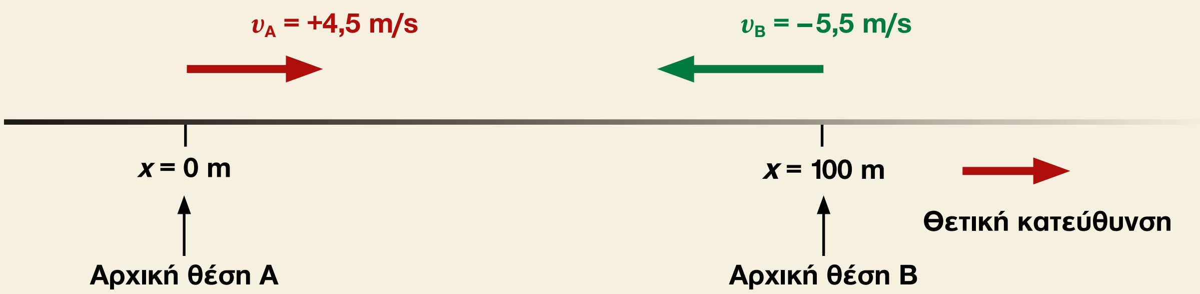
2.10. Εφαρμογές της Ευθύγραμμης Ομαλής Κίνησης

Για να μελετήσουμε την κίνηση ενός σώματος με σταθερή ταχύτητα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση θέσης - χρόνου της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης. Για κάποια προβλήματα, η χρήση των γραφικών παραστάσεων θέσης - χρόνου και ταχύτητας - χρόνου παρέχει έναν πιο εύκολο τρόπο επίλυσής τους. Στα επόμενα παραδείγματα χρησιμοποιούμε και τις δύο μεθόδους.

Παράδειγμα 1

Δύο μικροί αθλητές Α και Β ξεκινούν να τρέχουν σε μια ευθύγραμμη διαδρομή. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκονται σε απόσταση 100 m μεταξύ τους, και αρχίζουν να τρέχουν ο ένας προς τον άλλο με σταθερές ταχύτητες μέτρου 4,5 m/s (αθλητής Α) και 5,5 m/s (αθλητής Β).

Α. Να σχεδιάσετε την ευθεία της διαδρομής, να διαλέξετε το σημείο αναφοράς και τη θετική κατεύθυνση, και να τοποθετήσετε τους αθλητές.



Έστω ότι επιλέγουμε το σημείο αναφοράς στην αρχική θέση του Α και τη θετική κατεύθυνση από τον Α προς τον Β, όπως στο πιο πάνω σχήμα. Με αυτή τη σύμβαση, η αρχική θέση του Α ισούται με 0 m και η αρχική θέση του Β ισούται με +100 m. Η ταχύτητα του Α είναι θετική και η ταχύτητα του Β είναι αρνητική.

Β. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις θέσης - χρόνου των δύο αθλητών στο ίδιο διάγραμμα για το διάστημα 0 s - 25 s. Χρησιμοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις, να προσδιορίσετε σε ποιά χρονική στιγμή θα συναντηθούν οι αθλητές, και σε ποιο σημείο της διαδρομής.

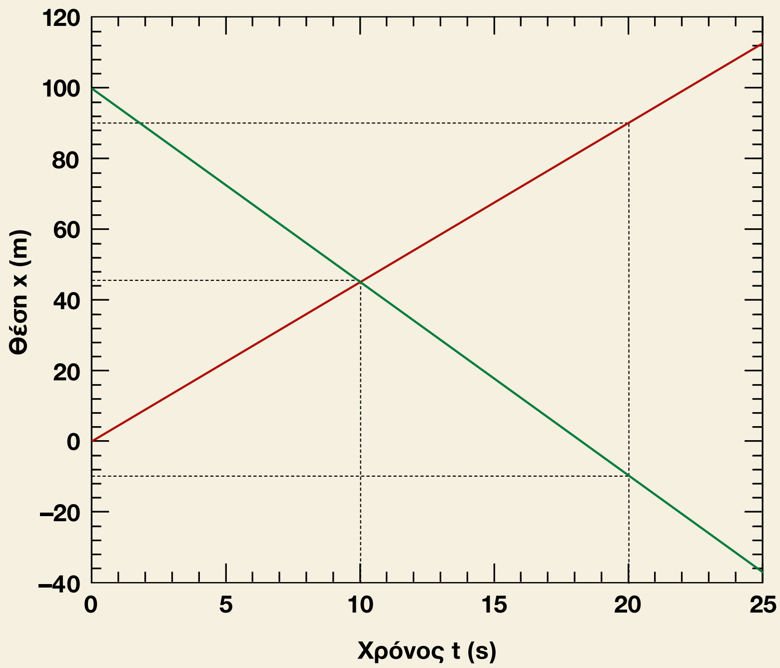
Λύση

Οι γραφικές παραστάσεις θέσης - χρόνου των δύο αθλητών είναι ευθείες γραμμές. Ο αθλητής Α ξεκινά από τη θέση $x = 0$ m τη χρονική στιγμή $t = 0$ s. Μετά από 20 s, ο αθλητής βρίσκεται στη θέση $x = +90$ m. Ενώνοντας τα σημεία (0 s, 0 m) και (20 s, +90 m) προκύπτει η ευθεία θέσης - χρόνου του Α με κλίση +4,5 m/s.

Ο αθλητής Β ξεκινά από τη θέση x = +100 m. Μετά από 20 s, ο αθλητής βρίσκεται στη θέση

100 m – (20 s) x (5,5 m/s) = –10 m. Ενώνοντας τα σημεία (0 s, +100 m) και (20 s, –10 m) προκύπτει η ευθεία θέσης - χρόνου του Β. Η κλίση της ευθείας είναι –5,5 m/s.

Οι δύο ευθείες που προκύπτουν φαίνονται στο διάγραμμα που ακολουθεί.



Από το διάγραμμα προκύπτει ότι οι αθλητές θα συναντηθούν τη χρονική στιγμή $t = 10$ s στη θέση $x = 45$ m.

Γ. Να προσδιορίσετε το σημείο συνάντησης των δύο αθλητών χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης.

Ο αθλητής Α ξεκινά από αρχική θέση 0 m τη χρονική στιγμή 0 s. Η εξίσωση κίνησης του αθλητή Α είναι:

$$x_A = \upsilon_A t$$

Ο αθλητής Β ξεκινά από αρχική θέση $x_{0B} = +100$ m τη χρονική στιγμή 0 s. Η εξίσωση κίνησης του αθλητή Β είναι:

$$x_B = x_{0B} + \upsilon_B t$$

Οι δύο αθλητές συναντώνται όταν οι θέσεις τους ισούνται. Άρα:

$$x_A = x_B \Rightarrow \upsilon_A t = x_{0B} + \upsilon_B t \Rightarrow \mathrm{t} = \frac{x_{0B}}{\upsilon_A - \upsilon_B} = \frac{100}{4{,}5 - (-5{,}5)} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m/s}} = 10\ \mathrm{s}$$

Εκείνη τη στιγμή, η θέση των αθλητών είναι:

$$x_A = x_B = \upsilon_A t = (4{,}5\ \mathrm{m/s})\ \mathrm{x}\ (10\ \mathrm{s}) = 45\ \mathrm{m}$$

Παρατηρούμε ότι η χρήση γραφικών παραστάσεων και εξισώσεων κίνησης αποτελούν **δύο εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης προβλημάτων κίνησης.**

Στο προηγούμενο παράδειγμα, οι εξισώσεις κίνησης ήταν ενδεχομένως η ευκολότερη μέθοδος επίλυσης. Στο επόμενο παράδειγμα, η χρήση γραφικών παραστάσεων παρέχει ένα πιο εύκολο τρόπο επίλυσης προβλημάτων κίνησης.

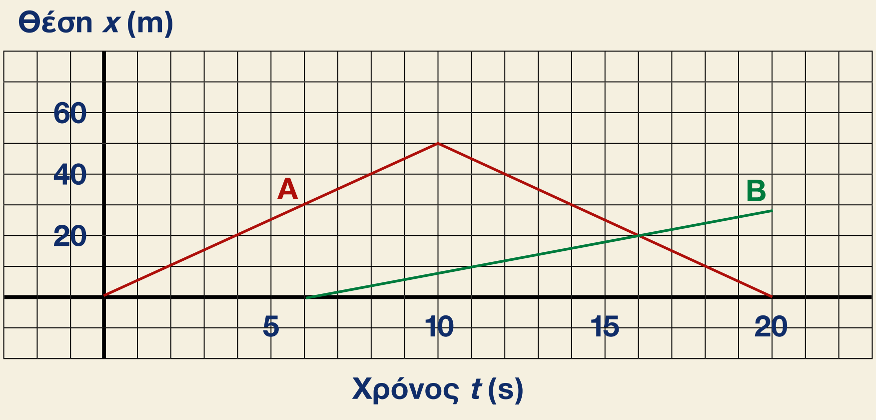
Παράδειγμα 2

Οι δύο μικροί αθλητές Α και Β ξεκινούν να τρέχουν από το ίδιο σημείο και προς την ίδια κατεύθυνση. Ο αθλητής Α ξεκινά τη στιγμή 0 s και τρέχει με σταθερή ταχύτητα μέτρου 5 m/s. Μετά από 10 s αντιστρέφει τη φορά κίνησής του και επιστρέφει στην αφετηρία με σταθερή ταχύτητα μέτρου 5 m/s. Ο αθλητής Β ξεκινά μετά από 6 s και τρέχει με σταθερή ταχύτητα μέτρου 2 m/s. Χρησιμοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις θέσης - χρόνου, να προσδιορίσετε ποιά χρονική στιγμή και σε ποιό σημείο θα συναντηθούν οι δύο αθλητές.

Λύση

Θεωρούμε ως σημείο αναφοράς την αρχική θέση των δύο αθλητών, και ως θετική την κατεύθυνση προς την οποία αρχίζουν να τρέχουν. Η γραφική παράσταση θέσης - χρόνου του αθλητή Α είναι ευθεία που ξεκινά από τη θέση $x = 0$ m τη στιγμή $t = 0$ s και έχει θετική κλίση ίση με +5 m/s μέχρι τη στιγμή $t = 10$ s. Στο διάστημα 10 s - 20 s η γραφική παράσταση θέσης - χρόνου του Α έχει αρνητική κλίση –5 m/s, επειδή η ταχύτητά του αντιστρέφεται.

Η γραφική παράσταση του αθλητή Β είναι ευθεία, που ξεκινά τη στιγμή $t = 6$ s και έχει συνεχώς θετική κλίση +2 m/s. Οι δύο γραφικές παραστάσεις φαίνονται στην πιο κάτω εικόνα.



Από τις γραφικές παραστάσεις προκύπτει ότι οι δύο αθλητές θα συναντηθούν τη χρονική στιγμή $t = 16$ s στη θέση $x = 20$ m. Ο αθλητής Α εκείνη τη στιγμή έχει αντιστρέψει την κίνησή του και επιστρέφει στην αφετηρία.

Το ίδιο πρόβλημα μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης, αλλά η διαδικασία αυτή είναι πιο χρονοβόρα. Σας προτείνουμε να το επιβεβαιώσετε.

Προβλήματα που περιλαμβάνουν απότομες αλλαγές ταχύτητας απαιτούν **συνδυασμό εξισώσεων κίνησης** και συνήθως επιλύονται ευκολότερα με γραφικές παραστάσεις.

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με την ένδειξη Σωστό / Λάθος.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Η κλίση της γραφικής παράστασης θέσης - χρόνου ενός σώματος είναι πάντα αρνητική όταν το μέτρο της θέσης ελαττώνεται.	
2	Η κλίση της γραφικής παράστασης θέσης - χρόνου ενός σώματος είναι πάντα θετική, όταν το μέτρο της θέσης αυξάνεται.	
3	Η κλίση της γραφικής παράστασης θέσης - χρόνου ενός σώματος είναι μηδενική, όταν το σώμα είναι ακίνητο.	
4	Όσο μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα ενός σώματος, τόσο μεγαλύτερη είναι η κλίση της γραφικής παράστασης θέσης - χρόνου.	
5	Όσο μεγαλύτερο είναι το μέτρο της ταχύτητας ενός σώματος, τόσο μεγαλύτερη είναι η κλίση της γραφικής παράστασης θέσης - χρόνου.	
6	Το εμβαδόν της γραφικής παράστασης θέσης - χρόνου ισούται με τη μετατόπιση του σώματος.	
7	Το εμβαδόν της γραφικής παράστασης ταχύτητας - χρόνου θεωρείται πάντοτε θετικό.	
8	Το εμβαδόν της γραφικής παράστασης ταχύτητας - χρόνου εκφράζεται σε μέτρα στο σύστημα SI.	

Ασκήσεις

Γραφική παράσταση θέσης - χρόνου

1. Στην εικόνα, που ακολουθεί στην επόμενη σελίδα, απεικονίζεται η γραφική παράσταση θέσης - χρόνου ενός σώματος **Α**, που κινείται πάνω σε μια ευθεία.

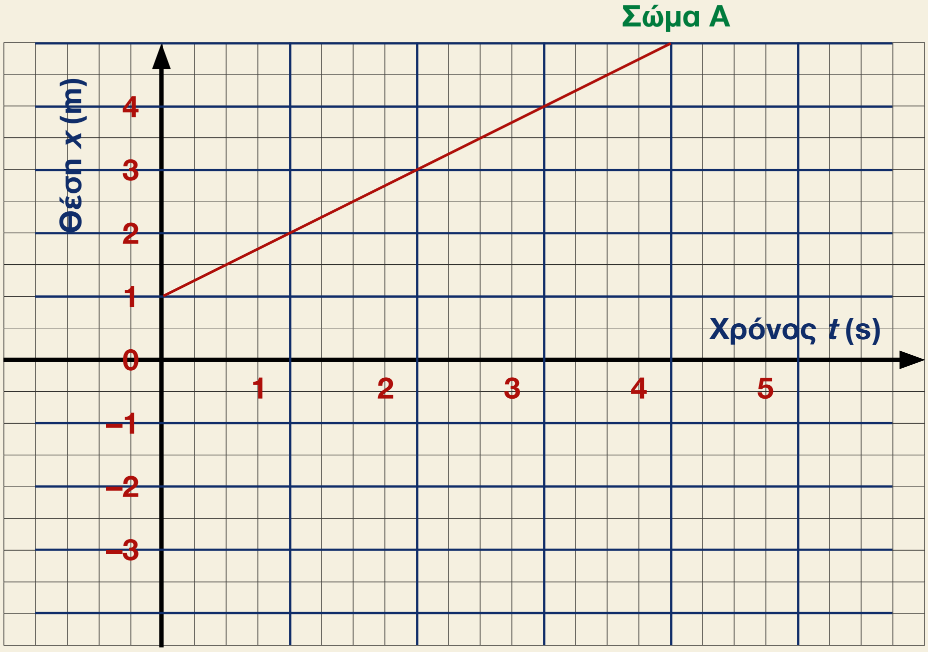
   Α. Να περιγράψετε την κίνηση του σώματος. Ποιά είναι η ταχύτητα του σώματος;

   Β. Να χαράξετε στο ίδιο διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις θέσης - χρόνου για τα εξής παραδείγματα κίνησης:

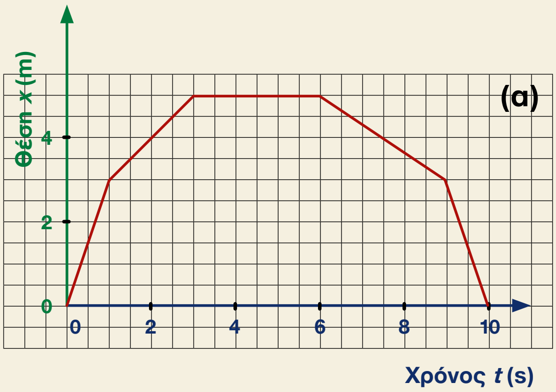
i. Ένα σώμα **Β** ξεκινά από τη θέση $x = 0$ και κινείται με ίση ταχύτητα με το σώμα **Α**.

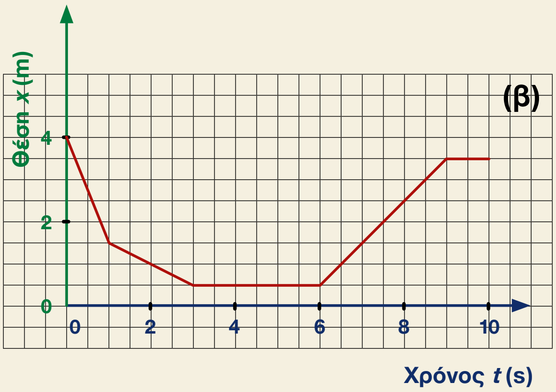
ii. Ένα σώμα **Γ** ξεκινά από τη θέση $x = 0$ και κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση, με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα με το σώμα **Α**.

iii. Ένα σώμα **Δ** ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 2$ s από τη θέση $x = 2$ m. Κινείται στην ίδια κατεύθυνση με το σώμα **Α**, αλλά με διπλάσια ταχύτητα.



❷ Στο επόμενο σχήμα απεικονίζονται τα διαγράμματα **θέσης - χρόνου** δύο σωμάτων (α) και (β), που κινούνται σε έναν ευθύγραμμο δρόμο.





Α. Παρατηρώντας την **κλίση** κάθε ευθύγραμμου τμήματος, να **περιγράψετε** πώς μεταβάλλεται η ταχύτητα των δύο σωμάτων κατά τη διάρκεια της κίνησής τους, χρησιμοποιώντας τις λέξεις «μεγάλη», «μικρή», «θετική», «αρνητική», «μηδενική».

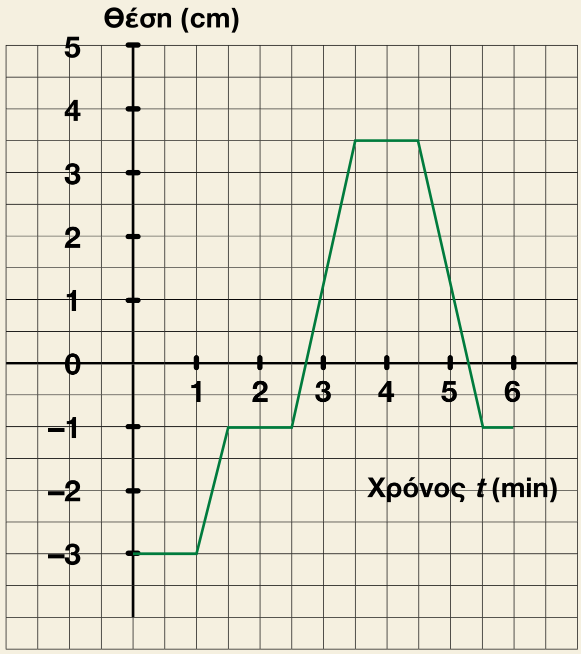
Β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα των δύο σωμάτων σε κάθε χρονικό διάστημα, στο οποίο είναι σταθερή, και να συμπληρώσετε τον πίνακα που ακολουθεί.

Χρονικό Διάστημα	Ταχύτητα	
	Σώμα (α)	Σώμα (β)
0 - 1 s		
1 - 3 s		
3 - 6 s		
6 - 9 s		
9 - 10 s		

Γ. Να υπολογίσετε τη **συνολική απόσταση** που διανύουν τα δύο σώματα στο χρονικό διάστημα 0 - 10 s και τη **συνολική μετατόπιση** των δύο σωμάτων.

Δ. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα και τη μέση διανυσματική ταχύτητα των δύο σωμάτων στο χρονικό διάστημα 0 - 10 s.

3 Η επόμενη γραφική παράσταση δείχνει το διάγραμμα **θέσης - χρόνου** για ένα σαλιγκάρι που κινείται σε ευθεία γραμμή.

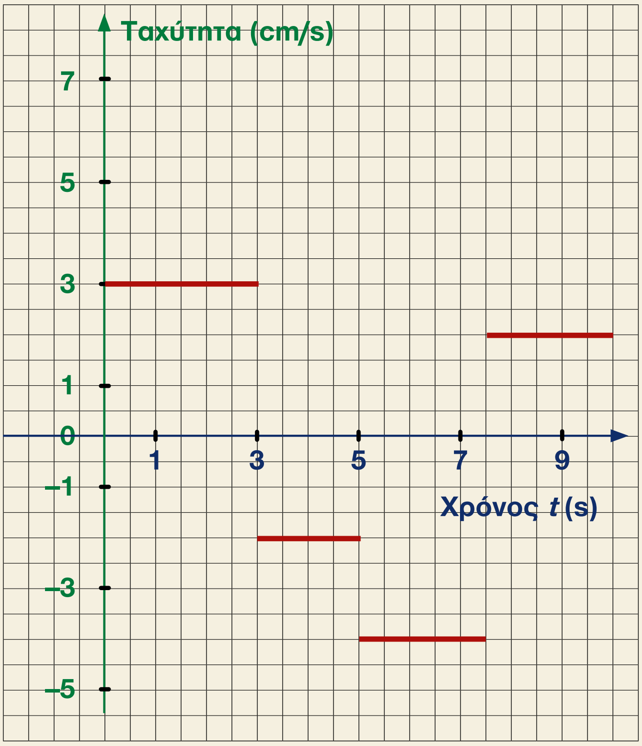


Α. Να υπολογίσετε τη συνολική απόσταση που διάνυσε το σαλιγκάρι στο χρονικό διάστημα 0 min - 6 min, και τη συνολική μετατόπισή του.

Β. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα και τη μέση διανυσματική ταχύτητα για το διάστημα 0 min - 6 min.

Γ. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα **ταχύτητας - χρόνου** του σαλιγκαριού.

❹ Το επόμενο σχήμα απεικονίζει τη γραφική παράσταση **ταχύτητας - χρόνου** μίας μπάλας του μπιλιάρδου, καθώς κινείται πάνω στο τραπέζι του μπιλιάρδου.



Να υπολογίσετε τη μετατόπιση της μπάλας στα διάφορα χρονικά διαστήματα και να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

Χρονικό Διάστημα	Μετατόπιση
0 - 3 s	
3 - 5 s	
5 - 7,5 s	
7,5 - 10 s	

Χρήση εξισώσεων κίνησης ή γραφικών παραστάσεων

Σημείωση
Στις ασκήσεις που ακολουθούν, είναι σημαντικό να συγκρίνετε την επίλυση με γραφικές παραστάσεις ή εξισώσεις κίνησης, για να διαπιστώσετε ποιος τρόπος είναι πιο εύκολος.

❺ Ένας εξερευνητής διασχίζει ένα στενό ευθύγραμμο μονοπάτι στη ζούγκλα. Κάποια στιγμή τον εντοπίζει ένα λιοντάρι που βρίσκεται σε απόσταση $s = 150$ m πίσω του, και αρχίζει να τον κυνηγά. Ο εξερευνητής τρέχει με ταχύτητα $\upsilon_E = 5{,}0$ m/s και το λιοντάρι τον πλησιάζει με ταχύτητα $\upsilon_\Lambda = 12{,}5$ m/s. Σε απόσταση 105 m από τον εξερευνητή βρίσκεται ένα καταφύγιο. Να διερευνήσετε εάν ο εξερευνητής θα προλάβει να διασωθεί με τους εξής δύο τρόπους:

Α. Αφού επιλέξετε κάποιο κατάλληλο σημείο αναφοράς πάνω στην ευθεία κίνησης και τη θετική φορά κίνησης, να σχεδιάσετε στο ίδιο διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις θέσης-χρόνου για το λιοντάρι και τον εξερευνητή.

Β. Λύνοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις θέσης - χρόνου για το λιοντάρι και τον εξερευνητή.

❻ Δύο αθλητές αρχίζουν να τρέχουν ταυτόχρονα από τα άκρα μιας ευθύγραμμης διαδρομής 160 m, με κατεύθυνση ο ένας προς τον άλλο. Ο ένας αθλητής τρέχει με σταθερή ταχύτητα μέτρου

8,5 m/s και ο δεύτερος με σταθερή ταχύτητα μέτρου 7,5 m/s. Αφού επιλέξετε κάποιο κατάλληλο σημείο αναφοράς πάνω στην ευθεία κίνησης των δύο αθλητών και τη θετική φορά κίνησης:

Α. Να σχεδιάσετε στο ίδιο διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις **ταχύτητας - χρόνου** των δύο αθλητών.

Β. Να σχεδιάσετε στο ίδιο διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις **θέσης - χρόνου** των δύο αθλητών. Χρησιμοποιώντας αυτά τα διαγράμματα, να προσδιορίσετε μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν οι δύο αθλητές.

Γ. Να γράψετε τις εξισώσεις **θέσης - χρόνου** για τους δύο αθλητές. Χρησιμοποιώντας αυτές τις εξισώσεις να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα που βρήκατε στο ερώτημα **Β**.

Σημείωση
Η επόμενη άσκηση περιέχει λεπτομερή εκφώνηση, για να σας βοηθήσει στη χάραξη γραφικών παραστάσεων.

7 Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ένας δρομέας αρχίζει να τρέχει σε μια ευθύγραμμη διαδρομή μαζί με τον σκύλο του. Και οι δύο κινούνται με σταθερή ταχύτητα 6 m/s. Μετά από 10 s ο σκύλος βλέπει ένα γάτο που είναι ακίνητος σε απόσταση 20 m μπροστά του, και αρχίζει να τον κυνηγά, τρέχοντας με μεγαλύτερη ταχύτητα 8 m/s στην ίδια κατεύθυνση με προηγουμένως. Ο γάτος αρχίζει να τρέχει με ταχύτητα 9 m/s προς την ίδια κατεύθυνση. Ο δρομέας τρέχει συνεχώς με την ίδια ταχύτητα.

Α. Να κάνετε στο ίδιο διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις **ταχύτητας - χρόνου** για το δρομέα, τον σκύλο και τον γάτο.

Β. Ο σκύλος συγκρατείται από τον δρομέα με μια αναπτυσσόμενη κορδέλα μέγιστου μήκους 8 m. Χρησιμοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις **ταχύτητας - χρόνου**, να υπολογίσετε ποια χρονική στιγμή ο σκύλος θα σταματήσει να απομακρύνεται από τον άνθρωπο.

Γ. Μόλις η κορδέλα τεντωθεί στο μέγιστο μήκος της, ο σκύλος συνεχίζει να τρέχει με την ταχύτητα του δρομέα (6 m/s), και ο γάτος συνεχίζει να τρέχει με τη δική του ταχύτητα. Να υπολογίσετε από τη γραφική παράσταση ποιά θα είναι η συνολική μετατόπιση του δρομέα, του σκύλου και του γάτου, και ποιά θα είναι η τελική απόσταση σκύλου - γάτου, 5 s μετά από τη χρονική στιγμή που η κορδέλα απέκτησε το μέγιστο μήκος της.

Ερώτηση
Θεωρείτε εύκολη την επίλυση της προηγούμενης άσκησης με χρήση εξισώσεων κίνησης;

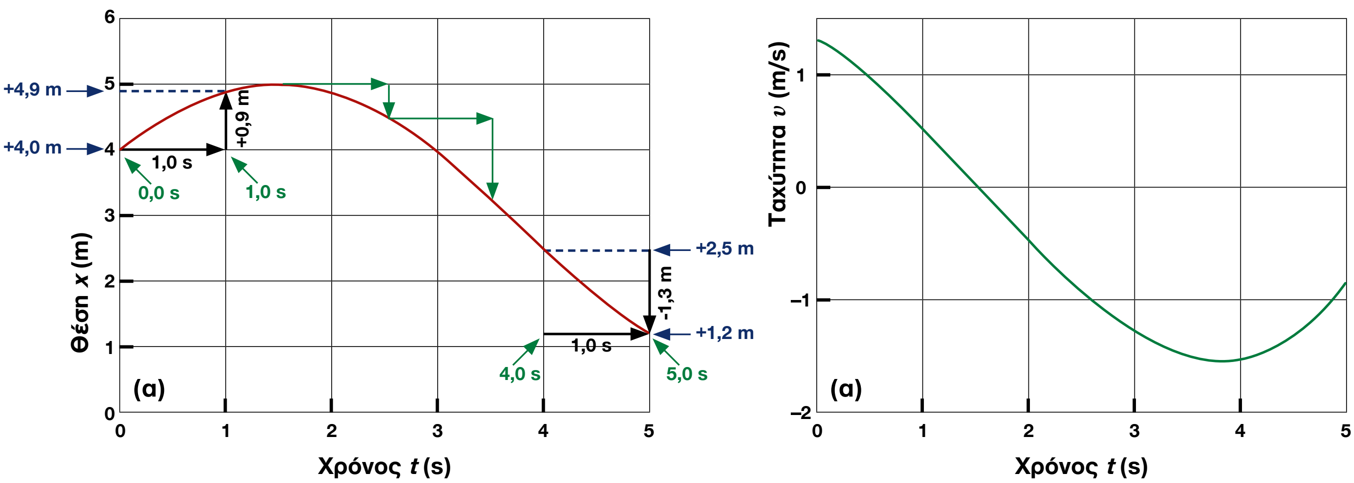
Ο γατόπαρδος μπορεί να μεταβάλλει την ταχύτητά του από 0 σε 90 km/h σε 3 δευτερόλεπτα.

Η ταχύτητα με την οποία κινείται το τρενάκι του roller coaster αυξάνεται και μειώνεται συνεχώς.

Από την καθημερινή μας εμπειρία γνωρίζουμε ότι στις περισσότερες περιπτώσεις, η ταχύτητα ενός κινούμενου σώματος μεταβάλλεται με το χρόνο. Μία μεταλλική σφαίρα, που αφήνεται να πέσει από κάποιο ύψος, κινείται με συνεχώς αυξανόμενη ταχύτητα. Ένα αυτοκινητάκι, που υφίσταται μια αρχική ώθηση σε οριζόντιο έδαφος, κινείται με ταχύτητα που ελαττώνεται συνεχώς, και τελικά μηδενίζεται. Στο Κεφάλαιο 3 θα μάθουμε ότι η ταχύτητα ενός σώματος μεταβάλλεται, όταν το σώμα υφίσταται κάποια επίδραση από το περιβάλλον του, όπως η έλξη της βαρύτητας, ή η τριβή από το έδαφος.

Αναγνώριση Κίνησης με Μεταβαλλόμενη Ταχύτητα από τη Γραφική Παράσταση Θέσης - Χρόνου.

Η Εικόνα 2-14(α) απεικονίζει τη γραφική παράσταση θέσης - χρόνου για ένα σώμα που κινείται με μεταβαλλόμενη ταχύτητα, και η Εικόνα 2-14(β) απεικονίζει την αντίστοιχη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου του σώματος.



Εικόνα 2-14

(α) Γραφική παράσταση θέσης - χρόνου για σώμα που κινείται με μεταβαλλόμενη ταχύτητα. (β) Γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου για την ίδια κίνηση.

Ερώτηση

Πώς μπορούμε να συμπεράνουμε από τη μορφή της γραφικής παράστασης θέσης - χρόνου ότι η ταχύτητα του σώματος δεν είναι σταθερή;

Απάντηση

Όπως δείξαμε στην προηγούμενη ενότητα, η γραφική παράσταση θέσης - χρόνου της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης είναι ευθεία γραμμή. Όμως, **η γραφική παράσταση θέσης - χρόνου της Εικόνας 2-14(α) δεν είναι ευθεία γραμμή.** Συνεπώς, το σώμα *δεν μετατοπίζεται κατά το ίδιο διάστημα* Δx *σε ίσα χρονικά διαστήματα*, αλλά η ταχύτητά του αλλάζει με το χρόνο.

Για παράδειγμα, μεταξύ των στιγμών 0,0 s και 1,0 s το σώμα μετατοπίζεται κατά $\Delta x = 4{,}9$ m – 4,0 m = +0,9 m, ενώ μεταξύ των στιγμών 4,0 s και 5,0 s μετατοπίζεται κατά $\Delta x = +1{,}2$ m – 2,5 m = –1,3 m.

Συμπεραίνουμε ότι:

Όταν η γραφική παράσταση θέσης - χρόνου ενός σώματος δεν είναι ευθεία γραμμή, το σώμα κινείται με μεταβαλλόμενη ταχύτητα.

Άσκηση

Από την Εικόνα 2-14(α), να εκτιμήσετε την μετατόπιση του σώματος στα διαστήματα 1,5 s - 2,5 s και 2,5 s - 3,5 s.

Η γραφική παράσταση **ταχύτητας - χρόνου** του σώματος απεικονίζεται στην Εικόνα 2-14 (β). Η ταχύτητα είναι αρχικά θετική, αλλά ελαττώνεται και μηδενίζεται τη στιγμή $t = 1{,}5$ s. Στο διάστημα 1,5 s - 5 s η ταχύτητα είναι αρνητική.

2.12. Εκτίμηση της Μέσης Διανυσματικής Ταχύτητας και της Στιγμιαίας Ταχύτητας από τη Γραφική Παράσταση Θέσης - Χρόνου

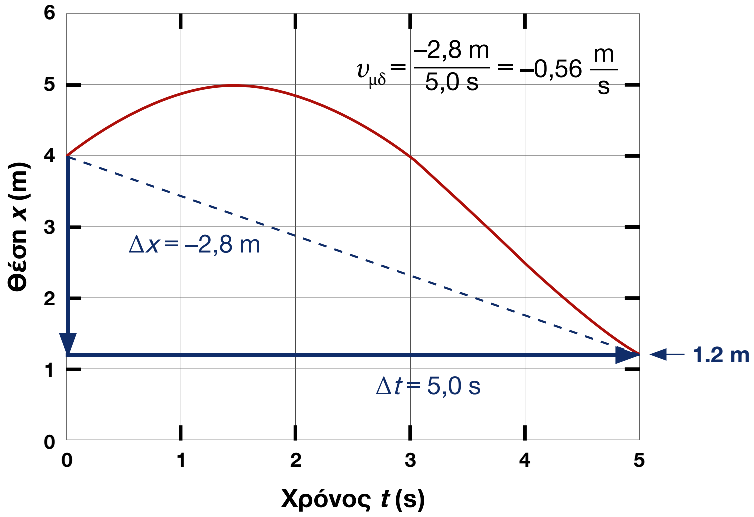
Από τη γραφική παράσταση **θέσης - χρόνου** μπορούμε να υπολογίσουμε τη **μέση διανυσματική ταχύτητα** και τη **στιγμιαία ταχύτητα** σε κάποιο χρονικό διάστημα, όπως εξηγούμε πιο κάτω.

Εκτίμηση της Μέσης Διανυσματικής Ταχύτητας

Στην Εικόνα 2-15 σχεδιάζουμε ξανά το διάγραμμα θέσης - χρόνου του σώματος της Εικόνας 2-14(α). Το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_1 = 4{,}0$ m τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}0$ s, και στη θέση $x_2 = 1{,}2$ m τη χρονική στιγμή $t_2 = 5{,}0$ s. Η συνολική μετατόπιση του σώματος στο διάστημα

0,0 s - 5,0 s είναι $\Delta x = x_2 - x_1 = -2{,}8$ m. Άρα, η μέση διανυσματική ταχύτητα του σώματος ισούται με $\upsilon_\mu = \Delta x/\Delta t = (-2{,}8\ \text{m})/(5{,}0\ \text{s}) = -0{,}56$ m/s.

Εικόνα 2-15
Εκτίμηση για τη μέση διανυσματική ταχύτητα στο χρονικό διάστημα 0,0 s - 5,0 s.



Να παρατηρήσετε ότι η τιμή της μέσης διανυσματικής ταχύτητας ισούται με την κλίση του μπλε διακεκομμένου ευθύγραμμου τμήματος, το οποίο έχει άκρα τα σημεία της γραφικής παράστασης στην αρχή και το τέλος της κίνησης. Συμπεραίνουμε ότι:

Η μέση διανυσματική ταχύτητα μεταξύ δύο στιγμών t_1, t_2 ισούται με την κλίση του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα αντίστοιχα σημεία, στο γράφημα **θέσης - χρόνου**.

Εκτίμηση της Στιγμιαίας Ταχύτητας

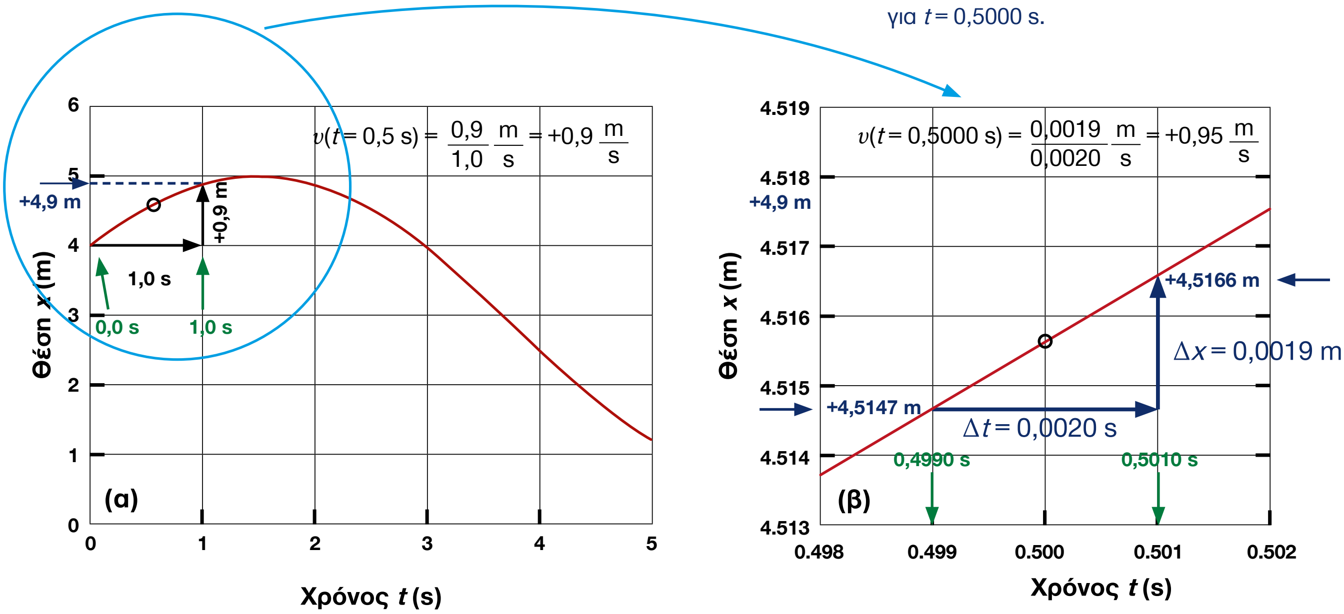
Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τη στιγμιαία ταχύτητα του σώματος της Εικόνας 2-15, κατά τη χρονική στιγμή $t = 0{,}5$ s. **Εργαζόμαστε όπως για τη μέση ταχύτητα**, με τη μόνη διαφορά ότι χρησιμοποιούμε ένα **πολύ μικρό χρονικό διάστημα** γύρω από τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Στην Εικόνα 2-16(α) θεωρούμε το διάστημα $\Delta t = 0{,}0$ s – 1,0 s, με μέσο τη χρονική στιγμή $t = 0{,}5$ s.

Η αντίστοιχη μετατόπιση είναι ίση με $\Delta x = +0{,}9$ m, και η εκτίμηση για τη στιγμιαία ταχύτητα τη στιγμή $t = 0{,}5$ s είναι $\Delta x/\Delta t = (+0{,}9\ \text{m})/(1{,}0\ \text{s}) = +0{,}9$ m/s.

Εάν η διακριτική ικανότητα των οργάνων μέτρησης χρόνου και απόστασης είναι υψηλή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Η εκτίμηση για τη στιγμιαία ταχύτητα θα προσεγγίζει τότε καλύτερα την ακριβή τιμή της ταχύτητας. Αυτό φαίνεται στην Εικό-

Εικόνα 2-16
(α) Εκτίμηση για τη στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή t = 0,5 s (σημειώνεται με τον μικρό κύκλο) από το χρονικό διάστημα 0,0 s - 1,0 s. (β) Μεγέθυνση της Εικόνας 2-16(α) γύρω από τη χρονική στιγμή t = 0,5000 s. Όταν το χρονικό διάστημα γίνεται πολύ μικρό, το αντίστοιχο τμήμα της γραφικής παράστασης προσεγγίζει ευθύγραμμο τμήμα. Η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος είναι ίση με τη στιγμιαία ταχύτητα για t = 0,5000 s.



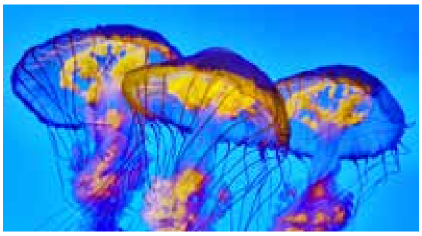
να 2-16(β), όπου έχουμε κάνει μεγέθυνση της γραφικής παράστασης θέσης - χρόνου 2-16(α) γύρω από τη χρονική στιγμή 0,5000 s.

Στο διάστημα 0,4990 s - 0,5010 s, η μετατόπιση είναι ίση με Δx = +0,0019 m και η εκτίμηση για τη στιγμιαία ταχύτητα γίνεται $\upsilon = \Delta x/\Delta t$ = (+0,0019 m)/(0,0020 s) = +0,95 m/s.

Να παρατηρήσετε ότι η καμπύλη θέσης - χρόνου στο διάστημα 0,4980 s - 0,5020 s είναι περίπου ευθύγραμμη, όπως φαίνεται από την Εικόνα 2-16(β). **Η παρατήρηση αυτή ισχύει γενικά, όταν το χρονικό διάστημα είναι πολύ μικρό.** Συμπεραίνουμε ότι:

Για να εκτιμήσουμε τη **στιγμιαία ταχύτητα** σε κάποια χρονική στιγμή t από τη γραφική παράσταση **θέσης - χρόνου**, επιλέγουμε *ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα γύρω από τη στιγμή t.* Το αντίστοιχο τμήμα της γραφικής παράστασης γίνεται ευθύγραμμο, και **η κλίση του ισούται με τη στιγμιαία ταχύτητα.**

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερώτηση 2.12.1., σελ. 124.



Τα κνιδόζωα (όπως οι θαλάσσιες ανεμώνες, οι μέδουσες, και οι ύδρες) κεντρίζουν τα θύματά τους, εξακοντίζοντας κατάλληλα μικροσκοπικά οργανίδια με επιτάχυνση που ανέρχεται σε 50 000 000 m/s^2.

Η μέση επιτάχυνση των πρωτονίων στον μεγάλο επιταχυντή αδρονίων (LHC) στο CERN ανέρχεται σε 1 900 000 000 m/s^2.

Πηγή: alpinethread - Flickr, CC BY-SA 2.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4538468

Το φυσικό μέγεθος, που εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο αλλάζει η ταχύτητα ενός σώματος, είναι η επιτάχυνση. Όπως στην περίπτωση της ταχύτητας, ορίζουμε τη μέση και τη στιγμιαία επιτάχυνση.

Μέση Επιτάχυνση

Έστω ότι ένα κινούμενο σώμα έχει ταχύτητες υ_1 και υ_2 σε δύο χρονικές στιγμές t_1 και t_2. Η μεταβολή στη στιγμιαία ταχύτητα, $\Delta\upsilon$, υπολογίζεται αφαιρώντας την αρχική ταχύτητα υ_1 από την τελική ταχύτητα υ_2: $\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1$. Ως **μέση επιτάχυνση** α_μ ορίζεται *το πηλίκο της μεταβολής της ταχύτητας, $\Delta\upsilon$, προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt:*

$$\text{Μέση Επιτάχυνση: } \alpha_\mu = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$$

Η μέση επιτάχυνση είναι διανυσματικό μέγεθος, και έχει την ίδια κατεύθυνση με τη μεταβολή της ταχύτητας, $\Delta\upsilon$.

Στην ευθύγραμμη κίνηση, η διεύθυνση της μέσης επιτάχυνσης συμπίπτει με τη διεύθυνση της ευθείας κίνησης. Η φορά της μέσης επιτάχυνσης δηλώνεται *από το πρόσημο της μεταβολής της ταχύτητας*, $\Delta\upsilon$. Από τον ορισμό της μέσης επιτάχυνσης προκύπτει ότι η μονάδα μέτρησης της επιτάχυνσης στο σύστημα SI είναι το $\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Ερώτηση

Ένα αυτοκίνητο κινείται με μέση επιτάχυνση +2 m/s^2 για χρονικό διάστημα 12 s. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της ταχύτητας του αυτοκινήτου κατά τη διάρκεια του χρονικού αυτού διαστήματος.

Απάντηση

Από τον ορισμό της μέσης επιτάχυνσης προκύπτει:

$$\alpha_\mu = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\upsilon = \alpha_\mu \Delta t \Rightarrow \Delta\upsilon = (+2\ \text{m/s}^2) \times (12\ \text{s}) \Rightarrow \Delta\upsilon = +24\ \text{m/s}$$

Ερώτηση

Ένα αυτοκίνητο φρενάρει με μέση επιτάχυνση –4 m/s^2 και η ταχύτητά του μεταβάλλεται κατά –36 m/s. Να προσδιορίσετε το χρονικό διάστημα, στο οποίο παρατηρείται αυτή η μείωση της ταχύτητας.

Απάντηση

Από τον ορισμό της μέσης επιτάχυνσης προκύπτει:

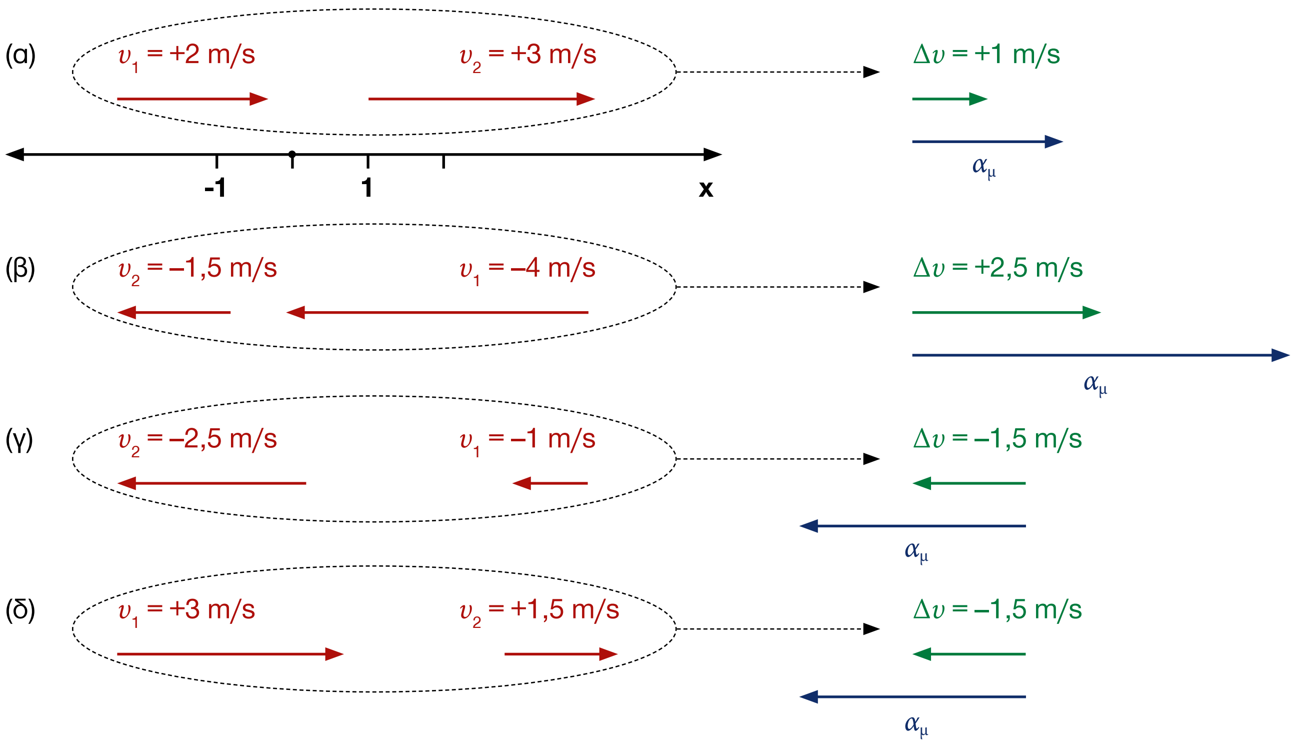
$$\alpha_\mu = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\upsilon}{\alpha_\mu} \Rightarrow \Delta t = \frac{-36\ \text{m/s}}{-4\ \text{m/s}^2} \Rightarrow \Delta t = 9\ \text{s}$$

2.14. Διανυσματικός Χαρακτήρας της Επιτάχυνσης

Στην Εικόνα 2-17 απεικονίζονται παραδείγματα μεταβολών ταχύτητας για ένα αυτοκίνητο που κινείται σε ευθεία γραμμή. Υπενθυμίζουμε ότι τα βέλη **θετικής** ταχύτητας έχουν φορά προς την κατεύθυνση που **αυξάνονται οι τιμές των θέσεων**. Αυτές μεγαλώνουν προς τα δεξιά, όπως κοιτάμε το σχήμα. Γι αυτό και οι ταχύτητες είναι θετικές για κινήσεις προς τα δεξιά.

Η περίπτωση (α) αντιστοιχεί σε κίνηση με θετική, αυξανόμενη ταχύτητα. Η μεταβολή της ταχύτητας, $\Delta\upsilon$, και η αντίστοιχη μέση επιτάχυνση είναι θετικές. Στην περίπτωση (β) το αυτοκίνητο κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση και φρενάρει. Επειδή η ταχύτητα του αυτοκινήτου γίνεται λιγότερο αρνητική, η μεταβολή $\Delta\upsilon$ και η μέση επιτάχυνση είναι θετικές, όπως και στην περίπτωση (α). Στο τρίτο παράδειγμα, η ταχύτητα γίνεται όλο και πιο αρνητική, οπότε η μεταβολή στην ταχύτητα $\Delta\upsilon$ και η μέση επιτάχυνση είναι αρνητικές. Στο τελευταίο παράδειγμα η ταχύτητα είναι θετική και ελαττώνεται. Η μεταβολή $\Delta\upsilon$ και η μέση επιτάχυνση είναι αρνητικές.

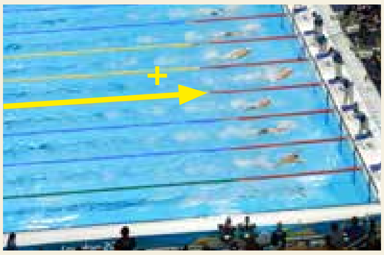
Εικόνα 2-17
Παραδείγματα μεταβολών ταχύτητας για ένα σώμα, που κινείται σε ευθεία γραμμή.



Συνοψίζουμε:

- **Θετική μέση επιτάχυνση** μπορεί να σημαίνει αύξηση του μέτρου της θετικής ταχύτητας, ή ελάττωση του μέτρου της αρνητικής ταχύτητας (περιπτώσεις α, β).
- **Αρνητική μέση επιτάχυνση** μπορεί να σημαίνει αύξηση του μέτρου της αρνητικής ταχύτητας, ή ελάττωση του μέτρου της θετικής ταχύτητας (περιπτώσεις γ, δ).

Να παρατηρήσετε ότι, όταν η μεταβολή της ταχύτητας είναι θετική ($\Delta\upsilon > 0$), το αντίστοιχο βέλος έχει φορά προς την κατεύθυνση που αυξάνονται οι τιμές των θέσεων. Ομοίως, όταν η μεταβολή της ταχύτητας είναι αρνητική ($\Delta\upsilon < 0$) το αντίστοιχο βέλος έχει φορά προς την κατεύθυνση που μειώνονται οι τιμές των θέσεων. Η μέση επιτάχυνση α_μ έχει το ίδιο πρόσημο με τη μεταβολή $\Delta\upsilon$, και τα αντίστοιχα βέλη έχουν τη ίδια φορά. Το μήκος του βέλους της μέσης επιτάχυνσης είναι ανάλογο με το μήκος του βέλους της μεταβολής της ταχύτητας.



Πηγή: By Madchester - London Aquatics Centre, CC BY-SA 3.0, https://en.wikipedia.org/w/index.php?curid= 36702795

Ερώτηση

Δύο κολυμβητές συμμετέχουν σε έναν αγώνα κολύμβησης. Η θετική κατεύθυνση της κίνησης υποδεικνύεται με το κίτρινο βέλος στη διπλανή εικόνα.

Ο επόμενος πίνακας περιέχει τις ταχύτητες των αθλητών σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Α. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της ταχύτητας $\Delta\upsilon$ και τη **μέση επιτάχυνση** α_μ των δύο αθλητών, στα χρονικά διαστήματα του πιο κάτω πίνακα.

t_1 (s)	Ταχύτητα υ_1 (m/s)	t_2 (s)	Ταχύτητα υ_2 (m/s)	Δυ	α_μ	Βέλος $\vec{\alpha}_\mu$ $\xrightarrow{+}$
Κολυμβητής Α						
9	+1	14	+2			
21	–2,2	25	–1,8			
Κολυμβητής Β						
12	+2,1	14	+1,9			
21	–1,9	25	–2,1			

Β. Γιατί οι ταχύτητες των δύο αθλητών έχουν αρνητικά πρόσημα στο διάστημα 21 - 25 s;

Γ. Στην τελευταία στήλη του πίνακα, να σχεδιάσετε το βέλος της μέσης επιτάχυνσης, με κλίμακα $0{,}1\ m/s^2 \Rightarrow 0{,}5$ cm. Στον πίνακα έχει σημειωθεί η θετική κατεύθυνση.

Δ. Με βάση τα αποτελέσματά σας, να εξηγήσετε κατά πόσο είναι σωστά ή λανθασμένα τα ακόλουθα συμπεράσματα:

(1) Όταν η μέση επιτάχυνση είναι θετική, το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται.
(2) Όταν η μέση επιτάχυνση είναι αρνητική, το μέτρο της ταχύτητας ελαττώνεται.

Σημείωση

Στην καθομιλουμένη, όταν το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται με το χρόνο, η κίνηση αναφέρεται ως επιβραδυνόμενη.

Ερώτηση

Μπορεί μία επιβραδυνόμενη κίνηση να έχει θετική επιτάχυνση;

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερώτηση 2.14.1., σελ. 124.

2.15. Στιγμιαία Επιτάχυνση

Η μέση επιτάχυνση εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας σε κάποιο χρονικό διάστημα. Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε ότι ένα σώμα κινήθηκε για 10 s με μέση επιτάχυνση 10 m/s^2, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η τελική ταχύτητα είναι κατά 100 m/s μεγαλύτερη από την αρχική. Στην πραγματικότητα δεν γνωρίζουμε τον ακριβή τρόπο, με τον οποίο μεταβλήθηκε η ταχύτητα στο διάστημα των 10 s. Για παράδειγμα, είναι πιθανόν η ταχύτητα να αυξήθηκε κατά 100 m/s τα πρώτα 5 s της κίνησης, και να διατηρήθηκε σταθερή στα υπόλοιπα 5 s.

Το μέγεθος που εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας **σε μια χρονική στιγμή** είναι η **στιγμιαία επιτάχυνση**. Για να προσδιορίσουμε τη στιγμιαία επιτάχυνση $\alpha(t)$, υπολογίζουμε τη μεταβολή της ταχύτητας *σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα* Δt *γύρω από τη χρονική στιγμή t.*

$$\alpha(t) = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}, \text{ για } \Delta t \text{ πολύ μικρό γύρω από την στιγμή } t$$

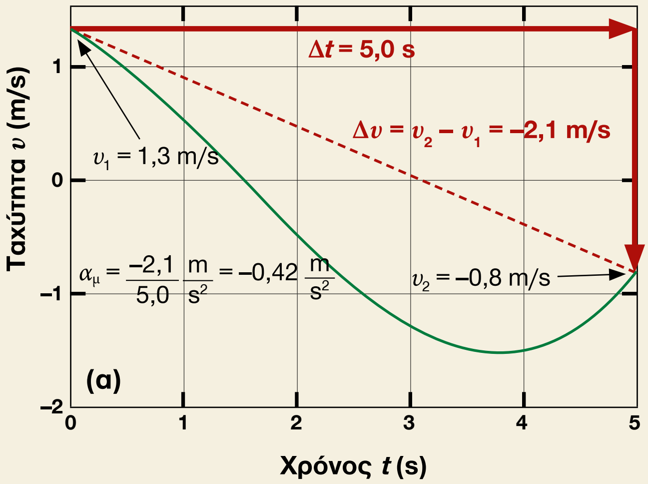
Προσδιορισμός της Μέσης και της Στιγμιαίας Επιτάχυνσης από τη Γραφική Παράσταση Ταχύτητας - Χρόνου

Από τη γραφική παράσταση **ταχύτητας - χρόνου** μπορούμε να υπολογίσουμε τη **μέση επιτάχυνση** και τη **στιγμιαία επιτάχυνση** σε κάποιο χρονικό διάστημα, όπως εξηγούμε πιο κάτω.

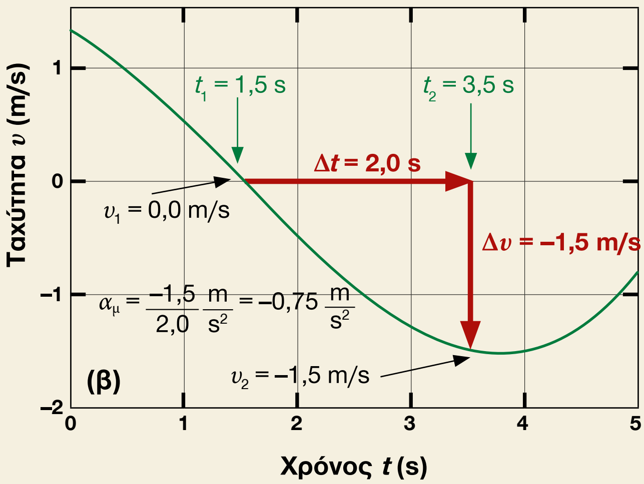
Υπολογισμός της Μέσης Επιτάχυνσης

Στην Εικόνα 2-18(α) σχεδιάζουμε ξανά το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου του σώματος της Εικόνας 2-14(β). Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τη μέση επιτάχυνση στο χρονικό διάστημα 0,0 s - 5,0 s. Τις χρονικές στιγμές t_1 = 0,0 s και t_2 = 5,0 s, οι αντίστοιχες ταχύτητες είναι υ_1= +1,3 m/s και υ_2 = –0,8 m/s. Άρα, η μεταβολή στην ταχύτητα ισούται με $\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1$ = (–0,8 m/s) – (1,3 m/s) = –2,1 m/s. Στο ίδιο διάστημα, η μέση επιτάχυνση είναι $\alpha_\mu = \Delta\upsilon/\Delta t$ = (–2,1 m/s) / 5,0 s = –0,42 m/s.

Εικόνα 2-18 (α)
Εκτίμηση της μέσης επιτάχυνσης στο διάστημα 0,0 s - 5,0 s, από τη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου.



Εικόνα 2-18 (β)
Εκτίμηση της στιγμιαίας επιτάχυνσης τη στιγμή t = 2,5 s, από τη μεταβολή της ταχύτητας στο χρονικό διάστημα 1,5 s - 3,5 s.



Να παρατηρήσετε ότι η μέση επιτάχυνση ισούται με την κλίση του κόκκινου διακεκομμένου ευθύγραμμου τμήματος, με άκρα τα σημεία της γραφικής παράστασης ταχύτητας - χρόνου στην αρχή και στο τέλος της κίνησης. **Συμπεραίνουμε ότι:**

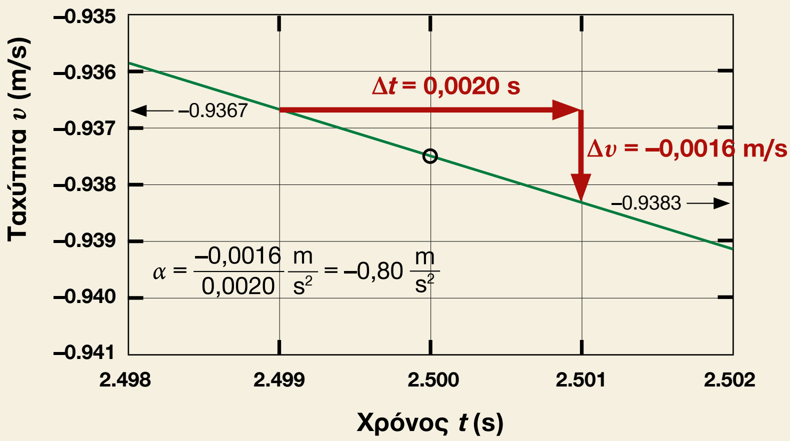
Η **μέση διανυσματική επιτάχυνση** μεταξύ δύο στιγμών t_1, t_2 ισούται με την **κλίση** του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα αντίστοιχα σημεία στο γράφημα **ταχύτητας - χρόνου**.

Υπολογισμός της Στιγμιαίας Επιτάχυνσης

Για να εκτιμήσουμε τη **στιγμιαία επιτάχυνση** από τη γραφική παράσταση **ταχύτητας - χρόνου**, σε κάποια χρονική στιγμή *t*, προσδιορίζουμε τη μεταβολή στην ταχύτητα του σώματος *σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα γύρω από τη στιγμή t.*

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τη στιγμιαία επιτάχυνση του σώματος της Εικόνας 2-18(α), κατά τη χρονική στιγμή $t = 2{,}5$ s. Θεωρούμε το χρονικό διάστημα 1,5 s - 3,5 s με μέσο τη στιγμή $t = 2{,}5$ s, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2-18(β). Η αντίστοιχη μεταβολή στην ταχύτητα είναι $\Delta\upsilon = -1{,}5$ m/s, και η εκτίμηση για την επιτάχυνση τη στιγμή $t = 2{,}5$ s είναι $\alpha(t = 2{,}5\ \text{s}) = \Delta\upsilon/\Delta t = (-1{,}5\ \text{m/s}) / (2{,}0\ \text{s}) = -0{,}75\ \text{m/s}^2$.

Στην Εικόνα 2-19 έχουμε κάνει **μεγέθυνση** της γραφικής παράστασης ταχύτητας - χρόνου γύρω από τη στιγμή $t = 2{,}5000$ s. Στο διάστημα 2, 4990 s - 2,5010 s, η αντίστοιχη μεταβολή στην ταχύτητα είναι ίση με –0,0016 m/s. Συνεπώς, η εκτίμηση για την επιτάχυνση τη στιγμή $t = 2{,}5000$ s γίνεται: $\alpha = (-0{,}0016\ \text{m/s}) / (0{,}0020\ \text{s}) = -0{,}80\ \text{m/s}^2$.



Εικόνα 2-19
Μεγέθυνση της γραφικής παράστασης ταχύτητας - χρόνου της Εικόνας 2-18(α) γύρω από τη χρονική στιγμή $t = 2{,}5000$ s.

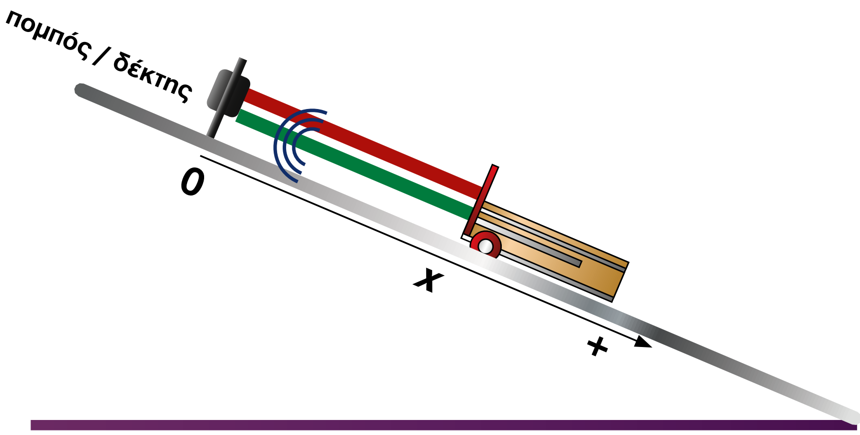
Να παρατηρήσετε ότι η καμπύλη ταχύτητας - χρόνου στο διάστημα 2,4980 s - 2,5020 s είναι περίπου ευθύγραμμη, όπως φαίνεται από την Εικόνα 2-19. **Η παρατήρηση αυτή ισχύει γενικά**, **όταν το χρονικό διάστημα είναι πολύ μικρό.** Συμπεραίνουμε ότι:

Αν η μεγέθυνση της καμπύλης ταχύτητας - χρόνου γίνει πολύ μεγάλη, δηλαδή **αν το χρονικό διάστημα Δt γίνει πολύ μικρό**, το αντίστοιχο τμήμα της καμπύλης ταχύτητας - χρόνου γίνεται ευθύγραμμο, και η **κλίση του ισούται με τη στιγμιαία επιτάχυνση.**

2.16. Πειραματική Μελέτη της Κίνησης με Σταθερή Επιτάχυνση

Μια σημαντική κατηγορία κινήσεων με μεταβαλλόμενη ταχύτητα περιλαμβάνει τα παραδείγματα με σταθερή επιτάχυνση.

Εικόνα 2-20
Διάταξη για την πειραματική μελέτη της κίνησης ενός αυτοκινήτου - μοντέλου σε κεκλιμένο διάδρομο.



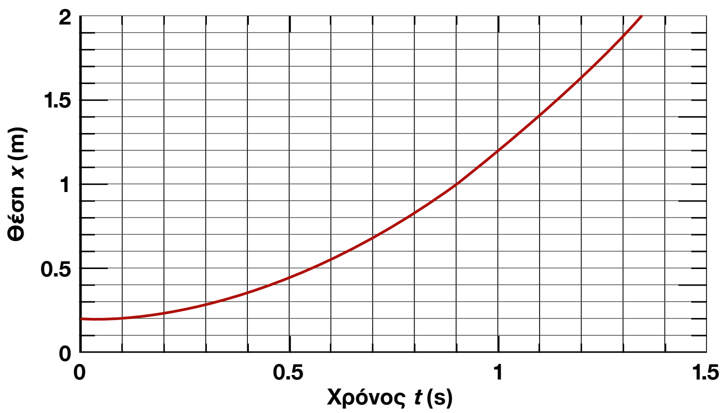
Μια ομάδα μαθητών διερευνά την κίνηση ενός μικρού οχήματος που αφήνεται σε έναν κεκλιμένο διάδρομο, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2-20. Η κίνηση αυτή μπορεί να μελετηθεί με χρήση αισθητήρα κίνησης, που προσδιορίζει την απόσταση ενός σώματος από τον αισθητήρα, όπως εξηγήσαμε στην Ενότητα 2-8.

Το αυτοκίνητο αφήνεται ελεύθερο, οπότε κινείται κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Η ευθεία κίνησης είναι παράλληλη με το κεκλιμένο επίπεδο. Ορίζουμε ως σημείο αναφοράς τον αισθητήρα, και ως θετική τη φορά από το ψηλότερο στο χαμηλότερο σημείο του επιπέδου. Με αυτές τις επιλογές, η απόσταση αισθητήρα-αυτοκινήτου ταυτίζεται με την αλγεβρική τιμή της θέσης του αυτοκινήτου.

Γραφική Παράσταση Θέσης - Χρόνου

Στην Εικόνα 2-21 φαίνεται η γραφική παράσταση θέσης - χρόνου του οχήματος. *Επειδή αυτή δεν είναι ευθεία, συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα του οχήματος μεταβάλλεται.*

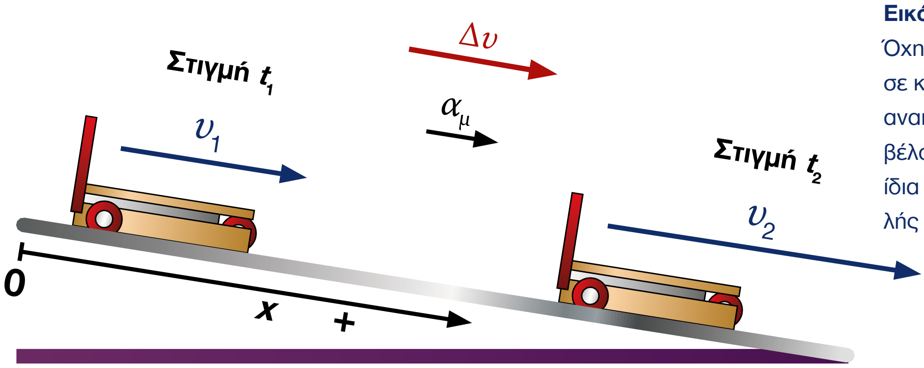
Εικόνα 2-21
Γραφική παράσταση θέσης - χρόνου για όχημα που κινείται σε κεκλιμένο διάδρομο.



Άσκηση

Να επαληθεύσετε ότι η ταχύτητα της κίνησης της γραφικής παράστασης 2-21 μεταβάλλεται, υπολογίζοντας τη μετατόπιση για τα χρονικά διαστήματα 0,0 s - 0,3 s, 0,7 s - 1,0 s και 1,0 s - 1,3 s.

Στην Εικόνα 2-22 παριστάνονται γραφικά τα διανύσματα ταχυτήτων για δύο χρονικές στιγμές t_1 και t_2, και της αντίστοιχης μέσης επιτάχυνσης. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, η μέση επιτάχυνση έχει την ίδια κατεύθυνση με τη μεταβολή της ταχύτητας. Το μήκος του βέλους της μέσης επιτάχυνσης είναι ανάλογο με το μήκος του βέλους της μεταβολής της ταχύτητας.



Εικόνα 2-22

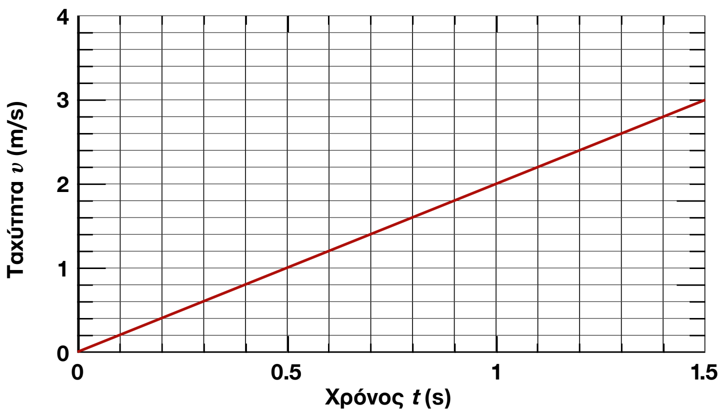
Όχημα που εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση σε κεκλιμένο διάδρομο. Το κόκκινο βέλος αναπαριστά τη διαφορά ταχυτήτων $\Delta\upsilon$. Το βέλος της μέσης επιτάχυνσης α_μ έχει την ίδια κατεύθυνση με το βέλος της μεταβολής της ταχύτητας $\Delta\upsilon$.

Γραφική Παράσταση Ταχύτητας - Χρόνου

Η γραφική παράσταση της ταχύτητας - χρόνου του οχήματος είναι ευθεία, όπως απεικονίζεται στην Εικόνα 2-23. Η μεταβολή της ταχύτητας είναι ανάλογη με το αντίστοιχο χρονικό διάστημα $\Delta\upsilon \propto \Delta t$.

Άσκηση

Να επαληθεύσετε αυτό το συμπέρασμα από τη γραφική παράσταση της Εικόνας 2-23, υπολογίζοντας τη μεταβολή της ταχύτητας για τα χρονικά διαστήματα 0,0 s - 0,5 s, 0,5 s - 1,0 s και 1,0 s - 1,5 s.



Εικόνα 2-23

Γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου που αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση θέσης - χρόνου της Εικόνας 2-21.

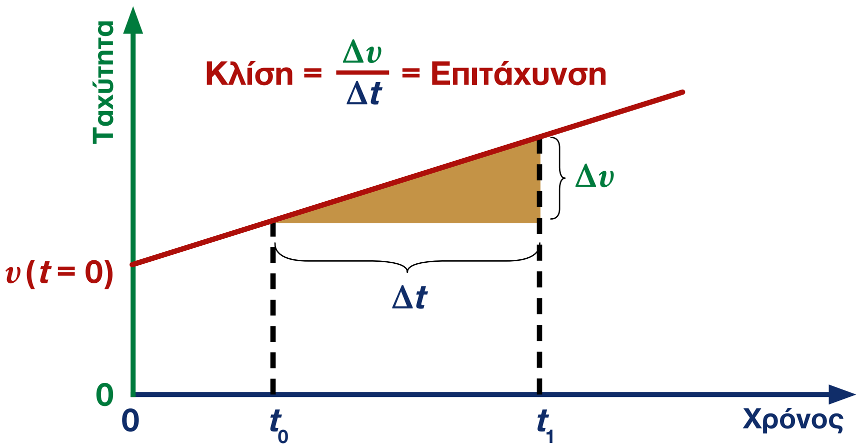
Δεδομένου ότι το πηλίκο $\Delta\upsilon/\Delta t$ είναι σταθερό, η στιγμιαία επιτάχυνση του οχήματος είναι σταθερή, ίση με τη σταθερά αναλογίας. Άρα,

$$\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \alpha$$

Μια κίνηση, στην οποία η επιτάχυνση παραμένει σταθερή, ονομάζεται **ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.**

2.17. Η Κλίση της Ευθείας Ταχύτητας - Χρόνου ισούται με την Επιτάχυνση

Στη γενικότερη περίπτωση που το σώμα έχει μη μηδενική ταχύτητα κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$, η τεταγμένη της ευθείας ταχύτητας - χρόνου είναι διαφορετική του μηδενός (Εικόνα 2-24).



Εικόνα 2-24
Γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου για σταθερή θετική επιτάχυνση με μη μηδενική αρχική ταχύτητα. Η κλίση της ευθείας ισούται με την επιτάχυνση.

Συμπεραίνουμε ότι:

- Στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, η γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου είναι ευθεία γραμμή.
- Η κλίση της ευθείας ταχύτητας - χρόνου ισούται με την τιμή της επιτάχυνσης, και η τεταγμένη της ευθείας ισούται με την τιμή της ταχύτητας για $t = 0$.

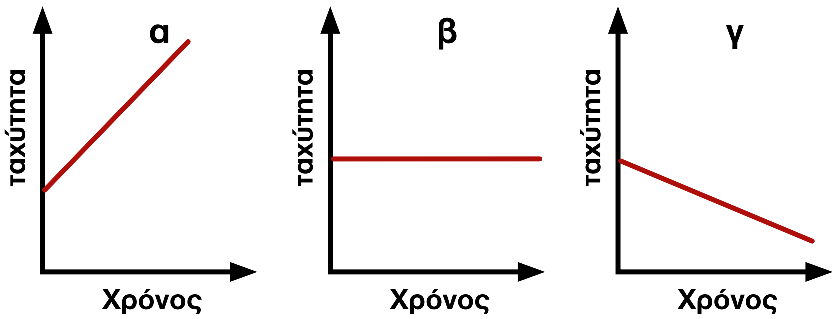
Κλίση ευθείας ταχύτητας - χρόνου $= \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \alpha$

Τεταγμένη ευθείας ταχύτητας - χρόνου $= \upsilon(t = 0)$

Άσκηση

Να υπολογίσετε την επιτάχυνση της κίνησης που περιγράφεται από τη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου της Εικόνας 2-23.

Η Εικόνα 2-25 περιλαμβάνει τρία διαφορετικά παραδείγματα ομαλά επιταχυνόμενων κινήσεων.



Εικόνα 2-25
Η κλίση της ευθείας ταχύτητας - χρόνου δίνει πληροφορίες για την κίνηση. (α) Θετική κλίση αντιστοιχεί σε θετική επιτάχυνση, (β) μηδενική κλίση σε μηδενική επιτάχυνση, και (γ) αρνητική κλίση σε αρνητική επιτάχυνση.

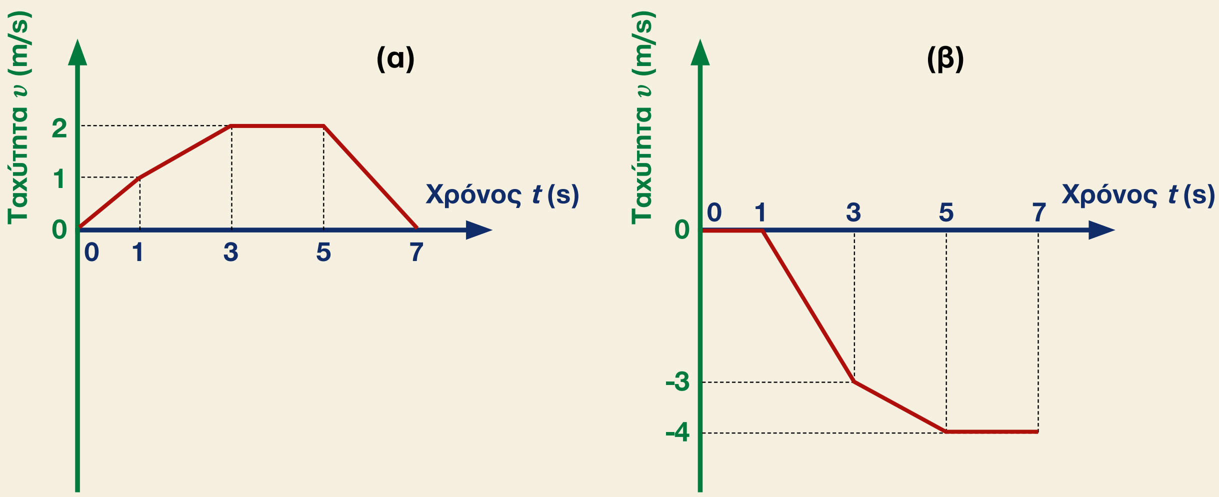
Επειδή η κλίση της ευθείας ισούται με την επιτάχυνση, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Θετική κλίση της ευθείας ταχύτητας - χρόνου αντιστοιχεί σε θετική επιτάχυνση, και αρνητική κλίση σε αρνητική επιτάχυνση. Όσο μεγαλύτερη είναι η κλίση, τόσο μεγαλύτερη είναι η επιτάχυνση.
- Όταν η κλίση είναι μηδενική, η ευθεία ταχύτητας - χρόνου είναι οριζόντια. Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή.

Άσκηση

Το επόμενο σχήμα απεικονίζει τις γραφικές παραστάσεις ταχύτητας - χρόνου για δύο κινούμενα σώματα (α) και (β).

Α. Με βάση την κλίση των διαφόρων τμημάτων των γραφικών παραστάσεων, να περιγράψετε την επιτάχυνση των σωμάτων, χρησιμοποιώντας τις λέξεις μεγάλη/μικρή, αρνητική/θετική/μηδενική.



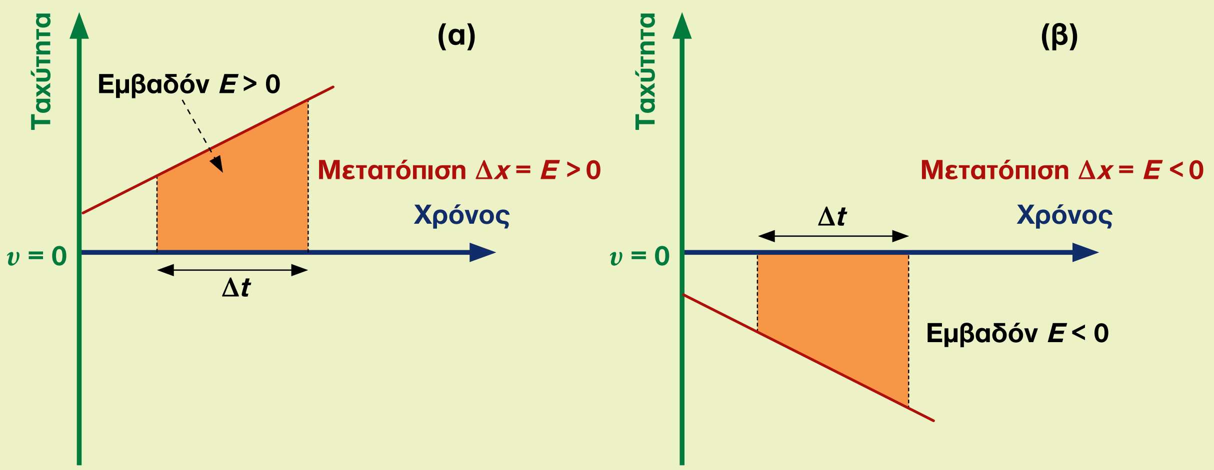
Β. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση των σωμάτων για τα διάφορα χρονικά διαστήματα, στα οποία είναι σταθερή, και να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

Χρονικό Διάστημα	Επιτάχυνση (m/s^2)	
	Σώμα (α)	Σώμα (β)
0 - 1 s		
1 - 3 s		
3 - 5 s		
5 - 7 s		

2.18. Το Εμβαδόν της Γραφικής Παράστασης Ταχύτητας - Χρόνου ισούται με τη Μετατόπιση

Στην ενότητα της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης, είχαμε δείξει ότι το εμβαδόν της επιφάνειας μεταξύ της γραφικής παράστασης ταχύτητας - χρόνου και του άξονα χρόνου είναι ίσο με τη μετατόπιση. Σε **Ένθετο**, στο τέλος του Κεφαλαίου 2, αποδεικνύουμε ότι **αυτό το αποτέλεσμα έχει γενική ισχύ για κινήσεις με μεταβαλλόμενη ταχύτητα**. Συνεπώς:

- Το **εμβαδόν** της επιφάνειας, που περικλείεται από την ευθεία ταχύτητας - χρόνου της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης και τον άξονα του χρόνου, **ισούται με τη μετατόπιση** του σώματος.
- Στον υπολογισμό του εμβαδού, χρησιμοποιούμε την **αλγεβρική τιμή** της ταχύτητας: Εάν η ταχύτητα είναι αρνητική, το εμβαδόν θεωρείται αρνητικό και η μετατόπιση είναι αρνητική.
- Το εμβαδόν έχει **μονάδες μήκους** (ταχύτητα x χρόνος).

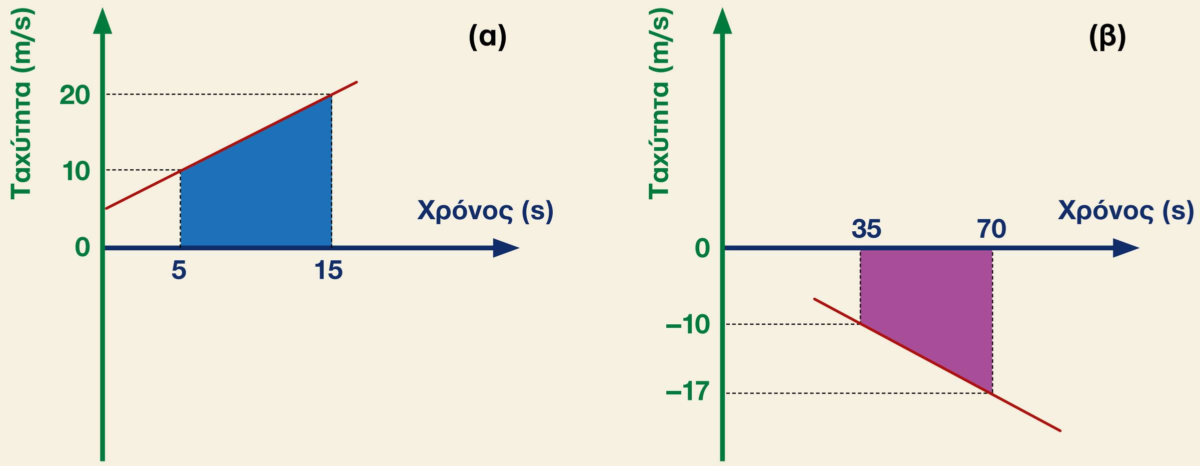


Άσκηση

Το επόμενο σχήμα απεικονίζει τις γραφικές παραστάσεις ταχύτητας - χρόνου για δύο σώματα που εκτελούν ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

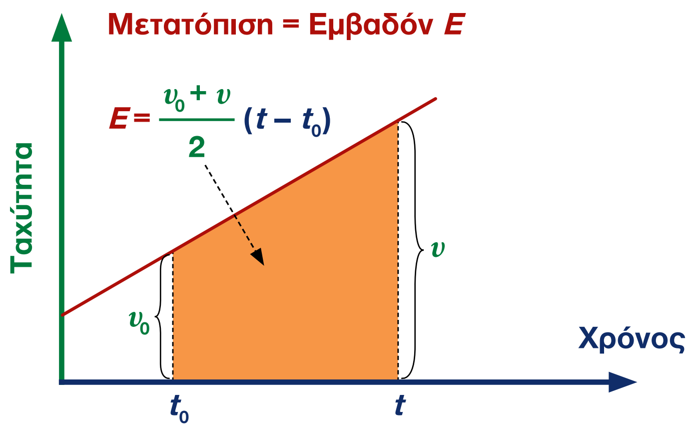
Α. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση κάθε σώματος.

Β. Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του σώματος (α) στο χρονικό διάστημα 5 - 15 s και του σώματος (β) στο χρονικό διάστημα 35 - 70 s.



Μέση Ταχύτητα στην Κίνηση με Σταθερή Επιτάχυνση

Η Εικόνα 2-26 δείχνει τη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου για ένα σώμα που κινείται με σταθερή επιτάχυνση. Τη χρονική στιγμή t_0 το σώμα έχει ταχύτητα υ_0, και μια δεύτερη χρονική στιγμή t έχει ταχύτητα υ.



Εικόνα 2-26
Γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου για σταθερή θετική επιτάχυνση. Το εμβαδόν της επιφάνειας, ανάμεσα στην ευθεία ταχύτητας - χρόνου και τον οριζόντιο άξονα (έγχρωμο τραπέζιο), ισούται με τη μετατόπιση μεταξύ των στιγμών t_0 και t.

Η μετατόπιση του οχήματος στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t - t_0$ ισούται με την επιφάνεια, που περικλείεται ανάμεσα στη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου και τον άξονα χρόνου (το έγχρωμο τραπέζιο):

$$\Delta x = x - x_0 = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2}(t - t_0)$$

Από αυτή την εξίσωση, συμπεραίνουμε ότι η μέση ταχύτητα, του οχήματος υ_μ, ισούται με τη μέση τιμή της αρχικής και τελικής ταχύτητας:

Μέση Ταχύτητα στην Κίνηση με Σταθερή Επιτάχυνση

$$\upsilon_\mu = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2}$$

Προσοχή

Η σχέση αυτή ισχύει μόνο στην περίπτωση της κίνησης με σταθερή επιτάχυνση.

Ερώτηση

Ποιά είναι η μέση ταχύτητα του οχήματος της Εικόνας 2-23, για το πρώτο 1,5 δευτερόλεπτο της κίνησης;

2.19. Εξισώσεις Κίνησης Ταχύτητας - Χρόνου και Θέσης - Χρόνου στην Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση

Εξίσωση Ταχύτητας - Χρόνου

Η μεταβολή στην ταχύτητα του σώματος της Εικόνας 2-26 ισούται με $\Delta\upsilon = \upsilon - \upsilon_0$. Από τον ορισμό της επιτάχυνσης, προκύπτει:

$$\alpha = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\upsilon = \alpha\,\Delta t \Rightarrow \upsilon - \upsilon_0 = \alpha\,(t - t_0) \Rightarrow \upsilon = \upsilon_0 + \alpha\,(t - t_0)$$

Εξίσωση Ταχύτητας - Χρόνου στην Ευθύγραμμη, Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση:

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha\,(t - t_0)$$

Εάν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα ($\upsilon_0 = 0$), η σχέση αποκτά την πιο απλή μορφή:

$$\upsilon = \alpha\, t$$

Η πιο απλή μορφή της εξίσωσης αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου της Εικόνας 2-23.

Εξίσωση Θέσης - Χρόνου

Χρησιμοποιώντας τη σχέση ταχύτητας - χρόνου $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha\,(t - t_0)$, απαλείφουμε την ταχύτητα υ στην εξίσωση της μετατόπισης και εκφράζουμε τη θέση του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου:

$$\Delta x = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2}(t - t_0) \Rightarrow \Delta x = \frac{2\upsilon_0 + \alpha(t - t_0)}{2}(t - t_0) \Rightarrow$$

$$\Delta x = \upsilon_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \Rightarrow x = x_0 + \upsilon_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

Εξίσωση Θέσης - Χρόνου στην Ευθύγραμμη, Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση

$$x = x_0 + \upsilon_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

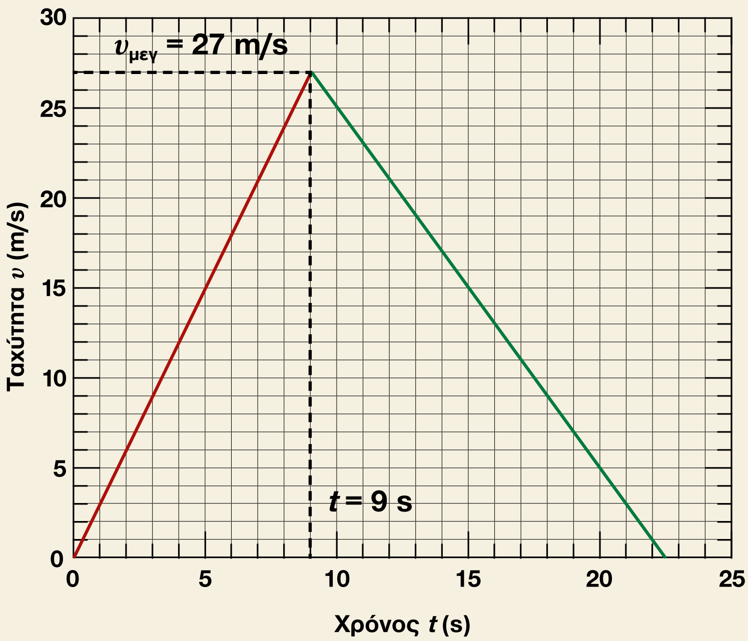
Εάν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$ και έχει ταχύτητα υ_0, η σχέση αποκτά την πιο απλή μορφή:

$$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Παράδειγμα 1

Ενα αυτοκίνητο ξεκινά με μηδενική αρχική ταχύτητα και κινείται με σταθερή επιτάχυνση 3 m/s^2 για 9 s. Ξαφνικά, ο οδηγός αντιλαμβάνεται μια χελώνα στη μέση του δρόμου και πατά απότομα το φρένο. Έπειτα, το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή επιτάχυνση –2 m/s^2 μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του.

Α. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου του αυτοκινήτου. Από τη γραφική παράσταση να υπολογίσετε τη διάρκεια της κίνησης του αυτοκινήτου.



Εικόνα 2-27
Γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου του αυτοκινήτου.

Θεωρούμε ότι το αυτοκίνητο αρχίζει να κινείται τη χρονική στιγμή $t = 0$. Στα πρώτα 9 s η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη, με επιτάχυνση +3 m/s^2. Συνεπώς, η γραφική παράσταση στο διάστημα 0 s - 9 s είναι ευθεία που διέρχεται από το σημείο (t = 0 s, υ = 0 m/s), με κλίση +3 m/s^2 όπως φαίνεται στην Εικόνα 2-27. Τη χρονική στιγμή t = 9 s η ευθεία έχει τεταγμένη (3 m/s^2) x (9 s) = 27 m/s.

Για χρόνο t ≥ 9 s, η γραφική παράσταση είναι ευθεία με κλίση $-2\ m/s^2$. Χαράσσουμε αυτή την ευθεία μέχρι το σημείο στο οποίο μηδενίζεται η τεταγμένη της. Η τετμημένη της ευθείας σε εκείνο το σημείο ισούται με τη χρονική στιγμή στην οποία μηδενίζεται η ταχύτητα του αυτοκινήτου. Από το διάγραμμα εκτιμούμε ότι η χρονική στιγμή αυτή ισούται με $t = 22{,}5$ s.

Β. Από την εξίσωση κίνησης ταχύτητας - χρόνου να επιβεβαιώσετε ότι η διάρκεια της κίνησης του αυτοκινήτου είναι $t = 22{,}5$ s.

Για χρόνο $t \geq 9$ s η εξίσωση ταχύτητας - χρόνου είναι:

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha\,(t - t_0)$$

όπου $\upsilon_0 = +27$ m/s, $\alpha = -2\ m/s^2$ και $t_0 = 9$ s. Η ταχύτητα μηδενίζεται όταν:

$$t - t_0 = \frac{-\upsilon_0}{\alpha} \Rightarrow t = t_0 - \frac{\upsilon_0}{\alpha} = 9\text{ s} - \frac{27\text{ m/s}}{-2\text{ m/s}^2} = 22{,}5\text{ s}$$

Γ. Από τη γραφική παράσταση, να υπολογίσετε τη συνολική μετατόπιση του αυτοκινήτου.

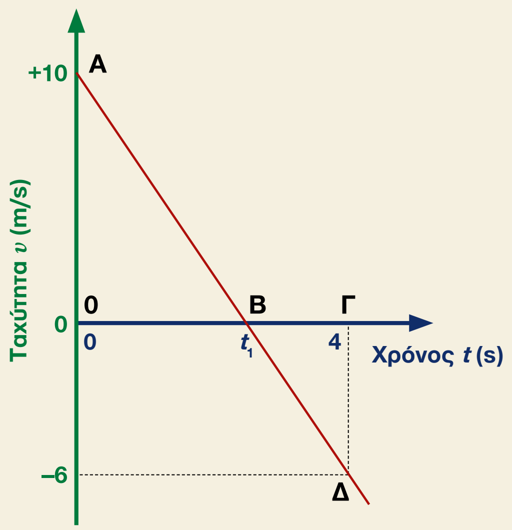
Η συνολική μετατόπιση ισούται με το εμβαδόν της τριγωνικής επιφάνειας που περικλείεται από τη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου και τον άξονα χρόνου:

$$\Delta x = E = \frac{1}{2}\,\upsilon_{max}\,\Delta t = \frac{1}{2}\,(27\text{ m/s}) \times (22{,}5\text{ s}) = 304\text{ m}.$$

Παράδειγμα 2

Κίνηση με σταθερή αρνητική επιτάχυνση και αντιστροφή φοράς της ταχύτητας.

Στην Εικόνα 2-28 φαίνεται η γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου ενός φορτισμένου σταγονιδίου μελάνης εκτυπωτή, που κινείται σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και τη στιγμή $t = 0$ s έχει ταχύτητα $\upsilon_0 = +10$ m/s. Το σταγονίδιο κινείται συνεχώς ευθύγραμμα.



Εικόνα 2-28
Γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου για σώμα που κινείται με σταθερή αρνητική επιτάχυνση και αντιστρέφει τη φορά της ταχύτητας.

Α. Χρησιμοποιώντας την Εικόνα 2-28, να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σταγονιδίου.

Επειδή η γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου είναι ευθεία με αρνητική κλίση, η επιτάχυνση είναι σταθερή και αρνητική. Η τιμή της επιτάχυνσης ισούται με την κλίση της ευθείας:

$$\alpha = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t - t_0} = \frac{-6 - (+10)}{4 - 0}\,\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = -4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Β. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση κίνησης ταχύτητας - χρόνου της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή στην οποία μηδενίζεται η ταχύτητα του σταγονιδίου.

Η σχέση ταχύτητας - χρόνου είναι

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha\,(t - t_0)$$

όπου $t_0 = 0$ s και $\upsilon_0 = +10$ m/s. Μηδενίζοντας την ταχύτητα, βρίσκουμε:

$$\upsilon_0 + \alpha\,(t - t_0) = 0 \Rightarrow t_1 = t_0 - \frac{\upsilon_0}{\alpha} = 0\text{ s} - \frac{10}{-4}\,\frac{\text{m/s}}{\text{m/s}^2} = 2{,}5\text{ s}$$

Γ. Να περιγράψετε την κίνηση του σταγονιδίου.

Το σταγονίδιο κινείται πάνω σε μια ευθεία γραμμή και η θέση του μετράται από κάποιο αυθαίρετο σημείο αναφοράς. Η αρχική ταχύτητα είναι θετική, δηλαδή το σταγονίδιο κινείται αρχικά προς τη θετική κατεύθυνση. Η ταχύτητα ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό και μηδενίζεται τη χρονική στιγμή $t_1 = 2{,}5$ s. Μετά από αυτή τη χρονική στιγμή το πρόσημο της ταχύτητας είναι αρνητικό και το μέτρο της αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Συνεπώς, το σωματίδιο κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση.

Δ. Χρησιμοποιώντας το γράφημα, να υπολογίσετε τη συνολική μετατόπιση του σωματιδίου στο χρονικό διάστημα 0 - 4 s.

Θα χωρίσουμε την κίνηση στα δύο τμήματα με $t < 2{,}5$ s και $t > 2{,}5$ s. Η μετατόπιση σε κάθε τμήμα ισούται με το αντίστοιχο εμβαδόν της τριγωνικής επιφάνειας ανάμεσα στην ευθεία ταχύτητας - χρόνου και τον οριζόντιο άξονα.

(1) Τμήμα $t < 2{,}5$ s: Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ ισούται με:

$$E_1 = \Delta x_1 = \frac{1}{2}(2{,}5\text{ s})(+10\text{ m/s}) = +12{,}5\text{ m}$$

(2) Τμήμα $t > 2{,}5$ s : Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΔ ισούται με:

$$E_2 = \Delta x_2 = \frac{1}{2}(4\text{ s} - 2{,}5\text{ s})(-6\text{ m/s}) = -4{,}5\text{ m}$$

Η συνολική μετατόπιση ισούται με το άθροισμα των μετατοπίσεων στα δύο τμήματα της κίνησης:

$$\Delta x = 12{,}5\text{ m} + (-4{,}5\text{ m}) = +8\text{ m}$$

Σημείωση

Όπως αναφέραμε προηγουμένως:

Τα εμβαδά έχουν μονάδες μήκους, όπως θα έπρεπε, **επειδή εκφράζουν μετατοπίσεις.**

Στον υπολογισμό των εμβαδών χρησιμοποιούμε τις **αλγεβρικές τιμές** των ταχυτήτων. Συνεπώς, το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΔ θεωρείται αρνητικό, επειδή η επιφάνειά του είναι κάτω από τον οριζόντιο άξονα (η ταχύτητα είναι αρνητική στο διάστημα 2,5 - 4 s). Η αρνητική μετατόπιση εκφράζει το γεγονός ότι το σωματίδιο έχει αντιστρέψει τη φορά κίνησής του σε αυτό το χρονικό διάστημα.

Ε. Να υπολογίσετε τη συνολική μετατόπιση από την εξίσωση θέσης - χρόνου.

Η εξίσωση θέσης - χρόνου είναι:

$$\Delta x = x - x_0 = \upsilon_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$$

Αντικαθιστώντας τη συνολική χρονική διάρκεια $t - t_0 = 4$ s, καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με το ερώτημα **Δ**:

$$\Delta x = (10\ \text{m/s}) \times (4\ \text{s}) + \frac{1}{2} (-4\ \text{m/s}^2) \times (4\ \text{s})^2 = 40\ \text{m} - 32\ \text{m} = +8\ \text{m}$$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερώτηση 2.19.1., σελ. 124.

2.20. Σχέση Ταχύτητας – Μετατόπισης στην Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που κινείται με σταθερή επιτάχυνση a, και σε κάποιο χρονικό διάστημα Δt μετατοπίζεται κατά Δx. Το σώμα έχει αρχική ταχύτητα $\upsilon_{αρχ}$, και τελική ταχύτητα $\upsilon_{τελ}$. Από τις εξισώσεις της **ομαλά επιταχυνόμενης** κίνησης μπορούμε να εξαγάγουμε μια πολύ χρήσιμη σχέση, που συνδέει την μετατόπιση Δx με τις ταχύτητες $\upsilon_{αρχ}$ και $\upsilon_{τελ}$.

Όπως δείξαμε στην Ενότητα 2.18, η μέση διανυσματική ταχύτητα του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_\mu = \frac{\upsilon_{αρχ} + \upsilon_{τελ}}{2}$$

Από τον ορισμό της μέσης διανυσματικής ταχύτητας, προκύπτει:

$$\upsilon_\mu = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = \upsilon_\mu \Delta t \Rightarrow \Delta x = \frac{\upsilon_{αρχ} + \upsilon_{τελ}}{2} \Delta t$$

Ταυτόχρονα, από την σχέση ταχύτητας - χρόνου υπολογίζουμε τη χρονική διάρκεια της κίνησης:

$$\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} = \upsilon_{\alpha\rho\chi} + a\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} - \upsilon_{\alpha\rho\chi}}{a}$$

Συνδυάζοντας τις τελευταίες δύο σχέσεις, συμπεραίνουμε:

$$\Delta x = \frac{\upsilon_{\alpha\rho\chi} + \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}}{2}\,\frac{\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} - \upsilon_{\alpha\rho\chi}}{a} \Rightarrow \Delta x = \frac{\upsilon^2_{\tau\varepsilon\lambda} - \upsilon^2_{\alpha\rho\chi}}{2a} \Rightarrow \upsilon^2_{\tau\varepsilon\lambda} - \upsilon^2_{\alpha\rho\chi} = 2a\Delta x$$

Σχέση Ταχύτητας - Μετατόπισης (Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση)

$$\upsilon^2_{\tau\varepsilon\lambda} - \upsilon^2_{\alpha\rho\chi} = 2a\Delta x$$

Η σχέση αυτή συνδέει την αρχική και την τελική ταχύτητα του σώματος με την μετατόπισή του και την επιτάχυνσή του. Εάν είναι γνωστά τα τρία από τα τέσσερα αυτά μεγέθη, προσδιορίζεται το τέταρτο. Για παράδειγμα:

- Από τις ταχύτητες και την επιτάχυνση υπολογίζουμε τη μετατόπιση:

$$\Delta x = \frac{\upsilon^2_{\tau\varepsilon\lambda} - \upsilon^2_{\alpha\rho\chi}}{2a}$$

- Από τη μετατόπιση, την επιτάχυνση και την αρχική ταχύτητα, υπολογίζουμε την τελική ταχύτητα:

$$\upsilon^2_{\tau\varepsilon\lambda} = \upsilon^2_{\alpha\rho\chi} + 2a\,\Delta x$$

- Από την αρχική και τελική ταχύτητα και τη μετατόπιση, υπολογίζουμε την επιτάχυνση:

$$a = \frac{\upsilon^2_{\tau\varepsilon\lambda} - \upsilon^2_{\alpha\rho\chi}}{2\Delta x}$$

Το χρονικό διάστημα της κίνησης έχει απαλειφθεί στη σχέση ταχύτητας - μετατόπισης, οπότε δεν εισάγεται στους πιο πάνω υπολογισμούς.

Παράδειγμα

Ο διάδρομος απογείωσης σε ένα τυπικό σύγχρονο αεροπλανοφόρο έχει μήκος 100 m. Αν το αεροπλάνο τη στιγμή της απογείωσης χρειάζεται να έχει αναπτύξει ταχύτητα 288 km/h να υπολογίσετε την επιτάχυνση κατά τη διάρκεια της απογείωσης.

Να υποθέσετε ότι η κίνηση του αεροπλάνου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, και ότι το πλοίο είναι ακίνητο. Ποιά είναι η χρονική διάρκεια της απογείωσης;

Αφού το πλοίο είναι ακίνητο, η αρχική ταχύτητα του αεροπλάνου είναι ίση με 0 m/s. Γνωρίζουμε ότι μετά από μετατόπιση 100 m το αεροπλάνο αποκτά ταχύτητα 288 km/h. Μπορούμε να λύσουμε την σχέση ταχύτητας - μετατόπισης ως προς την επιτάχυνση, και να αντικαταστήσουμε τα δεδομένα. Γι αυτό το σκοπό, μετατρέπουμε πρώτα την τελική ταχύτητα σε μονάδες SI:

$$\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} = 288\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 288\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\,\frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}}\,\frac{1\text{h}}{3\,600\ \text{s}} = 80\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση ταχύτητας - μετατόπισης, βρίσκουμε:

$$a = \frac{\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \upsilon_{\alpha\rho\chi}^2}{2\Delta x} = \frac{80^2 - 0^2}{2 \times 100}\,\frac{\text{m}^2/\text{s}^2}{\text{m}} = 32\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Το αεροπλάνο κινείται με επιτάχυνση 32 m/s^2, που είναι περίπου 3,3 φορές μεγαλύτερη από την επιτάχυνση της βαρύτητας (9,81 m/s^2). Για να αποκτήσουν τέτοιες επιταχύνσεις τα αεροπλάνα ωθούνται από ειδικούς καταπέλτες, εγκατεστημένους στο διάδρομο απογείωσης του αεροπλανοφόρου.

Η χρονική διάρκεια της απογείωσης προσδιορίζεται εύκολα από τη μετατόπιση και τη μέση ταχύτητα του αεροπλάνου. Επειδή η επιτάχυνση είναι σταθερή, η μέση ταχύτητα υπολογίζεται από την αρχική και τελική ταχύτητα ως εξής:

$$\upsilon_{\mu} = \frac{\upsilon_{\alpha\rho\chi} + \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}}{2} = \frac{0 + 80}{2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 40\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Έτσι, προκύπτει για τη χρονική διάρκεια της απογείωσης:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\upsilon_{\mu}} = \frac{100}{40}\,\frac{\text{m}}{\text{m/s}} = 2{,}5\ \text{s}$$

Σημείωση

Στο Κεφάλαιο 4, θα δείξουμε ότι η σχέση ταχύτητας - μετατόπισης αναδεικνύει τον ορισμό δύο πολύ σημαντικών φυσικών εννοιών, του **Έργου Δύναμης** και της **Κινητικής Ενέργειας.**

2.21. Ελεύθερη Πτώση: Ένα Παράδειγμα Ομαλά Επιταχυνόμενης Κίνησης

Το 1602, ο Γαλιλαίος μελέτησε την πτώση σωμάτων από σχετικά χαμηλό ύψος από την επιφάνεια της Γης. Διαπίστωσε ότι στις περιπτώσεις που η αντίσταση του αέρα μπορούσε να αγνοηθεί, τα σώματα έπεφταν με την ίδια σταθερή επιτάχυνση, ανεξάρτητα από το βάρος τους.

Γενικά, η κίνηση ενός σώματος υπό την επίδραση της βαρυτικής έλξης της Γης ονομάζεται **ελεύθερη πτώση**.

Η επιτάχυνση ενός σώματος, που πέφτει ελεύθερα, έχει κατακόρυφη διεύθυνση (τη διεύθυνση της ευθείας που ενώνει το σώμα με το κέντρο της Γης), φορά προς το κέντρο της Γης, και ονομάζεται **επιτάχυνση της βαρύτητας**.

Ακριβείς μετρήσεις δείχνουν ότι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος ενός τόπου, και ελαττώνεται από τους πόλους (9,83 m/s^2) προς τον Ισημερινό (9,78 m/s^2).

Στα προβλήματα που θα μελετήσουμε, θεωρούμε ότι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι σταθερό και το θέτουμε ίσο με g = 9,81 m/s^2.

Ένα ιστορικό ανέκδοτο αναφέρει ότι ο Γαλιλαίος μελέτησε την ελεύθερη πτώση σωμάτων από τον πύργο της Πίζας.
Πηγή: By Saffron Blaze - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=29651325

Κατά τη διάρκεια της αποστολής Απόλλων-15 (26 Ιουλίου - 7 Αυγούστου 1971), ο αστροναύτης David Scott έδειξε ότι ένα σφυρί και ένα φτερό πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση στη σελήνη.
Πηγή: http://history.nasa.gov/alsj/a15 a15.clsout3.html

Θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις που το σώμα αφήνεται ελεύθερο χωρίς αρχική ταχύτητα, ή του προσδίδεται αρχική ταχύτητα με κατακόρυφη διεύθυνση. Σε αυτές τις περιπτώσεις το σώμα κινείται συνεχώς σε κατακόρυφη διεύθυνση, με σταθερή επιτάχυνση. Επειδή η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, περιγράφεται από τις εξισώσεις που αποδείξαμε προηγουμένως

$$y = y_0 + \upsilon_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + a(t - t_0)$$

Η μεταβλητή y δηλώνει την θέση πάνω στην ευθεία κίνησης, όπως υπολογίζεται από κάποιο σημείο αναφοράς.

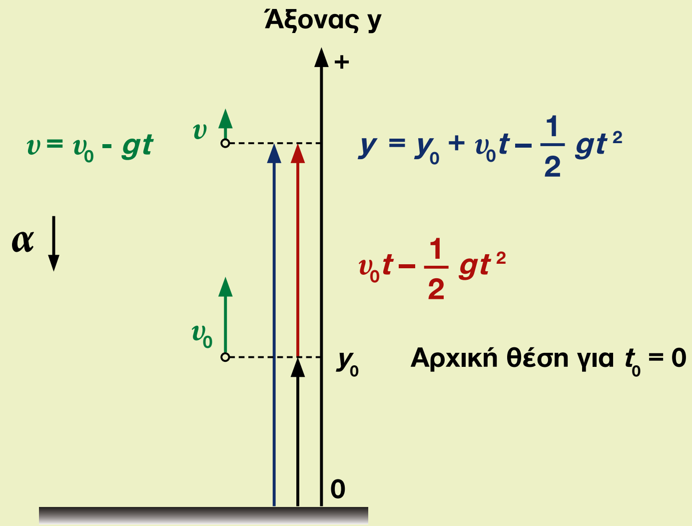
Για να επιλύσουμε γενικά προβλήματα ελεύθερης πτώσης με οποιαδήποτε αρχική θέση και ταχύτητα, η πιο **εύχρηστη σύμβαση** είναι να επιλέξουμε το σημείο αναφοράς στην επιφάνεια της Γης και να *θεωρήσουμε ως θετική την κατεύθυνση προς τα επάνω.* Με αυτή τη σύμβαση, οι θέσεις πάνω από την επιφάνεια της Γης έχουν θετικές τιμές, οι ταχύτητες με κατεύθυνση προς τα επάνω είναι θετικές και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι αρνητική, $a = -g = -9{,}81$ m/s^2. Η μεταβλητή y είναι το ύψος από το έδαφος. Οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν τη μορφή:

Σύμβαση 1:
Σημείο αναφοράς στο έδαφος, και θετική κατεύθυνση προς τα επάνω.

Εξισώσεις της Ελεύθερης Πτώσης:

$$y = y_0 + \upsilon_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2$$

$$\upsilon = \upsilon_0 - g(t - t_0)$$



Η σύμβαση 1 είναι πιο εύχρηστη για προβλήματα κατακόρυφων βολών, στα οποία η ταχύτητα του σώματος αλλάζει πρόσημο κατά τη διάρκεια της κίνησης (αρχικά το σώμα κινείται προς τα επάνω, και μετά από κάποιο χρονικό διάστημα προς τα κάτω).

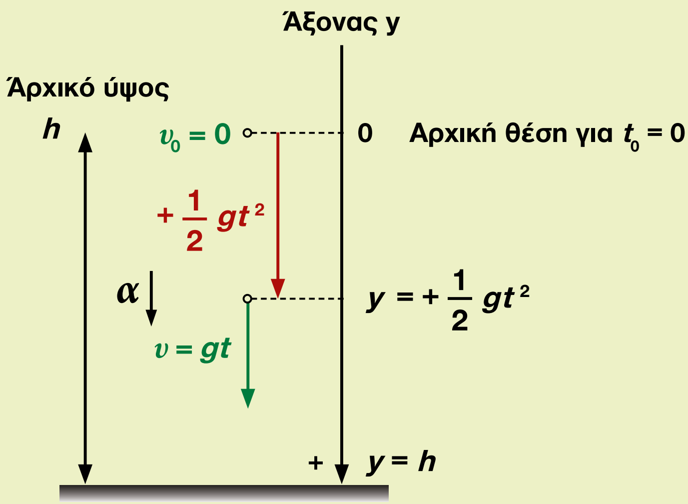
Όταν το σώμα αφήνεται από κάποιο αρχικό ύψος με ταχύτητα προς τα κάτω, μία απλούστερη σύμβαση είναι να θέσουμε το σημείο αναφοράς στην αρχική θέση του σώματος, και τη θετική κατεύθυνση προς τα κάτω. Με αυτή την σύμβαση, οι θέσεις κάτω από την αρχική έχουν θετικές τιμές, οι ταχύτητες με κατεύθυνση προς τα κάτω είναι θετικές και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι θετική, $\alpha = +g = +9{,}81\ m/s^2$. Η μεταβλητή y είναι η απομάκρυνση από την αρχική θέση. Οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν τη μορφή:

Σύμβαση 2:
Σημείο αναφοράς στην αρχική θέση, και θετική κατεύθυνση προς τα κάτω.

Εξισώσεις της Ελεύθερης Πτώσης

$$y = \upsilon_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} g (t - t_0)^2$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + g(t - t_0)$$



Παράδειγμα

Ένα σώμα αφήνεται με μηδενική ταχύτητα από την οροφή του υψηλότερου ουρανοξύστη στον κόσμο (στο Ντουμπάι), σε ύψος 828,0 m από το έδαφος.

Θα υπολογίσουμε την ταχύτητα με την οποία προσκρούει στο έδαφος και τη χρονική διάρκεια της πτώσης, αγνοώντας την αντίσταση του αέρα.

Θα λύσουμε πρώτα το πρόβλημα με τη **σύμβαση 2**: Θέτουμε ως σημείο αναφοράς την αρχική θέση και θεωρούμε θετική την κατεύθυνση προς τα κάτω.

Με αυτή τη σύμβαση, η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι θετική, $\alpha = +g$, η αρχική θέση είναι ίση με $y_0 = 0$ και η θέση του σώματος, όταν φθάνει στο έδαφος, είναι ίση με το ύψος h του ουρανοξύστη.

Για να βρούμε το χρόνο κίνησης, θέτουμε $y = h$ στην εξίσωση κίνησης. Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $y_0 = 0$ και $\upsilon_0 = 0$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή:

$$y_0 + \upsilon_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 = y \Rightarrow + \frac{1}{2} g t_{\kappa\alpha\theta}^2 = h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{\kappa\alpha\theta} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \text{ x } (828{,}0 \text{ m})}{9{,}81 \text{ m/s}^2}} = 13{,}0 \text{ s}$$

Η ταχύτητα πρόσκρουσης υπολογίζεται αν θέσουμε $t = t_{\kappa\alpha\theta}$ στη σχέση ταχύτητας - χρόνου:

$$\upsilon = \upsilon_0 + g t_{\kappa\alpha\theta} \Rightarrow \upsilon = +g t_{\kappa\alpha\theta} = +9{,}81 \text{ x } 13{,}0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\text{s} = +128 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η ταχύτητα αυτή είναι τεράστια (υπολογίστε την σε km/h). Στην πραγματικότητα, ένα σώμα που πέφτει από τέτοιο ύψος υφίσταται επίδραση από την αντίσταση του αέρα, η οποία αυξάνεται με το μέτρο της ταχύτητάς του. Η επίδραση αυτή ελαττώνει την επιτάχυνση του σώματος, οπότε αυτό δεν εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Είναι χρήσιμο να μελετήσουμε το ίδιο πρόβλημα με τη **σύμβαση 1**, και να επιβεβαιώσουμε ότι καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Θέτουμε το σημείο αναφοράς στην επιφάνεια του εδάφους, και θεωρούμε θετική την κατεύθυνση προς τα πάνω. Με αυτή τη σύμβαση, η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι αρνητική, $\alpha = -g$, η αρχική θέση $y_0 = h$, και η θέση του σώματος όταν φθάνει στο έδαφος είναι ίση με $y = 0$.

Για να υπολογίσουμε τη χρονική διάρκεια της πτώσης, θέτουμε $y = 0$ στην εξίσωση κίνησης, λαμβάνοντας υπ' όψη ότι η ταχύτητα υ_0 είναι ίση με μηδέν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$:

$$y = y_0 + \upsilon_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \Rightarrow 0 = h - \frac{1}{2}gt_{\kappa\alpha\theta}^2 \Rightarrow t_{\kappa\alpha\theta} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Συνεπώς, καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με προηγουμένως.

Η ταχύτητα πρόσκρουσης έχει το ίδιο μέτρο και αντίθετο πρόσημο με το αποτέλεσμα της σύμβασης 2:

$$\upsilon = \upsilon_0 - gt_{\kappa\alpha\theta} = -gt_{\kappa\alpha\theta} = -128\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Κατακόρυφη Βολή

Ακολούθως, μελετούμε παράδειγμα κατακόρυφης βολής στο οποίο το σώμα εκτοξεύεται με μη μηδενική αρχική ταχύτητα προς τα επάνω.

Παράδειγμα 1

Το «κανόνι του Παρισιού» χρησιμοποιήθηκε στον πρώτο παγκόσμιο πόλεμο. Είχε τη δυνατότητα να εκτοξεύει βλήματα βάρους 106 kg, τα οποία είχαν αρχική ταχύτητα 1640 m/s και μπορούσαν να πλήξουν στόχους ακόμα και σε απόσταση 130 km.

Να θεωρήσετε ότι ένα βλήμα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα επάνω από το επίπεδο του εδάφους, με αρχική ταχύτητα μέτρου 1000,0 m/s, και να απαντήσετε στα εξής ερωτήματα:

Α. Να περιγράψετε την κίνηση, θεωρώντας ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σύμβαση 1. Το βλήμα ξεκινά με θετική αρχική ταχύτητα, που ελαττώνεται συνεχώς λόγω της έλξης της βαρύτητας. Μετά από χρονικό διάστημα ίσο με το χρόνο ανόδου, το βλήμα φθάνει στο μέγιστο ύψος, όπου η ταχύτητά του μηδενίζεται. Στη συνέχεια, αρχίζει να κινείται προς τα κάτω με αρνητική ταχύτητα, που μεγαλώνει ως προς το μέτρο. Αν και η ταχύτητα αλλάζει πρόσημο, **η επιτάχυνση α είναι συνεχώς σταθερή και αρνητική** (ίση με $\alpha = -g$).

Β. Να υπολογίσετε το συνολικό χρόνο κίνησης του βλήματος.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, το σώμα βρίσκεται σε αρχικό ύψος $y_0 = 0$. Ο συνολικός χρόνος κίνησης του βλήματος, $t = t_{\text{ολ}}$, μπορεί να υπολογισθεί αν απαιτήσουμε η απομάκρυνση από το έδαφος να γίνει ίση με μηδέν, $y = 0$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της κίνησης, παίρνουμε:

$$y - y_0 = \upsilon_0(t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \Rightarrow 0 = \upsilon_0 t_{ολ} - \frac{1}{2} g t_{ολ}^2 \Rightarrow t_{ολ} = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{2\upsilon_0}{g} \end{cases}$$

Η (τετριμμένη) ρίζα $t_{ολ} = 0$ αντιστοιχεί στην αρχική στιγμή, κατά την οποία το βλήμα εκτοξεύεται από το έδαφος. Η δεύτερη ρίζα αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή, κατά την οποία το βλήμα επιστρέφει στο έδαφος. Συμπεραίνουμε:

$$t_{ολ} = \frac{2 \text{ x } (1\ 000{,}0 \text{ m/s})}{9{,}81 \text{ m/s}^2} = 204 \text{ s}$$

Να παρατηρήσετε ότι είναι προτιμότερο να **καταλήγουμε σε μια τελική σχέση**, στην οποία εισάγουμε τα δεδομένα του προβλήματος. Η τελική σχέση:

- μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας, εάν οι αριθμητικές τιμές των δεδομένων αλλάξουν, χωρίς να χρειάζεται να λυθεί το πρόβλημα από την αρχή.
- Αναδεικνύει την εξάρτηση μεταξύ των διαφόρων μεγεθών. Για παράδειγμα, η προηγούμενη σχέση δείχνει ότι ο ολικός χρόνος $t_{ολ}$ είναι ανάλογος με την αρχική ταχύτητα υ_0 και αντιστρόφως ανάλογος με την επιτάχυνση.
- Διευκολύνει την εισαγωγή μονάδων, τις πράξεις μεταξύ μονάδων και τον έλεγχο της ορθότητας του αποτελέσματος.

Γ. Να υπολογίσετε το χρόνο ανόδου.

Η άνοδος τερματίζεται όταν μηδενιστεί η ταχύτητα του βλήματος. Συνεπώς, για να υπολογίσουμε το χρόνο ανόδου μηδενίζουμε την ταχύτητα στην εξίσωση ταχύτητας - χρόνου.

$$\upsilon = 0 \Rightarrow \upsilon_0 - g t_{αν} = 0 \Rightarrow t_{αν} = \frac{\upsilon_0}{g} = \frac{t_{ολ}}{2} = 102 \text{ s}$$

Παρατηρούμε ότι ο χρόνος ανόδου ισούται με το μισό του συνολικού χρόνου κίνησης. Άρα, **ο χρόνος καθόδου του βλήματος ισούται με το χρόνο ανόδου:**

$$t_{αν} = \frac{t_{ολ}}{2} \Rightarrow t_{καθ} = t_{αν}$$

Δ. Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος, στο οποίο φθάνει το βλήμα.

Για να υπολογίσουμε το μέγιστο ύψος θέτουμε $t - t_0 = t_{αν}$ στην εξίσωση θέσης - χρόνου.

$$y - y_0 = \upsilon_0(t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \Rightarrow y_{μεγ} = \upsilon_0 t_{αν} - \frac{1}{2} g t_{αν}^2$$

Αντικαθιστώντας το χρόνο ανόδου από το ερώτημα Γ, καταλήγουμε στη σχέση:

$$y_{\mu\varepsilon\gamma} = \upsilon_0 \frac{\upsilon_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{\upsilon_0}{g}\right)^2 = \frac{\upsilon_0^2}{g} - \frac{\upsilon_0^2}{2g} = \frac{\upsilon_0^2}{2g}$$

Από την τελική σχέση του ερωτήματος **Δ** προκύπτει ότι, για τον υπολογισμό του μέγιστου ύψους δεν χρειάζεται να είναι γνωστός ο χρόνος ανόδου. Στην περίπτωσή μας:

$$y_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{\upsilon_0^2}{2g} = \frac{(1\,000 \text{ m/s})^2}{2 \times (9{,}81 \text{ m/s}^2)} = 50\,968 \text{ m} \cong 51{,}0 \text{ km}$$

Στην πραγματικότητα, τα βλήματα του κανονιού εκτοξεύονταν πλάγια (για να μετακινούνται και στην οριζόντια διεύθυνση), και έφταναν στη στρατόσφαιρα, σε μέγιστο ύψος 42 km. Σε αυτό το ύψος η ατμόσφαιρα είναι πολύ αραιή και η αντίσταση του αέρα μικρή, διευκολύνοντας την κάλυψη μεγάλων αποστάσεων.

Παράδειγμα 2

Ένας πρωταθλητής της κατάδυσης πηδά από ακλόνητο βατήρα με κατακόρυφη αρχική ταχύτητα μέτρου 4 m/s, και κατεύθυνση προς τα επάνω. Ο βατήρας απέχει 6,0 m από το έδαφος. Το σώμα του αθλητή διατηρεί την αρχική του διεύθυνση σε όλη τη διαδρομή, χωρίς να περιστρέφεται.

Α. Να υπολογίσετε το χρόνο που χρειάζεται, για να ακουμπήσουν τα πόδια του αθλητή στο νερό.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη **σύμβαση 1**. Η αρχική ταχύτητα του αθλητή είναι υ_0 = 4 m/s. Όταν ο αθλητής ακουμπά στο νερό, τα πόδια του βρίσκονται στη θέση $y = 0$. Θέτοντας $t_0 = 0$ και $y = 0$ στην εξίσωση κίνησης, παίρνουμε:

$$y = y_0 + \upsilon_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 0 = y_0 + \upsilon_0 t_{\text{ολ}} - \frac{1}{2} g t_{\text{ολ}}^2 \Rightarrow \frac{1}{2} g t_{\text{ολ}}^2 - \upsilon_0 t_{\text{ολ}} - y_0 = 0$$

Ο ζητούμενος χρόνος προκύπτει από τις ρίζες της πιο πάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

$$t_{\text{ολ}} = \frac{-(-\upsilon_0) \pm \sqrt{(-\upsilon_0)^2 - 4(1/2g)(-y_0)}}{2(1/2g)} = \frac{\upsilon_0 \pm \sqrt{\upsilon_0^2 + 2g\,y_0}}{g}$$

Λαμβάνοντας υπ΄ όψη ότι y_0 = +6,0 m και υ_0 = +4,0 m/s παίρνουμε:

$$t_{\text{ολ}} = \frac{4{,}0 \text{ m/s} \pm \sqrt{16 (\text{m/s})^2 + 2 \times (9{,}81 \text{ m/s}^2) \times (6{,}0 \text{ m})}}{9{,}81 \text{ m/s}^2} = \begin{cases} +1{,}6 \text{ s} \\ -0{,}77 \text{ s} \end{cases}$$

Από τις δύο ρίζες επιλέγουμε ως αποδεκτή τη θετική ρίζα. Συνεπώς, τα πόδια του κολυμβητή θα αγγίξουν το νερό μετά από 1,6 s.

Να παρατηρήσετε ότι μελετούμε την κίνηση χωρίς να χρειάζεται να την χωρίσουμε σε τμήματα (άνοδο και κάθοδο).

Β. Να υπολογίσετε τη μέγιστη ανύψωση του αθλητή.

Στη μέγιστη θέση της τροχιάς, μηδενίζεται η ταχύτητα του αθλητή. Θέτοντας την ταχύτητα ίση με μηδέν στην εξίσωση της ταχύτητας, προσδιορίζουμε το χρόνο ανόδου:

$$\upsilon = \upsilon_0 - gt \Rightarrow 0 = \upsilon_0 - gt_{\alpha\nu} \Rightarrow t_{\alpha\nu} = \frac{\upsilon_0}{g}$$

Εάν θέσουμε $t = t_{\alpha\nu}$ στην εξίσωση κίνησης, προκύπτει το μέγιστο ύψος:

$$y_{\mu\varepsilon\gamma} = y_0 + \upsilon_0 t_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} g t_{\alpha\nu}^2 \Rightarrow y_{\mu\varepsilon\gamma} = y_0 + \upsilon_0 \frac{\upsilon_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{\upsilon_0}{g}\right)^2 \Rightarrow y_{\mu\varepsilon\gamma} = y_0 + \frac{\upsilon_0^2}{g} - \frac{\upsilon_0^2}{2g} \Rightarrow y_{\mu\varepsilon\gamma} = y_0 + \frac{\upsilon_0^2}{2g}$$

Αντικαθιστώντας την αρχική ταχύτητα και το αρχικό ύψος στην τελευταία σχέση, βρίσκουμε:

$$y_{\mu\varepsilon\gamma} = +6{,}0\ \text{m} + \frac{(4{,}0\ \text{m/s})^2}{2 \times (9{,}81\ \text{m/s}^2)} \Rightarrow y_{\mu\varepsilon\gamma} = 6{,}8\ \text{m}$$

Άρα, η μέγιστη ανύψωση του αθλητή είναι ίση με

$$\Delta y_{\mu\varepsilon\gamma} = y_{\mu\varepsilon\gamma} - y_0 = 6{,}8\ \text{m} - 6{,}0\ \text{m} = 0{,}8\ \text{m}$$

Ερώτηση

Πώς θα μεταβάλλονταν το αποτέλεσμα, εάν είχαμε χρησιμοποιήσει τη σύμβαση 2;

Απάντηση

Στη σύμβαση 2, το σημείο αναφοράς βρίσκεται στην αρχική θέση και η θετική φορά επιλέγεται προς τα κάτω. Άρα, η αλγεβρική τιμή της αρχικής ταχύτητας του αθλητή είναι αντίθετη από αυτή της σύμβασης 1 ($-4\ \text{m/s} = -\upsilon_0$).

Όταν ο αθλητής φθάσει στο έδαφος, η θέση του ισούται με $y = +6\ \text{m} = y_0$ (όπου συμβολίζουμε με y_0 την αλγεβρική τιμή της αρχικής θέσης της σύμβασης 1). Βάζοντας αυτή την τιμή για τη θέση στην εξίσωση κίνησης, συμπεραίνουμε για τον ολικό χρόνο:

$$y = (-\upsilon_0)t + \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y_0 = (-\upsilon_0) t_{o\lambda} + \frac{1}{2} g t_{o\lambda}^2 \Rightarrow \frac{1}{2} g t_{o\lambda}^2 - \upsilon_0 t_{o\lambda} - y_0 = 0$$

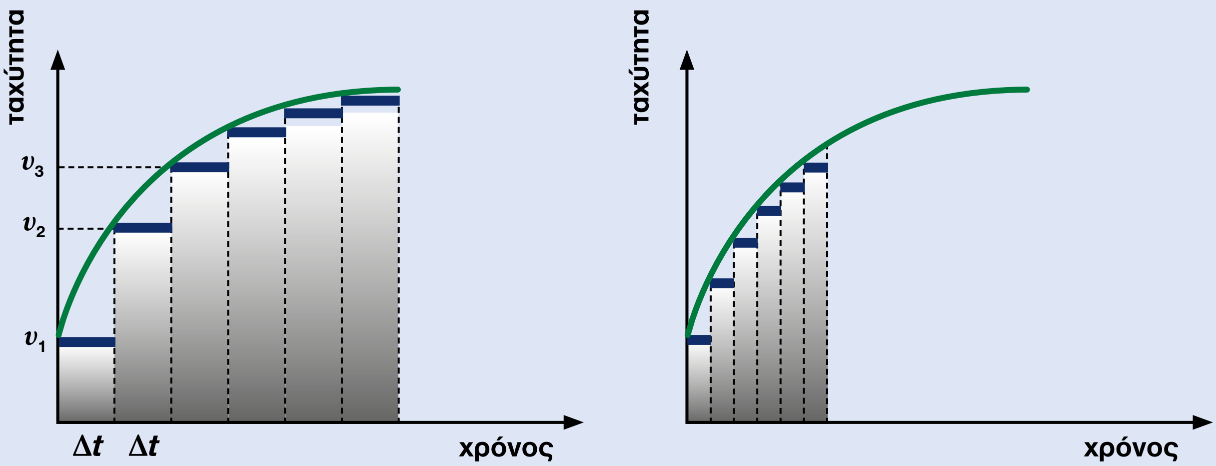
Συνεπώς, καταλήγουμε στην ίδια εξίσωση με την προηγούμενη σύμβαση.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερώτηση 2.21.1., σελ. 125.

ΕΝΘΕΤΟ - Σύνδεση Εμβαδού Γραφικής Παράστασης Ταχύτητας - Χρόνου και Μετατόπισης στη Γενικότερη Περίπτωση Κίνησης με Μεταβαλλόμενη Επιτάχυνση

Στα προηγούμενα αναφέραμε ότι το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου της κίνησης με σταθερή ταχύτητα, ή σταθερή επιτάχυνση, ισούται με τη συνολική μετατόπιση του σώματος. Αυτό το συμπέρασμα ισχύει γενικότερα για οποιαδήποτε κίνηση. Για να το αποδείξουμε, θεωρούμε τη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου, της Εικόνας 2-29, που περιγράφει μια γενική κίνηση με μεταβαλλόμενη ταχύτητα.

Εικόνα 2-29
Γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου για κίνηση με μεταβλητή ταχύτητα. Καθώς η διάρκεια της κίνησης χωρίζεται σε συνεχώς μικρότερα διαστήματα Δt, το εμβαδόν των ορθογωνίων προσεγγίζει όλο και περισσότερο το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη. Ταυτόχρονα, η συνολική μετατόπιση που εκφράζεται από τα ορθογώνια προσεγγίζει την πραγματική μετατόπιση.



Η ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι αρχικά ίση με υ_1 και αυξάνεται συνεχώς με την πάροδο του χρόνου.

Ας χωρίσουμε τη συνολική διάρκεια της κίνησης σε ίσα χρονικά διαστήματα Δt όπως φαίνεται στο αριστερό σχήμα. Αν τα διαστήματα δεν είναι πολύ μικρά, η ταχύτητα του αυτοκινήτου μέσα σε κάθε διάστημα δεν θα είναι σταθερή. Ας υποθέσουμε όμως ότι στο πρώτο διάστημα το αυτοκίνητο δεν κινείται με την πραγματική του ταχύτητα, αλλά διατηρεί συνεχώς την ταχύτητα υ_1 που είχε στην αρχή του διαστήματος. Η αντίστοιχη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου είναι το πρώτο οριζόντιο μπλε ευθύγραμμο τμήμα. Η μετατόπιση που αντιστοιχεί σε αυτή την ταχύτητα ισούται με το εμβαδόν του πρώτου ορθογωνίου, $\upsilon_1\Delta t$.

Επαναλαμβάνουμε αυτή την προσέγγιση και για τα υπόλοιπα διαστήματα: Στο δεύτερο διάστημα υποθέτουμε ότι το αυτοκίνητο διατηρεί συνεχώς την ταχύτητα υ_2 που είχε στην αρχή του δεύτερου διαστήματος. Η γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου είναι το δεύτερο μπλε ευθύγραμμο τμήμα και η μετατόπιση ισούται με το εμβαδόν του δεύτερου ορθογωνίου, $\upsilon_2\Delta t$. Με το ίδιο σκεπτικό προκύπτει ότι *η συνολική μετατόπιση ενός αυτοκινήτου, που κινείται με τις ταχύτητες υ_1, υ_2, υ_3,...υ_κ των μπλε ορθογωνίων τμημάτων, ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων.*

Η πραγματική ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι σχεδόν συνεχώς μεγαλύτερη από τις σταθερές ταχύτητες υ_1, υ_2, υ_3,... (η πράσινη καμπύλη είναι πάνω από τα οριζόντια, μπλε ευθύγραμμα τμήματα). Συνεπώς, η *πραγματική συνολική μετατόπιση* είναι πιο μεγάλη από το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων. Για να προσεγγίσουμε καλύτερα τη συνολική μετατόπιση, χωρίζουμε τη χρονική διάρκεια σε περισσότερα και μικρότερα διαστήματα, όπως φαίνεται στο δεξιό σχήμα της εικόνας.

Όταν η διάρκεια ενός διαστήματος είναι μικρότερη, η ταχύτητα στην αρχή του διαστήματος προσεγγίζει περισσότερο από πριν την ταχύτητα σε όλο το διάστημα, και το αντίστοιχο οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα προσεγγίζει περισσότερο την πράσινη καμπύλη. Δεδομένου ότι οι σταθερές ταχύτητες προσεγγίζουν περισσότερο τις πραγματικές ταχύτητες, το άθροισμα των μετατοπίσεών τους (το συνολικό εμβαδό των ορθογωνίων) γίνεται περίπου ίσο με την πραγματική μετατόπιση. Ταυτόχρονα, το συνολικό εμβαδόν των ορθογωνίων γίνεται περίπου ίσο με το συνολικό εμβαδόν κάτω από την πράσινη καμπύλη. Στο όριο που η διάρκεια Δt των διαστημάτων γίνει περίπου ίση με μηδέν, οι ταχύτητες των διαστημάτων ταυτίζονται με τις στιγμιαίες ταχύτητες και το συνολικό εμβαδόν των ορθογωνίων γίνεται ίσο με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη.

Με βάση τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι *η πραγματική συνολική μετατόπιση ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη ταχύτητας - χρόνου και τον άξονα του χρόνου.*

Εξισώσεις της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης

Εξίσωση θέσης - χρόνου	$x = x_0 + \upsilon(t - t_0)$
Αν για $t_0 = 0$ ισχύει $x_0 = 0$, η εξίσωση απλοποιείται:	$x = \upsilon t$

Εξισώσεις της ευθύγραμμης, ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης

Εξίσωση θέσης - χρόνου	$x = x_0 + \upsilon_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$
Αν για $t_0 = 0$ ισχύει $x_0 = 0$, $\upsilon_0 = 0$ η εξίσωση απλοποιείται:	$x = \frac{1}{2}\alpha t^2$
Εξίσωση ταχύτητας - χρόνου	$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha(t - t_0)$
Αν για $t_0 = 0$ ισχύει $\upsilon_0 = 0$ η εξίσωση απλοποιείται:	$\upsilon = \alpha t$
Μέση ταχύτητα	$\upsilon_\mu = \dfrac{\upsilon_{\alpha\rho\chi} + \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}}{2}$
Σχέση ταχύτητας - μετατόπισης	$\upsilon^2_{\tau\varepsilon\lambda} - \upsilon^2_{\alpha\rho\chi} = 2\alpha\Delta x$

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με την ένδειξη Σωστό / Λάθος.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Όταν η μέση επιτάχυνση είναι θετική, το μέτρο της ταχύτητας πάντα αυξάνεται.	
2	Όταν η μέση επιτάχυνση είναι αρνητική, το μέτρο της ταχύτητας πάντα ελαττώνεται.	
3	Στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, η στιγμιαία επιτάχυνση αλλάζει με το χρόνο.	
4	Στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, η μέση επιτάχυνση δεν αλλάζει με το χρόνο.	
5	Στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, η μετατόπιση είναι ανάλογη με το χρονικό διάστημα.	
6	Στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, η μεταβολή στην ταχύτητα είναι ανάλογη με το χρονικό διάστημα.	
7	Στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, αν διπλασιαστεί το χρονικό διάστημα πάντα τετραπλασιάζεται η μετατόπιση.	
8	Σε μια κατακόρυφη βολή, η φορά της επιτάχυνσης δεν εξαρτάται από τη φορά της κίνησης.	
9	Στο ανώτατο σημείο της τροχιάς ενός σώματος, που εκτελεί ελεύθερη πτώση, η επιτάχυνση έχει μέτρο ίσο με μηδέν.	

Ασκήσεις

Μελέτη της Κίνησης από τις Γραφικες Παραστάσεις Θέσης - Χρόνου και Ταχύτητας - Χρόνου

1 Το σχήμα στη διπλανή σελίδα απεικονίζει το γράφημα θέσης - χρόνου ενός σώματος που κινείται σε ευθεία γραμμή. Να μελετήσετε το γράφημα και να απαντήσετε στα εξής ερωτήματα:

I. Να σημειώσετε εάν τα επόμενα είναι σωστά (Σ) ή λανθασμένα (Λ):

(α) Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή (Σ/Λ)

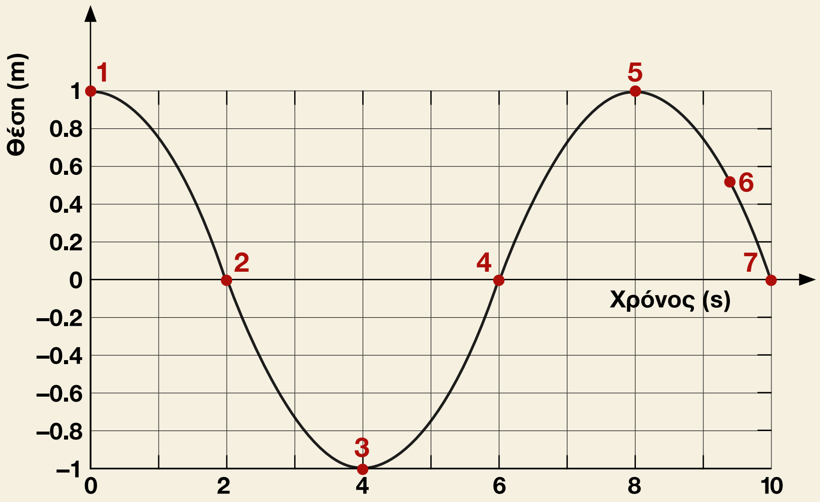
(β) Η ταχύτητα είναι μεταβαλλόμενη (Σ/Λ)

(γ) Η ταχύτητα είναι συνεχώς θετική (Σ/Λ)

(δ) Η ταχύτητα είναι συνεχώς αρνητική (Σ/Λ)

II. Μελετώντας τη μεταβολή της θέσης με το χρόνο, να συμπληρώσετε το πρόσημο της ταχύτητας για τα σημεία του πιο πάνω πίνακα. Ένα πρόσημο έχει συμπληρωθεί, ως παράδειγμα. Εάν σε κάποιο(α) σημείο(α) η ταχύτητα μηδενίζεται, να συμπληρώσετε την ένδειξη «0».

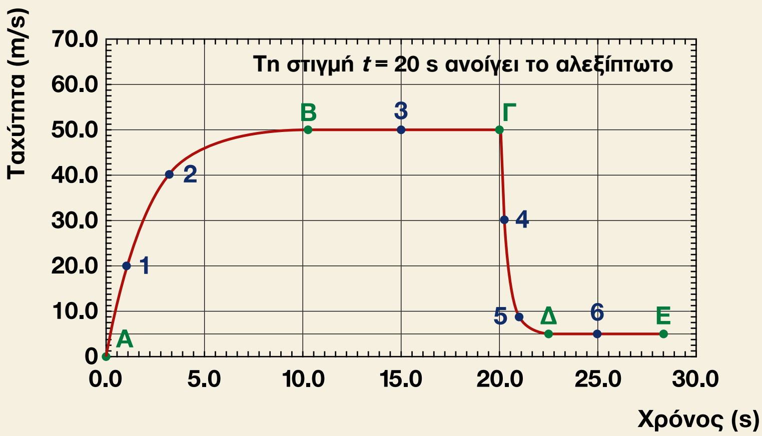
III. Να περιγράψετε την ταχύτητα για την κίνηση από το σημείο 2 στο σημείο 5, χρησιμοποιώντας τις λέξεις μεγάλη / μικρή / θετική / αρνητική.



Σημείο	Πρόσημο ταχύτητας
1	
2	"–"
3	
4	
5	
6	

2 Χρησιμοποιώντας κατάλληλα ευθύγραμμα τμήματα, να υπολογίσετε τη μέση διανυσματική ταχύτητα μεταξύ των σημείων (**1** και **2**), (**2** και **4**), (**3** και **5**) για το γράφημα θέσης - χρόνου της άσκησης 1.

3 Η πιο κάτω γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου περιγράφει την κίνηση ενός αλεξιπτωτιστή.



Σημείο	Πρόσημο επιτάχυνσης
1	" + "
2	
3	
4	
5	
6	

Ο αλεξιπτωτιστής αρχίζει να πέφτει τη στιγμή $t = 0$ και ανοίγει το αλεξίπτωτό του τη στιγμή $t = 20$ s.

Α. Να σημειώσετε εάν τα επόμενα είναι σωστά (Σ) ή λανθασμένα (Λ):

(α) Η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη (Σ/Λ)

(β) Η επιτάχυνση αυξάνεται συνεχώς (Σ/Λ)

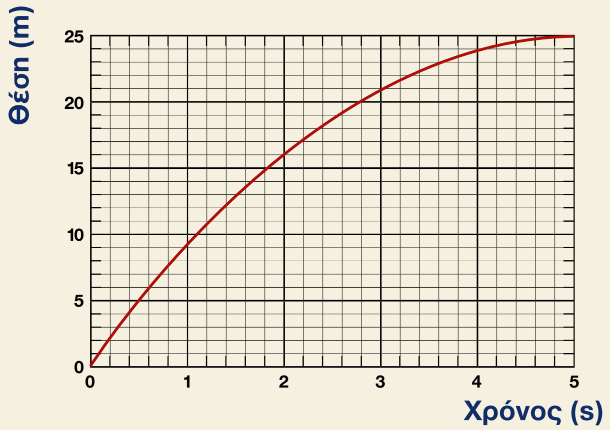
(γ) Η επιτάχυνση είναι συνεχώς θετική (Σ/Λ)

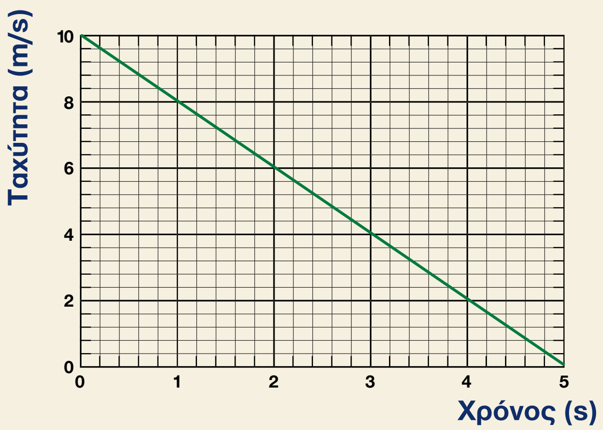
(δ) Η επιτάχυνση είναι συνεχώς αρνητική (Σ/Λ)

Β. Μελετώντας τη μεταβολή της ταχύτητας με το χρόνο, να να συμπληρώσετε το πρόσημο της επιτάχυνσης για τα σημεία του πιο πάνω πίνακα. Ένα πρόσημο έχει συμπληρωθεί, ως παράδειγμα. Εάν σε κάποιο(α) σημείο(α) η επιτάχυνση μηδενίζεται, να συμπληρώσετε την ένδειξη «0».

Γ. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα ευθύγραμμα τμήματα, να υπολογίσετε τη μέση επιτάχυνση του αλεξιπτωτιστή μεταξύ των σημείων (**Α** και **Β**), (**Β** και **Γ**), (**Γ** και **Δ**).

4 Ένας οδηγός πλησιάζει στα φώτα τροχαίας. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ πατά το φρένο και συνεχίζει να κινείται ευθύγραμμα. Στα πιο κάτω σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις **(α)** θέσης - χρόνου και **(β)** ταχύτητας - χρόνου του αυτοκινήτου.





Α. Τι μπορείτε να συμπεράνετε από τη γραφική παράσταση θέσης - χρόνου για την ταχύτητα του αυτοκινήτου στο χρονικό διάστημα 0 - 5 s.

Β. Από τη γραφική παράσταση θέσης - χρόνου να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου στο χρονικό διάστημα 0 - 5 s.

Γ. Τι μπορείτε να συμπεράνετε από τη γραφική παράσταση θέσης - χρόνου για την κίνηση του αυτοκινήτου στο ίδιο χρονικό διάστημα;

Δ. Από τη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου, να υπολογίσετε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου στο χρονικό διάστημα 0 - 5 s. Ποιό είναι το πρόσημο της επιτάχυνσης;

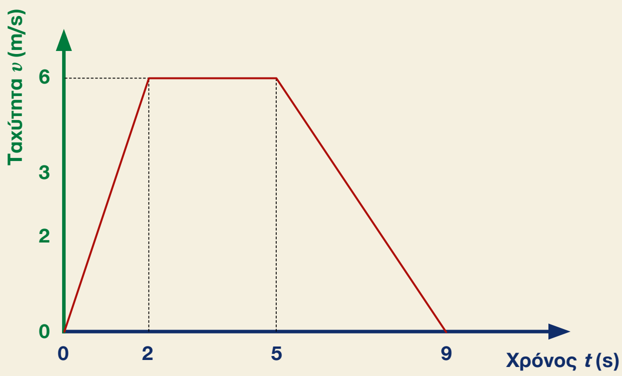
Ε. Από τη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου, να υπολογίσετε τη μετατόπιση του αυτοκινήτου στο χρονικό διάστημα 0 - 5 s. Να συγκρίνετε με τη μετατόπιση που προκύπτει από τη γραφική παράσταση θέσης - χρόνου για το ίδιο χρονικό διάστημα.

5 Ένα αυτοκίνητο κινείται σε ευθεία γραμμή. Η κίνησή του περιγράφεται από την γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου στην διπλανή σελίδα.

Α. Ποια απόσταση διανύει το αυτοκίνητο στο χρονικό διάστημα 0 - 9 s;

Β. Ποια η επιτάχυνση του αυτοκινήτου στα διαστήματα 0 - 2 s, 2 - 5 s και 5 - 9 s.

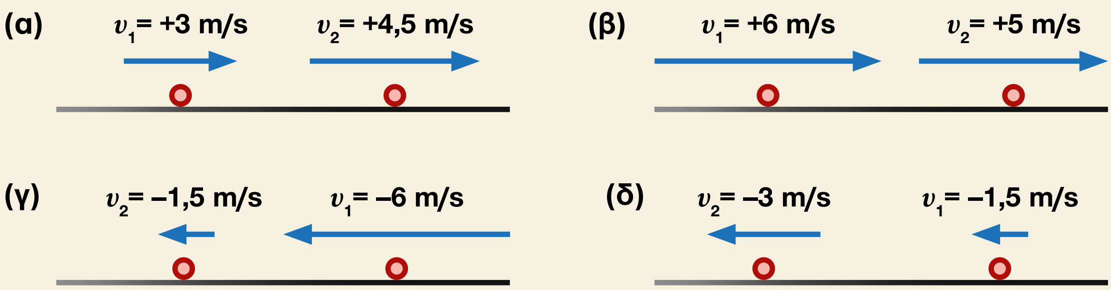
Γ. Ποια η μέση επιτάχυνση του αυτοκινήτου στο χρονικό διάστημα 0 - 9 s;



Διανυσματικός Χαρακτήρας της Επιτάχυνσης

6 Ένα σώμα κινείται σε ευθεία γραμμή, με μεταβαλλόμενη ταχύτητα. Στις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 έχει ταχύτητες υ_1 και υ_2, όπως φαίνεται στο πιο κάτω διάγραμμα. Η μεταβολή της ταχύτητας του σώματος είναι $\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1$.

A. Για κάθε περίπτωση, να σχεδιάσετε το βέλος που αναπαριστά τη μεταβολή της ταχύτητας του σώματος.



B. Εάν το χρονικό διάστημα στο οποίο μεταβάλλεται η ταχύτητα ισούται με $\Delta t = t_2 - t_1 = 0{,}5$ s, να σχεδιάσετε το βέλος που αναπαριστά τη μέση επιτάχυνση του σώματος για κάθε περίπτωση. Να χρησιμοποιήσετε κλίμακα 1 m/s^2 $\Rightarrow$ 1 cm.

Εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης

7 Οι θαλάσσιες ανεμώνες, οι μέδουσες, και οι ύδρες ανήκουν στη συνομοταξία των κνιδοζώων.

Τα ζώα αυτά περιέχουν κατάλληλα κύτταρα (τα κνιδοκύτταρα), από τα οποία εξακοντίζουν οργανίδια για να κεντρίσουν τα θύματά τους. Φωτογραφικές μηχανές, που λαμβάνουν 1 400 000 εικόνες ανά δευτερόλεπτο, έχουν απεικονίσει οργανίδια, που κινούνται για χρονικό διάστημα Δt = 700 ns με μέση ταχύτητα υ_μ = 18,5 m/s μέχρι να χτυπήσουν το στόχο τους.

Να υποθέσετε ότι τα οργανίδια ξεκινούν με μηδενική ταχύτητα, και κινούνται με σταθερή επιτάχυνση α στο διάστημα Δt. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση α. (**Υπόδειξη:** είναι τεράστια).

8 Ένας αθλητής των 100 m αρχίζει να τρέχει από ηρεμία σε μία ευθύγραμμη πίστα, και στα πρώτα 25 m μπορεί να διατηρεί σταθερή επιτάχυνση. Στο πρώτο 1 s της κίνησής του έχει καλύψει 3 m.

Α. Ποια η επιτάχυνση του αθλητή;

Β. Σε ποιό χρονικό διάστημα θα έχει καλύψει τα πρώτα 12 m της διαδρομής;

9 Ένα λεωφορείο ξεκινά από ηρεμία με σταθερή επιτάχυνση σε έναν ευθύγραμμο δρόμο. Μετά από 5 s έχει διανύσει απόσταση $d = 20$ m. Πόσο μακριά από τη στάση θα βρίσκεται το λεωφορείο μετά από 10 s;

10 Σε έναν αγώνα Formula 1, ένα αυτοκίνητο ξεκινά από ηρεμία και αποκτά ταχύτητα 306 km/h σε 8,6 s. Η κίνηση του αυτοκινήτου είναι ευθύγραμμη.

Α. Να υπολογίσετε τη μέση επιτάχυνση του αυτοκινήτου.

Β. Θεωρώντας ότι η επιτάχυνση είναι σταθερή, να υπολογίσετε το μέτρο της μετατόπισης του αυτοκινήτου.

Γ. Γιατί οι πίστες αγώνων F1 έχουν ευθύγραμμα τμήματα με μήκος πολλών χιλιομέτρων;

11 Ένα αυτοκινητάκι κινείται σε μία ευθεία με σταθερή επιτάχυνση. Κάποια χρονική στιγμή διέρχεται από τη θέση $x = 3$ cm με ταχύτητα 12 cm/s. Δύο δευτερόλεπτα αργότερα, το αυτοκινητάκι περνά από τη θέση 25 cm. Να υπολογίσετε την επιτάχυνσή του.

Σχέση Ταχύτητας - Μετατόπισης

12 Κατά την προσγείωση ενός αεροπλάνου, το μέτρο της ταχύτητάς του είναι ίσο με 100 m/s, την ώρα που αγγίζει το διάδρομο. Κατά τη διάρκεια της κίνησής του στον διάδρομο προσγείωσης, η ταχύτητα ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό ίσο με 5 m/s^2.

Α. Να υπολογίσετε το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να σταματήσει το αεροπλάνο, από τη στιγμή που αγγίζει τον διάδρομο.

Β. Να διερευνήσετε κατά πόσο είναι ασφαλής η προσγείωση του αεροπλάνου στο αεροδρόμιο ενός μικρού νησιού, του οποίου ο αεροδιάδρομος έχει μήκος 800 m.

13 Ένα αγωνιστικό αυτοκίνητο κινείται με σταθερή επιτάχυνση κατά μήκος μίας ευθύγραμμης πίστας. Το αυτοκίνητο αυξάνει την ταχύτητά του από 10 m/s σε 30 m/s, διανύοντας μία απόσταση 80 m. Σε ποιό χρονικό διάστημα διανύει αυτή την απόσταση;

Ελεύθερη Πτώση

14 Ένα παιδί ρίχνει μία πέτρα κατακόρυφα προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα μέτρου 6 m/s, από την κορυφή ενός ψηλού κτηρίου. Η πέτρα χτυπά στο έδαφος μετά από 4 s. Να θεωρήσετε ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Α. Να επιλέξετε το σημείο αναφοράς και τη θετική κατεύθυνση, και να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης για την πέτρα.

Β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα της πέτρας όταν φθάνει στο έδαφος, και το ύψος του κτηρίου.

15 Ένας καλαθοσφαιριστής ρίχνει κατακόρυφα προς τα πάνω μια μπάλα του μπάσκετ. Η μπάλα εγκαταλείπει τα χέρια του αθλητή σε ύψος 3 m από το έδαφος, με αρχική ταχύτητα μέτρου 5 m/s. Επιλέγοντας σαν σημείο αναφοράς το σημείο από το οποίο η μπάλα εγκαταλείπει τα χέρια του αθλητή και θετική τη φορά προς τα επάνω, να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης της μπάλας και να υπολογίσετε:

Α. τη χρονική διάρκεια της κίνησης της μπάλας μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

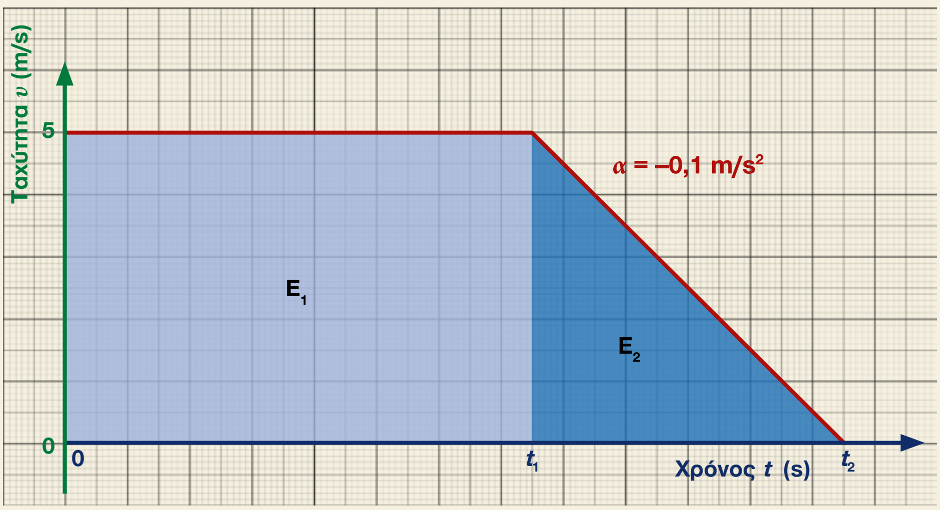
Β. την ταχύτητα με την οποία φθάνει στο έδαφος.

Γ. το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνει η μπάλα.

16 Ένας παίκτης του βόλεϋ ρίχνει μία μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω, και την πιάνει στο ίδιο ύψος, μετά από χρονικό διάστημα 2 s. Ποιο το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνει η μπάλα κατά την πτήση της;

Σύνθετες Ασκήσεις

17 Ένα οχηματαγωγό πλοίο βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s σε απόσταση 500 m από ένα λιμάνι, και κινείται προς το λιμάνι με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_0 = 5$ m/s.



Για να ελαττώσει την ταχύτητά του πλοίου, ο καπετάνιος αναστρέφει την κίνηση της προπέλας τη χρονική στιγμή t_1. Εξ΄ αιτίας της αναστροφής, το πλοίο αρχίζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = -0{,}1$ m/s^2, και φθάνει στην προκυμαία τη χρονική στιγμή t_2 με μηδενική ταχύτητα. Η γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου φαίνεται στο σχήμα της προηγούμενης σελίδας.

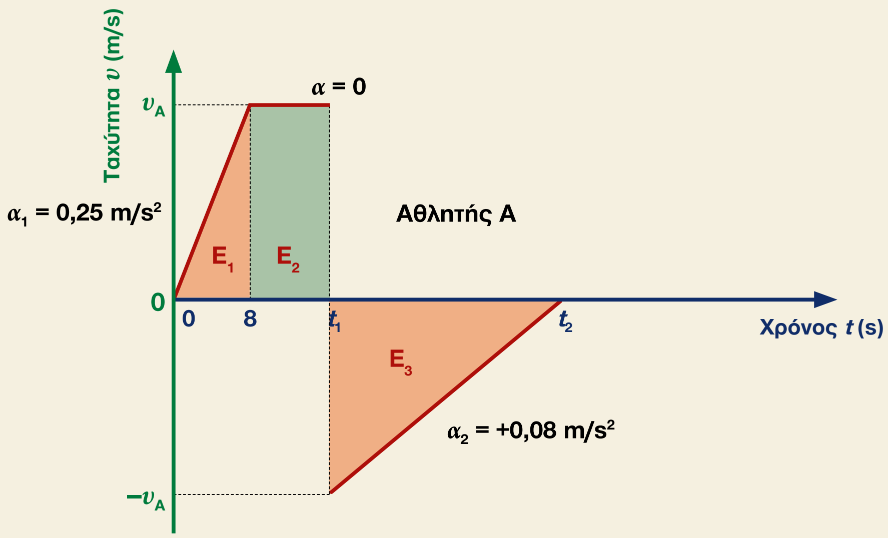
Α. Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της ταχύτητας - χρόνου, να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα $t_2 - t_1$, στο οποίο το πλοίο επιταχύνεται, και την αντίστοιχη μετατόπιση του πλοίου σε αυτό το διάστημα.

Β. Με βάση το αποτέλεσμα **Α**, να υπολογίσετε τη μετατόπιση του πλοίου στο χρονικό διάστημα $0 - t_1$, και τη χρονική στιγμή t_1.

18 Ένας κολυμβητής συμμετέχει σε έναν αγώνα των 50 m, σε πισίνα με μήκος 25 m. Η γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου του κολυμβητή **Α** δίνεται στο επόμενο σχήμα.

Ο κολυμβητής ξεκινά από την άκρη της πισίνας με μηδενική ταχύτητα. Τα πρώτα 8 s κολυμπά με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_1 = 0{,}25$ m/s^2, και στη συνέχεια διατηρεί σταθερή ταχύτητα υ_A μέχρι την άλλη άκρη της πισίνας. Στην επιστροφή, αναστρέφει ακαριαία την φορά της κίνησής του, διατηρώντας το μέτρο της ταχύτητάς του. Κατόπιν, κολυμπά με επιτάχυνση $\alpha_2 = +0{,}08$ m/s^2, μέχρι να τερματίσει.

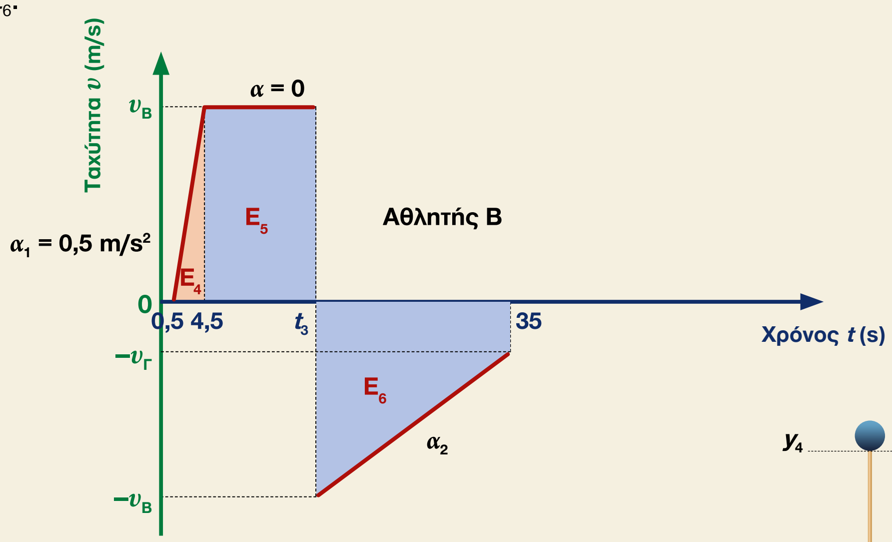
Να υπολογίσετε την ταχύτητα υ_A του κολυμβητή, και τους χρόνους t_1 και t_2. Στους υπολογισμούς σας, είναι χρήσιμο να προσδιορίσετε τα εμβαδά E_1, E_2 και E_3.



19 Ένας δεύτερος κολυμβητής **Β** συμμετέχει στον ίδιο αγώνα των 50 m της άσκησης 18, σε πισίνα 25 m. Η γραφική παράσταση **ταχύτητας - χρόνου** του **Β** δίνεται στο επόμενο σχήμα.

Ο κολυμβητής ξεκινά 0,5 s μετά την εκκίνηση, με μηδενική ταχύτητα. Τα πρώτα 4 s της κίνησής του κολυμπά με σταθερή επιτάχυνση μέτρου 0,5 m/s^2, και στη συνέχεια κολυμπά με σταθερή ταχύτητα υ_B μέχρι την άλλη άκρη της πισίνας. Στην επιστροφή, αναστρέφει ακαριαία την φορά της κίνησής του, διατηρώντας το μέτρο της ταχύτητάς του. Ύστερα, κολυμπά με σταθερή επιτάχυνση και τερματίζει 35 s μετά την εκκίνηση.

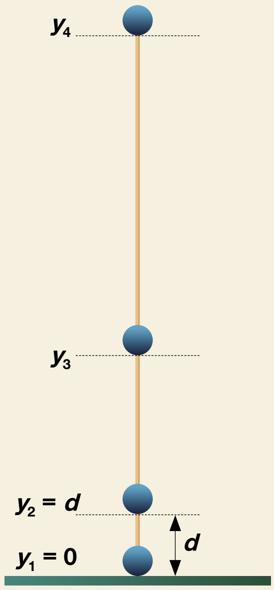
Να προσδιορίσετε την ταχύτητα υ_B και τον χρόνο t_3. Με ποια επιτάχυνση πρέπει να κολυμπά ο **Β** στην επιστροφή; Στους υπολογισμούς σας, είναι χρήσιμο να προσδιορίσετε τα εμβαδά E_4, E_5 και E_6.



❷⓿ Μια σειρά από μικρές μεταλλικές σφαίρες είναι δεμένες σε ένα νήμα, το οποίο κρέμεται κατακόρυφα.

Η πρώτη σφαίρα βρίσκεται στη θέση $y_1 = 0$, ελάχιστα πάνω από το έδαφος, και οι άλλες σφαίρες βρίσκονται σε ύψη y_2, y_3, y_4,.... Το νήμα αφήνεται ελεύθερο τη χρονική στιγμή $t = 0$, οπότε η πρώτη σφαίρα χτυπά αμέσως στο έδαφος. Οι υπόλοιπες σφαίρες χτυπούν στο έδαφος η μία μετά την άλλη, σε **ίσα χρονικά διαστήματα** 1 s.

Να βρείτε τα ύψη y_2, y_3, y_4,..., από τα οποία ξεκινούν οι σφαίρες.



21 Μια μεταλλική σφαίρα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω από ένα ψηλό κτήριο, με αρχική ταχύτητα μέτρου 19,6 m/s. Η σφαίρα φθάνει στο έδαφος μετά από 6 s. Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Α. Υπάρχει κάποια χρονική στιγμή, κατά την οποία η επιτάχυνση της σφαίρας είναι μηδενική;

Β. Από τις εξισώσεις κίνησης, να προσδιορίσετε την ταχύτητα της σφαίρας όταν φθάσει στο έδαφος, και το ύψος του κτηρίου.

Γ. Να σχεδιάσετε το γράφημα ταχύτητας - χρόνου της σφαίρας. Να επαληθεύσετε ότι το συνολικό εμβαδό της επιφάνειας ανάμεσα στη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου και τον άξονα του χρόνου ισούται με το ύψος του κτηρίου.

22 Ένας ψύλλος κάθεται στο έδαφος και ένας βάτραχος κρύβεται σε ένα φύλλο ακριβώς από πάνω του, σε ύψος H από το έδαφος. Ο ψύλλος πηδά με κατακόρυφη αρχική ταχύτητα υ_0 προς τα επάνω. Ταυτόχρονα, ο βάτραχος αφήνεται με μηδενική κατακόρυφη αρχική ταχύτητα, για να πιάσει τον ψύλλο. Να επιλέξετε ένα σημείο αναφοράς και τη θετική φορά κίνησης, και να γράψετε τις εξισώσεις θέσης - χρόνου για τον βάτραχο και τον ψύλλο.

Α. Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή στην οποία θα συναντηθούν, το ύψος από το έδαφος, και τις ταχύτητες που θα έχουν στο σημείο συνάντησης. Να δείξετε ότι για να συναντηθούν στον αέρα, θα πρέπει το αρχικό ύψος και η ταχύτητα να ικανοποιούν τη σχέση $H < (2\upsilon_0^2)/g$.

Β. Εάν το μέτρο της αρχικής ταχύτητας του ψύλλου είναι ίσο με 2 m/s και το αρχικό ύψος είναι ίσο με 0,5 m, να κάνετε γραφικές παραστάσεις ταχύτητας - χρόνου για το βάτραχο και τον ψύλλο στο ίδιο διάγραμμα.

23 Δύο παιδιά κάθονται στην άκρη μίας πλατφόρμας, σε ύψος $h = 20$ m από το έδαφος. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ο Χάρης ρίχνει μια μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω. Μετά από 1 s, ο Πάνος αφήνει μια δεύτερη μπάλα να πέσει με μηδενική αρχική ταχύτητα. Θεωρείστε ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Α. Να επιλέξετε το σημείο αναφοράς και τη θετική κατεύθυνση, και να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης για τις δύο μπάλες.

Β. Ποια πρέπει να είναι η αρχική ταχύτητα της **πρώτης** μπάλας, έτσι ώστε οι δύο μπάλες να φθάσουν στο έδαφος την ίδια χρονική στιγμή;

Γ. Ποια χρονική στιγμή φθάνουν οι δύο μπάλες στο έδαφος;

Δ. Να σχεδιάσετε στο ίδιο γράφημα τις γραφικές παραστάσεις ταχύτητας - χρόνου για τις δύο μπάλες.

Ερωτήσεις Ελέγχου Κατανόησης Εννοιών

2.1.1. Ένας δρομέας τρέχει σε ευθύγραμμη πίστα μία διαδρομή μήκους 100 m. Εάν χρησιμοποιηθεί ως σημείο αναφοράς το τέρμα της διαδρομής αντί για την αφετηρία, ποιο από τα επόμενα φυσικά μεγέθη θα μεταβληθεί:

(α) Η αλγεβρική τιμή της αρχικής και της τελικής θέσης του δρομέα.

(β) Η μετατόπιση του δρομέα.

2.1.2. Το μήκος του Μαραθωνίου δρόμου ισούται με 40 192 m. Η τιμή αυτή εκφράζει:

(α) Τη διανυόμενη απόσταση από τον αθλητή.

(β) Το μέτρο της μετατόπισης του αθλητή.

(γ) Και τα δύο προηγούμενα μεγέθη.

2.3.1. Δύο αυτοκίνητα Α και Β κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις και διαγράφουν 0,6 km σε 1 min. Ποια από τις επόμενες απαντήσεις εκφράζει σωστά τις μέσες αριθμητικές ταχύτητες των Α και Β:

(α) $\upsilon_A = 0{,}6$ km/min, $\upsilon_B = -0{,}6$ km/min,

(β) $\upsilon_A = -0{,}6$ km/min, $\upsilon_B = 0{,}6$ km/min,

(γ) $\upsilon_A = 0{,}6$ km/min, $\upsilon_B = 0{,}6$ km/min,

(δ) $\upsilon_A = -0{,}6$ km/min, $\upsilon_B = -0{,}6$ km/min.

2.3.2. Ένα βαγόνι μεταλλείου κινείται σε μία ευθύγραμμη σιδηροτροχιά μεταξύ δύο σημείων Α και Β, που απέχουν μεταξύ τους κατά 375 m. Εάν το βαγόνι κάνει τη διαδρομή Α $\rightarrow$ Β $\rightarrow$ Α σε 10 min, η μέση αριθμητική του ταχύτητα είναι:

(α) 75 m/min

(β) 0 m/min

(γ) –75 m/min

2.5.1. Ένα αυτοκίνητο κινείται για μία ώρα με μέση διανυσματική ταχύτητα μέτρου 50 km/h. Ποιό από τα επόμενα συμπεράσματα είναι σωστό χωρίς αμφιβολία;

(α) Το αυτοκίνητο καλύπτει συνολική απόσταση 50 km.

(β) Η συνολική μετατόπιση του αυτοκινήτου έχει μέτρο 50 km.

(γ) Η διαδρομή του αυτοκινήτου είναι ευθύγραμμη και έχει μήκος 50 km.

(δ) Το αυτοκίνητο κινείται συνεχώς στην ίδια κατεύθυνση και διαγράφει τροχιά μήκους 50 km.

2.5.2. Δύο αυτοκίνητα Α και Β κινούνται με μέσες διανυσματικές ταχύτητες υ_A και υ_B. Εάν το μέτρο της μέσης διανυσματικής ταχύτητας του Α είναι διπλάσιο του μέτρου της μέσης διανυσματικής ταχύτητας του Β, ποιο συμπέρασμα είναι σωστό;

(α) Το αυτοκίνητο Α διανύει διπλάσια απόσταση από το Β στο ίδιο χρονικό διάστημα.

(β) Η μετατόπιση του αυτοκινήτου Α έχει διπλάσιο μέτρο από τη μετατόπιση του Β στο ίδιο χρονικό διάστημα.

2.5.3. Ένας ποδηλάτης προπονείται για τους Ολυμπιακούς σε μία πίστα. Εάν σε κάποιο χρονικό διάστημα 1,5 min, η μέση διανυσματική ταχύτητα του ποδηλάτη έχει μέτρο 0 m/min, ποιο από τα επόμενα συμπεράσματα είναι σωστό χωρίς αμφιβολία;

(α) Ο ποδηλάτης παραμένει ακίνητος καθ΄ όλη τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος.

(β) Ο ποδηλάτης ενδεχομένως κινείται στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, αλλά έχει την ίδια αρχική και τελική θέση.

2.6.1. Κάποιος συμμαθητής σας ισχυρίζεται ότι η πρόταση «ένα αυτοκίνητο κινείται με στιγμιαία ταχύτητα –30 km/h» είναι λανθασμένη, επειδή η στιγμιαία ταχύτητα έχει μόνο θετικές τιμές. Να εξηγήσετε κατά πόσο έχει δίκιο ή όχι.

2.6.2. Ακούτε στο ραδιόφωνο ότι ένας μοτοσυκλετιστής συνελήφθη από την Τροχαία, επειδή έτρεχε με ταχύτητα 150 km/h. Από αυτή την πληροφορία, ποιό συμπέρασμα είναι σωστό:

(α) Ο μοτοσυκλετιστής ταξίδεψε για μία ώρα και κάλυψε απόσταση 150 km.

(β) Ο μοτοσυκλετιστής ταξίδεψε για μία ώρα και η συνολική του μετατόπιση είχε μέτρο 150 km.

(γ) Όταν ο μοτοσυκλετιστής πλησίασε τον τροχονόμο, για ένα μικρό χρονικό διάστημα κινούνταν με ταχύτητα 150 km/h.

2.6.3. Για να προσδιορίσει την ταχύτητα του μοτοσυκλετιστή της ερώτησης **2.6.2.**, ο τροχονόμος τον παρατηρούσε:

(α) Για μία ώρα.

(β) Ένα τέταρτο της ώρας.

(γ) Ένα λεπτό.

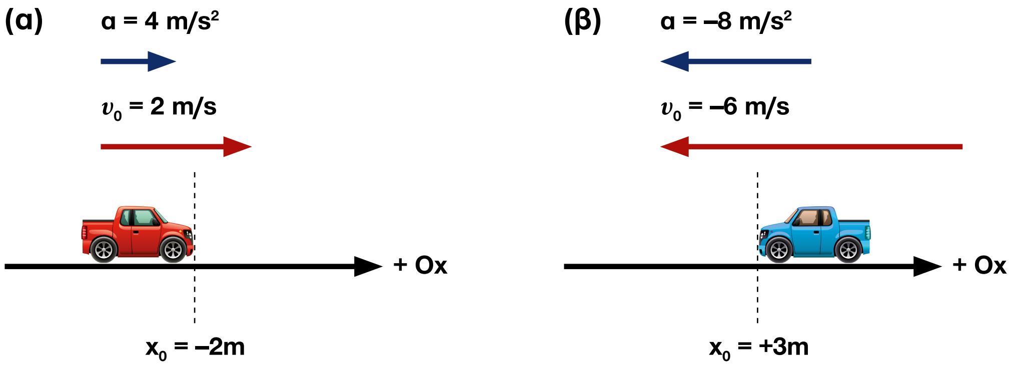
(δ) Μερικά δευτερόλεπτα.

2.8.1. Στο αριστερό σχήμα της Εικόνας 2-8, να καθορίσετε τον άξονα ως προς τον οποίο προσδιορίζονται οι θέσεις του αυτοκινήτου, το σημείο αναφοράς και τη θετική κατεύθυνση.

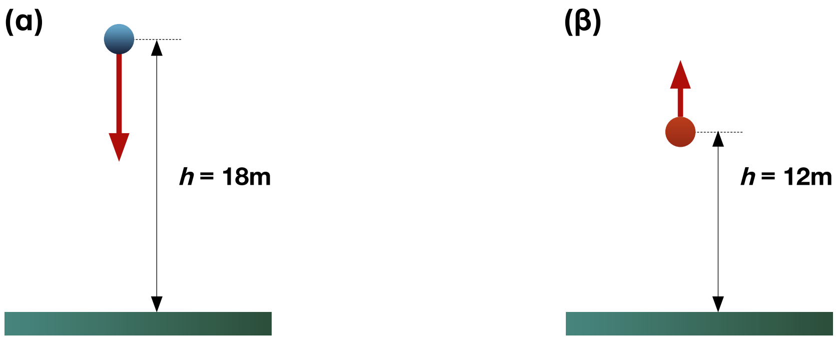
2.12.1. Να σχεδιάσετε κατάλληλο ευθύγραμμο τμήμα στην Εικόνα 2-15 για να υπολογίσετε τη μέση διανυσματική ταχύτητα του σώματος στο χρονικό διάστημα 0,0 s - 3,0 s.

2.14.1. Ένα αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα θέσεων. Τις χρονικές στιγμές 0,0 s και 2,0 s η ταχύτητα του αυτοκινήτου έχει μέτρο 15 m/s και 17 m/s, αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τη μέση επιτάχυνση του αυτοκινήτου στο διάστημα 0,0 s – 2,0 s.

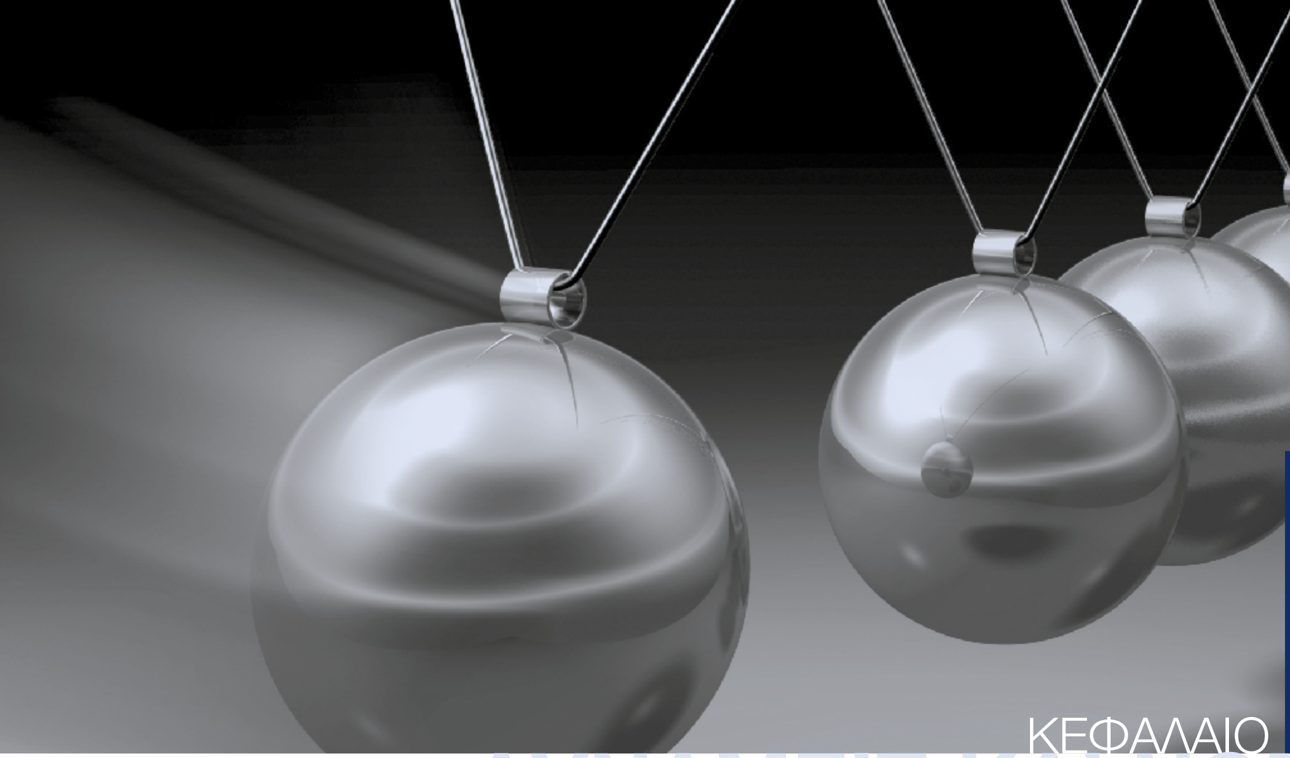
2.19.1. Στο σχήμα της επόμενης σελίδας απεικονίζονται δύο αυτοκίνητα **(α)** και **(β)**, που εκτελούν ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Στο σχήμα σημειώνονται οι αρχικές θέσεις και ταχύτητες των αυτοκινήτων, οι επιταχύνσεις τους, και η θετική φορά του άξονα Ox. Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων.



2.21.1. Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται δύο σώματα α και β, που εκτελούν ελεύθερη πτώση. Στο σχήμα σημειώνονται οι αρχικές αποστάσεις των σωμάτων από την επιφάνεια της Γης, και οι αρχικές τους ταχύτητες (κόκκινα βέλη), που έχουν μέτρο 4 m/s και 2,4 m/s αντίστοιχα. Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης κάθε σώματος χρησιμοποιώντας τις συμβάσεις 1 και 2.



- **Οι απαντήσεις των ερωτήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου, σελ. 301.**



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

Στο Κεφάλαιο 3:

- **Συζητούμε** την έννοια της δύναμης
- **Διαχωρίζουμε** τις δυνάμεις σε δυνάμεις επαφής και δυνάμεις από απόσταση
- **Περιγράφουμε** μερικές βασικές δυνάμεις
- **Υπολογίζουμε** το διανυσματικό άθροισμα δυνάμεων
- **Αναλύουμε** δυνάμεις σε κάθετες συνιστώσες
- **Μαθαίνουμε** ότι όταν σε ένα σώμα ασκείται μηδενική συνισταμένη δύναμη, αυτό ηρεμεί ή κινείται με σταθερή διανυσματική ταχύτητα (1ος Νόμος του Νεύτωνα ή νόμος της αδράνειας)
- **Αναδεικνύουμε** με παραδείγματα ότι η μάζα ενός σώματος αποτελεί ποσοτικό μέτρο της αδράνειάς του
- **Εφαρμόζουμε** τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα σε προβλήματα ισορροπίας
- **Διαπιστώνουμε** ότι η αλλαγή στην κινητική κατάσταση ενός σώματος απαιτεί την εφαρμογή μη μηδενικής συνισταμένης δύναμης σε αυτό
- **Συσχετίζουμε** τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα με τη μάζα και την επιτάχυνσή του (2ος Νόμος του Νεύτωνα)
- **Εφαρμόζουμε** τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα σε προβλήματα κίνησης
- **Μαθαίνουμε** ότι οι δυνάμεις εμφανίζονται πάντοτε ως ζεύγη «δράση-αντίδραση» (3ος νόμος του Νεύτωνα)
- **Εφαρμόζουμε** τον 2ο και 3ο Νόμο του Νεύτωνα σε προβλήματα ισορροπίας και κίνησης ενός ή περισσοτέρων σωμάτων

Πίνακας 3-1
Χαρακτηριστικά μεγέθη δυνάμεων (σε N)

Βαρυτική έλξη της Γης από τον Ήλιο	$3,5 \times 10^{22}$ N
Βάρος Πυραμίδας του Χέοπα	6×10^{10} N
Ηλεκτροστατική δύναμη μεταξύ δύο φορτίων 1 C που απέχουν 1 m στο κενό	9×10^{9} N
Βάρος γιγαντιαίας σεκόγιας	$1,9 \times 10^{7}$ N
Βάρος γαλάζιας φάλαινας	$1,8 \times 10^{6}$ N
Τυπική μέση δύναμη που ασκείται στον οδηγό αυτοκινήτου σε μετωπική σύγκρουση με 50 km/h: (α) χωρίς ζώνη ασφαλείας	10^{5} N
β) με ζώνη ασφαλείας	10^{4} N
Τυπικό βάρος ενήλικα	750 N
Βάρος μήλου	1 N
Βάρος ενός κυβικού εκατοστού νερού	10^{-2} N
Βάρος μύγας	10^{-4} N
Ηλεκτροστατική έλξη πρωτονίου - ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου	$8,2 \times 10^{-8}$ N
Βάρος βακτηρίου Ecoli	10^{-14} N
Βάρος μορίου αιμοσφαιρίνης	10^{-21} N
Βάρος πρωτονίου	$1,6 \times 10^{-26}$ N
Βάρος ηλεκτρονίου	$9,1 \times 10^{-30}$ N
Βαρυτική έλξη πρωτονίου - ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου	$3,6 \times 10^{-47}$ N

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφουμε αλληλεπιδράσεις μεταξύ δύο σωμάτων, ή επιδράσεις που δέχεται ένα σώμα από το περιβάλλον του. Τέτοιες αλληλεπιδράσεις εμφανίζονται σε ποικίλες μορφές. Για παράδειγμα:

- Ουράνια σώματα έλκονται μεταξύ τους και σώματα έλκονται από τη Γη.
- Φορτισμένα σώματα έλκονται ή απωθούνται.
- Ένας μαγνήτης έλκει σιδερένια αντικείμενα.
- Ένα συσπειρωμένο ελατήριο ωθεί σώματα.
- Οι επιφάνειες δύο σωμάτων σε σχετική κίνηση τρίβουν η μία την άλλη.
- Ο αέρας προβάλλει αντίσταση στην κίνηση ενός αλεξιπτωτιστή.
- Ένα υποβρύχιο δέχεται μια ανοδική ώθηση από το νερό που το περιβάλλει.
- Ελκτικές αλληλεπιδράσεις συγκρατούν τα μόρια ενός υγρού σε κοντινές αποστάσεις.
- Ένα αέριο πιέζει τα τοιχώματα του δοχείου που το περιέχει.

Γενικά, δύο σώματα που αλληλεπιδρούν, ασκούν δυνάμεις το ένα στο άλλο.

Η δράση μίας δύναμης προκαλεί διάφορες αλλαγές στην κατάσταση ενός σώματος. Συγκεκριμένα:

Α. Μια δύναμη μπορεί να προκαλέσει κάποια **μεταβολή στην κινητική κατάσταση** ενός σώματος, ή κάποια **παροδική μεταβολή στο σχήμα του.**

Για παράδειγμα, μια ελαστική μπάλα που αφήνεται από την ηρεμία να εκτελέσει ελεύθερη πτώση, επιταχύνεται στην κατακόρυφη διεύθυνση υπό την επίδραση της βαρύτητας, παραμορφώνεται και σταματά στιγμιαία κατά την πρόσκρουσή της σε οριζόντιο δάπεδο, και κατόπιν αναπηδά με ταχύτητα προς τα πάνω εξ΄ αιτίας της κάθετης απωστικής δύναμης που δέχεται από το δάπεδο.

Β. Σε πολλές περιπτώσεις, οι δυνάμεις προκαλούν **μόνιμες παραμορφώσεις** ή ακόμα και **αλλαγές στην υφή των σωμάτων.**

Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι οι μόνιμες μεταβολές στο σχήμα δύο αυτοκινήτων κατά τη σύγκρουσή τους, οι θραύσεις γυάλινων ή πήλινων αντικειμένων κατά την πρόσπτωσή τους στο έδαφος, οι καταστροφές κτηρίων σε ένα σεισμό, και η θραύση ή κονιορτοποίηση ορυκτών κατά την επεξεργασία τους.

Γ. Δυνάμεις μεταξύ ατόμων ή μορίων μπορούν να **προκαλέσουν χημικές μεταβολές** σωμάτων (μεταβολές στη σύστασή τους) και δυνάμεις μεταξύ των συστατικών των ατομικών πυρήνων μπορούν να προκαλέσουν **μεταστοιχειώσεις** (μετατροπές πυρήνων).

Μερικά παραδείγματα χαρακτηριστικών δυνάμεων αναφέρονται στον Πίνακα 3-1.

Μονάδα μέτρησης της δύναμης στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI) είναι το «Νιούτον» (Newton ή N), προς τιμήν του Άγγλου Φυσικού Ισαάκ Νεύτωνα (Isaac Newton), ο οποίος έζησε την περίοδο 1643 - 1727.

Ο Νεύτωνας διατύπωσε τους νόμους της κίνησης και της παγκόσμιας έλξης στο κλασσικό έργο του *Principia*, ανέπτυξε τον απειροστικό λογισμό (μαζί με τον Γερμανό μαθηματικό Gottfried Leibnitz) και έκανε σημαντικές συνεισφορές στην Οπτική. Είναι ένας από τους κορυφαίους Φυσικούς επιστήμονες όλων των εποχών.

3.2. Κατηγοριοποίηση Δυνάμεων

Με βάση την απόσταση στην οποία γίνονται αισθητές, οι δυνάμεις κατατάσσονται σε **δυνάμεις επαφής** και σε **δυνάμεις από απόσταση**.

Οι δυνάμεις της πρώτης κατηγορίας εμφανίζονται κατά την **επαφή** μεταξύ σωμάτων. Παραδείγματα τέτοιων δυνάμεων είναι η άπωση μεταξύ δύο σωμάτων που συγκρούονται ή εφάπτονται, η τριβή μεταξύ επιφανειών, η αντίσταση του αέρα ή του νερού σε ένα κινούμενο σώμα, η τάση ενός τεντωμένου σχοινιού και η δύναμη από ένα παραμορφωμένο ελατήριο.

Όταν δύο σώματα βρίσκονται σε επαφή, οι δομικοί λίθοι (μόρια ή άτομα) που τα αποτελούν πλησιάζουν μεταξύ τους σε αποστάσεις μερικών **Angström** (1 Angström = 10^{-8} cm = 0, 00000001 cm) οι οποίες είναι συγκρίσιμες με το μέγεθος των μορίων και ατόμων. Οι δυνάμεις επαφής, που αναπτύσσονται τότε, είναι το άθροισμα πολλών μικροσκοπικών δυνάμεων ηλεκτρομαγνητικής φύσης ανάμεσα σε ένα τεράστιο αριθμό ατόμων ή μορίων των δύο σωμάτων.

Οι δυνάμεις **από απόσταση** εμφανίζονται ακόμα και όταν τα σώματα απέχουν αρκετά το ένα από το άλλο. Παραδείγματα τέτοιων δυνάμεων είναι η βαρυτική έλξη μεταξύ ουρανίων σωμάτων όπως η Γη και ο Ήλιος, η βαρυτική έλξη που ασκεί η Γη στα σώματα, η ηλεκτροστατική έλξη ή άπωση μεταξύ δύο φορτισμένων σωμάτων και η έλξη που ασκεί ένας μαγνήτης σε ένα σιδερένιο αντικείμενο.

Όλες οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των στοιχειωδών σωματιδίων ταξινομούνται σε τέσσερις θεμελιώδεις κατηγορίες: τις **βαρυτικές, ηλεκτρομαγνητικές, ισχυρές πυρηνικές** και **ασθενείς πυρηνικές**.

Στο τέλος του Κεφαλαίου 3, συμπεριλαμβάνεται το **Ένθετο Θεμελιωδών Αλληλεπιδράσεων**, όπου περιγράφονται η ιεραρχική δομή της ύλης και οι θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των στοιχειωδών σωματιδίων.

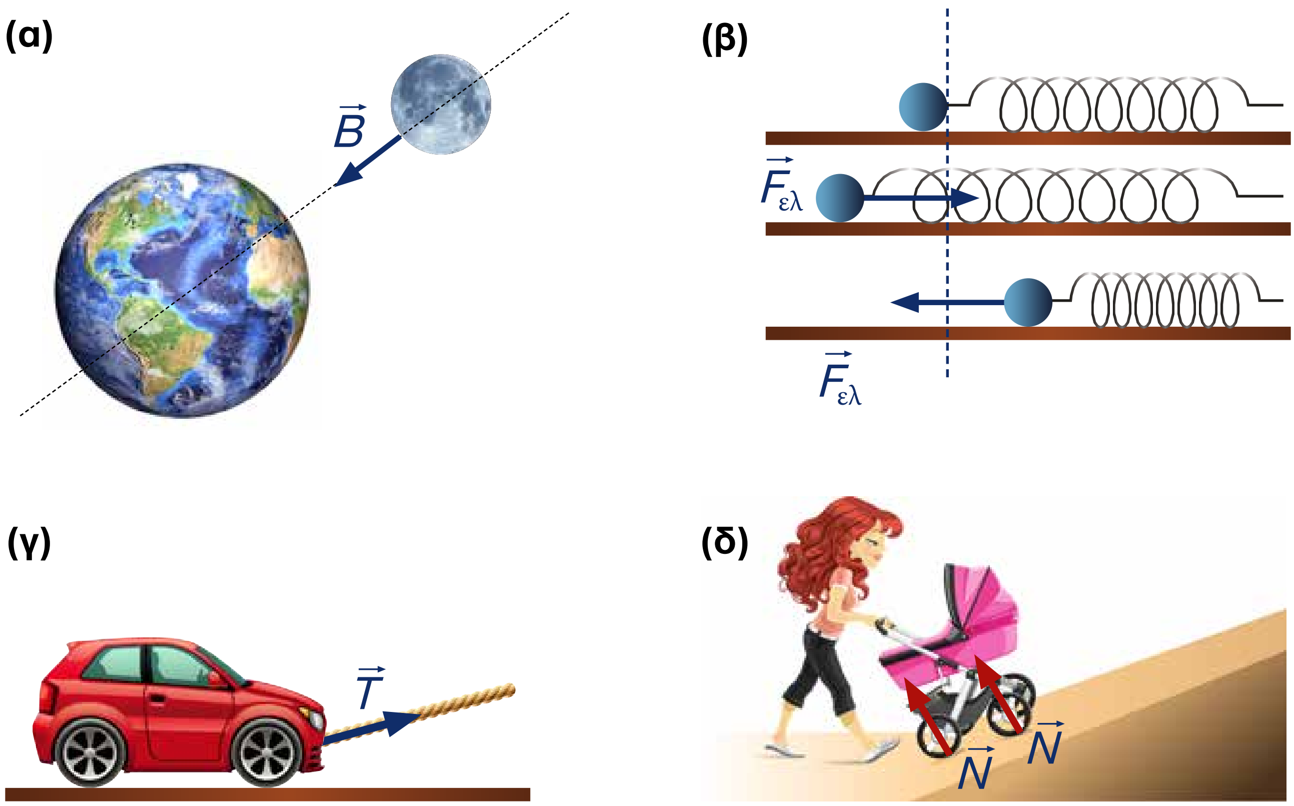
3.3. Η Διανυσματική Φύση της Δύναμης

Για να προσδιορίσουμε πλήρως μια δύναμη χρειάζεται να καθορίσουμε το μέτρο της και την κατεύθυνσή της (διεύθυνση και φορά). **Η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος**. Θα συμβολίζουμε τη δύναμη με ένα ή περισσότερα γράμματα και ένα βέλος π.χ., $\vec{F}$.

Όπως όλα τα διανυσματικά μεγέθη, μία δύναμη μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά από ένα βέλος. Το μήκος του βέλους είναι ανάλογο με το μέτρο της δύναμης, η ευθεία του βέλους αντιστοιχεί στη διεύθυνση της δύναμης και ο προσανατολισμός της αιχμής του βέλους αντιστοιχεί στη φορά της δύναμης.

Στην Εικόνα 3-1 απεικονίζονται μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα δυνάμεων. Η Γη έλκει ένα υλικό σώμα με δύναμη που έχει κατεύθυνση από το σώμα προς το κέντρο της Γης, ένα παραμορφωμένο ελατήριο ασκεί έλξη ή ώθηση σε ένα σώμα με διεύθυνση κατά μήκος του ελατηρίου, ένα τεντωμένο σχοινί τραβά ένα αυτοκινητάκι με δύναμη που έχει διεύθυνση κατά μήκος του σχοινιού, μία λεία επιφάνεια ασκεί σε ένα σώμα που την πιέζει μία απωστική δύναμη με διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια.

Εικόνα 3-1
(α) Η Γη ασκεί ελκτική δύναμη ($\vec{B}$) στη Σελήνη, με διεύθυνση την ευθεία που ενώνει τα κέντρα τους. **(β)** Ένα ελατήριο ασκεί ελκτική δύναμη ($\vec{F}_{ελ}$) σε ένα σώμα όταν επιμηκύνεται, και απωστική δύναμη όταν συμπιέζεται. **(γ)** Ένα τεντωμένο σχοινί τραβά ένα αυτοκινητάκι με δύναμη ($\vec{T}$) που έχει διεύθυνση κατά μήκος του σχοινιού. **(δ)** Το καρότσι πιέζει μία λεία επιφάνεια και δέχεται κάθετες δυνάμεις ($\vec{N}$) από την επιφάνεια. (Οι δυνάμεις στα σχήματα α - δ δεν απεικονίζονται στη σωστή κλίμακα).



3.4. Μερικές Χαρακτηριστικές Δυνάμεις

Βαρυτικές Δυνάμεις

Όλα τα υλικά σώματα αλληλεπιδρούν μέσω βαρυτικών δυνάμεων. Οι βαρυτικές δυνάμεις είναι πολύ ασθενείς. Για παράδειγμα, η βαρυτική έλξη μεταξύ δύο ενηλίκων με μάζα 70 kg, που βρίσκονται σε απόσταση 1 m μεταξύ τους, ισούται με $3{,}3 \times 10^{-7}$ N. Οι βαρυτικές δυνάμεις γίνονται σημαντικές όταν ασκούνται από σώματα με τεράστια μάζα, όπως οι πλανήτες και τα αστέρια. Το **βάρος** ενός σώματος είναι η βαρυτική έλξη που ασκεί η Γη στο σώμα.

Ένα σφαιρικό σμήνος, όπως το 47-Tucanae, αποτελείται από εκατομμύρια άστρα που έλκονται μεταξύ τους με βαρυτικές δυνάμεις.

Πηγή: SALT - http://salt.camk.edu.pl/firstlight/, CC BY 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=307585

Η βαρυτική δύναμη, που ασκεί ένα σφαιρικό ουράνιο σώμα, εξασθενεί με την απόσταση από το κέντρο του. Εάν η μάζα του ουράνιου σώματος είναι αρκετά μεγάλη, η δύναμη αυτή παραμένει αισθητή σε μεγάλες αποστάσεις. Η βαρυτική έλξη από τον ήλιο συγκρατεί τους πλανήτες του ηλιακού συστήματος στις τροχιές τους. Η απόσταση του διαστημοπλοίου Voyager 1 από τον ήλιο είναι (Μάιος 2016) περίπου ίση με 20 τρισεκατομμύρια (20×10^{12}) μέτρα. Σε αυτή την απόσταση, η βαρυτική έλξη που ασκεί ο ήλιος στο Voyager 1 είναι περίπου ίση με 10^{-4} N. Από τον Πίνακα 3-1 συμπεραίνουμε ότι η έλξη αυτή είναι συγκρίσιμη με το βάρος μίας μύγας στην επιφάνεια της Γης.

Ηλεκτρομαγνητικές Δυνάμεις

Οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις ασκούνται μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων και μπορεί να είναι ελκτικές (μεταξύ ετερόσημων φορτίων) ή απωστικές (μεταξύ ομόσημων φορτίων). Είναι πολύ πιο ισχυρές από τις βαρυτικές. Για παράδειγμα, η ηλεκτροστατική έλξη μεταξύ πρωτονίου και ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου είναι ισχυρότερη κατά 10^{40} = 10 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 φορές, σε σύγκριση με την βαρυτική έλξη μεταξύ τους.

Τα άτομα και τα μόρια της ύλης περιέχουν θετικά φορτισμένους πυρήνες και αρνητικά φορτισμένα ηλεκτρόνια. Όταν το συνολικό αρνητικό φορτίο των ηλεκτρονίων είναι ίσο με το συνολικό θετικό φορτίο των πυρήνων τους, τα άτομα ή μόρια είναι **ηλεκτρικά ουδέτερα**.

Ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις ασκούνται ακόμα και μεταξύ **ηλεκτρικά ουδετέρων ατόμων ή μορίων**, εξ' αιτίας της *ασυμμετρικής κατανομής* του αρνητικού φορτίου των ηλεκτρονίων τους και του θετικού φορτίου στους πυρήνες τους. Χαρακτηριστικό σχετικό παράδειγμα αποτελούν οι ισχυρές ελκτικές δυνάμεις μεταξύ των μορίων του νερού, και η έλξη που ασκεί μία ηλεκτρικά φορτισμένη πλαστική πέννα σε ηλεκτρικά ουδέτερα κομματάκια χαρτιού.

Οι μαγνητικές δυνάμεις ασκούνται μεταξύ μαγνητών, ή μεταξύ ενός μαγνήτη και ενός σιδερένιου αντικειμένου. **Οι μαγνητικές αλληλεπιδράσεις οφείλονται σε ηλεκτρικά ρεύματα** που δημιουργούνται από κινούμενα ηλεκτρικά φορτία.

Δύναμη Ελατηρίου

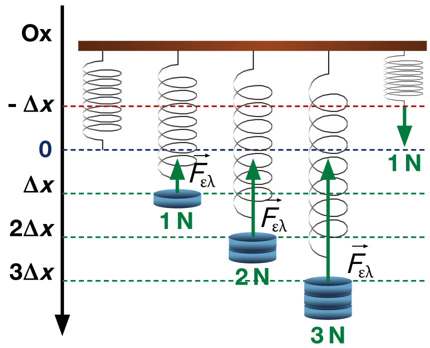
Ένα ελατήριο, που υφίσταται μηδενική συνισταμένη δύναμη κατά τη διεύθυνσή του, έχει κάποιο *φυσικό μήκος ισορροπίας*. Όταν ένα σώμα μεταβάλλει το μήκος του ελατηρίου, το ελατήριο ασκεί στο σώμα μια δύναμη με διεύθυνση κατά μήκος του ελατηρίου, και φορά από το σώμα προς το ελατήριο (εάν επιμηκύνεται) ή αντίθετα (εάν συσπειρώνεται).

Προκύπτει πειραματικά ότι **η δύναμη, που ασκεί το ελατήριο, είναι ανάλογη με τη μεταβολή του μήκους του**, εάν η παραμόρφωσή του δεν υπερβεί κάποιο όριο, που εξαρτάται από το ελατήριο. Η αναλογία εκφράζεται από τη σχέση

$$\vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -k\Delta\vec{x}$$

Το μέγεθος $\Delta\vec{x}$ είναι η **μετατόπιση της ελεύθερης άκρης** του ελατηρίου από τη θέση στην οποία βρίσκεται όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Η σταθερά k ονομάζεται «σταθερά ελατηρίου». Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η δύναμη ελατηρίου έχει **αντίθετη κατεύθυνση από τη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$**.

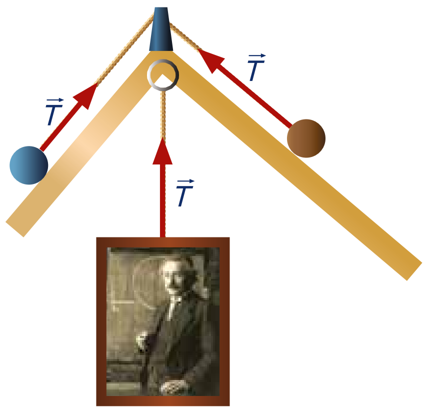
Στο διπλανό σχήμα, η θέση της ελεύθερης άκρης του ελατηρίου περιγράφεται από τον κατακόρυφο άξονα Ox. Το φυσικό μήκος ισορροπίας αντιστοιχεί στη θέση $x = 0$. Η **αλγεβρική τιμή** της μετατόπισης της άκρης είναι θετική όταν το ελατήριο είναι επιμηκυμένο και αρνητική όταν είναι συσπειρωμένο. Το **μέτρο** της μετατόπισης ισούται με την απόσταση της ελεύθερης άκρης από τη θέση $x = 0$.



Η ιδιότητα αυτή του ελατηρίου χρησιμοποιείται για την κατασκευή οργάνων μέτρησης δυνάμεων (δυναμόμετρα ελατηρίου). Τα δυναμόμετρα βαθμονομούνται αντιστοιχώντας **μία συγκεκριμένη επιμήκυνση ή συσπείρωση του ελατηρίου τους σε ένα συγκεκριμένο μέτρο δύναμης**. Για παράδειγμα, έστω ότι δύναμη μέτρου 1 N μεταβάλλει κατά 1 cm το μήκος ελατηρίου ενός δυναμομέτρου. Εάν η εφαρμογή κάποιας άγνωστης δύναμης μεταβάλλει το μήκος του ίδιου ελατηρίου κατά 3 cm το δυναμόμετρο δείχνει ένδειξη 3 N.

Τάση Σχοινιού

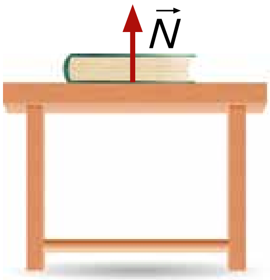
Σε αντίθεση με το ελατήριο, **ένα σχοινί δεν είναι εκτατό**, δηλαδή δεν επιμηκύνεται ούτε συσπειρώνεται. Επιπρόσθετα, **ένα σχοινί δεν ασκεί απωστική δύναμη**. Η δύναμη από ένα τεντωμένο σχοινί σε ένα σώμα έχει τη διεύθυνση του σχοινιού, και φορά από το σώμα προς το σχοινί. Η τάση σχοινιού συμβολίζεται συνήθως ως $\vec{T}$ από την αγγλική λέξη «Tension».



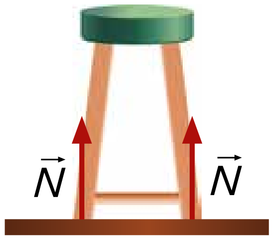
Κάθετη Δύναμη από μία Επιφάνεια

Όταν ένα σώμα πιέζει μία επιφάνεια, την παραμορφώνει. Ακόμα και σκληρά, φαινομενικά άκαμπτα αντικείμενα υφίστανται κάποια παραμόρφωση, όταν πιέζονται.

Η παραμορφωμένη επιφάνεια ασκεί στο σώμα μία δύναμη, με διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια και φορά από την επιφάνεια προς το σώμα. Η κάθετη δύναμη συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα $\vec{N}$ από την αγγλική λέξη «Normal».

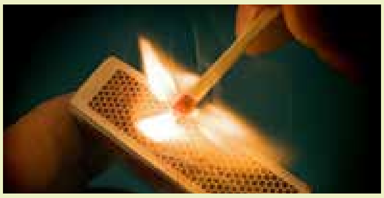


Για παράδειγμα, ένα βιβλίο που είναι τοποθετημένο πάνω σε ένα οριζόντιο τραπέζι τείνει να κινηθεί προς το έδαφος υπό την επίδραση του βάρους του. Το τραπέζι δέχεται κάποια παραμόρφωση και ασκεί στο βιβλίο μια κάθετη δύναμη με φορά προς τα πάνω. Ομοίως, το έδαφος ασκεί κάθετες δυνάμεις στα πόδια ενός σκαμνιού.



Η κάθετη δύναμη από ένα σώμα σε ένα άλλο οφείλεται σε ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις, οι οποίες δρουν ανάμεσα στα άτομα ή μόρια των επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή.

Δυνάμεις Τριβής



Οι δυνάμεις τριβής εκδηλώνονται μεταξύ δύο σωμάτων που εφάπτονται, **όταν κάποιο αίτιο τείνει να κινήσει ή κινεί το ένα σώμα ως προς το άλλο**, σε διεύθυνση παράλληλη στις επιφάνειες επαφής των σωμάτων. Η τριβή συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα $\vec{f}$ από την αγγλική λέξη «friction».

Ένας μετεωρίτης αναφλέγεται στη Γήινη ατμόσφαιρα λόγω τριβής με τον αέρα. Στη φωτογραφία φαίνεται το ίχνος κάποιου του μετεωρίτη Chelyabinsk, που κατέπεσε στις 15 Φεβρουαρίου 2012 στη Ρωσία.

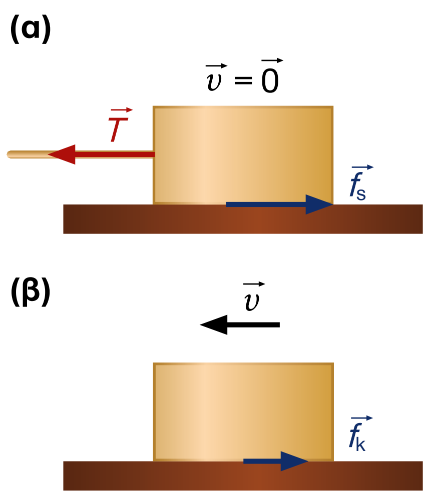
Πηγή: Nikita Plekhanov - http://gallery.ru/watch?ph=z6Q-ewl8g, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/windex.php?curid=24661798

Οι δυνάμεις τριβής μεταξύ δύο σωμάτων οφείλονται σε αλληλεπιδράσεις **ηλεκτρομαγνητικής φύσης** ανάμεσα στα μόρια ή τα άτομά τους.

Η δυσκολία με την οποία αφαιρούμε το φελλό από ένα μπουκάλι, ή ένα καρφί σφηνωμένο σε ένα κομμάτι ξύλο, οφείλεται στις ισχυρές δυνάμεις τριβής από τα τοιχώματα του μπουκαλιού στο φελλό, και από το ξύλο στο καρφί. Η δύναμη τριβής σε ένα σπίρτο που τρίβεται σε μια επιφάνεια, ή σε έναν μετεωρίτη που εισέρχεται με μεγάλη ταχύτητα στην ατμόσφαιρα, προκαλεί τη θέρμανση και ανάφλεξή τους.

Η δύναμη τριβής, που εφαρμόζεται από ένα σώμα σε ένα άλλο, έχει διεύθυνση παράλληλη με την επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων, και φορά αντίθετη προς τη σχετική κίνηση που τείνει να εκτελέσει ή εκτελεί το ένα σώμα ως προς το άλλο (Εικόνα 3-2). Εάν τα σώματα δεν κινούνται το ένα ως προς το άλλο, η δύναμη αυτή ονομάζεται **στατική τριβή ($\vec{f}_s$)**. Εάν τα σώματα κινούνται το ένα ως προς το άλλο, η δύναμη ονομάζεται **κινητική τριβή ($\vec{f}_k$)**.

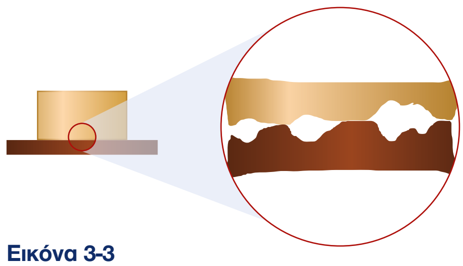
Όπως δείχνει η Εικόνα 3-3, η μικροσκοπική επιφάνεια επαφής των σωμάτων είναι μικρότερη από τη μακροσκοπική επιφάνεια επαφής τους. Όταν **αυξάνεται** η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το ένα σώμα στο άλλο, αυξάνεται και ο αριθμός των ατόμων ή μορίων των σωμάτων σε επαφή (η μικροσκοπική επιφάνεια επαφής). Γι΄ αυτό διαπιστώνεται πειραματικά ότι η κινητική τριβή και η μέγιστη στατική τριβή είναι ανάλογες με το μέτρο της κάθετης δύναμης.



Εικόνα 3-2
Δυνάμεις τριβής ανάμεσα σε ένα σώμα και μία ανώμαλη επιφάνεια. **(α)** Το σώμα είναι ακίνητο ως προς την επιφάνεια. Το σχοινί έλκει το σώμα με δύναμη $\vec{T}$, και η επιφάνεια ασκεί **στατική τριβή** $\vec{f}_s$. **(β)** Το σώμα κινείται ως προς την επιφάνεια και υφίσταται από αυτήν την **κινητική τριβή** $\vec{f}_k$**.**

Όσο πιο **τραχιές** είναι οι επιφάνειες των σωμάτων που εφάπτονται, τόσο πιο ισχυρή είναι η τριβή μεταξύ των σωμάτων. Για παράδειγμα, όσο πιο τραχιές είναι οι επιφάνειες δύο φύλλων από γυαλόχαρτο, τόσο μεγαλύτερη είναι η τριβή που ασκούν το ένα στο άλλο. Η τριβή μεταξύ δύο επιφανειών ελαττώνεται εάν επικαλυφθούν με ένα στρώμα λιπαντικής ουσίας. Τα μόρια αυτής της ουσίας παρεμβάλλονται ανάμεσα στα άτομα και μόρια των επιφανειών, και παρεμποδίζουν την προσέγγιση και ισχυρή αλληλεπίδραση ανάμεσά τους.

Η τριβή μεταξύ δύο επιφανειών ελαττώνεται εάν αυτές γίνουν πιο λείες. Αυτή η συμπεριφορά όμως δεν είναι γενική. Για παράδειγμα, εάν οι επιφάνειες δύο σωμάτων από ένα συγκεκριμένο μέταλλο λειανθούν σε βαθμό που να εφαρμόζουν απόλυτα σε μικροσκοπική (ατομική) κλίμακα, τα δύο σώματα συμπεριφέρονται σαν ένα ενιαίο σώμα και η τριβή μεταξύ τους γίνεται τεράστια.



Εικόνα 3-3
Η τριβή μεταξύ δύο επιφανειών οφείλεται στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ ατόμων ή μορίων τους, τα οποία βρίσκονται σε μικροσκοπική επαφή.

Εάν η δύναμη τριβής που ασκεί μία επιφάνεια είναι αμελητέα, θα ονομάζουμε αυτή την επιφάνεια **λεία. Μια λεία επιφάνεια ασκεί μόνο κάθετη δύναμη στα αντικείμενα, με τα οποία εφάπτεται.**

Αντίσταση από ένα Ρευστό (Οπισθέλκουσα Δύναμη)

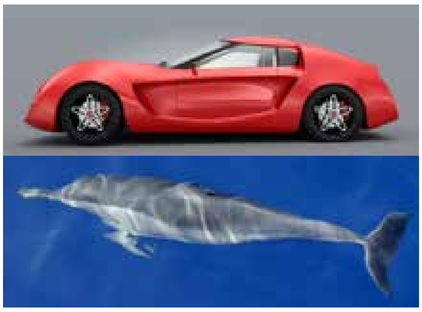
Όταν ένα σώμα κινείται στο εσωτερικό ενός ρευστού, υφίσταται μία δύναμη από το ρευστό με αντίθετη κατεύθυνση προς την ταχύτητά του. Ένα σώμα που πέφτει, υφίσταται μια κατακόρυφη δύναμη από τον αέρα, με φορά προς τα πάνω. Ένα πλοίο ή ένα ψάρι, που κινείται μέσα στο νερό, υφίσταται μια δύναμη αντίστασης από το νερό. Η οπισθέλκουσα δύναμη συμβολίζεται συχνά ως $\vec{D}$ από την αγγλική λέξη “Drag”.

Η δύναμη αντίστασης, που ασκείται από ένα ρευστό σε ένα σώμα, μηδενίζεται όταν το σώμα είναι ακίνητο ως προς το ρευστό, και αυξάνεται με την ταχύτητα του σώματος.

Εικόνα 3-4
Η αντίσταση του αέρα στο αλεξίπτωτο βοηθά το διαστημικό λεωφορείο να σταματήσει.

Η αντίσταση εξαρτάται από τη φύση του ρευστού: νιώθουμε μικρότερη αντίσταση όταν ανακατεύουμε ένα δοχείο με νερό, και μεγαλύτερη όταν ανακατεύουμε ένα βάζο με μέλι.

Η αντίσταση εξαρτάται επίσης από το σχήμα και το μέγεθος του σώματος. Για παράδειγμα, η αντίσταση του αέρα σε έναν αλαξιπτωτιστή αυξάνεται σημαντικά μόλις ανοίξει το αλεξίπτωτο, επειδή μεγαλώνει η επιφάνεια του αλεξίπτωτου. Το διαστημικό λεωφορείο χρησιμοποιούσε αλεξίπτωτο για να σταματήσει κατά την προσγείωσή του (Εικόνα 3-4).



Το αεροδυναμικό σχήμα των μοντέρνων αυτοκινήτων και το υδροδυναμικό σχήμα των ψαριών συμβάλλουν στην ελάττωση της αντίστασης από τον αέρα και το νερό.

Πηγή: Curt Smith from Bellevue, WA, USA - hawaiian spinner dolphin, CC BY 2.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=11354546

Άνωση

Ένα σώμα, που περιβάλλεται από ένα ρευστό, δέχεται μια δύναμη από το ρευστό, η οποία είναι αντίρροπη προς το βάρος του. Η δύναμη αυτή ονομάζεται άνωση, επειδή τείνει να μετακινεί το σώμα προς τα πάνω (αντίθετα από τη φορά του βάρους του σώματος). Ένα ξύλινο αντικείμενο ή ένα πλοίο επιπλέει στην επιφάνεια του νερού χωρίς να βυθίζεται, επειδή η άνωση από το νερό εξισορροπεί το βάρος του. Ένα αερόστατο ή ένα μπαλόνι γεμάτο με αέριο ήλιο ανυψώνεται, επειδή η άνωση από τον περιβάλλοντα αέρα είναι μεγαλύτερη από το βάρος του.

Στους ολυμπιακούς αγώνες του Πεκίνου καταρρίφθηκαν 23 παγκόσμια ρεκόρ στην κολύμβηση, επειδή οι κολυμβητές φορούσαν το ειδικό μαγιό LZR, που βελτίωνε το υδροδυναμικό τους σχήμα και ελάττωνε την αντίσταση του νερού. Για την εφεύρεση του μαγιό χρησιμοποιήθηκαν το τούνελ αέρα και προγράμματα για την ανάλυση της ροής ρευστών από τη NASA.

Πηγή: https://en.wikipedia.org/wiki/LZR_Racer. Φωτογραφία: Jmex60 - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4633936

Το μέτρο της άνωσης είναι ανάλογο με τον όγκο του σώματος, που είναι βυθισμένο στο εσωτερικό του ρευστού. Η άνωση στο αερόστατο αυξάνεται, όταν το αερόστατο είναι φουσκωμένο. Η άνωση από το νερό σε έναν ξύλινο κορμό είναι μέγιστη όταν ο κορμός είναι εντελώς βυθισμένος, και μικρότερη όταν μόνο ένα τμήμα του κορμού είναι βυθισμένο (ο κορμός επιπλέει).

Το αερόστατο ανυψώνεται υπό την επίδραση της άνωσης από τον αέρα.

3.5. Η Έννοια του Υλικού Σημείου

Όταν σχεδιάζουμε μια δύναμη, χρειάζεται να επιλέξουμε **το σημείο του σώματος, που θα χρησιμοποιήσουμε ως σημείο εφαρμογής** της δύναμης. Γενικά, *ως σημείο εφαρμογής μιας δύναμης ορίζεται το σημείο του σώματος, στο οποίο ασκείται η δύναμη*. Στην Εικόνα 3-1(β), το σημείο εφαρμογής της δύναμης του ελατηρίου είναι το σημείο επαφής μεταξύ ελατηρίου και σώματος. Ομοίως, στην Εικόνα 3-1(γ), το σημείο εφαρμογής της τάσης του σχοινιού είναι το σημείο σύνδεσης του σχοινιού με το σώμα.

Σε πολλές περιπτώσεις, η δύναμη που δέχεται ένα σώμα προκύπτει από έναν μεγάλο αριθμό αλληλεπιδράσεων, στις οποίες συμμετέχουν πολλά σημεία του σώματος. Η βαρυτική έλξη της σελήνης από τη Γη (Εικόνα 3-1(α)) είναι άθροισμα από επιμέρους βαρυτικές έλξεις, που ασκούνται σε όλες τις στοιχειώδεις ποσότητες ύλης της σελήνης από τη Γη. Η κάθετη δύναμη σε ένα σώμα από ένα λείο κεκλιμένο επίπεδο (Εικόνα 3-1(δ)), είναι ένα άθροισμα απωστικών δυνάμεων, ανάμεσα σε πολλά μόρια της επιφάνειας του σώματος και του επιπέδου. Η αντίσταση από τον αέρα σε ένα κινούμενο σώμα είναι ένα άθροισμα από δυνάμεις ανάμεσα σε πολλά μόρια του σώματος και του αέρα. Η συνολική ηλεκτροστατική έλξη μεταξύ δύο αντίθετα φορτισμένων γυάλινων ραβδιών είναι το άθροισμα ηλεκτροστατικών δυνάμεων ανάμεσα σε πολλά μόρια των ραβδιών.

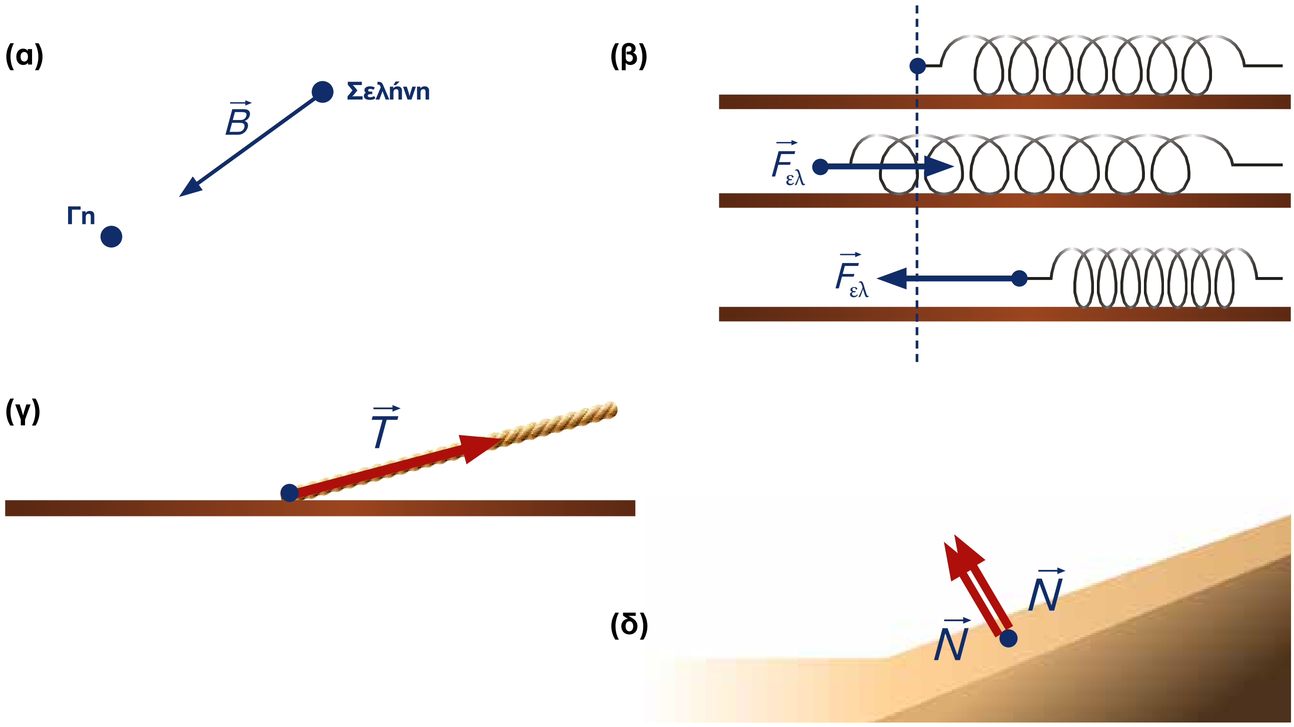
Το σημείο εφαρμογής μίας δύναμης, που προέρχεται από έναν μεγάλο αριθμό αλληλεπιδράσεων, επιλέγεται έτσι ώστε η δύναμη να προκαλεί στο σώμα *το ίδιο συνολικό αποτέλεσμα με τις επιμέρους αλληλεπιδράσεις*. Σε επόμενες χρονιές θα μελετήσουμε ποσοτικά το κριτήριο επιλογής του σημείου εφαρμογής τέτοιων δυνάμεων.

Στο παρόν βιβλίο μελετούμε δράσεις δυνάμεων, τα αποτελέσματα των οποίων *δεν εξαρτώνται από τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων, ή από το σχήμα και τις διαστάσεις των σωμάτων*. Στις περιπτώσεις αυτές, *τα σώματα μπορεί να θεωρηθούν σαν υλικά σημεία*.

Στο **μοντέλο υλικού σημείου** αναπαριστούμε ένα σώμα ως σημείο (κουκκίδα), και θεωρούμε ότι όλες οι δυνάμεις, που ασκούνται στο σώμα, έχουν σημείο εφαρμογής αυτό το σημείο.

Εικόνα 3-5
Αναπαράσταση των δυνάμεων της Εικόνας 3-1 στην προσέγγιση υλικού σημείου.

Η Εικόνα 3-5 αναπαριστά τα παραδείγματα δυνάμεων της Εικόνας 3-1 στο μοντέλο υλικού σημείου.



ΕΝΘΕΤΟ - Διανυσματικά Μεγέθη

Στο Κεφάλαιο 2 συζητήσαμε τρόπους καθορισμού των διανυσματικών μεγεθών της θέσης, της μετατόπισης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε μία ευθεία. Σ΄ αυτό το Ένθετο γενικεύουμε την περιγραφή των διανυσματικών μεγεθών σε δύο διαστάσεις και διεξάγουμε υπολογισμούς με διανυσματικά μεγέθη, χρησιμοποιώντας παραδείγματα από τη Φυσική.

ΟΡΙΣΜΟΙ

Συμβολισμός Διανυσματικών Μεγεθών

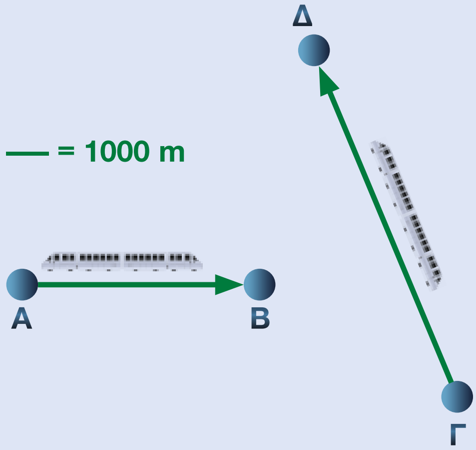
Θα συμβολίζουμε ένα διανυσματικό μέγεθος με ένα ή περισσότερα γράμματα και ένα βέλος (π.χ., θέση $\vec{x}$, ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, δύναμη $\vec{F}$, ...). Θα συμβολίζουμε το *μέτρο* ενός διανυσματικού μεγέθους $\vec{u}$ ως $|\vec{u}|$.

Αναπαράσταση Διανυσματικών Μεγεθών με Βέλη

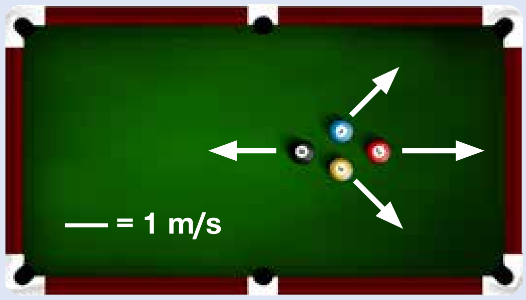
Θυμίζουμε ότι ένα διανυσματικό μέγεθος μπορεί να απεικονισθεί γραφικά με ένα βέλος, δηλαδή ένα *προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα*. Το *μήκος* του βέλους είναι ανάλογο με το μέτρο του διανυσματικού μεγέθους. Η διεύθυνση της ευθείας του βέλους, ή οποιασδήποτε παράλληλης με αυτήν ευθείας, αντιστοιχεί στη διεύθυνση του μεγέθους. Ο προσανατολισμός της αιχμής του βέλους αντιστοιχεί στη φορά του μεγέθους. Η Εικόνα 3-6 απεικονίζει διάφορα παραδείγματα διανυσματικών μεγεθών.

Εικόνα 3-6
Απεικόνιση διαφόρων διανυσματικών φυσικών μεγεθών με βέλη. **(α) Μετατοπίσεις** τρένων που εκτελούν δρομολόγια μεταξύ των σταθμών Α και Β, και Γ και Δ. **(β) Ταχύτητες** σφαιρών που κινούνται σε τραπέζι μπιλιάρδου. **(γ) Δυνάμεις** σε πίνακα που κρέμεται από δύο σχοινιά και ισορροπεί. **(δ) Επιταχύνσεις** αυτοκινήτων που κινούνται στον αυτοκινητόδρομο. Για κάθε περίπτωση υποδεικνύεται η αντιστοιχία μεταξύ του μήκους βέλους και της τιμής του αντίστοιχου μεγέθους.

(α)



(β)



(γ)

(δ)

Διανυσματικά Μεγέθη με την ίδια Διεύθυνση

- Διανυσματικά μεγέθη που έχουν την *ίδια διεύθυνση* ονομάζονται **ομόρροπα** όταν έχουν την ίδια φορά (Εικόνα 3-7(α)) και **αντίρροπα** όταν έχουν αντίθετη φορά (Εικόνα 3-7 (β)).

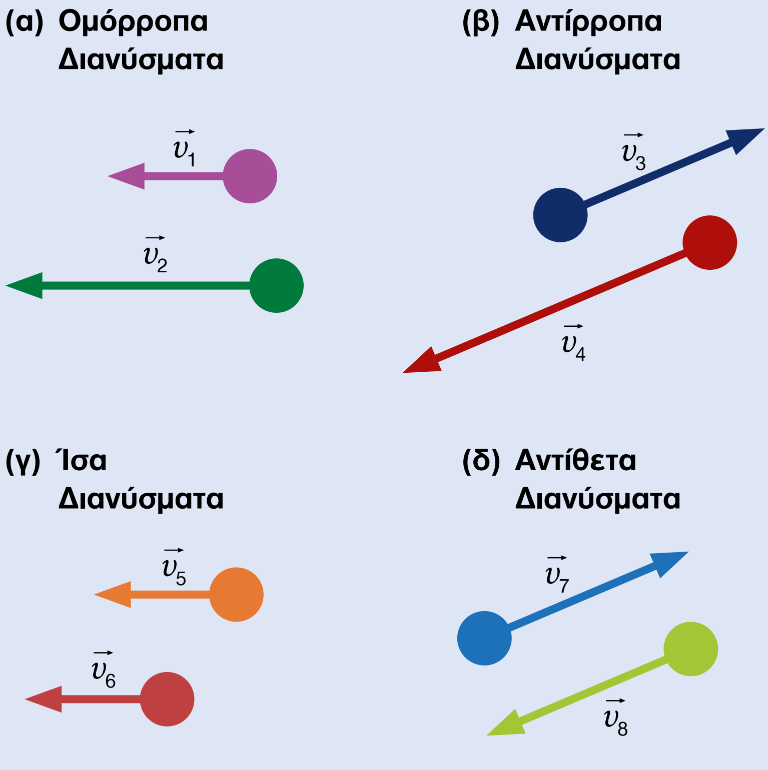
- Δύο διανυσματικά μεγέθη είναι **ίσα** όταν έχουν **ίσα μέτρα και την ίδια κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά).** Οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}_5$ και $\vec{\upsilon}_6$ της Εικόνας 3-7(γ) είναι ίσες ($\vec{\upsilon}_5 = \vec{\upsilon}_6$).

- Δύο διανυσματικά μεγέθη είναι **αντίθετα** όταν έχουν **ίσα μέτρα, ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά.** Οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}_7$ και $\vec{\upsilon}_8$ της Εικόνας 3-7(δ) είναι αντίθετες ($\vec{\upsilon}_7 = -\vec{\upsilon}_8$).

- Από τον ορισμό της ισότητας διανυσματικών μεγεθών προκύπτει ότι *εάν μεταφέρουμε το βέλος ενός διανυσματικού μεγέθους παράλληλα, δηλαδή διατηρώντας το μέτρο, τη διεύθυνση και τη φορά του, θα συνεχίζει να αναπαριστά το ίδιο μέγεθος.*

Προσοχή
Δύο διανυσματικά μεγέθη ίσου μέτρου πρέπει να έχουν και την ίδια κατεύθυνση για να είναι ίσα μεταξύ τους.

Εικόνα 3-7
(α) Οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ είναι ομόρροπες (έχουν την ίδια διεύθυνση και φορά). **(β)** Οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}_3$ και $\vec{\upsilon}_4$ είναι αντίρροπες (έχουν την ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά). **(γ)** Οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}_5$ και $\vec{\upsilon}_6$ είναι ίσες (έχουν το ίδιο μέτρο, διεύθυνση και φορά). **(δ)** Οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}_7$ και $\vec{\upsilon}_8$ είναι αντίθετες (έχουν το ίδιο μέτρο και διεύθυνση και αντίθετη φορά.)



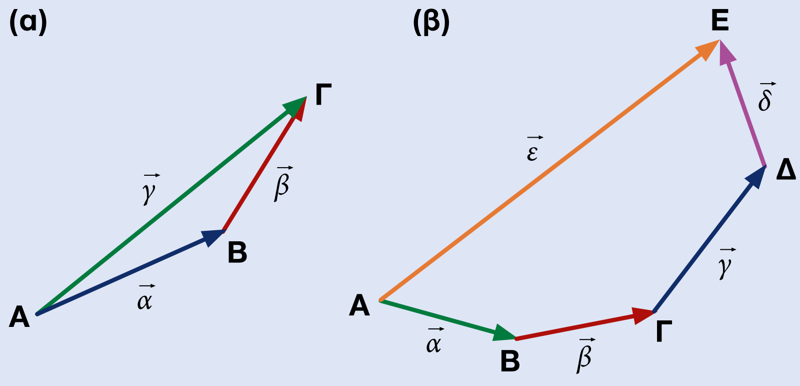
ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Τα διανυσματικά μεγέθη δεν προστίθενται όπως οι αριθμοί. Για να προσθέσουμε διανυσματικά μεγέθη χρησιμοποιούμε έναν από τους πιο κάτω κανόνες:

Α Κανόνας του Πολυγώνου

Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται σε όλες τις περιπτώσεις. Γίνεται αμέσως κατανοητός, χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα πρόσθεσης διανυσμάτων μετατόπισης.

Ένα αυτοκίνητο μετακινείται αρχικά από την πόλη Α στην πόλη Β, και κατόπιν στην πόλη Γ, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3-8. Οι αντίστοιχες μετατοπίσεις αναπαρίστανται από τα βέλη $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Το βέλος $\vec{\gamma}$ αντιπροσωπεύει τη *συνολική* μετατόπιση από το Α στο Γ και είναι **το διανυσματικό άθροισμα ή συνισταμένη** των επιμέρους μετατοπίσεων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$$

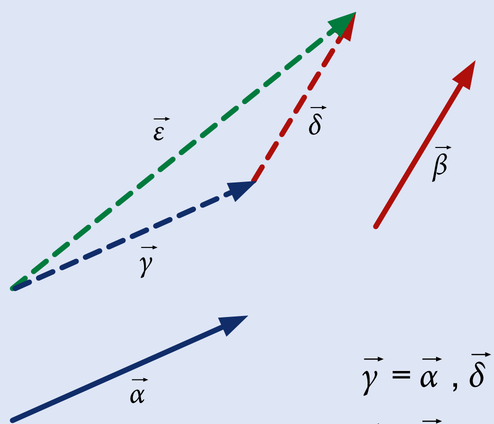
$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = \vec{\varepsilon}$$

Εικόνα 3-8
(α) Ένα αυτοκίνητο μετατοπίζεται από την πόλη Α στην πόλη Β, και κατόπιν στην πόλη Γ. Οι δύο μετατοπίσεις αναπαρίστανται από τα βέλη $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Η συνολική μετατόπιση από την πόλη Α στην πόλη Γ (βέλος $\vec{\gamma}$) ισούται με το διανυσματικό άθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.
(β) Κανόνας του πολυγώνου: Το διανυσματικό άθροισμα **N διαδοχικών** βελών αντιστοιχεί σε βέλος που ξεκινά από την αρχή του πρώτου (σημείο Α) και καταλήγει στην αιχμή του τελευταίου βέλους (σημείο Ε).

Τα βέλη των μετατοπίσεων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι **διαδοχικά**, δηλαδή το τέλος του $\vec{\alpha}$ (σημείο Β) συμπίπτει με την αρχή του $\vec{\beta}$. Σε αυτή την περίπτωση, το βέλος $\vec{\gamma}$ του αθροίσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ **ξεκινά από την αρχή του πρώτου βέλους (σημείο Α) και καταλήγει στην αιχμή του δευτέρου (σημείο Γ).** Η μέθοδος αυτή της πρόσθεσης διανυσμάτων αναφέρεται ως **κανόνας του πολυγώνου.** Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται γενικά στον υπολογισμό του αθροίσματος N διανυσμάτων, όπως απεικονίζεται στην Εικόνα 3-8(β). Εάν τα βέλη δεν είναι διαδοχικά, τα κάνουμε διαδοχικά με παράλληλη μεταφορά, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3-9.

Παράδειγμα Πρόσθεσης Παράλληλων Διανυσμάτων

Κανόνας του πολυγώνου (Εικόνα 3-8(β))
Για να υπολογίσουμε το άθροισμα N διανυσματικών μεγεθών, που αναπαρίστανται από **διαδοχικά** βέλη, σχεδιάζουμε ένα βέλος που ξεκινά από την **αρχή του πρώτου** και καταλήγει στην αιχμή **του τελευταίου βέλους**.



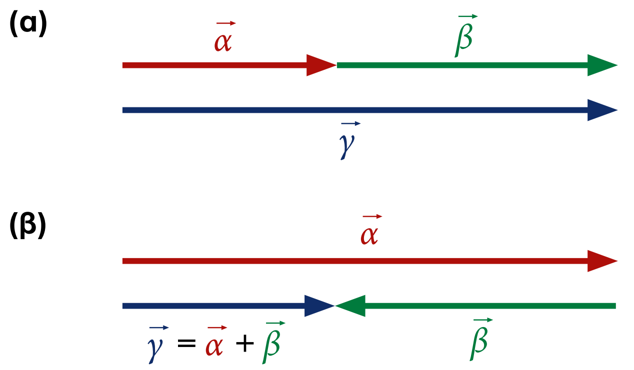
$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\ ,\ \vec{\delta} = \vec{\beta}$$

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{\delta} = \vec{\varepsilon}$$

Εικόνα 3-9
Τα βέλη $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι διαδοχικά. Για να υπολογίσουμε το άθροισμά τους με τον κανόνα του πολυγώνου, τα μεταφέρουμε παράλληλα έτσι ώστε να γίνουν διαδοχικά. Ομοίως ενεργούμε για N μή διαδοχικά διανύσματα.

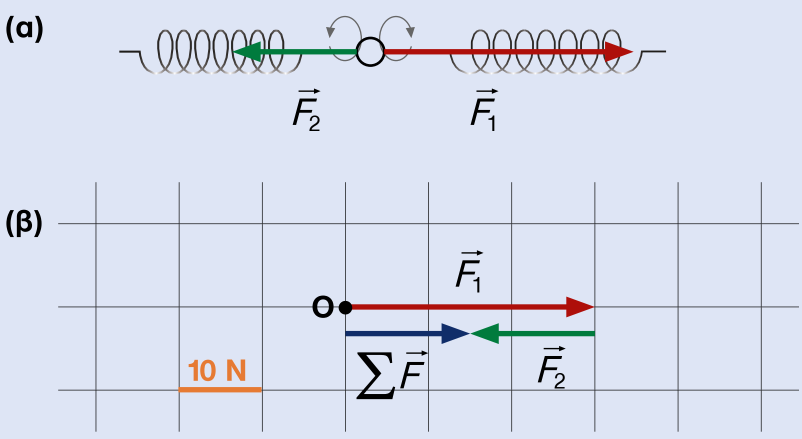
Εφαρμογή: Πρόσθεση Παράλληλων Διανυσμάτων με τον Κανόνα του Πολυγώνου

Η Εικόνα 3-10(α) απεικονίζει τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του πολυγώνου, προκύπτει ότι το διανυσματικό τους άθροισμα $\vec{\gamma}$ είναι ομόρροπο με αυτά. Στην περίπτωση που τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα (Εικόνα 3-10(β)), το άθροισμα $\vec{\gamma}$ είναι ομόρροπο με το διάνυσμα που έχει το μεγαλύτερο μέτρο.



Εικόνα 3-10
Το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι το διανυσματικό άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, για την περίπτωση που αυτά είναι (α) ομόρροπα, (β) αντίρροπα.

Η Εικόνα 3-11 απεικονίζει έναν κρίκο που δέχεται αντίρροπες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ από δύο ελατήρια. Για να υπολογίσουμε τη συνισταμένη δύναμη, απεικονίζουμε τον κρίκο σαν υλικό σημείο Ο (προσέγγιση υλικού σημείου). Με αρχή το σημείο Ο, σχεδιάζουμε διαδοχικά τα βέλη των δύο δυνάμεων και εφαρμόζουμε τον κανόνα του πολυγώνου. Θα συμβολίζουμε τη συνισταμένη δύναμη με $\sum\vec{F}$. Το διάνυσμα αυτό έχει αρχή το Ο και τέλος την αιχμή του δεύτερου βέλους ($\vec{F}_2$). Από το σχήμα προκύπτει ότι το μήκος του βέλους $\sum\vec{F}$ αντιστοιχεί σε δύναμη με μέτρο 15 N.



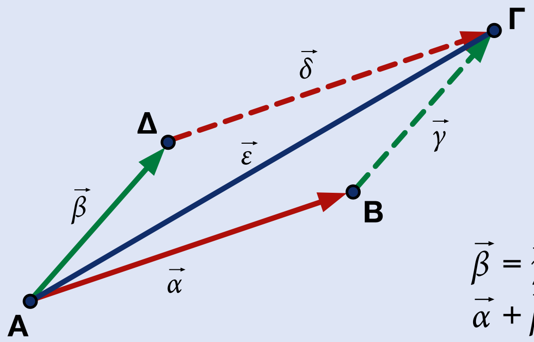
Εικόνα 3-11
(α) Ο κρίκος υφίσταται αντίρροπες δυνάμεις από τα δύο ελατήρια του σχήματος. **(β)** Απεικονίζουμε τον κρίκο σαν υλικό σημείο Ο και σχεδιάζουμε διαδοχικά τα βέλη $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με αρχή το Ο. Υπολογίζουμε τη συνισταμένη δύναμη $\sum\vec{F}$ από τον κανόνα του πολυγώνου.

Β Κανόνας του Παραλληλογράμμου

Ο κανόνας αυτός *εφαρμόζεται μόνο στην πρόσθεση μή παράλληλων διανυσμάτων*. Για να εφαρμόσουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου, σχεδιάζουμε τα βέλη των προστιθέμενων διανυσμάτων με **κοινή αρχή**.

Τα βέλη $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ της Εικόνας 3-12 έχουν κοινή αρχή στο σημείο Α. Σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με πλευρές τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Επειδή τα βέλη $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ έχουν ίσα μέτρα και την ίδια κατεύθυνση (απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου), αναπαριστούν το ίδιο διάνυσμα. Ομοίως, τα βέλη $\vec{\alpha}$ και $\vec{\delta}$ αναπαριστούν το ίδιο διάνυσμα. Έτσι προκύπτει:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\delta} = \vec{\varepsilon}$$



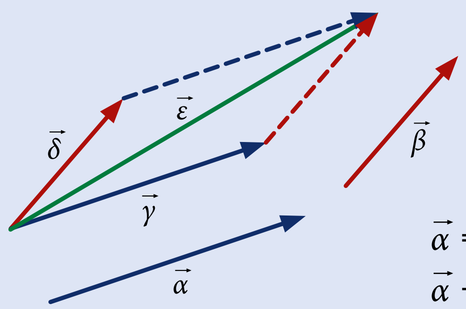
$$\vec{\beta} = \vec{\gamma},$$
$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\varepsilon}$$

Εικόνα 3-12
Κανόνας του παραλληλογράμμου: Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν κοινή αρχή στο σημείο Α. Σχεδιάζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με δύο πλευρές τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Το βέλος $\vec{\varepsilon}$ της διαγωνίου ΑΓ του παραλληλογράμμου, που ξεκινά από την κοινή αρχή Α, αντιστοιχεί στο άθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Κανόνας του παραλληλογράμμου (Εικόνα 3-12)

Για να προσθέσουμε δύο διανυσματικά μεγέθη **που δεν έχουν την ίδια διεύθυνση**, φέρουμε από μια κοινή αρχή Α τα βέλη των μεγεθών και **συμπληρώνουμε ένα παραλληλόγραμμο** με τις δύο άλλες πλευρές παράλληλες προς τα βέλη. Το βέλος **της διαγωνίου** του παραλληλογράμμου, **που ξεκινά από την κοινή αρχή Α**, αναπαριστά το ζητούμενο άθροισμα.

Για να εφαρμόσουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου σε διανύσματα που δεν έχουν κοινή αρχή, μεταφέρουμε τα βέλη παράλληλα ώστε να αποκτήσουν κοινή αρχή (Εικόνα 3-13).



$$\vec{\alpha} = \vec{\gamma},\ \vec{\beta} = \vec{\delta},$$
$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{\delta} = \vec{\varepsilon}$$

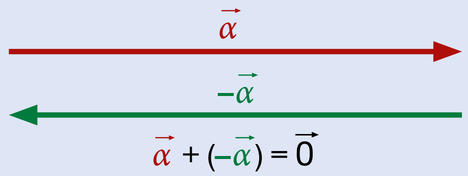
Εικόνα 3-13
Τα βέλη $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν έχουν κοινή αρχή. Για να υπολογίσουμε το άθροισμά τους με τον κανόνα του παραλληλογράμμου, τα μεταφέρουμε παράλληλα έτσι ώστε να αποκτήσουν κοινή αρχή.

- Ο κανόνας του **πολυγώνου** είναι πιο γενικός, διότι εφαρμόζεται και σε διανύσματα με την **ίδια διεύθυνση**.
- Ο κανόνας του **πολυγώνου** εφαρμόζεται ευκολότερα από τον κανόνα του παραλληλογράμμου στην άθροιση περισσοτέρων από δύο διανυσμάτων.
- Ο κανόνας του **παραλληλογράμμου** δεν εφαρμόζεται σε διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση.

Ορισμός του Μηδενικού Διανύσματος

Το άθροισμα δύο αντίθετων διανυσμάτων ονομάζεται **μηδενικό διάνυσμα** και συμβολίζεται ως $\vec{0}$. Από τον κανόνα του πολυγώνου προκύπτει ότι η αρχή και το τέλος του βέλους, που απεικονίζει το μηδενικό διάνυσμα, συμπίπτουν (Εικόνα 3-14). Το μηδενικό διάνυσμα έχει μέτρο ίσο με μηδέν και **απροσδιόριστη κατεύθυνση**.

Εικόνα 3-14
Το διάνυσμα $-\vec{\alpha}$ είναι το αντίθετο του διανύσματος $\vec{\alpha}$. Το άθροισμα των αντίθετων διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\alpha}$ ονομάζεται **μηδενικό διάνυσμα** $\vec{0}$. Η αρχή και το τέλος του βέλους που απεικονίζει το διάνυσμα $\vec{0}$ συμπίπτουν. Το μέτρο του $\vec{0}$ είναι ίσο με μηδέν και η κατεύθυνσή του είναι απροσδιόριστη.



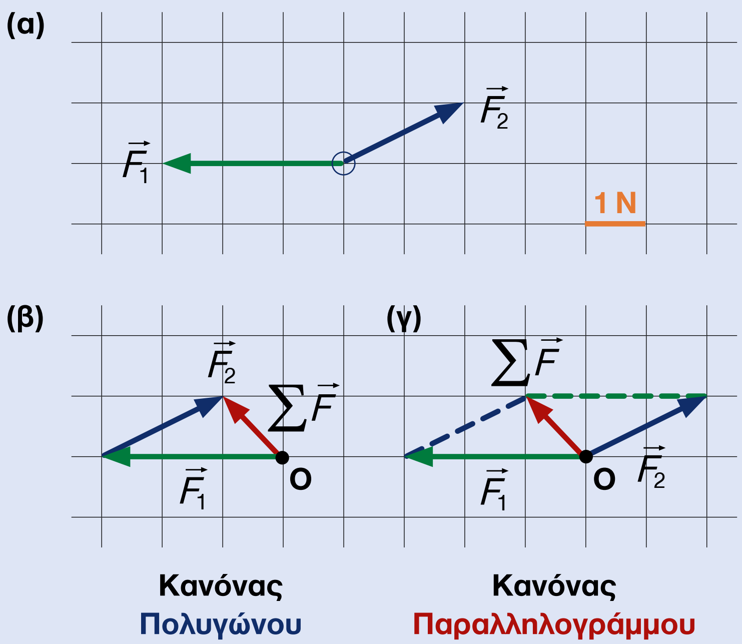
Παράδειγμα

Στην Εικόνα 3-15(α) απεικονίζεται ένας κρίκος, ο οποίος έλκεται από δύο σχοινιά με δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Για να υπολογίσουμε τη συνισταμένη δύναμη $\sum\vec{F}$ αναπαριστούμε τον κρίκο σαν υλικό σημείο (μαύρη κουκκίδα Ο), όπως φαίνεται στην Εικόνα 3-15(β).

Με αρχή το σημείο Ο σχεδιάζουμε διαδοχικά βέλη παράλληλα με τα διανύσματα $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ και εφαρμόζουμε τον **κανόνα του πολυγώνου.** Από το σχήμα προκύπτει ότι το μήκος του βέλους της συνισταμένης δύναμης αντιστοιχεί σε δύναμη με μέτρο 1,4 N.

Εναλλακτικά, για να εφαρμόσουμε τον **κανόνα του παραλληλογράμμου**, σχεδιάζουμε βέλη παράλληλα με αυτά των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με κοινή αρχή το Ο, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3-15(γ).

Εικόνα 3-15
(α) Κρίκος που έλκεται από δύο σχοινιά με τις δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. **(β)** Υπολογισμός της συνισταμένης δύναμης με τον κανόνα του πολυγώνου και **(γ)** με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.



ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Η Εικόνα 3-16 απεικονίζει δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Για να υπολογίσουμε τη διαφορά $\vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, μπορούμε να ενεργήσουμε με έναν από τους δύο τρόπους, που υποδεικνύονται στην εικόνα αυτή.

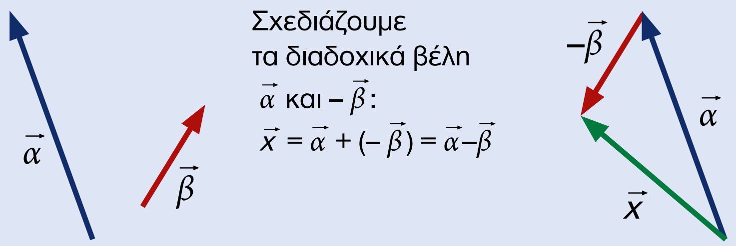
Τρόπος I

Χειριζόμαστε τη διαφορά $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ σαν το άθροισμα $\vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$, όπου το $-\vec{\beta}$ είναι το αντίθετο του διανύσματος $\vec{\beta}$. Από το τέλος του $\vec{\alpha}$ σχεδιάζουμε το διάνυσμα $-\vec{\beta}$ και υπολογίζουμε το άθροισμα $\vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$ με τον κανόνα του πολυγώνου. Το ζητούμενο διάνυσμα $\vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ ξεκινά από την αρχή του $\vec{\alpha}$ και καταλήγει στο τέλος του $-\vec{\beta}$.

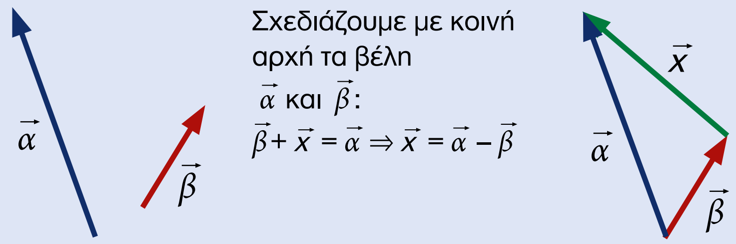
Τρόπος II

Δεδομένου ότι $\vec{\beta} + (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\alpha}$, συμπεραίνουμε ότι εάν προσθέσουμε τη ζητούμενη διαφορά $\vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}$ επανακτούμε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$. Συνεπώς, **αναζητούμε το διάνυσμα $\vec{x}$ που χρειάζεται να προστεθεί στο διάνυσμα $\vec{\beta}$ για να δώσει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$**. Σχεδιάζουμε τα βέλη των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με κοινή αρχή. Το ζητούμενο διάνυσμα $\vec{x}$ αντιστοιχεί σε ένα βέλος με αρχή την αιχμή του $\vec{\beta}$ και τέλος την αιχμή του $\vec{\alpha}$. Από τον κανόνα του πολυγώνου προκύπτει ότι $\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha}$.

Τρόπος I:



Τρόπος II:

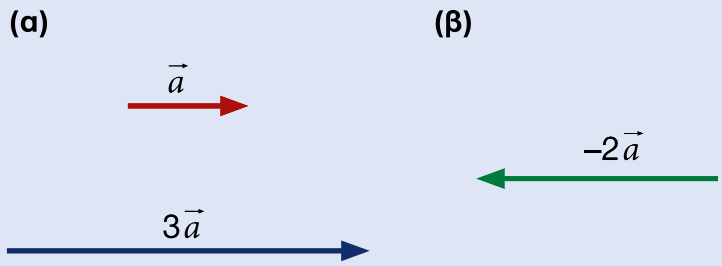


Εικόνα 3-16
Για να υπολογίσουμε τη διαφορά $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, προσθέτουμε στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ το διάνυσμα $-\vec{\beta}$ (**τρόπος I**), ή προσδιορίζουμε το διάνυσμα που πρέπει να προστεθεί στο $\vec{\beta}$ για να προκύψει το $\vec{\alpha}$ (**τρόπος II**).

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Πολλαπλασιάζοντας ένα διάνυσμα με έναν αριθμό λ, αλλάζουμε το μέτρο του *χωρίς να μεταβάλλουμε τη διεύθυνσή του*, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3-17. Το διάνυσμα $\lambda\vec{\alpha}$ έχει μέτρο ίσο με $|\lambda||\vec{\alpha}|$ και φορά που εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμού λ: Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\lambda\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπα εάν $\lambda > 0$ και αντίρροπα εάν $\lambda < 0$.

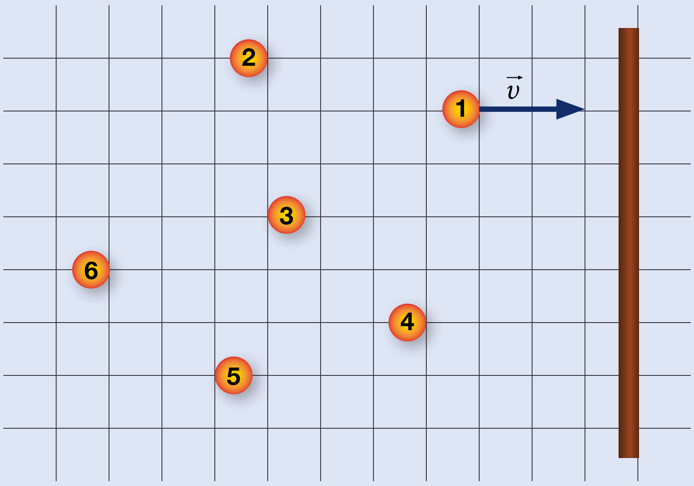
Εικόνα 3-17
Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\lambda\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπα εάν $\lambda > 0$ και αντίρροπα εάν $\lambda < 0$. Το μέτρο του διανύσματος $\lambda\vec{\alpha}$ ισούται με $|\lambda||\vec{\alpha}|$.



Μερικά παραδείγματα απεικονίζονται στην Εικόνα 3-17. Το βέλος του διανύσματος $3\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$ και έχει τριπλάσιο μήκος. Το βέλος $-2\vec{\alpha}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{\alpha}$ και και έχει διπλάσιο μήκος.

Παράδειγμα

Η Εικόνα 3-18 απεικονίζει την κάτοψη ενός τραπεζιού με μπάλες, οι οποίες κινούνται και ανακλώνται στο πλαίσιο του τραπεζιού. Η ταχύτητα κάθε μπάλας αναγράφεται στον πίνακα και μία από τις ταχύτητες έχει αναπαρασταθεί με βέλος. Με βάση τα στοιχεία του πίνακα, να σχεδιάσετε τα βέλη όλων των ταχυτήτων.



Α/Α μπάλας	Ταχύτητα
1	$\vec{v}$
2	$3\vec{v}$
3	$-2\vec{v}$
4	$1/2\vec{v}$
5	$-2,5\vec{v}$
6	$4,5\vec{v}$

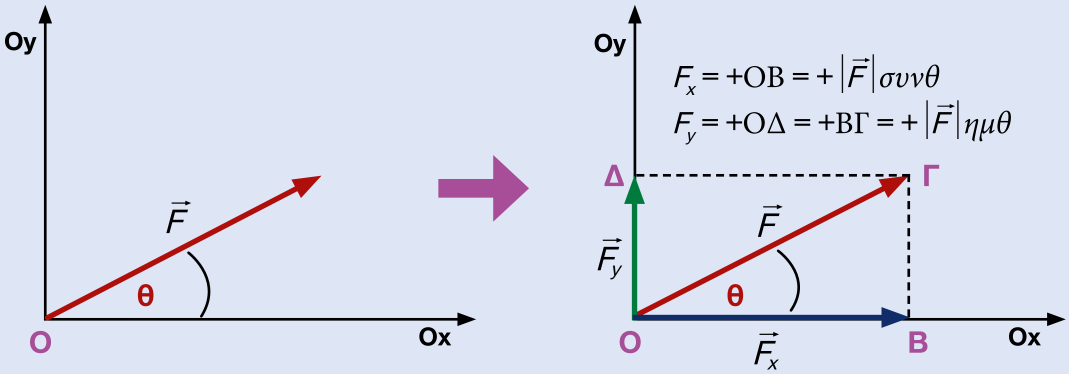
Εικόνα 3-18
Οι μπάλες κινούνται σε οριζόντιο τραπέζι, που φαίνεται σε κάτοψη και ανακλώνται στο κατακόρυφο εμπόδιο (δεξιά).

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ

Σε αυτή την ενότητα ορίζουμε τις **συνιστώσες** ενός διανύσματος ως προς ένα σύστημα αξόνων, και εξηγούμε τρόπους προσδιορισμού των συνιστωσών. Αργότερα, θα μάθουμε ότι η ανάλυση ενός διανύσματος σε συνιστώσες χρησιμοποιείται σε προβλήματα Μηχανικής, **για τον υπολογισμό της συνολικής (συνισταμένης) δύναμης σε ένα σώμα.**

Σε πολλές εφαρμογές είναι γνωστό **το μέτρο** ενός διανύσματος, και **η γωνία** που σχηματίζει με μία διεύθυνση. Από αυτά τα μεγέθη μπορούν να προσδιορισθούν **οι συνιστώσες** του διανύσματος. Χρησιμοποιούμε σαν παράδειγμα διανύσματα δύναμης, αλλά με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αναλύουμε σε συνιστώσες οποιοδήποτε διάνυσμα (π.χ, μετατόπισης ή ταχύτητας).

(α) Η Εικόνα 3-19 απεικονίζει ένα διάνυσμα δύναμης $\vec{F}$, του οποίου είναι γνωστά το μέτρο $|\vec{F}|$ και η γωνία θ με την οριζόντιο διεύθυνση. Επιλέγουμε τον άξονα Ox σε αυτή τη διεύθυνση και σχεδιάζουμε τον άξονα Oy στην κάθετη διεύθυνση. Οι άξονες ορίζουν ενα **ορθοκανονικό** σύστημα αναφοράς, και τέμνονται στο σημείο O (αρχή του βέλους της $\vec{F}$). **Το βέλος κάθε άξονα δηλώνει τη θετική κατεύθυνση.**



Εικόνα 3-19
Υπολογισμός των συνιστωσών του διανύσματος μιας δύναμης $\vec{F}$ από το μέτρο του και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα Ox.

Από την αιχμή του βέλους της $\vec{F}$ (σημείο Γ στο δεξιό σχήμα) φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες Ox και Oy, και δημιουργούμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΟΒΓΔ με διαγώνιο το βέλος $\vec{F}$. Παρατηρούμε ότι στον άξονα Ox σχηματίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ με αρχή το σημείο O και τέλος το σημείο B (την προβολή της αιχμής Γ). Το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ ονομάζεται **«διανυσματική συνιστώσα της δύναμης $\vec{F}$ κατά τη διεύθυνση Ox»** και συμβολίζεται με $\vec{F}_x$. Η διανυσματική συνιστώσα συνδέεται με μια αλγεβρική τιμή, που συμβολίζεται ως F_x (χωρίς βέλος) και ονομάζεται **«συνιστώσα της $\vec{F}$ κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox»**.

Η συνιστώσα F_x έχει μέτρο και πρόσημο. Το **μέτρο** της F_x ισούται με το μήκος της πλευράς ΟΒ και υπολογίζεται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΓ:

$$\mathrm{OB} = \mathrm{O\Gamma}\sigma\upsilon\nu\theta = |\vec{F}|\sigma\upsilon\nu\theta$$

Το **πρόσημο** της F_x είναι θετικό, επειδή η διανυσματική συνιστώσα $\vec{F}_x$ έχει φορά προς τη θετική κατεύθυνση του Ox. Έτσι:

$$F_x = +\mathrm{OB} = +|\vec{F}|\sigma\upsilon\nu\theta$$

Ομοίως, στον άξονα Oy σχηματίζεται ένα διάνυσμα με αρχή το σημείο Ο και τέλος το σημείο Δ, δηλαδή την προβολή της αιχμής Γ. Το διάνυσμα αυτό ονομάζεται **«διανυσματική συνιστώσα της δύναμης $\vec{F}$ κατά τη διεύθυνση Oy»** και συμβολίζεται με $\vec{F}_y$. Η διανυσματική συνιστώσα $\vec{F}_y$ συνδέεται με μια αλγεβρική τιμή, που συμβολίζεται ως F_y και ονομάζεται **«συνιστώσα της $\vec{F}$ κατά τη διεύθυνση του άξονα Oy»**. Το **μέτρο** της F_y ισούται με το μήκος των πλευρών ΟΔ και ΒΓ και υπολογίζεται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΓ:

$$\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{O\Gamma}\eta\mu\theta = |\vec{F}|\eta\mu\theta$$

Το **πρόσημο** της F_y είναι θετικό επειδή η διανυσματική συνιστώσα $\vec{F}_y$ έχει φορά προς τη θετική κατεύθυνση του Oy. Έτσι:

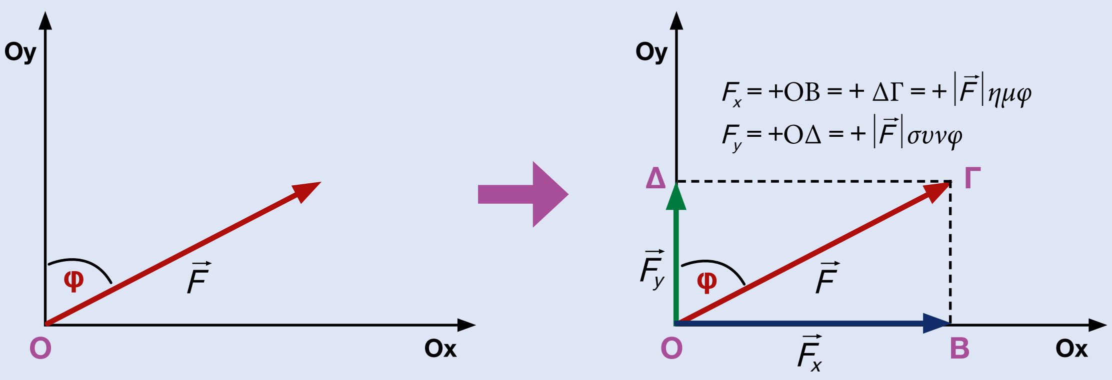
$$F_y = +\mathrm{O\Delta} = +\mathrm{B\Gamma} = +|\vec{F}|\eta\mu\theta$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου στο παραλληλόγραμμο ΟΒΓΔ, προκύπτει ότι η δύναμη $\vec{F}$ ισούται με το άθροισμα των διανυσματικών της συνιστωσών:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

(β) **Έστω ότι είναι γνωστή η γωνία του διανύσματος της δύναμης $\vec{F}$** με τον άξονα Oy (Εικόνα 3-20). Ενεργούμε με τον ίδιο τρόπο, σχηματίζοντας το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΟΒΓΔ με διαγώνιο ΟΓ το βέλος $\vec{F}$.

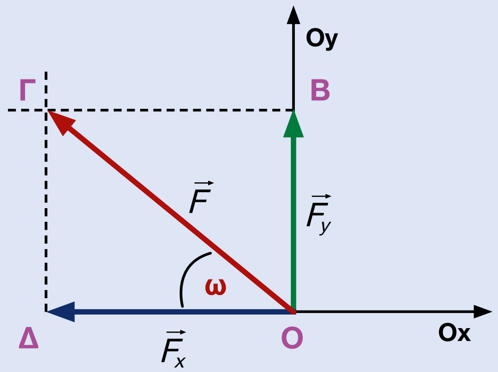
Από το τρίγωνο ΟΔΓ συμπεραίνουμε ότι $\Delta\Gamma = \mathrm{O\Gamma}\eta\mu\varphi = |\vec{F}|\eta\mu\varphi$. Το πρόσημο της F_x είναι θετικό, επειδή το διάνυσμα $\vec{F}_x$ είναι στραμμένο προς τη θετική κατεύθυνση του Ox. Έτσι, $F_x = +\mathrm{OB} = +\Delta\Gamma = +|\vec{F}|\eta\mu\varphi$. Ομοίως ισχύει $F_y = +\mathrm{O\Delta} = +|\vec{F}|\sigma\upsilon\nu\varphi$.



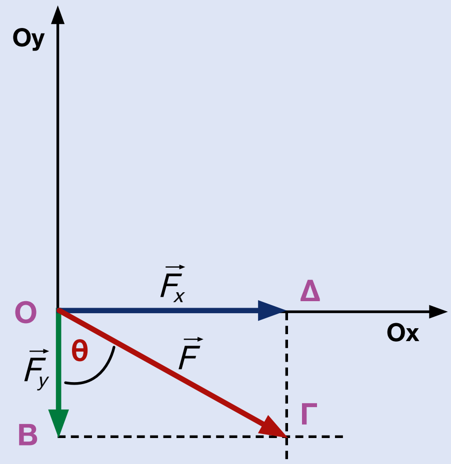
Εικόνα 3-20
Υπολογισμός των συνιστωσών ενός διανύσματος από το μέτρο του και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα Oy.

(γ) Εάν κάποια από τις συνιστώσες του διανύσματος έχει αρνητική τιμή, χρειάζεται να συμπεριλάβουμε το αρνητικό πρόσημο στην τελική της έκφραση. Στην Εικόνα 3-21(α), το διάνυσμα της δύναμης $\vec{F}$ σχηματίζει γωνία ω με τον άξονα Ox. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΔ προκύπτει ότι $\mathrm{O\Delta} = \mathrm{O\Gamma}\,\sigma\upsilon\nu\omega = |\vec{F}|\,\sigma\upsilon\nu\omega$. Επειδή η διανυσματική συνιστώσα $\vec{F}_x$ έχει φορά προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα Ox, η συνιστώσα F_x έχει αρνητικό πρόσημο: $F_x = -\mathrm{O\Delta} = -|\vec{F}|\,\sigma\upsilon\nu\omega$. Η συνιστώσα F_y είναι θετική: $F_y = +\mathrm{OB} = +\Delta\Gamma = +|\vec{F}|\,\eta\mu\omega$.

$$F_x = -\mathrm{O\Delta} = -|\vec{F}|\,\sigma\upsilon\nu\omega$$
$$F_y = +\mathrm{OB} = +\Delta\Gamma = +|\vec{F}|\,\eta\mu\omega$$



$$F_x = +\mathrm{O\Delta} = +\mathrm{B\Gamma} = +|\vec{F}|\,\eta\mu\theta$$
$$F_y = -\mathrm{OB} = -|\vec{F}|\,\sigma\upsilon\nu\theta$$

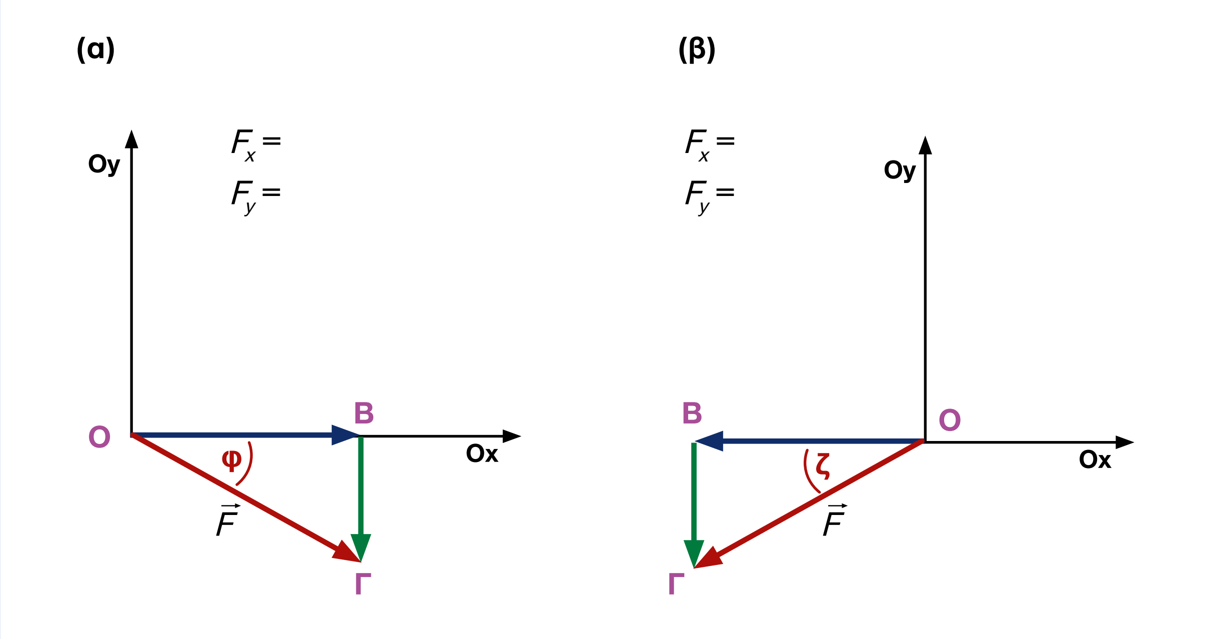


Εικόνα 3-21
Όταν υπολογίζουμε τις συνιστώσες ενός διανύσματος από το μέτρο του και τη γωνία θ με έναν από τους άξονες, πρέπει να λάβουμε υπ΄ όψη το πρόσημο των συνιστωσών.

Άσκηση

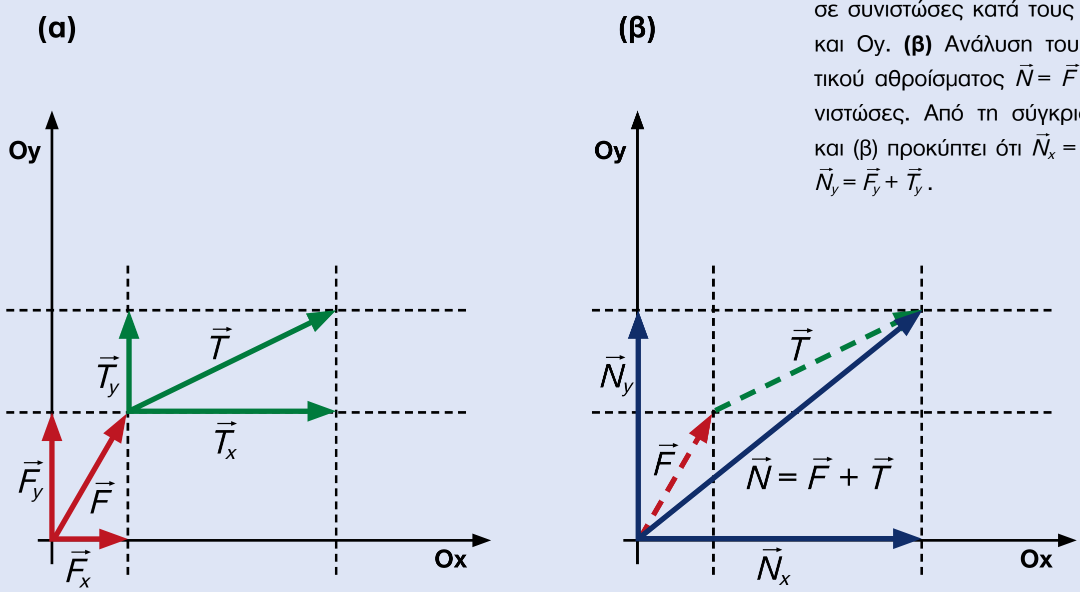
(α) Η δύναμη $\vec{F}$ σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα Ox, όπως στο σχήμα. Να εκφράσετε τις συνιστώσες F_x, F_y χρησιμοποιώντας το μέτρο της, $|\vec{F}|$, και κατάλληλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις της γωνίας φ.

(β) Η δύναμη $\vec{F}$ σχηματίζει τη γωνία ζ του σχήματος με τον άξονα Ox. Να εκφράσετε τις συνιστώσες της, χρησιμοποιώντας το μέτρο της και κατάλληλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις της γωνίας ζ.



ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΣΥΝΙΣΤΩΣΩΝ

Η ανάλυση σε συνιστώσες παρέχει έναν εύκολο κανόνα υπολογισμού του αθροίσματος διανυσμάτων. Στην Εικόνα 3-22 απεικονίζονται τα διανύσματα των δυνάμεων $\vec{F}$ και $\vec{T}$ τα οποία έχουμε σχεδιάσει με διαδοχικά βέλη. Οι διανυσματικές συνιστώσες της $\vec{F}$ είναι τα διανύσματα $\vec{F}_x$ και $\vec{F}_y$. Ομοίως, οι διανυσματικές συνιστώσες της $\vec{T}$ είναι τα διανύσματα $\vec{T}_x$ και $\vec{T}_y$. Υπολογίζουμε το άθροισμα $\vec{F} + \vec{T}$ με τον κανόνα του πολυγώνου και σχεδιάζουμε το αντίστοιχο βέλος $\vec{N}$ στο δεξιό σχήμα. Οι διανυσματικές συνιστώσες του αθροίσματος αυτού παριστάνονται από τα βέλη $\vec{N}_x$ και $\vec{N}_y$.



Εικόνα 3-22
(α) Ανάλυση των δυνάμεων $\vec{F}$ και $\vec{T}$ σε συνιστώσες κατά τους άξονες Ox και Oy. **(β)** Ανάλυση του διανυσματικού αθροίσματος $\vec{N} = \vec{F} + \vec{T}$ σε συνιστώσες. Από τη σύγκριση των (α) και (β) προκύπτει ότι $\vec{N}_x = \vec{F}_x + \vec{T}_x$ και $\vec{N}_y = \vec{F}_y + \vec{T}_y$.

Σύγκριση των (α) και (β) δείχνει ότι οι διανυσματικές συνιστώσες των $\vec{F}$, $\vec{T}$ και του αθροίσματός τους $\vec{N}$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$\vec{N}_x = \vec{F}_x + \vec{T}_x,\ \ \vec{N}_y = \vec{F}_y + \vec{T}_y$$

Ομοίως, για τις συνιστώσες των διανυσμάτων ισχύει:

$$N_x = F_x + T_x,\ \ N_y = F_y + T_y$$

Συμπεραίνουμε ότι ισχύει ο εξής κανόνας:

Κανόνας Πρόσθεσης Συνιστωσών
Η συνιστώσα του **αθροίσματος** $\vec{\delta}$ δύο διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ κατά τη διεύθυνση ενός άξονα ισούται με το άθροισμα των συνιστωσών κατά την διεύθυνση του ίδιου άξονα:

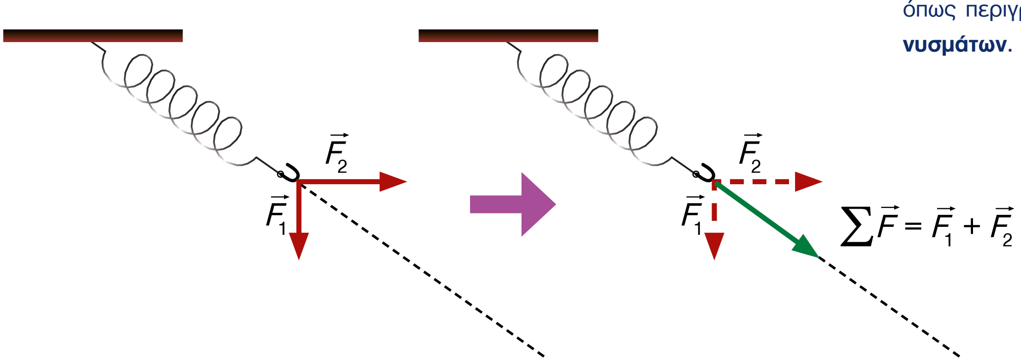
$$\delta_x = \beta_x + \gamma_x\ ,\ \delta_y = \beta_y + \gamma_y$$

Ο παραπάνω **κανόνας πρόσθεσης συνιστωσών** εφαρμόζεται στην **πρόσθεση δυνάμεων** και γενικότερα **διανυσμάτων οποιουδήποτε φυσικού μεγέθους**.

ΤΕΛΟΣ ΕΝΘΕΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

3.6. Αρχή της Επαλληλίας Δυνάμεων

Στο αριστερό σχήμα της εικόνας 3-23 απεικονίζεται ένα ελατήριο αμελητέου βάρους, στο οποίο ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Οι δυνάμεις αυτές προκαλούν το ίδιο αποτέλεσμα με μια δύναμη $\sum\vec{F}$, η οποία ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ (δεξιό σχήμα εικόνας 3-23). Η δύναμη $\sum\vec{F}$ ονομάζεται **συνισταμένη** των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Το ελατήριο εκτείνεται στη διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης και η επιμήκυνσή του είναι ίση με αυτή που θα προκαλούσε η συνισταμένη δύναμη.



Εικόνα 3-23
Αριστερά: Το ελατήριο επιμηκύνεται υπό την επίδραση των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. **Δεξιά:** Η δράση των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ισοδυναμεί με τη δράση της συνισταμένης δύναμης $\sum\vec{F}$ η οποία είναι το διανυσματικό άθροισμα των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Η δύναμη $\sum\vec{F}$ μπορεί να υπολογισθεί γραφικά από τις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με τον κανόνα του παραλληλογράμμου, όπως περιγράφεται στο **Ένθετο Διανυσμάτων**.

Αρχή της Επαλληλίας Δυνάμεων
Όταν δύο ή περισσότερες δυνάμεις δρούν σε ένα σώμα που προσεγγίζεται ως υλικό σημείο, προκαλούν το ίδιο αποτέλεσμα με μία **συνισταμένη** δύναμη, που ισούται με το διανυσματικό τους άθροισμα.

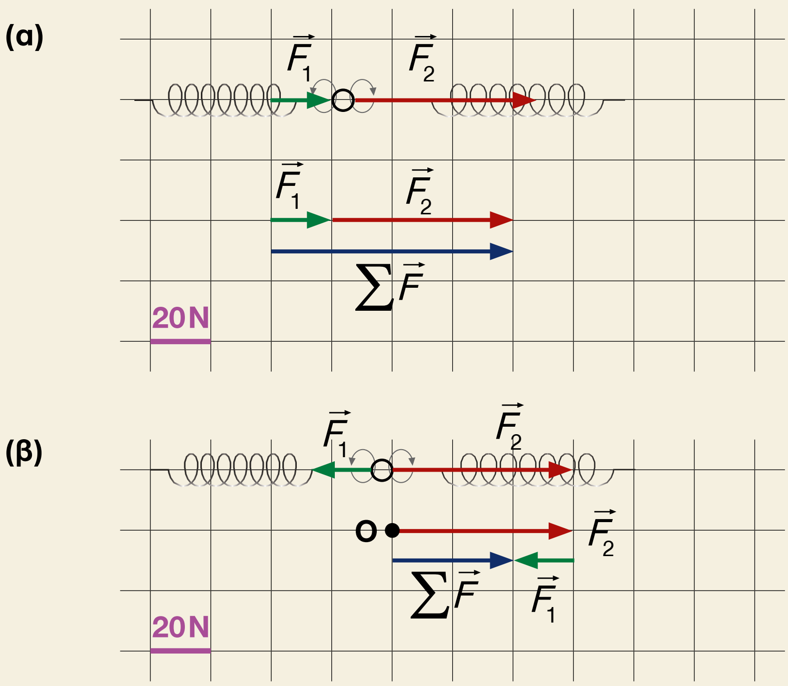
3.7. Σύνθεση Δυνάμεων

Η αρχή της επαλληλίας δυνάμεων αποδεικνύεται πειραματικά για οποιεσδήποτε δυνάμεις. Με βάση την αρχή της επαλληλίας, οι δυνάμεις **συνθέτονται** σύμφωνα με τους **κανόνες πρόσθεσης διανυσμάτων**. Οι κανόνες αυτοί παρουσιάζονται αναλυτικά στο συνοδευτικό **Ένθετο Διανυσμάτων**. Στα επόμενα εφαρμόζουμε αυτούς τους κανόνες.

Περίπτωση 1: Σύνθεση Συγγραμμικών Δυνάμεων

Η Εικόνα 3-24 απεικονίζει περιπτώσεις ελατηρίων που εξασκούν δυνάμεις στην ίδια διεύθυνση. Οι δυνάμεις αυτές ονομάζονται **συγγραμμικές**. Όταν έχουν την ίδια φορά ονομάζονται **ομόρροπες**, και όταν έχουν αντίθετη φορά ονομάζονται **αντίρροπες**.

Ομόρροπες Δυνάμεις
Το σώμα του σχήματος 3-24(α) εφάπτεται με δύο ελατήρια. Το αριστερό ελατήριο είναι συσπειρωμένο και ασκεί στο σώμα τη δύναμη $\vec{F}_1$. Το δεξιό ελατήριο είναι επιμηκυμένο και ασκεί τη δύναμη $\vec{F}_2$. Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι **συγγραμμικές και ομόρροπες**.



Εικόνα 3-24
(α) Σύνθεση ομόρροπων συγγραμμικών δυνάμεων. **(β)** Σύνθεση αντίρροπων συγγραμμικών δυνάμεων.

Για να υπολογίσουμε τη συνισταμένη δύναμη, εφαρμόζουμε τον **κανόνα του πολυγώνου**: Μεταφέρουμε τα διανύσματα των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ παράλληλα (διατηρώντας την κατεύθυνση και το μέτρο τους), έτσι ώστε να γίνουν **διαδοχικά**. Η συνισταμένη δύναμη $\sum\vec{F}$ αναπαρίσταται από ένα βέλος, που ξεκινά από την αρχή του πρώτου και καταλήγει στην αιχμή του δεύτερου βέλους. Από το διάγραμμα προκύπτει ότι οι $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ έχουν μέτρα 20 N και 60 N αντίστοιχα. Η συνισταμένη δύναμη έχει την ίδια διεύθυνση και φορά, και μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων τους:

$$20\ \text{N} + 60\ \text{N} = 80\ \text{N}$$

Αντίρροπες Δυνάμεις

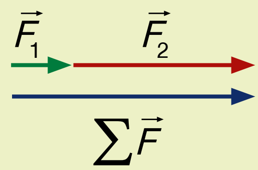
Τα ελατήρια της Εικόνας 3-24(β) είναι επιμηκυμένα και ασκούν στον κρίκο τις **συγγραμμικές** και **αντίρροπες** δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Η συνισταμένη δύναμη υπολογίζεται με τον **κανόνα του πολυγώνου**, όπως και προηγουμένως: Μεταφέρουμε τα διανύσματα $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ παράλληλα, έτσι ώστε να γίνουν διαδοχικά. Η συνισταμένη δύναμη $\sum\vec{F}$ έχει την ίδια διεύθυνση με τις δύο δυνάμεις, τη φορά της μεγαλύτερης δύναμης, και μέτρο ίσο με τη διαφορά των μέτρων τους:

$$60\ \text{N} - 20\ \text{N} = 40\ \text{N}$$

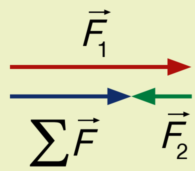
Πρόσθεση Συγγραμμικών Δυνάμεων

Εάν οι δυνάμεις είναι **συγγραμμικές**, υπολογίζουμε τη συνισταμένη δύναμη με τον **κανόνα του πολυγώνου**.

(A) Εάν οι δυνάμεις είναι **ομόρροπες**, η συνισταμένη δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με αυτές, και μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων τους.



(B) Εάν οι δυνάμεις είναι **αντίρροπες**, η συνισταμένη δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με τη μεγαλύτερη δύναμη, και μέτρο ίσο με τη διαφορά των μέτρων τους.



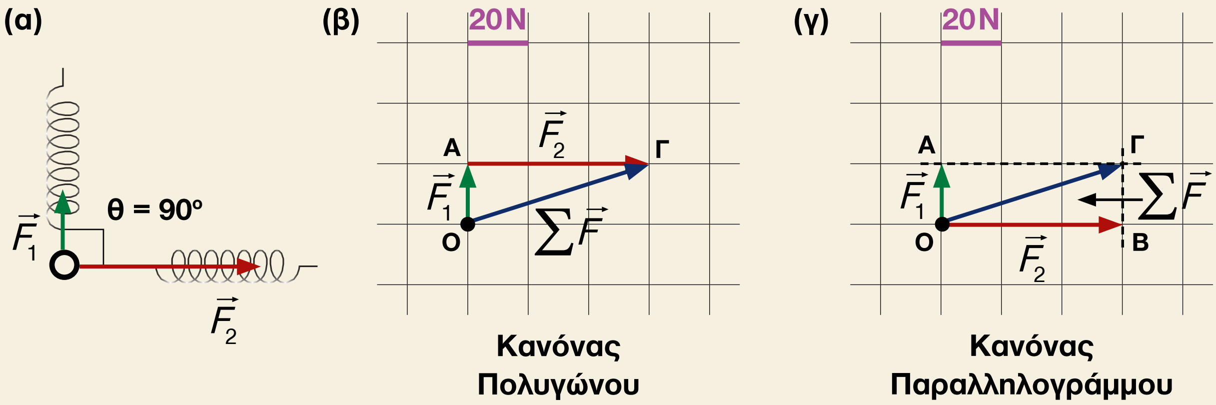
Περίπτωση 2: Σύνθεση μη Συγγραμμικών Δυνάμεων

Όταν οι δυνάμεις δεν είναι συγγραμμικές, οι διευθύνσεις τους σχηματίζουν κάποια γωνία $\theta \neq 0^o$. Όπως εξηγήσαμε στο Ένθετο Διανυσμάτων, σε αυτή την περίπτωση η συνισταμένη δύναμη μπορεί να υπολογισθεί με τον κανόνα του πολυγώνου (όπως για συγγραμμικές δυνάμεις), ή με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Παράδειγμα 1

Κάθετες Δυνάμεις

Τα ελατήρια της Εικόνας 3-25(α) είναι επιμηκυμένα και ασκούν στον κρίκο τις **κάθετες** δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.



Εικόνα 3-25
(α) Στον κρίκο ασκούνται οι κάθετες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ από τα ελατήρια. Η συνισταμένη δύναμη υπολογίζεται **(β)** με τον κανόνα του πολυγώνου ή **(γ)** με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Ο **κανόνας του πολυγώνου** εφαρμόζεται στο σχήμα 3-25(β). Μεταφέρουμε παράλληλα τα βέλη των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ έτσι ώστε να γίνουν διαδοχικά. Η συνισταμένη δύναμη $\sum\vec{F}$ ξεκινά από την αρχή του πρώτου διανύσματος (σημείο Ο), και καταλήγει στο τέλος του του δεύτερου διανύσματος (σημείο Γ).

Ο κανόνας του παραλληλογράμμου εφαρμόζεται στο σχήμα 3-25(γ). Μεταφέρουμε παράλληλα τα βέλη των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, έτσι ώστε να αποκτήσουν κοινή αρχή στο σημείο Ο. Από την αιχμή κάθε βέλους φέρουμε παράλληλη ευθεία προς το άλλο βέλος, και σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ. Η συνισταμένη δύναμη $\sum\vec{F}$ έχει διεύθυνση κατά μήκος της διαγωνίου ΟΓ του παραλληλογράμμου, και φορά από την κοινή αρχή Ο προς το άκρο Γ. Το μέτρο της συνισταμένης ισούται με το μήκος της διαγωνίου, $\left|\sum\vec{F}\right| = \text{ΟΓ}$.

Τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΓ είναι ορθογώνια, και τα μήκη των κάθετων πλευρών τους είναι ίσα με τα μέτρα των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει:

$$\text{ΟΓ} = \sqrt{(\text{ΟΑ})^2 + (\text{ΟΒ})^2} \Rightarrow \left|\sum\vec{F}\right| = \sqrt{\left|\vec{F}_1\right|^2 + \left|\vec{F}_2\right|^2}$$

Από την κλίμακα προκύπτει ότι $\left|\vec{F}_1\right| = 20\ \text{N}$ και $\left|\vec{F}_2\right| = 60\ \text{N}$. Έτσι:

$$\left|\sum\vec{F}\right| = \sqrt{(20\ \text{N})^2 + (60\ \text{N})^2} \cong 63\ \text{N}$$

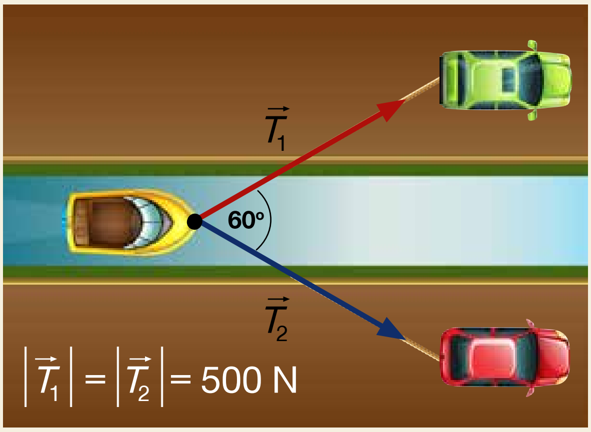
Εναλλακτικά, το μέτρο της $\sum \vec{F}$ μπορεί να υπολογισθεί **γραφικά** από το μήκος του βέλους της και την κλίμακα του σχήματος. Ακολουθούμε αυτή τη μέθοδο στο επόμενο παράδειγμα, στο οποίο οι διευθύνσεις των δυνάμεων σχηματίζουν γωνία $\theta \neq 90^{\circ}$.

Παράδειγμα 2

Δυνάμεις που σχηματίζουν γωνία $\theta \neq 90^{\circ}$.

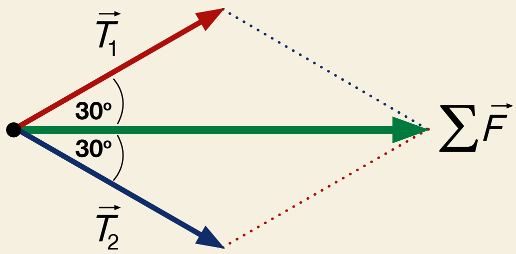
Η Εικόνα 3-26(α) απεικονίζει μια βάρκα που ρυμουλκείται από δύο αυτοκίνητα. Τα σχοινιά τείνουν τη βάρκα με δυνάμεις $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ ίσου μέτρου (500 N). Η γωνία μεταξύ των σχοινιών είναι $\theta = 60^{\circ}$.

(α)

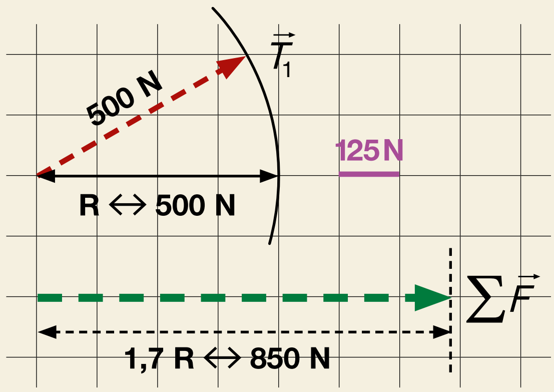


Εικόνα 3-26
(α) Οι δυνάμεις που εξασκούν τα δύο αυτοκίνητα στη βάρκα του σχήματος έχουν ίσα μέτρα 500 N και σχηματίζουν γωνία 60°. **(β) Γραφικός** υπολογισμός της συνισταμένης δύναμης $|\sum \vec{F}|$ με τον κανόνα του παραλληλογράμμου. **(γ)** Επειδή το βέλος της $\sum \vec{F}$ είναι κατά 1,7 φορές μεγαλύτερο από τα βέλη των $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$, συμπεραίνουμε ότι $|\sum \vec{F}| \cong 850$ N.

(β)



(γ)



Προσδιορίζουμε τη συνισταμένη των δύο τάσεων $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ με τον κανόνα του πολυγώνου ή του παραλληλογράμμου, όπως για τις κάθετες δυνάμεις.

Στο σχήμα 3-26(β) έχουμε σχεδιάσει το παραλληλόγραμμο με πλευρές τα βέλη των $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$. Για να προσδιορίσουμε το μέτρο $|\sum \vec{F}|$ της συνισταμένης, *μετρούμε το μήκος του βέλους* της $\sum \vec{F}$. Στην Εικόνα 3-26(γ), βρίσκουμε ότι είναι περίπου 1,7 φορές μεγαλύτερο από το μήκος των βελών των $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$. Χρησιμοποιώντας την αντιστοιχία «μήκους βέλους - μέτρου δύναμης», που αναγράφεται στο κάτω μέρος του σχήματος, εκτιμούμε ότι το μέτρο της συνισταμένης είναι

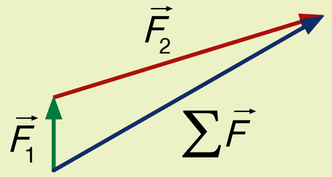
$$\left|\sum \vec{F}\right| \cong 1{,}7 \times 500 \text{ N} \cong 850 \text{ N}.$$

Τα παραπάνω συνοψίζονται ως εξής:

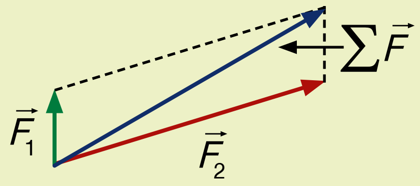
Πρόσθεση μη Συγγραμμικών Δυνάμεων

- Εάν οι δυνάμεις δεν είναι συγγραμμικές, υπολογίζουμε τη συνισταμένη δύναμη με τον κανόνα του πολυγώνου ή τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

(Α) Κανόνας του **πολυγώνου**:



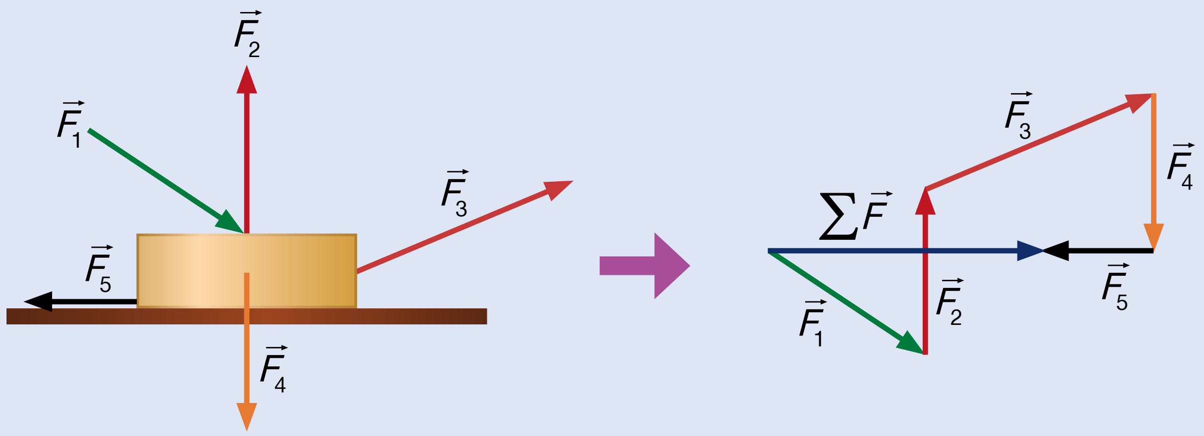
(Β) Κανόνας του **παραλληλογράμμου**:



- Μπορούμε να υπολογίσουμε το **μέτρο** της συνισταμένης δύναμης γραφικά (από το μήκος του βέλους της συνισταμένης).
- Εάν οι δυνάμεις είναι **κάθετες**, μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της συνισταμένης δύναμης από τη σχέση

$$\left|\sum\vec{F}\right| = \sqrt{\left|\vec{F}_1\right|^2 + \left|\vec{F}_2\right|^2}$$

Στο σώμα της επόμενης εικόνας ασκούνται οι πέντε δυνάμεις $\vec{F}_1, ..., \vec{F}_5$. Η συνισταμένη δύναμη υπολογίζεται εύκολα με τον κανόνα του πολυγώνου, όπως φαίνεται στο δεξιό σχήμα.



Συγκριτικά, η εφαρμογή του κανόνα του παραλληλογράμμου απαιτεί τον σχεδιασμό τεσσάρων παραλληλογράμμων.

Συμπέρασμα

Ο κανόνας του πολυγώνου είναι πιο εύχρηστος, όταν αθροίζονται περισσότερες από δύο δυνάμεις.

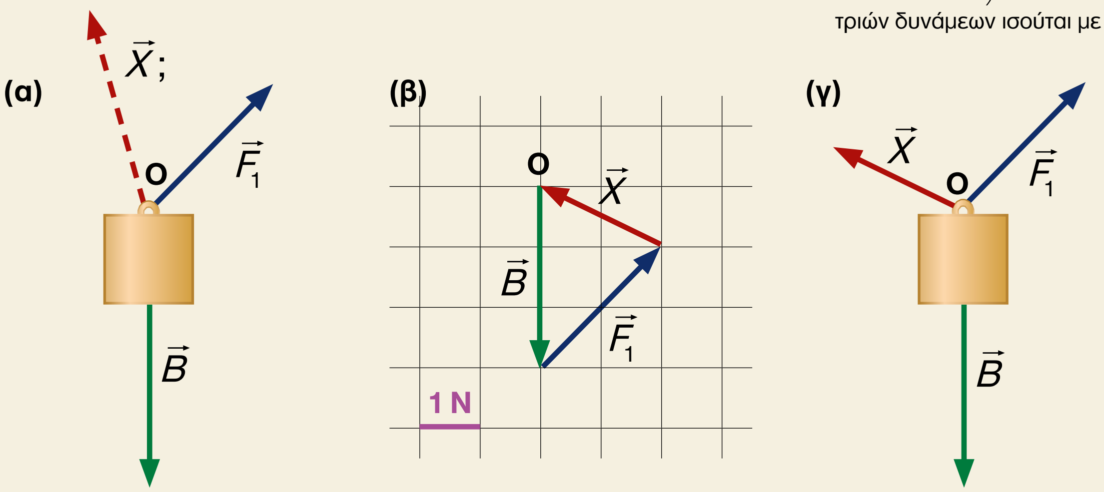
Παράδειγμα 3

Γραφικός Προσδιορισμός Άγνωστης Δύναμης σε Σώμα, έτσι ώστε η Συνισταμένη Δύναμη να είναι Μηδενική.

Στο σώμα της Εικόνα 3-27(α) ασκείται το βάρος του $\vec{B}$ και οι δυνάμεις $\vec{F_1}$ και $\vec{X}$. Οι δυνάμεις $\vec{B}$ και $\vec{F_1}$ θεωρούνται γνωστές, και η δύναμη $\vec{X}$ ρυθμίζεται έτσι ώστε **η συνισταμένη δύναμη στο σώμα να είναι ίση με μηδέν**. Θα δείξουμε ότι η άγνωστη δύναμη $\vec{X}$ μπορεί να προσδιορισθεί εύκολα με τον **κανόνα του πολυγώνου.**

Εικόνα 3-27

(α) Το βάρος $\vec{B}$ και η δύναμη $\vec{F_1}$ είναι γνωστές. **(β)** Η άγνωστη δύναμη $\vec{X}$ προσδιορίζεται με τον κανόνα του πολυγώνου, έτσι ώστε η συνισταμένη δύναμη να είναι ίση με μηδέν $\left(\sum\vec{F} = \vec{B} + \vec{F_1} + \vec{X} = \vec{0}\right)$. **(γ)** Το άθροισμα των τριών δυνάμεων ισούται με μηδέν.



Στην Εικόνα 3-27(β), μεταφέρουμε παράλληλα τα βέλη των *γνωστών* δυνάμεων $\vec{B}$ και $\vec{F_1}$ έτσι ώστε να γίνουν διαδοχικά με αρχή το σημείο Ο. Σχεδιάζουμε το ζητούμενο διάνυσμα $\vec{X}$ έτσι ώστε να ξεκινά από το τέλος του δεύτερου διανύσματος και να καταλήγει στην αρχή του πρώτου διανύσματος. **Τα τρία διανύσματα** $\vec{B}$, $\vec{F_1}$ και $\vec{X}$ **είναι διαδοχικά και σχηματίζουν ένα κλειστό πολύγωνο**. Επειδή η αρχή και το τέλος αυτού του πολυγώνου συμπίπτουν (στο σημείο Ο), το άθροισμα των τριών διανυσμάτων ισούται με το **μηδενικό διάνυσμα**: $\vec{B} + \vec{F_1} + \vec{X} = \sum\vec{F} = \vec{0}$.

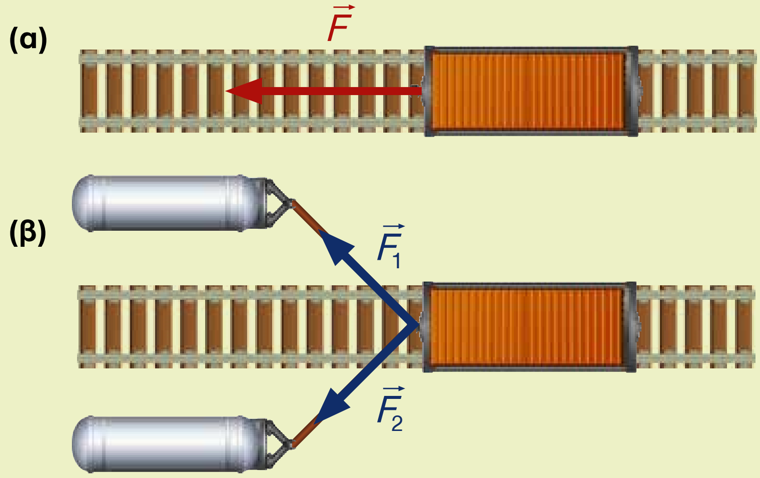
Από το σχήμα 3-27(β) συμπεραίνουμε ότι το μήκος του βέλους $\vec{X}$ αντιστοιχεί σε δύναμη μέτρου 2,2 N. Στο σχήμα 3-27(γ) σχεδιάζουμε το σώμα, μαζί με τις τρεις δυνάμεις.

3.8. Ανάλυση Δύναμης σε Κάθετες Διανυσματικές Συνιστώσες

Για να μελετήσουμε την επίδραση μίας δύναμης σε ένα σώμα, συχνά μας διευκολύνει να εκφράσουμε τη δύναμη σαν ένα άθροισμα δύο δυνάμεων. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **ανάλυση δύναμης** και οι νέες δυνάμεις ονομάζονται **διανυσματικές συνιστώσες**.

Ανάλυση μίας δύναμης σε δύο συνιστώσες, είναι η αντικατάστασή της από δύο δυνάμεις, οι οποίες εάν ασκούνταν αντί για αυτήν στο ίδιο σώμα, θα προκαλούσαν το ίδιο αποτέλεσμα.

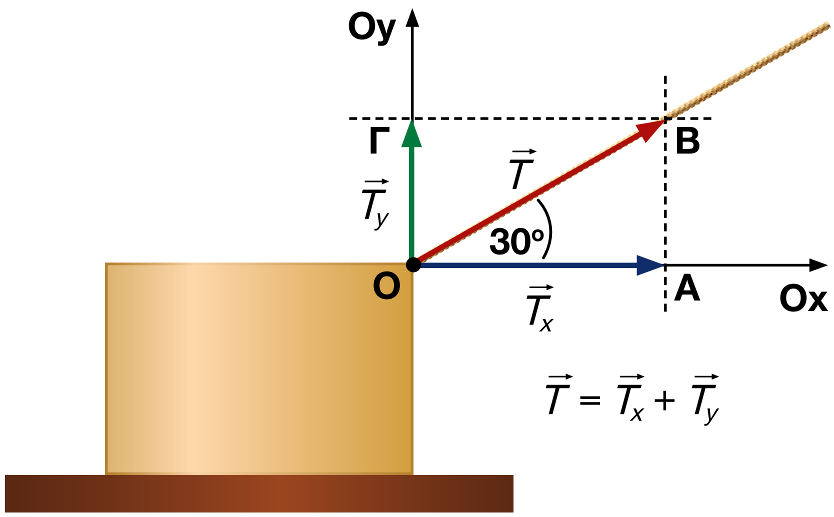
(α) Στο βαγόνι εφαρμόζουμε τη δύναμη $\vec{F}$. **(β)** Θα έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα, εάν εφαρμόσουμε τις δύο δυνάμεις $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$.



Θεωρούμε ότι είναι γνωστά **το μέτρο** της δύναμης και η γωνία που σχηματίζει με μία **συγκεκριμένη διεύθυνση**. Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Από την αρχή του βέλους της δύναμης σχεδιάζουμε έναν άξονα παράλληλα προς τη συγκεκριμένη διεύθυνση, και έναν δεύτερο άξονα κάθετο στον πρώτο.

Η Εικόνα 3-28 απεικονίζει ένα σώμα, που έλκεται από ένα τεντωμένο σχοινί. Η τάση $\vec{T}$ του σχοινιού έχει μέτρο $|\vec{T}|$ και σχηματίζει γωνία 30° με την οριζόντια διεύθυνση. Σχεδιάζουμε τον άξονα Ox κατά την οριζόντια διεύθυνση, και τον άξονα Oy κάθετα στον Ox (κατακόρυφη διεύθυνση). Το **βέλος** κάθε άξονα δηλώνει τη **θετική κατεύθυνση** κατά μήκος του άξονα.



Εικόνα 3-28
Η δύναμη $\vec{T}$ σχηματίζει γωνία 30° με την οριζόντια διεύθυνση. Ως προς το σύστημα αξόνων Ox και Oy αναλύεται στην οριζόντια συνιστώσα $\vec{T_x}$ και στην κατακόρυφη συνιστώσα $\vec{T_y}$.

2 Από την **αιχμή** του βέλους της δύναμης φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες, και σχηματίζουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με **διαγώνιο** το βέλος της δύναμης. Οι πλευρές του παραλληλογράμμου ορίζουν τις **διανυσματικές συνιστώσες** της δύναμης.

Στην Εικόνα 3-28 έχουμε σχεδιάσει τις ευθείες ΒΓ//Ox και ΒΑ//Oy. Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΟΑΒΓ έχει διαγώνιο το βέλος της $\vec{T}$. Η **διανυσματική συνιστώσα** $\vec{T}_x$ έχει αρχή το σημείο Ο και τέλος το σημείο Α (την προβολή της αιχμής Β στον άξονα Ox). Η **διανυσματική συνιστώσα** $\vec{T}_y$ έχει αρχή το Ο και τέλος το σημείο Γ (την προβολή της αιχμής Β στον άξονα Oy).

Να παρατηρήσετε ότι η **δύναμη** $\vec{T}$ **ισούται με το άθροισμα των διανυσματικών της συνιστωσών**, όπως προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου:

$$\vec{T} = \vec{T}_x + \vec{T}_y$$

3 Εκφράζουμε το **μέτρο** και τη **φορά** κάθε διανυσματικής συνιστώσας, κατά μήκος του άξονά της, με μία **αλγεβρική τιμή**, που ονομάζεται **συνιστώσα**. Εάν η διανυσματική συνιστώσα έχει φορά προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα, η αντίστοιχη συνιστώσα είναι θετική, αλλιώς είναι αρνητική.

Στο παράδειγμα της Εικόνας 3-28, η διανυσματική συνιστώσα $\vec{T}_x$ συνδέεται με μια αλγεβρική τιμή, που συμβολίζεται ως T_x (χωρίς βέλος) και ονομάζεται **«συνιστώσα της $\vec{T}$ κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox»**. Το **μέτρο** της T_x ισούται με το μήκος της πλευράς ΟΑ. Το **πρόσημο** της T_x είναι θετικό επειδή η διανυσματική συνιστώσα $\vec{T}_x$ έχει φορά προς τη θετική κατεύθυνση του Ox. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ προκύπτει:

$$T_x = +\mathrm{OA} = +(\mathrm{OB}\sigma\upsilon\nu 30^\circ) = +\left|\vec{T}\right|\sigma\upsilon\nu 30^\circ$$

Ομοίως, η διανυσματική συνιστώσα $\vec{T}_y$ συνδέεται με μια αλγεβρική τιμή T_y, που ονομάζεται **«συνιστώσα της $\vec{T}$ κατά τη διεύθυνση του άξονα Oy»**. Το **μέτρο** της T_y ισούται με το μήκος της πλευράς ΟΓ. Το **πρόσημο** της T_y είναι θετικό επειδή η διανυσματική συνιστώσα $\vec{T}_y$ έχει φορά προς τη θετική κατεύθυνση του Oy. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ προκύπτει:

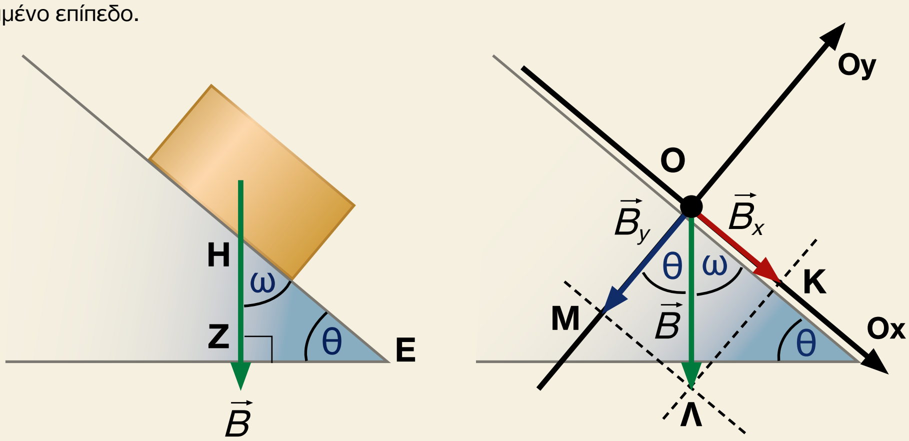
$$T_y = +\mathrm{O\Gamma} = +\mathrm{AB} = +(\mathrm{OB}\eta\mu 30^\circ) = +\left|\vec{T}\right|\eta\mu 30^\circ$$

Παράδειγμα

Σώμα σε Κεκλιμένο Επίπεδο

Η Εικόνα 3-29 απεικονίζει ένα σώμα που εφάπτεται σε κεκλιμένο επίπεδο. Το βάρος $\vec{B}$ του σώματος έχει μέτρο 40 N. Το κεκλιμένο επίπεδο σχηματίζει γωνία $\theta = 40^{o}$ με την οριζόντια διεύθυνση.

Εικόνα 3-29
Αριστερά: Σώμα σε κεκλιμένο επίπεδο. **Δεξιά:** Ανάλυση του βάρους $\vec{B}$ του σώματος σε άξονες παράλληλα και κάθετα στο κεκλιμένο επίπεδο.



Παρατηρήστε ότι η γωνία ω, που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{B}$ με το κεκλιμένο επίπεδο, προσδιορίζεται από τα δεδομένα. Επειδή το βάρος $\vec{B}$ έχει κατακόρυφη διεύθυνση, η γωνία ΗΖΕ είναι ορθή. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΖΕ προκύπτει ότι $\omega = 90^{o} - \theta = 50^{o}$.

Στο δεξιό σχήμα απεικονίζουμε το σώμα σαν ένα σημείο Ο (προσέγγιση υλικού σημείου). Επιλέγουμε τον άξονα Οx παράλληλο προς το κεκλιμένο επίπεδο, και τον άξονα Οy κάθετο στον Οx. Το βέλος κάθε άξονα δηλώνει τη θετική κατεύθυνση. Θα αναλύσουμε το βάρος $\vec{B}$ του σώματος σε συνιστώσες $\vec{B}_x$ και $\vec{B}_y$ κατά μήκος των αξόνων Οx και Οy.

Ακολουθούμε τα προηγούμενα βήματα, και σχηματίζουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΟΚΛΜ. Η συνιστώσα B_x είναι θετική, ενώ η συνιστώσα B_y είναι αρνητική. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΛ προκύπτει:

$$B_x = +\mathrm{OK} = +\mathrm{M\Lambda} = +\mathrm{O\Lambda}\,\eta\mu\theta = +\left|\vec{B}\right|\eta\mu\theta$$

$$B_y = -\mathrm{OM} = -\mathrm{O\Lambda}\,\sigma\upsilon\nu\theta = -\left|\vec{B}\right|\sigma\upsilon\nu\theta$$

Αριθμητική αντικατάσταση: Αντικαθιστώντας τις τιμές $\left|\vec{B}\right| = 40$ N και $\theta = 40^{o}$, προκύπτει:

$$B_x = +\left|\vec{B}\right|\eta\mu\theta = +(40\,\eta\mu 40^{o})\ \mathrm{N} = +25{,}7\ \mathrm{N}$$

$$B_y = -\left|\vec{B}\right|\sigma\upsilon\nu\theta = -(40\,\eta\mu 50^{o})\ \mathrm{N} = -30{,}6\ \mathrm{N}$$

3.9. Υπολογισμός της Συνισταμένης Δύναμης με τον Κανόνα Πρόσθεσης Συνιστωσών

Ο ακριβής προσδιορισμός της συνισταμένης δύναμης με τους κανόνες πολυγώνου και παραλληλογράμμου είναι δύσκολος, όταν βασίζεται στη **γραφική** εκτίμηση του μέτρου και της γωνίας της συνισταμένης δύναμης, από το μήκος και τη γωνία του αντιστοίχου βέλους.

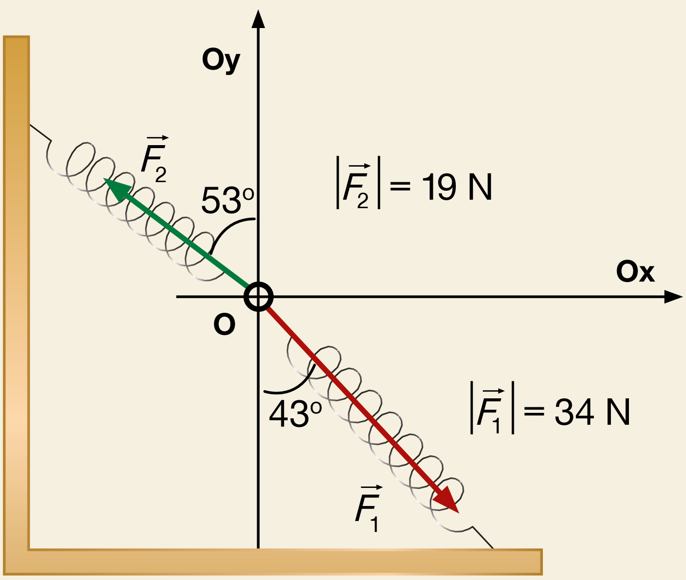
Ένας εναλλακτικός, **αλγεβρικός** τρόπος προσδιορισμού της συνισταμένης δύναμης, βασίζεται στον κανόνα πρόσθεσης των συνιστωσών. Ο κανόνας αυτός επεξηγήθηκε στο **Ένθετο Διανυσμάτων**, και συνοψίζεται ως εξής:

Κανόνας Πρόσθεσης Συνιστωσών
Η συνιστώσα του **αθροίσματος** $\vec{\delta}$ δύο διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ κατά τη διεύθυνση ενός άξονα, ισούται με το άθροισμα των συνιστωσών κατά την διεύθυνση του ίδιου άξονα:

$$\delta_x = \beta_x + \gamma_x\,, \quad \delta_y = \beta_y + \gamma_y$$

Ο τρόπος αυτός είναι **πιο εύχρηστος** και ακριβής, γι΄αυτό και χρησιμοποιείται σχεδόν αποκλειστικά στις εφαρμογές, όπως δείχνουμε στη μελέτη των νόμων του Νεύτωνα.

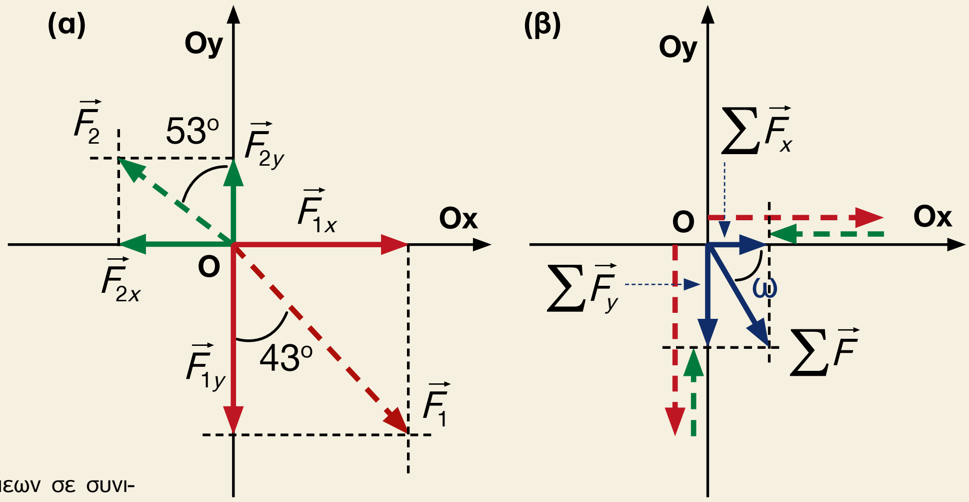
Παράδειγμα



Εικόνα 3-30
Δύο ελατήρια είναι στερεωμένα σε ένα ορθογώνιο πλαίσιο και έλκουν ένα κρίκο με δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Τα ελατήρια σχηματίζουν γωνίες 43° και 53° με την κατακόρυφη διεύθυνση.

Για να υπολογίσουμε τη συνισταμένη δύναμη στον κρίκο με τον κανόνα των συνιστωσών, εργαζόμαστε ως ακολούθως:

1 Επειδή οι δυνάμεις σχηματίζουν γνωστές γωνίες με την κατακόρυφο διεύθυνση, θεωρούμε το σύστημα του οριζόντιου άξονα Ox και του κατακόρυφου άξονα Oy. Σχεδιάζουμε τον κρίκο ως το υλικό σημείο O στην αρχή των αξόνων, και αναλύουμε τις δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ σε συνιστώσες, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3-31(α).



Εικόνα 3-31
(α) Ανάλυση των δυνάμεων σε συνιστώσες. **(β)** Υπολογισμός των συνιστωσών $\sum\vec{F}_x$ και $\sum\vec{F}_y$ με τον **κανόνα των** συνιστωσών, και της συνισταμένης $\sum\vec{F}$.

Από τις γωνίες και τα μέτρα των των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ υπολογίζουμε τις συνιστώσες τους:

$$F_{1x} = \left|\vec{F}_1\right| \eta\mu 43^\circ = 23{,}2\ \text{N} \qquad F_{1y} = -\left|\vec{F}_1\right| \sigma\upsilon\nu 43^\circ = -24{,}9\ \text{N}$$

$$F_{2x} = -\left|\vec{F}_2\right| \eta\mu 53^\circ = -15{,}2\ \text{N} \qquad F_{2y} = \left|\vec{F}_2\right| \sigma\upsilon\nu 53^\circ = 11{,}4\ \text{N}$$

2 Για να υπολογίσουμε τις συνιστώσες της συνισταμένης δύναμης $\sum\vec{F}$ προσθέτουμε ξεχωριστά τις αντίστοιχες συνιστώσες των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ως προς τους άξονες Ox και Oy:

$$\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} = 23{,}2\ \text{N} - 15{,}2\ \text{N} = 8{,}0\ \text{N}$$

$$\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} = -24{,}9\ \text{N} + 11{,}4\ \text{N} = -13{,}5\ \text{N}$$

3 Υπολογίζουμε το **μέτρο** της συνισταμένης δύναμης από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$\left|\sum\vec{F}\right| = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2} = \sqrt{(8{,}0)^2 + (-13{,}5)^2}\ \text{N} = 15{,}7\ \text{N}$$

Η εφαπτομένη της γωνίας ω, που σχηματίζει η διεύθυνση της $\sum\vec{F}$ με τον άξονα Ox είναι:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\left|\sum F_y\right|}{\left|\sum F_x\right|} = \frac{|-13{,}5|}{8{,}0}\frac{\text{N}}{\text{N}} = 1{,}7 \Rightarrow \omega = 59{,}4^\circ$$

Η δύναμη $\sum\vec{F}$ έχει προσδιορισθεί πλήρως.

❹ Μπορούμε να σχεδιάσουμε τις συνιστώσες $\sum\vec{F}_x$ και $\sum\vec{F}_y$ είτε με βάση τις αλγεβρικές τους τιμές, είτε γραφικά, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3-31(β). Η συνισταμένη δύναμη $\sum\vec{F}$ προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

3.10. Υπολογισμός Μίας η Περισσοτέρων Αγνώστων Δυνάμεων, όταν μηδενίζεται η Συνισταμένη Δύναμη

Σε πολλές εφαρμογές, **γνωρίζουμε ότι η συνισταμένη δύναμη σε ένα σώμα είναι μηδενική**, $\sum\vec{F}=\vec{0}$, και χρειάζεται να προσδιορίσουμε μία (ή περισσότερες) από τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. Όπως δείξαμε προηγουμένως, μπορούμε να προσδιορίσουμε **γραφικά** την άγνωστη δύναμη με τον κανόνα του πολυγώνου. Η ανάλυση σε συνιστώσες παρέχει έναν δεύτερο, **αλγεβρικό τρόπο** υπολογισμού της άγνωστης δύναμης.

Επειδή η συνισταμένη δύναμη ισούται με το **μηδενικό διάνυσμα**, $\sum\vec{F}=\vec{0}$, συμπεραίνουμε ότι έχει μηδενικές συνιστώσες (ως προς οποιουσδήποτε άξονες). Συνεπώς:

$$\sum\vec{F}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}\sum\vec{F}_x=\vec{0}\Rightarrow\sum F_x=0\\ \sum\vec{F}_y=\vec{0}\Rightarrow\sum F_y=0\end{cases}$$

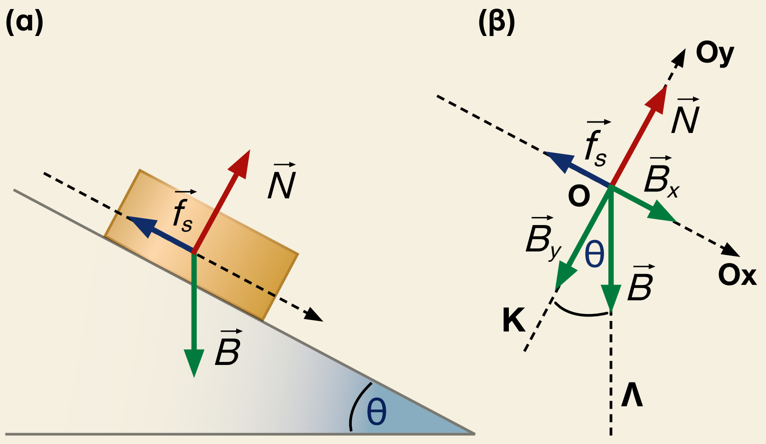
Από το πιο πάνω **σύστημα εξισώσεων** προσδιορίζουμε τις άγνωστες δυνάμεις.

Παράδειγμα 1

Σώμα που ισορροπεί σε μη Λείο Κεκλιμένο Επίπεδο.

Η Εικόνα 3-32 απεικονίζει ένα κουτί μάζας m το οποίο ισορροπεί πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση. Το επίπεδο **δεν είναι λείο**. Επειδή το σώμα τείνει να κινηθεί κατά μήκος του επιπέδου και προς τα κάτω, ασκείται σε αυτό μία δύναμη στατικής τριβής $\vec{f}_s$ η οποία είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και με φορά προς τα επάνω. Στο σώμα ασκείται επίσης το βάρος του $\vec{B}$ και η κάθετη στο επίπεδο δύναμη $\vec{N}$. Η συνισταμένη δύναμη στο σώμα είναι ίση με μηδέν.

Εικόνα 3-32
(α) Σώμα που ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο υπό την επίδραση του βάρους του $\vec{B}$, της κάθετης δύναμης $\vec{N}$ και της δύναμης στατικής τριβής $\vec{f_s}$. **(β)** Ανάλυση των δυνάμεων σε συνιστώσες.



Στην Εικόνα 3-32(β) αναλύουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, χρησιμοποιώντας το σύστημα αξόνων Ox (παράλληλος στο κεκλιμένο επίπεδο) και Oy (κάθετος στο επίπεδο):

- Η στατική τριβή είναι παράλληλη με τον άξονα Ox οπότε $\vec{f}_{sx} = \vec{f}_s$ και $\vec{f}_{sy} = \vec{0}$.
- Η κάθετη δύναμη είναι παράλληλη προς τον άξονα Oy, οπότε $\vec{N}_x = \vec{0}$ και $\vec{N}_y = \vec{N}$.
- Το βάρος του κουτιού αναλύεται σε συνιστώσες, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα («Σώμα σε κεκλιμένο επίπεδο»). Συνεπώς $B_x = +\left|\vec{B}\right|$ημθ και $B_y = -\left|\vec{B}\right|$συνθ.

Επειδή η συνισταμένη δύναμη στο κουτί μηδενίζεται, προκύπτει:

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow \vec{B}_x + \vec{f}_s = \vec{0} \Rightarrow \vec{f}_s = -\vec{B}_x \Rightarrow f_s = -\left|\vec{B}\right| \eta\mu\theta$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow \vec{B}_y + \vec{N} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N} = -\vec{B}_y \Rightarrow N = +\left|\vec{B}\right| \sigma\upsilon\nu\theta$$

Αριθμητική αντικατάσταση: Έστω ότι το κουτί έχει βάρος 130 N και η γωνία $\theta = 30^{o}$. Τότε προκύπτει:

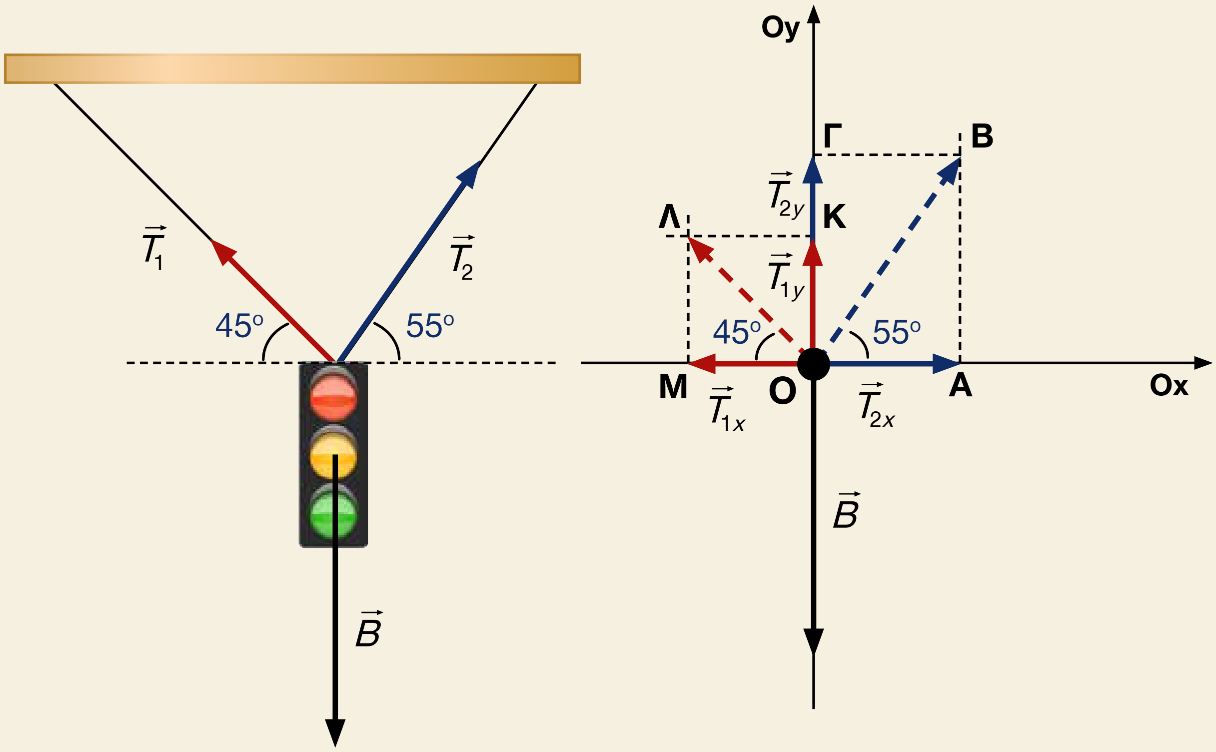
$$f_s = -\left|\vec{B}\right| \eta\mu\theta = -\,(130\,\text{N})\ \eta\mu 30^{o} = -\,65\ \text{N}$$

$$N = +\left|\vec{B}\right| \sigma\upsilon\nu\theta = +(130\,\text{N})\ \sigma\upsilon\nu 30^{o} = +112{,}6\ \text{N}$$

Παρατηρήστε ότι τα πιο πάνω αποτελέσματα **έχουν πρόσημο** επειδή **εκφράζουν συνιστώσες**, και όχι μέτρα. Η τριβή είναι αρνητική επειδή έχει φορά προς την αρνητική κατεύθυνση του Ox, ενώ η δύναμη N είναι θετική επειδή έχει φορά προς τη θετική κατεύθυνση του Oy.

Παράδειγμα 2
Κρεμαστό Φανάρι Τροχαίας

Η Εικόνα 3-33 απεικονίζει ένα κρεμαστό φανάρι της τροχαίας. Στο φανάρι ασκούνται το βάρος του $\vec{B}$ (γνωστό), και οι άγνωστες τάσεις $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ από τα σχοινιά. **Η συνισταμένη δύναμη στο φανάρι είναι ίση με μηδέν**. Χρησιμοποιώντας ανάλυση δυνάμεων, θα προσδιορίσουμε τις τάσεις $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$.



Εικόνα 3-33
Αριστερά: Φανάρι που αναρτάται με σχοινιά και δέχεται μηδενική συνισταμένη δύναμη. **Δεξιά:** Ανάλυση των δυνάμεων σε συνιστώσες (προσέγγιση υλικού σημείου).

Α. Αναλύουμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες ως προς κατάλληλο σύστημα αξόνων.

Στο δεξιό σχήμα της Εικόνας 3-33 αναπαριστούμε το φανάρι σαν το υλικό σημείο Ο. Επειδή οι γωνίες των σχοινιών με την οριζόντια διεύθυνση είναι γνωστές, θα χρησιμοποιήσουμε σύστημα οριζόντιου άξονα Οx και κατακόρυφου άξονα Οy. Ακολουθούμε τα βήματα που περιγράψαμε προηγουμένως.

Ανάλυση της $\vec{T}_1$:

Από την αιχμή του βέλους της τάσης $\vec{T}_1$ φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τους δύο άξονες και σχηματίζουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΟΚΛΜ. Η διανυσματική συνιστώσα $\vec{T}_{1x}$ έχει φορά προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα Οx. Συνεπώς, η συνιστώσα T_{1x} έχει αρνητική αλγεβρική τιμή:

$$T_{1x} = -\mathrm{OM} = -\mathrm{O\Lambda}\sigma\upsilon\nu 45^{\circ} = -\left|\vec{T}_1\right|\sigma\upsilon\nu 45^{\circ}$$

Η συνιστώσα T_{1y} έχει θετική αλγεβρική τιμή, επειδή η φορά της $\vec{T}_{1y}$ είναι προς την θετική κατεύθυνση του άξονα Οy:

$$T_{1y} = +\mathrm{M\Lambda} = +\mathrm{OK} = +\left|\vec{T}_1\right|\eta\mu 45^{\circ}$$

Ανάλυση της $\vec{T}_2$:

Ομοίως, από την αιχμή του βέλους της $\vec{T}_2$ φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τους δύο άξονες και σχηματίζουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΟΑΒΓ. Προσδιορίζουμε τις συνιστώσες T_{2x} και T_{2y} από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ. Λαμβάνοντας υπ' όψη τις κατευθύνσεις των διανυσματικών συνιστωσών καταλήγουμε στις εκφράσεις

$$T_{2x} = \left|\vec{T}_2\right| \sigma\upsilon\nu 55^o, \quad T_{2y} = \left|\vec{T}_2\right| \eta\mu 55^o$$

Ανάλυση του βάρους $\vec{B}$:
Η κατεύθυνση του βάρους ταυτίζεται με την αρνητική κατεύθυνση του Oy. Συνεπώς, η συνιστώσα του βάρους στον άξονα Oy είναι αρνητική και ισούται με $B_y = -\left|\vec{B}\right|$. Η συνιστώσα του βάρους στον άξονα Ox είναι ίση με μηδέν.

Β. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η συνισταμένη δύναμη στο φανάρι μηδενίζεται, και εξάγουμε σχέσεις για τα άγνωστα μέτρα των τάσεων $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$.

Επειδή η συνισταμένη δύναμη στο σώμα είναι ίση με το μηδενικό διάνυσμα, **οι συνιστώσες της συνισταμένης δύναμης στους άξονες Ox και Oy είναι μηδενικές:**

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow \vec{T}_{1x} + \vec{T}_{2x} = \vec{0} \Rightarrow T_{1x} + T_{2x} = 0 \Rightarrow -\left|\vec{T}_1\right| \sigma\upsilon\nu 45^o + \left|\vec{T}_2\right| \sigma\upsilon\nu 55^o = 0 \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow \vec{B} + \vec{T}_{1y} + \vec{T}_{2y} = \vec{0} \Rightarrow B_y + T_{1y} + T_{2y} = 0 \Rightarrow \left|\vec{T}_1\right| \eta\mu 45^o + \left|\vec{T}_2\right| \eta\mu 55^o = \left|\vec{B}\right| \end{cases}$$

Οι τελευταίες σχέσεις είναι σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τα μέτρα $\left|\vec{T}_1\right|$ και $\left|\vec{T}_2\right|$.

Αριθμητική Αντικατάσταση: Έστω ότι το φανάρι έχει βάρος $\left|\vec{B}\right| = 565$ N. Θα λύσουμε το πιο πάνω σύστημα εξισώσεων, και θα προσδιορίσουμε τα μέτρα $\left|\vec{T}_1\right|$ και $\left|\vec{T}_2\right|$.

Από την πρώτη εξίσωση προκύπτει:

$$\left|\vec{T}_2\right| = \left|\vec{T}_1\right| \frac{\sigma\upsilon\nu 45^o}{\sigma\upsilon\nu 55^o}$$

Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση:

$$\left|\vec{T}_1\right| \left(\eta\mu 45^o + \frac{\text{συν}45^o}{\text{συν}55^o} \eta\mu 55^o \right) = \left|\vec{B}\right| \Rightarrow \left|\vec{T}_1\right| = \frac{\left|\vec{B}\right|}{\eta\mu 45^o + \sigma\upsilon\nu 45^o\, \varepsilon\varphi 55^o} = \frac{565 \text{ N}}{0{,}7071 + 0{,}7071 \text{ x } 1{,}4281} = 329 \text{ N}$$

Έτσι, προκύπτει:

$$\left|\vec{T}_2\right| = \left|\vec{T}_1\right| \frac{\sigma\upsilon\nu 45^o}{\sigma\upsilon\nu 55^o} = \frac{0{,}7071}{0{,}5736} \text{ x } (329{,}08 \text{ N}) = 406 \text{ N}$$

Ερωτήσεις Κατανόησης

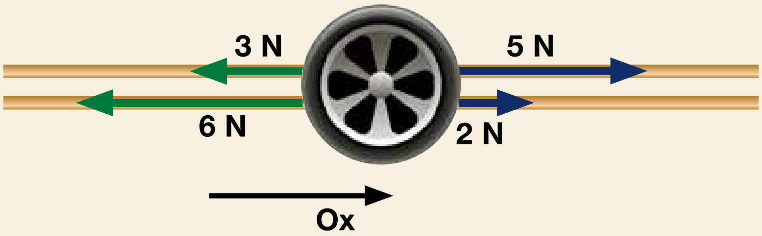
Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με την ένδειξη Σωστό / Λάθος.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Δύο σώματα μπορούν να αλληλεπιδράσουν μόνο όταν έρθουν σε επαφή.	
2	Δύο ηλεκτρικά ουδέτερα σώματα δεν ασκούν ποτέ ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις το ένα στο άλλο.	
3	Η δύναμη ελατηρίου μπορεί να είναι ελκτική ή απωστική.	
4	Η τάση σχοινιού είναι μόνο ελκτική.	
5	Η κάθετη δύναμη από μία επιφάνεια και οι δυνάμεις τριβής οφείλονται στη βαρύτητα.	
6	Οι δυνάμεις τριβής μεταξύ δύο σωμάτων μηδενίζονται όταν τα σώματα δεν κινούνται το ένα ως προς το άλλο.	
7	Μία λεία επιφάνεια ασκεί μόνο κάθετη δύναμη.	
8	Δύο δυνάμεις με ίσα μέτρα είναι ίσες μεταξύ τους.	
9	Μία δύναμη μπορεί να αναλυθεί μόνο σε κάθετες συνιστώσες.	
10	Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης ισούται με το άθροισμα των μέτρων των συνιστωσών της.	
11	Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης είναι πάντοτε μεγαλύτερο από τα μέτρα των συνιστωσών.	
12	Η συνισταμένη δύναμη έχει πάντοτε την ίδια κατεύθυνση με τη μεγαλύτερη συνιστώσα.	
13	Το μηδενικό διάνυσμα έχει συγκεκριμένη κατεύθυνση.	
14	Ο κανόνας του παραλληλογράμμου δεν εφαρμόζεται στην πρόσθεση συγγραμμικών διανυσμάτων.	

Ασκήσεις

1. Ένα μαγνητάκι είναι κολλημένο στην πόρτα του ψυγείου. Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό είναι ίση με το μηδενικό διάνυσμα. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις πάνω στο μαγνητάκι και να σχολιάσετε την προέλευση της κάθε δύναμης.

2. Η ρόδα του πιο κάτω σχήματος τείνεται από τέσσερεις συγγραμμικές δυνάμεις.

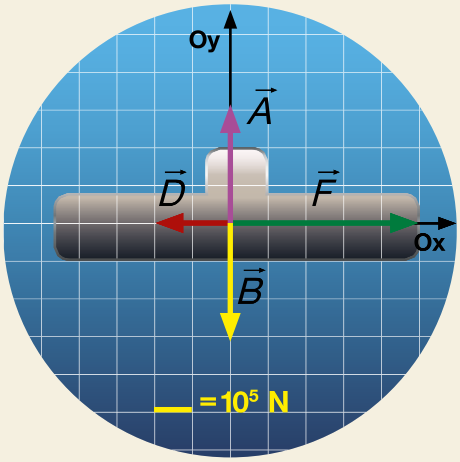


Α. Με ποιον κανόνα υπολογίζεται **γραφικά** η συνισταμένη δύναμη;

Β. Να εφαρμόσετε αυτόν τον κανόνα για να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τη συνισταμένη.

Γ. Έχει σημασία η σειρά με την οποία προσθέσατε τις δυνάμεις;

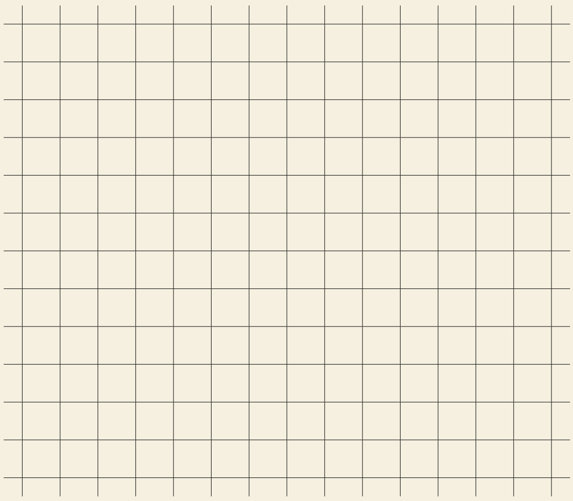
3. Ενα μικρό υποβρύχιο είναι βυθισμένο στη θάλασσα και ταξιδεύει σε οριζόντια διεύθυνση.



Στο διπλανό σχήμα περιλαμβάνονται οι δυνάμεις, που ασκούνται στο υποβρύχιο, και η κλίμακα με την οποία είναι σχεδιασμένες.

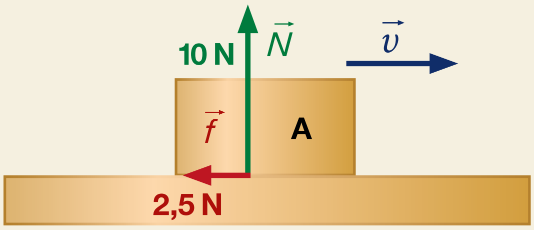
Α. Να συζητήσετε την προέλευση των δυνάμεων.

Β. Να υπολογίσετε γραφικά στο πιο κάτω σχήμα τη συνισταμένη δύναμη, και να προσδιορίσετε το μέτρο της.

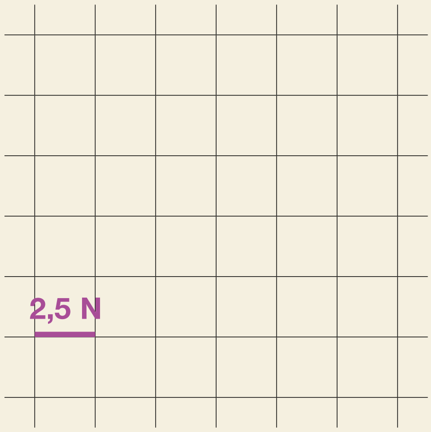


❹ Στο επόμενο σχήμα (α), μία γυάλινη πλάκα κινείται πάνω σε μία οριζόντια γυάλινη επιφάνεια. Στην πλάκα ασκείται η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ μέτρου 10 N και μία δύναμη τριβής $\vec{f}$ από την επιφάνεια. Ασκείται επίσης και το βάρος της (δεν είναι σχεδιασμένο).

(α)



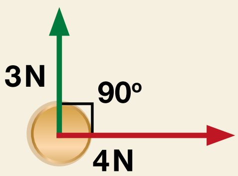
(β)



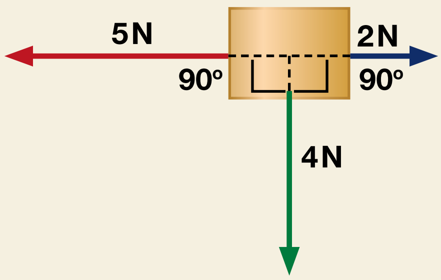
Να σχεδιάσετε στο χώρο του σχήματος (β) τη δύναμη $\vec{N}$ και τη δύναμη τριβής $\vec{f}$ με κοινή αρχή. Να υπολογίσετε το μέτρο της συνισταμένης δύναμης $\vec{N} + \vec{f}$, που ασκεί η πλάκα στο σώμα, και τη γωνία που σχηματίζει αυτή η συνισταμένη με την κατακόρυφο.

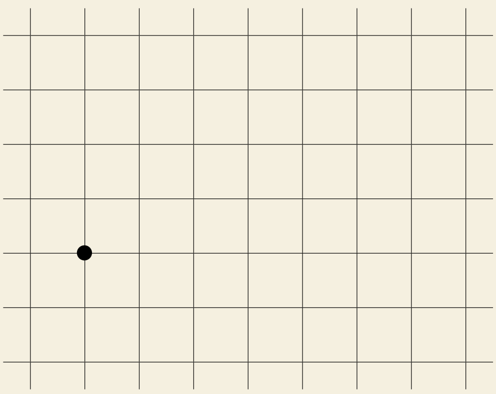
❺ Τα σώματα (α) και (β) δέχονται δυνάμεις από το περιβάλλον τους. Στο κάτω σχήμα, να σχεδιάσετε στην προσέγγιση υλικού σημείου κάθε σώμα και τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του. Να προσδιορίσετε **γραφικά** τη συνισταμένη δύναμη σε κάθε σώμα, και να υπολογίσετε το μέτρο της.

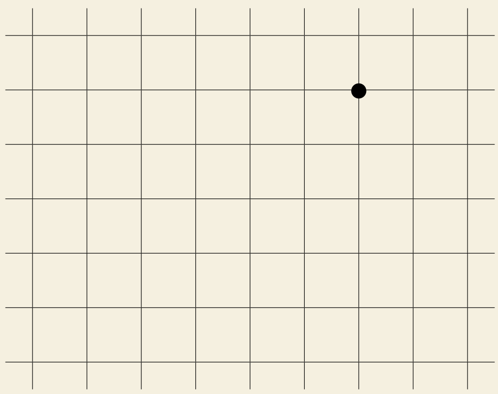
(α)



(β)





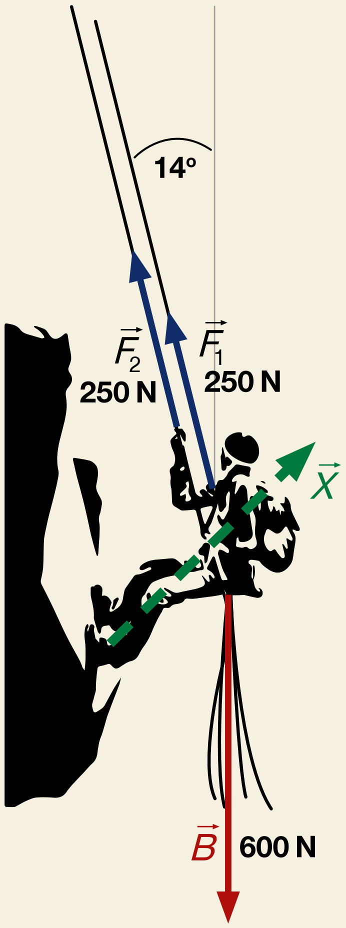


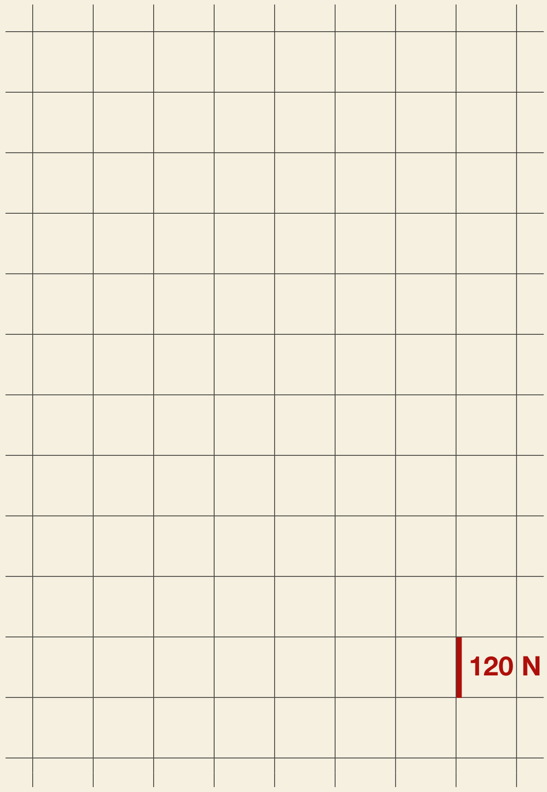
❻ Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται ένας ορειβάτης, ο οποίος ισορροπεί στην πλαγιά ενός βουνού κατά τη διάρκεια μίας αναρρίχησης.

Στο σχήμα περιλαμβάνονται το βάρος $\vec{B}$ του ορειβάτη και οι τάσεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ των σχοινιών. Η δύναμη $\vec{X}$ από την πλαγιά στον ορειβάτη, είναι άγνωστη. Η συνισταμένη δύναμη στον ορειβάτη (το άθροισμα όλων των προηγούμενων δυνάμεων) είναι ίση με μηδέν.

Α. Να μεταφέρετε παράλληλα τις δυνάμεις $\vec{B}$, $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ στο δεξιό σχήμα, και να χρησιμοποιήσετε τον κανόνα του πολυγώνου για να υπολογίσετε την άγνωστη δύναμη $\vec{X}$.

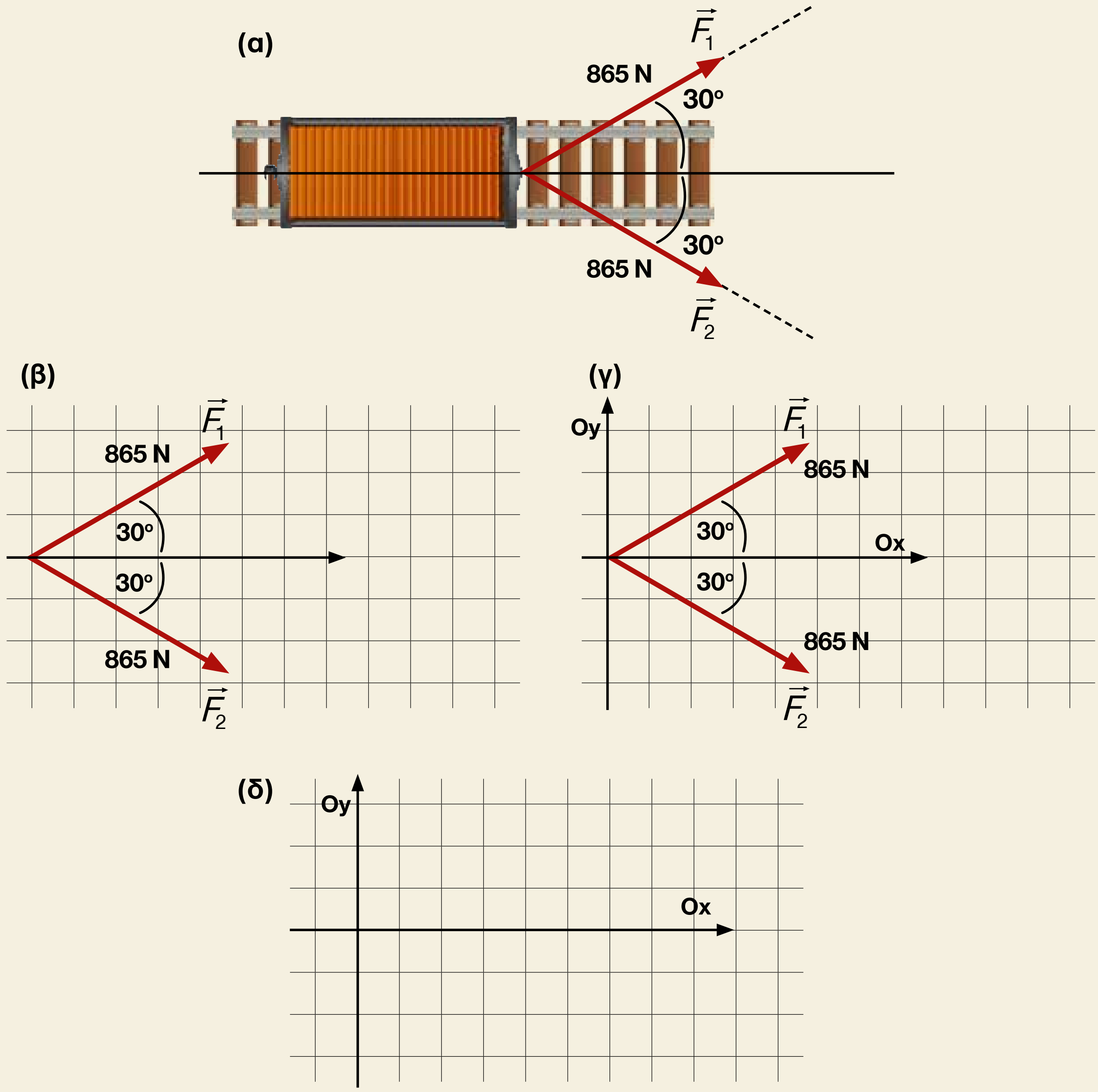
Β. Σας δίδεται η πληροφορία ότι η δύναμη $\vec{X}$ **δεν** είναι κάθετη στην επιφάνεια της πλαγιάς, αλλά μπορεί να αναλυθεί σε μία συνιστώσα κάθετη προς την πλαγιά, και σε μία συνιστώσα παράλληλη προς την πλαγιά. Να συζητήσετε την προέλευση των δύο συνιστωσών.





Τροποποιημένη εικόνα από την πηγή creativosonline.org, https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/

❼ Μία πλατφόρμα ρυμουλκείται υπό την επίδραση των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ (σχήμα (α)).



Α. Στο χώρο του σχήματος (β), να προσδιορίσετε **γραφικά** με τον κανόνα του παραλληλογράμμου τη συνισταμένη δύναμη $\vec{T} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

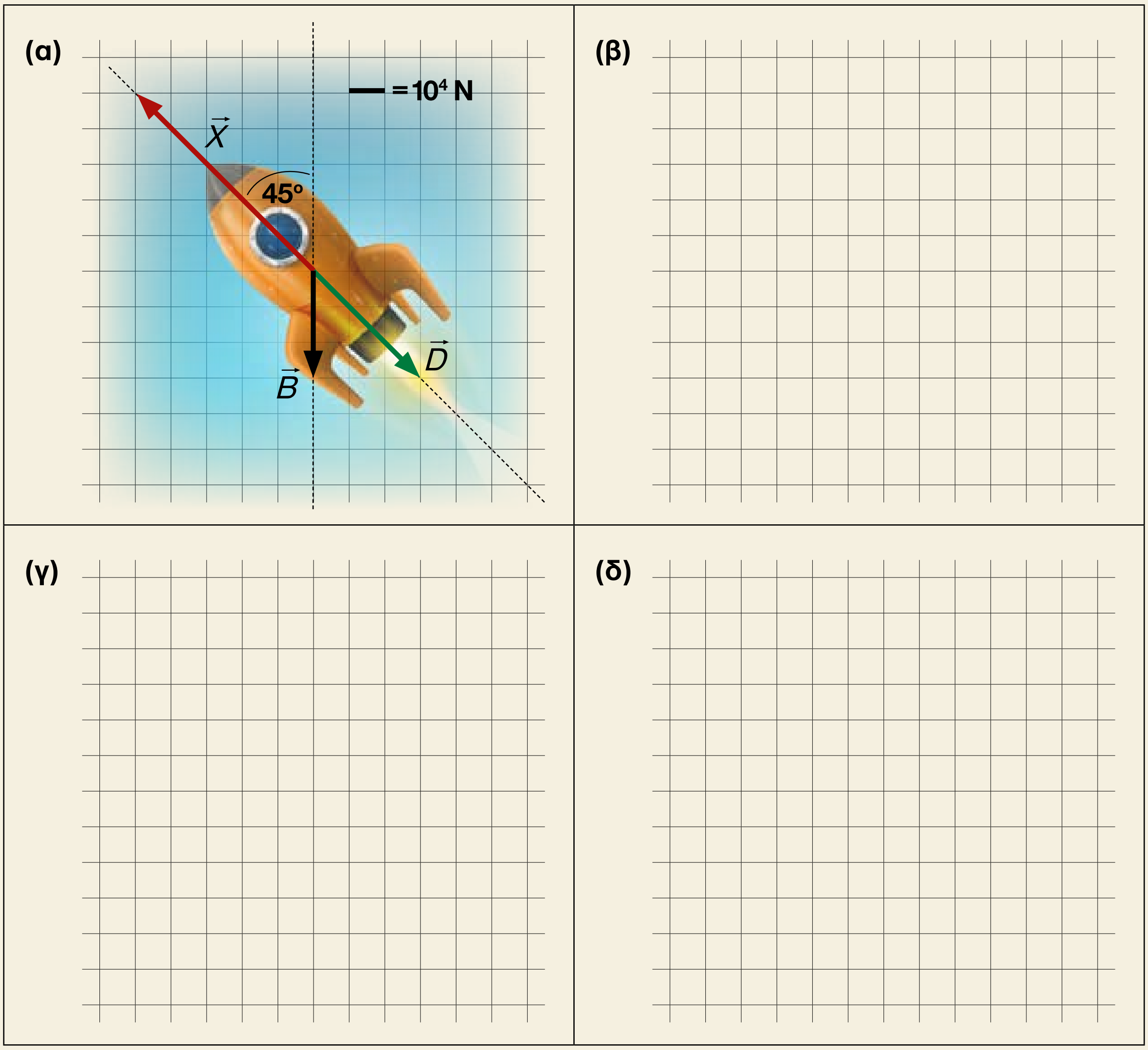
Β. Στο χώρο του σχήματος (γ), να σχεδιάσετε τις **διανυσματικές συνιστώσες** των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ κατά τους άξονες Ox και Oy. Να υπολογίσετε τις συνιστώσες F_{1x}, F_{1y}, F_{2x} και F_{2y}.

Γ. Να υπολογίσετε τις συνιστώσες T_x και T_y και το μέτρο $|\vec{T}|$ της συνισταμένης δύναμης $\vec{T}$ με τον **κανόνα των συνιστωσών:**

$$T_x = F_{1x} + F_{2x}\,, \quad T_y = F_{1y} + F_{2y}\,, \quad |\vec{T}| = \sqrt{T_x^2 + T_y^2}$$

Δ. Στο χώρο του σχήματος (δ), να σχεδιάσετε τις διανυσματικές συνιστώσες $\vec{T}_x$ και $\vec{T}_y$ και τη συνισταμένη δύναμη $\vec{T}$. Να συγκρίνετε με το γραφικό αποτέλεσμα **(Α)**.

8 Μια διαστημική ρουκέτα ανέρχεται με γωνία 45° ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση.



Στη ρουκέτα ασκούνται τρείς δυνάμεις, σχεδιασμένες υπό κλίμακα.

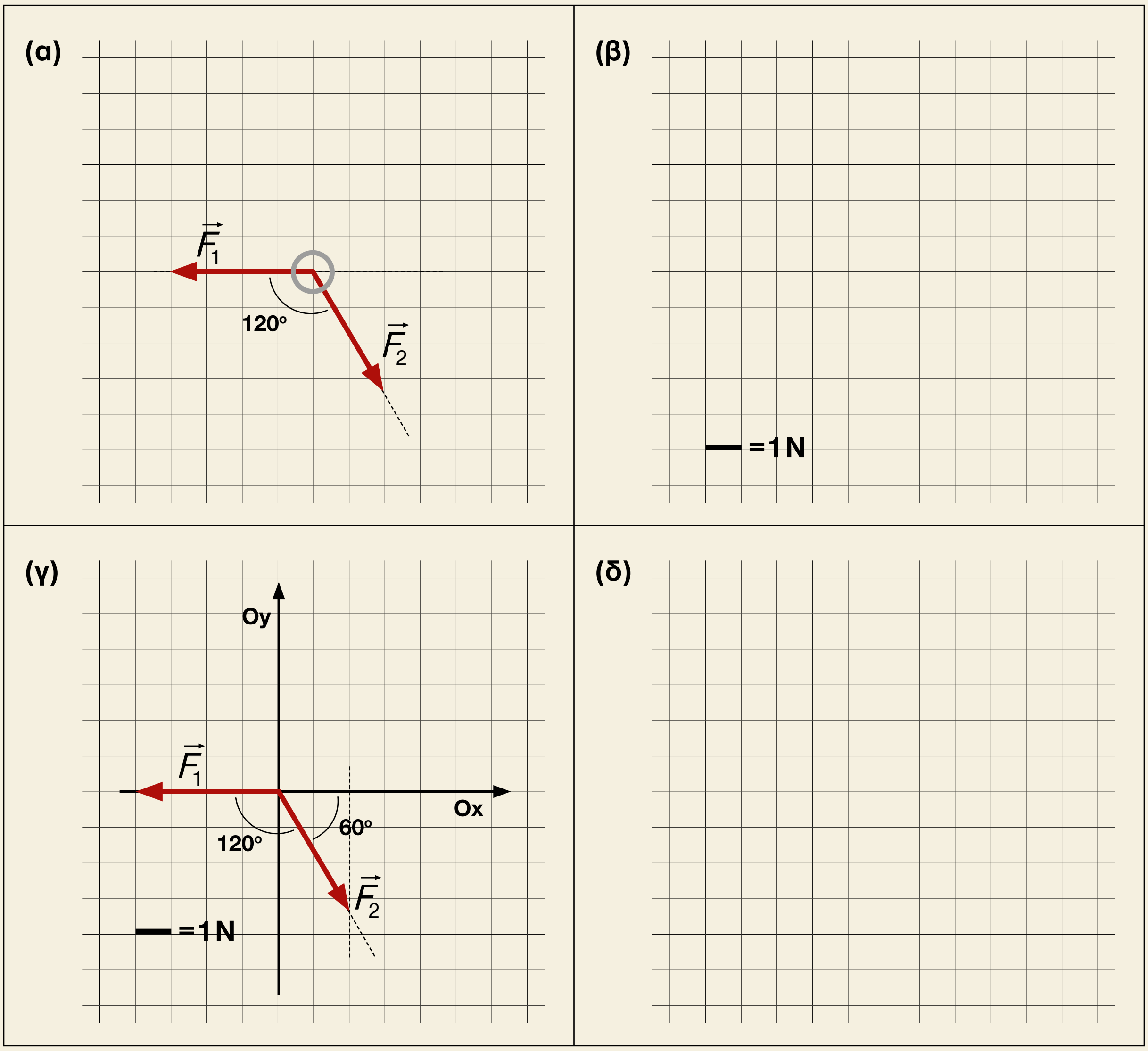
i. Να συζητήσετε την προέλευση των δυνάμεων.

Στο σχήμα (β), να αναλύσετε τις δυνάμεις αυτές σε συνιστώσες ως προς κατάλληλο σύστημα αξόνων.

ii. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα **(i)** και τον **κανόνα συνιστωσών**, να υπολογίσετε τις συνιστώσες F_x και F_y της συνισταμένης δύναμης $\vec{F}$. Στο σχήμα (γ), να σχεδιάσετε τις διανυσματικές συνιστώσες $\vec{F}_x$ και $\vec{F}_y$ καθώς και τη συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$.

iii. Στο σχήμα (δ), να μεταφέρετε παράλληλα τα διανύσματα των δυνάμεων $\vec{B}$, $\vec{D}$ και $\vec{X}$ έτσι ώστε να γίνουν διαδοχικά. Να υπολογίσετε τη συνισταμένη δύναμη με τον **κανόνα του πολυγώνου** και να επιβεβαιώσετε ότι καταλήξατε στο ίδιο αποτέλεσμα με το ερώτημα **(ii)**. Έχει σημασία η σειρά με την οποία σχεδιάσατε τα διανύσματα;

❾ Το δαχτυλίδι του πιο κάτω σχήματος (α) τείνεται από τις δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα, και οι διευθύνσεις τους σχηματίζουν γωνία 120°.



I. Στο χώρο του σχήματος (β), να προσδιορίσετε γραφικά τη συνισταμένη δύναμη $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ με τον κανόνα του **παραλληλογράμμου** και τον κανόνα του **πολυγώνου**. Να μετρήσετε τη γωνία που σχηματίζουν οι διευθύνσεις της συνισταμένης δύναμης και της $\vec{F}_1$.

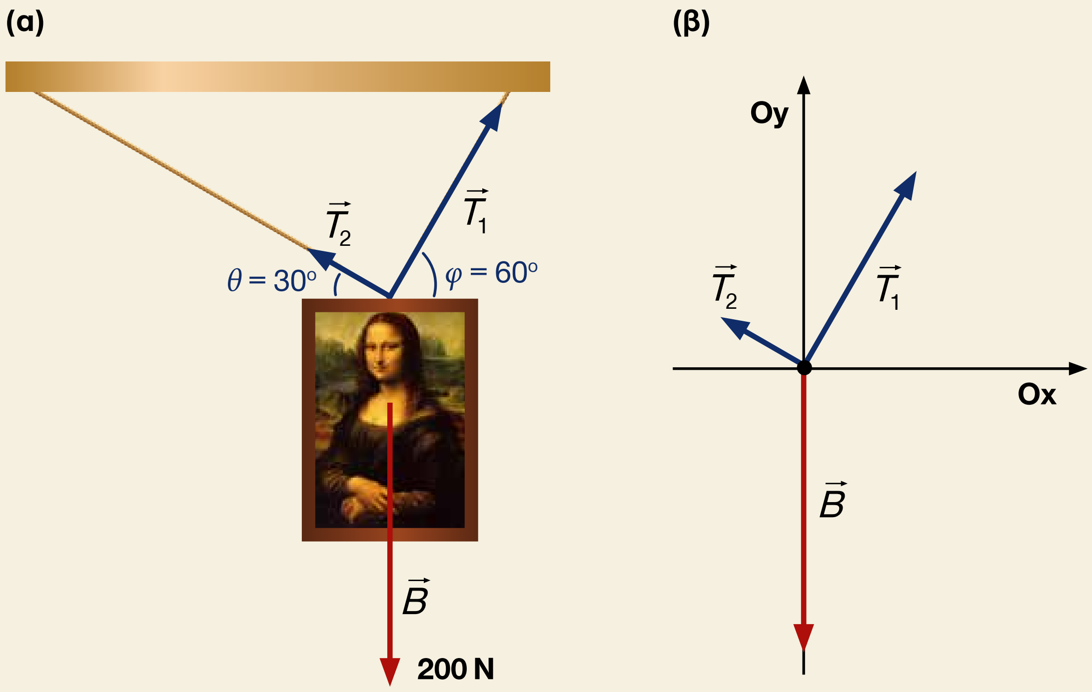
II. Στο χώρο του σχήματος (γ), να αναλύσετε τις δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ σε **διανυσματικές συνιστώσες**, χρησιμοποιώντας τους άξονες Ox και Oy. Να υπολογίσετε τις συνιστώσες: F_{1x}, F_{1y}, F_{2x}, F_{2y}.

III. Να υπολογίσετε τις συνιστώσες F_x και F_y της συνισταμένης δύναμης ως προς τους άξονες Ox και Oy, με τον **κανόνα των συνιστωσών**:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x}\,, \quad F_y = F_{1y} + F_{2y}$$

Να σχεδιάσετε τη συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ στο σχήμα (δ). Να υπολογίσετε το μέτρο της, και τη γωνία που σχηματίζει με τη δύναμη $\vec{F}_1$. Να συγκρίνετε με το αποτέλεσμα **(I)**.

❿ Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται ένας πίνακας, στον οποίο ασκούνται το βάρος του και δύο τάσεις από τα σχοινιά.



Α. Να αναλύσετε όλες τις δυνάμεις σε συνιστώσες ως προς τους άξονες Ox και Oy.

Να εκφράσετε τις διάφορες συνιστώσες συναρτήσει των μέτρων $|\vec{T}_1|$, $|\vec{T}_2|$ και $|\vec{B}|$ και των γωνιών θ και φ και να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα. Να δώσετε προσοχή στο σωστό πρόσημο των διαφόρων συνιστωσών.

$T_{1x} =$	
$T_{1y} =$	
$T_{2x} =$	
$T_{2y} =$	
$B_x =$	
$B_y =$	

Β. Η συνισταμένη δύναμη στον πίνακα μηδενίζεται, οπότε οι συνιστώσες ικανοποιούν τις σχέσεις

$$T_{1x} + T_{2x} + B_x = 0$$

$$T_{1y} + T_{2y} + B_y = 0$$

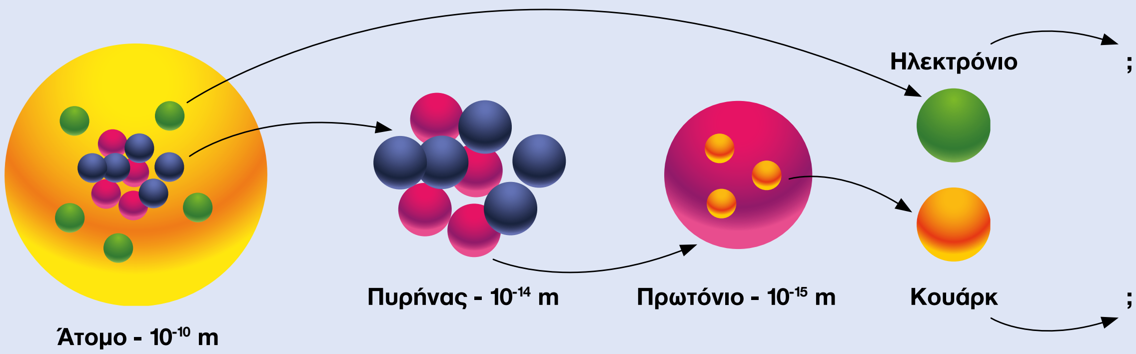
Να εξηγήσετε πώς προκύπτουν οι πιο πάνω σχέσεις.

Γ. Να λύσετε το πιο πάνω σύστημα εξισώσεων, και να προσδιορίσετε τα άγνωστα μέτρα $|\vec{T}_1|$ και $|\vec{T}_2|$. Δίδεται ότι το μέτρο του βάρους του πίνακα είναι $|\vec{B}| = 200$ N.

ΕΝΘΕΤΟ - Ιεραρχική Δομή της Ύλης και Θεμελιώδεις Αλληλεπιδράσεις

Οι βασικές δομικές μονάδες της ύλης είναι τα **άτομα**. Η ατομική θεωρία διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον αρχαίο φυσικό φιλόσοφο Δημόκριτο τον Αβδηρίτη (περίπου 460 - 370 π.Χ.). Η κατανόηση της δομής και της σταθερότητας του ατόμου αποτελούν όμως κορυφαία επιτεύγματα της Φυσικής του 20^{ού} αιώνα.

Δύο ή περισσότερα άτομα μπορούν να σχηματίσουν χημικούς δεσμούς, παράγοντας πιο σύνθετα σωματίδια, τα **μόρια**. Το μόριο του νερού αποτελείται από ένα άτομο οξυγόνου που συνδέεται με χημικούς δεσμούς με δύο άτομα υδρογόνου. Ένα βιολογικό μακρομόριο μπορεί να περιέχει χιλιάδες άτομα. Για παράδειγμα, το μόριο της μυοσφαιρίνης περιέχει περισσότερα από 2 000 άτομα. Όλα τα υλικά σώματα (στερεά, υγρά και αέρια) αποτελούνται από έναν τεράστιο αριθμό ατόμων ή μορίων. Μια ποσότητα νερού μάζας 18 γραμμαρίων περιέχει περίπου 6 x 10^{23} μόρια.



Ιεραρχική Δομή της Ύλης

Τα άτομα αποτελούνται από τρία είδη σωματιδίων: **πρωτόνια** τα οποία φέρουν θετικό ηλεκτρικό φορτίο, **νετρόνια** που είναι ηλεκτρικά ουδέτερα, και **ηλεκτρόνια** που φέρουν αρνητικό ηλεκτρικό φορτίο, ίσο και αντίθετο με το φορτίο του πρωτονίου. Οι μάζες των πρωτονίων και των νετρονίων είναι συγκρίσιμες και περίπου 2000 φορές μεγαλύτερες από τη μάζα του ηλεκτρονίου. Αριθμός πρωτονίων και νετρονίων σχηματίζουν τον ατομικό **πυρήνα**, ενώ τα ηλεκτρόνια κινούνται σε μια περιοχή γύρω από τον πυρήνα. Ο θετικά φορτισμένος πυρήνας έλκει τα ηλεκτρόνια μέσω ηλεκτρικών δυνάμεων, συγκρατώντας τα σε συνεχή κίνηση γύρω του.

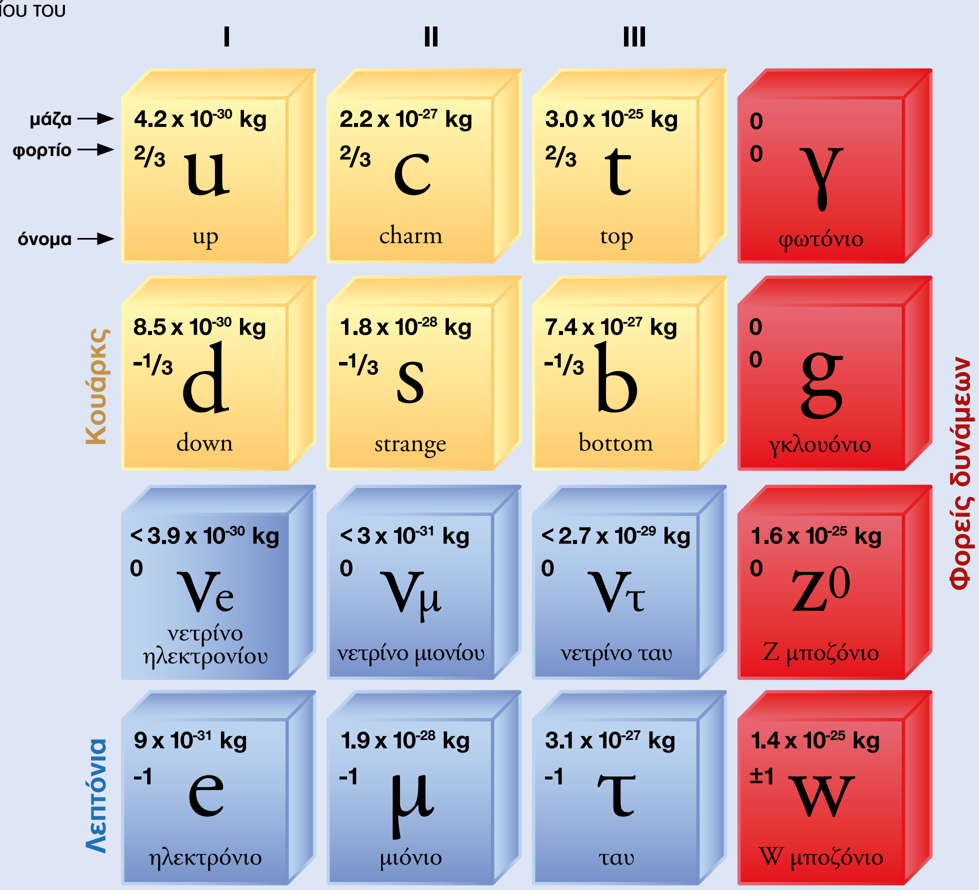
Ο αριθμός των πρωτονίων στον πυρήνα είναι ίσος με τον αριθμό των ηλεκτρονίων και έτσι το άτομο έχει μηδενικό συνολικό φορτίο. Όταν ένα άτομο χάσει ή κερδίσει ηλεκτρόνια, σχηματίζει ένα ηλεκτρικά φορτισμένο σωματίδιο, που ονομάζεται ιόν. Το απλούστερο άτομο αποτελείται από ένα πρωτόνιο και ένα ηλεκτρόνιο και αντιστοιχεί στο στοιχείο του υδρογόνου.

Οι διαστάσεις των ατόμων κυμαίνονται από μερικές δεκάδες μέχρι μερικές εκατοντάδες πικόμετρα (1 pm = 10^{-12} m). Οι ακτίνες των πυρήνων κυμαίνονται από ένα μέχρι δέκα φεμτόμετρα (1 fm = 10^{-15} m), μικρότερες μέχρι και 100,000 φορές από τις ακτίνες των ατόμων που τους περιέχουν. Μπορούμε να παρομοιάσουμε τον πυρήνα σε ένα άτομο με ένα βόλο στο κέντρο του σταδίου Nuevo Campo της Βαρκελώνης.

Τα πρωτόνια και τα νετρόνια είναι και αυτά σύνθετα σωματίδια. Αποτελούνται από άλλα σωματίδια που ονομάζονται **κουάρκς (quarks)**. Μέχρι σήμερα, δεν έχουμε ανακαλύψει οποιαδήποτε εσωτερική δομή ή μικρότερα συστατικά για τα κουάρκς, όπως επίσης και για το ηλεκτρόνιο. Για αυτό τον λόγο τα σωματίδια αυτά ονομάζονται στοιχειώδη. Γνωρίζουμε και άλλα στοιχειώδη σωματίδια, συνολικά έξι είδη κουάρκς και έξι είδη λεπτονίων, ανάμεσα στα οποία και το ηλεκτρόνιο. Οι αλληλεπιδράσεις των στοιχειωδών σωματιδίων, που είναι οι πιο βασικές μορφές ύλης, αποτελούν τις **θεμελιώδεις δυνάμεις** της φύσης. Όλες οι άλλες δυνάμεις που εμφανίζονται στη φύση απορρέουν από τις θεμελιώδεις. Είναι γνωστές τέσσερεις θεμελιώδεις δυνάμεις, οι **βαρυτικές**, οι **ηλεκτρομαγνητικές**, οι **ισχυρές** και οι **ασθενείς** δυνάμεις. Οι βαρυτικές και οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις μας είναι γνώριμες από την καθημερινή μας εμπειρία αφού διέπουν τα μακροσκοπικά φαινόμενα.

Όταν δύο ή περισσότερα στοιχειώδη σωματίδια ύλης αλληλεπιδρούν, ανταλλάσσουν άλλα σωματίδια που είναι οι **φορείς των δυνάμεων**. Ο φορέας των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων είναι το φωτόνιο. Το φως είναι δέσμη τέτοιων σωματιδίων που διαδίδονται στο κενό με ταχύτητα c ίση με 300,000 χιλιό-

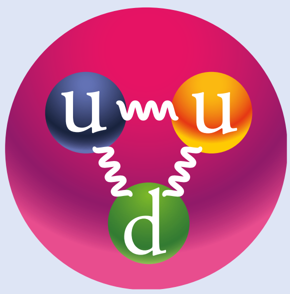
Πίνακας 3-2
Στοιχειώδη σωματίδια. Το φορτίο κάθε σωματιδίου αναφέρεται σε μονάδες του φορτίου του ηλεκτρονίου.



μετρα ανά δευτερόλεπτο (c = 3 x 10^5 km/s). Τα φωτόνια εκπέμπονται και απορροφούνται από ηλεκτρικά φορτισμένα σωματίδια, όπως το ηλεκτρόνιο, όταν αυτά αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Υπάρχουν οκτώ φορείς των ισχυρών δυνάμεων που ονομάζονται γκλουόνια και τρεις φορείς για τις ασθενείς δυνάμεις. Οι φορείς των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων είναι τα βαρυτόνια, τα οποία όμως δεν έχουν ακόμα ανιχνευθεί πειραματικά. Στον Πίνακα 3-2 αναφέρονται τα στοιχειώδη σωματίδια, οι φορείς των τεσσάρων θεμελιωδών δυνάμεων, και διάφορες ιδιότητές τους, όπως η μάζα και το ηλεκτρικό φορτίο.

Οι **ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις** εξασκούνται μεταξύ σωματιδίων που φέρουν **ηλεκτρικό φορτίο**. Υπάρχουν δύο είδη φορτίου: το θετικό και το αρνητικό. Ομόσημα φορτία ασκούν μεταξύ τους απωστικές **ηλεκτρικές δυνάμεις**, ενώ ετερόσημα φορτία ασκούν μεταξύ τους ελκτικές ηλεκτρικές δύναμεις. Οι **μαγνητικές δυνάμεις** οφείλονται σε κινούμενα ηλεκτρικά φορτία, τα οποία δημιουργούν ηλεκτρικά ρεύματα. Τα πρωτόνια προσδίδουν στον ατομικό πυρήνα θετικό φορτίο, με αποτέλεσμα αυτός να έλκει τα αρνητικά φορτισμένα ηλεκτρόνια και να τα συγκρατεί γύρω του. Λόγω της ασυμμετρικής κατανομής του φορτίου των ηλεκτρονίων και του φορτίου στους πυρήνες, τα άτομα και τα μόρια μπορούν να ασκούν το ένα στο άλλο ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις. Οι χημικοί δεσμοί μεταξύ ατόμων που είναι υπεύθυνοι για το σχηματισμό μορίων προκύπτουν ως αποτέλεσμα τέτοιων ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων. Οι γνώριμες από την καθημερινή μας εμπειρία δυνάμεις επαφής (όπως η κάθετη δύναμη από μια επιφάνεια και η τριβή) αποτελούν τη συνισταμένη πολλών ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων, οι οποίες στο μικροσκοπικό επίπεδο ασκούνται ανάμεσα σε ένα τεράστιο αριθμό ατόμων ή μορίων που περιέχονται στα σώματα που έρχονται σε επαφή.

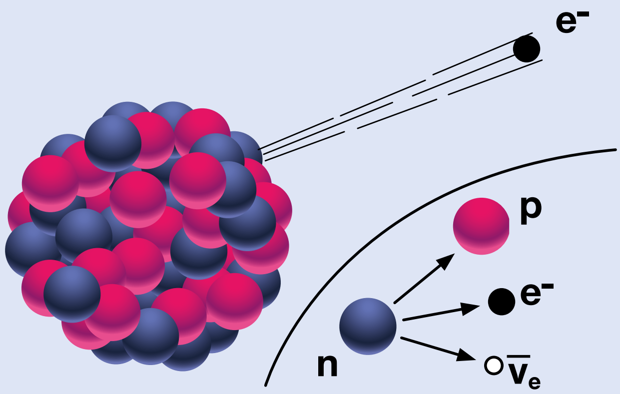
Οι **ισχυρές δυνάμεις** εξασκούνται μεταξύ των κουάρκς. Δύο κουάρκς τύπου «up», (u), και ένα κουάρκ τύπου «down», (d), ενώνονται μέσω ισχυρών ελκτικών δυνάμεων και σχηματίζουν το πρωτόνιο (uud). Τα κουάρκς στο πρωτόνιο ανταλλάσσουν συνεχώς γκλουόνια, που είναι οι φορείς των ισχυρών αλληλεπιδράσεων. Ο συνδυασμός δύο d κουάρκς με ένα u κουάρκ, οδηγεί στο σχηματισμό του νετρονίου (ddu). Παρόλο που τα πρωτόνια στους πυρήνες των ατόμων ασκούν απωστικές ηλεκτρικές δυνάμεις το ένα στο άλλο, αυτά έλκονται τόσο μεταξύ τους όσο και με τα ηλεκτρικά ουδέτερα νετρόνια εξαιτίας των ισχυρών δυνάμεων. Ως αποτέλεσμα ο πυρήνας είναι ευσταθής. Οι έλξεις μεταξύ των πρωτονίων και των νετρονίων προκύπτουν από τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις των κουάρκς που τα αποτελούν. Οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις περιορίζονται στο εσωτερικό των πυρήνων οι διαστάσεις των οποίων δεν ξεπερνούν τα δέκα φεμτόμετρα. Σε αυτές τις αποστάσεις είναι πολύ ισχυρότερες από τις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις.



Δομή του πρωτονίου

Δομή του νετρονίου

Οι **ασθενείς δυνάμεις** είναι υπεύθυνες για διάφορες διεργασίες που λαμβάνουν χώρα σε ραδιενεργούς πυρήνες. Σε αυτές οφείλεται η παραγωγή μιας μορφής ραδιενέργειας, η οποία ονομάζεται βήτα διάσπαση, κατά την οποία ένα νετρόνιο (n) του πυρήνα μετασχηματίζεται σε ένα πρωτόνιο (p) εκπέμποντας ένα ηλεκτρόνιο (e^-) και ένα αντινετρίνο ($\overline{\nu}_e$). Είναι πολύ πιο ασθενείς από τις ισχυρές και τις ηλεκτρομαγνητικές.



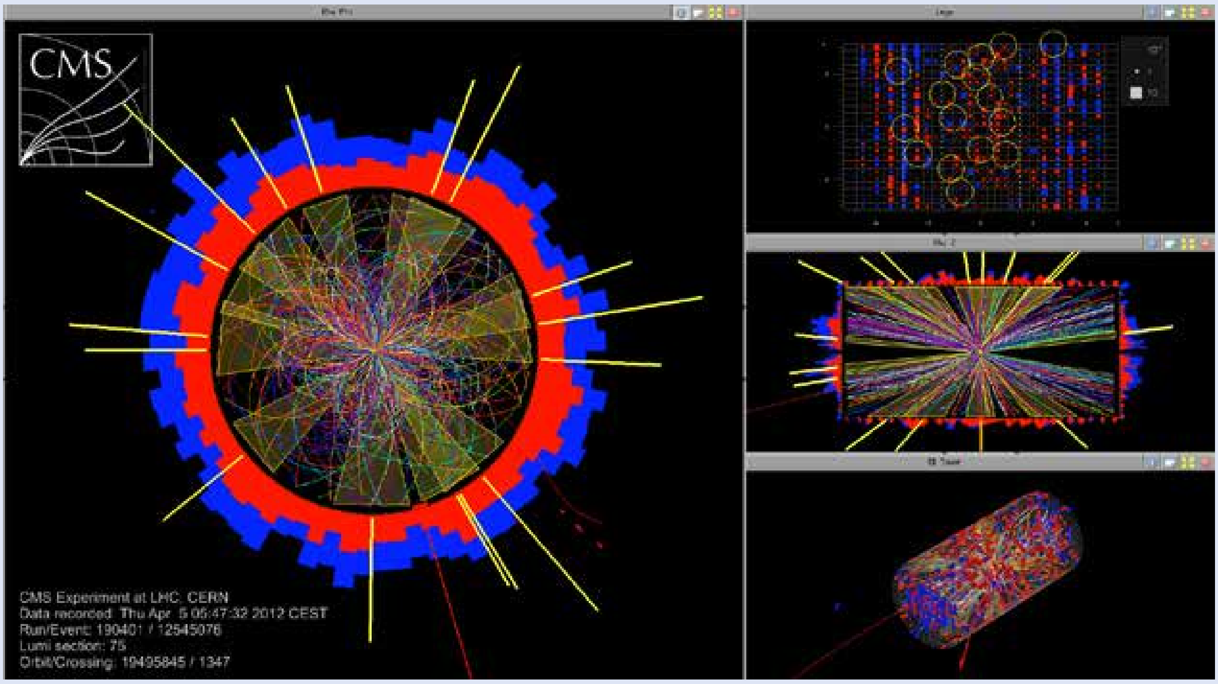
Οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο παράγεται η ενέργεια του Ήλιου, όπως και των άλλων αστεριών, αφού χωρίς αυτές δεν θα μπορούσε να επιτευχθεί ο κύκλος των πυρηνικών αντιδράσεων που μετατρέπουν το υδρογόνο σε ήλιο.

Οι **βαρυτικές αλληλεπιδράσεις** είναι καθαρά ελκτικές δυνάμεις, οι οποίες εξασκούνται μεταξύ όλων των σωματιδίων. Από τις τέσσερεις θεμελιώδεις δυνάμεις, οι βαρυτικές είναι οι ασθενέστερες. Για παράδειγμα, η βαρυτική έλξη μεταξύ του πρωτονίου και του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου είναι μικρότερη κατά έναν παράγοντα 10^{40} σε σχέση με την ηλεκτρική έλξη που αναπτύσσεται μεταξύ τους (Πίνακας 3-1). Οι βαρυτικές δυνάμεις είναι σημαντικές στον μακρόκοσμο, όταν ασκούνται από σώματα με τεράστιες μάζες όπως οι πλανήτες και τα αστέρια. Παρόλο που οι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις ήταν οι πρώτες που μελετήθηκαν λεπτομερώς, η ακριβής συμπεριφορά τους στο μικρόκοσμο παραμένει άγνωστη.

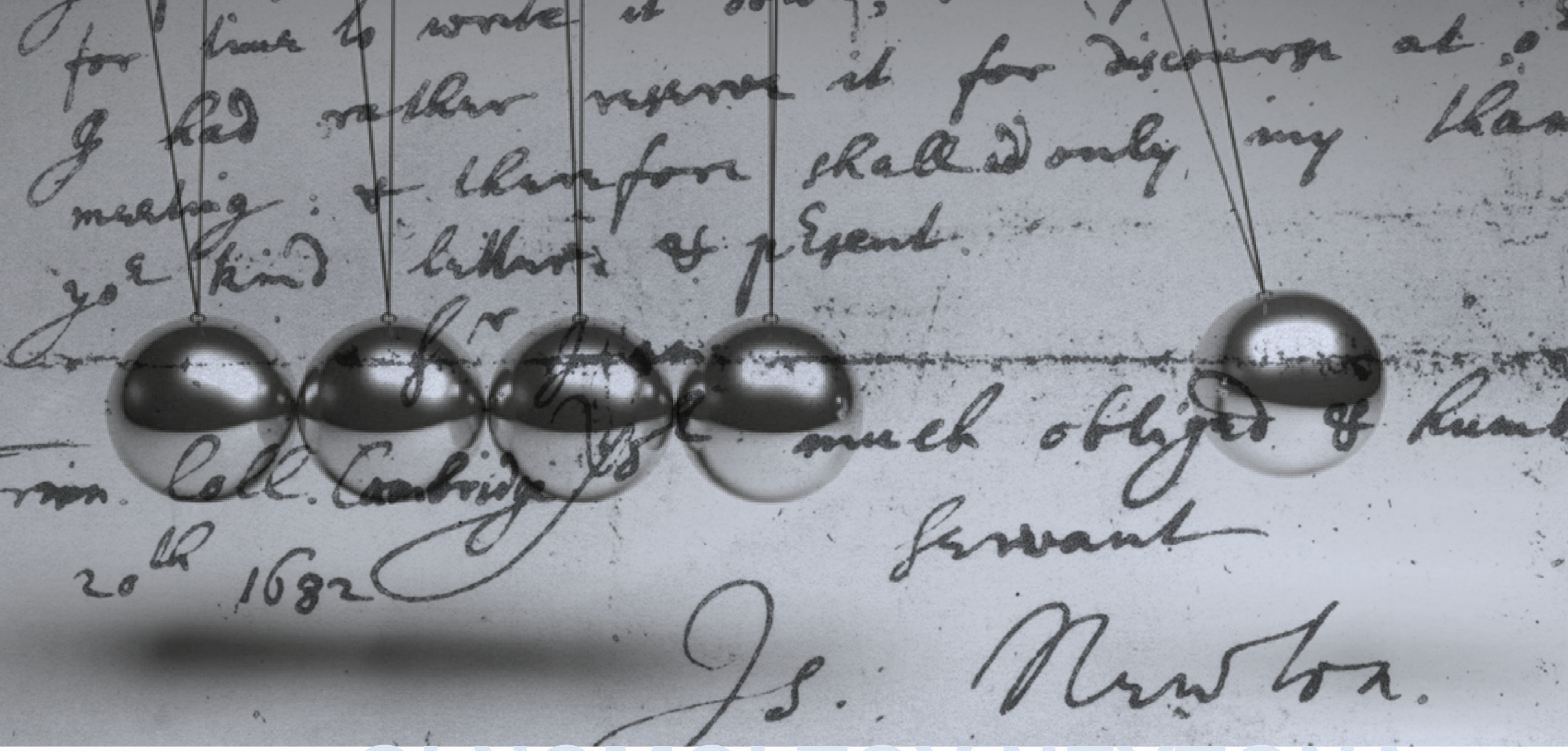
Στον **Μεγάλο Αδρονικό Επιταχυντή** σωματιδίων (Large Hadron Collider - LHC), στο Ευρωπαϊκό Κέντρο Πυρηνικών Ερευνών (CERN) της Ελβετίας, επιταχύνονται πρωτόνια, μέχρι να αποκτήσουν πολύ υψηλές ενέργειες και ταχύτητες που πλησιάζουν την ταχύτητα του φωτός. Ο λόγος της ταχύτητας του πρωτονίου προς την ταχύτητα του φωτός είναι σχεδόν ίσος με τη μονάδα: $\upsilon_p/c = 0{,}999999990$. Ένα πρωτόνιο αποκτά ενέργεια περίπου ίση με ένα μικρο-Joule (10^{-6} J) η οποία ισοδυναμεί με την κινητική ενέργεια που έχουν εκατό γρήγορα μυρμήγκια.

Τα πρωτόνια σχηματίζουν δέσμες που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις στον κυκλικό επιταχυντή και συγκρούονται. Επιτυγχάνονται 10^7 - 10^9 συγκρούσεις πρωτονίων ανά δευτερόλεπτο. Σ΄αυτές τις συγκρούσεις, τα κουάρκς που αποτελούν τα πρωτόνια αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, με αποτέλεσμα να παράγουν άλλα σωματίδια που σκεδάζονται σε διάφορες κατευθύνσεις, μέχρι που τα τελικά προϊόντα συλλεχθούν στους ανιχνευτές.

Έχοντας συγκεντρώσει τα αποτελέσματα πολλών τέτοιων συγκρούσεων, μπορούμε να εξαγάγουμε συμπεράσματα για τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των στοιχειωδών σωματιδίων και να διερευνήσουμε την πιθανότητα ύπαρξης νέων σωματιδίων. Το 2012 ανακαλύφθηκε στον LHC το μποζόνιο Higgs, μετά από πειραματικές έρευνες 50 ετών.



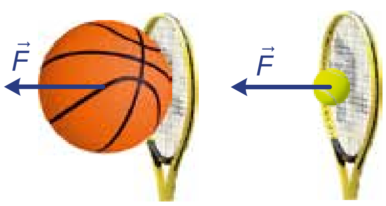
Αλληλεπιδράσεις στοιχειωδών σωματιδίων στον Μεγάλο Αδρονικό Επιταχυντή.



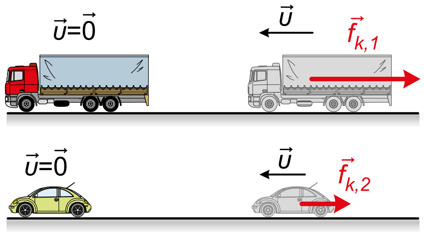
ΟΙ ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

Όπως αναφέραμε στην αρχή του Κεφαλαίου 3, οι δυνάμεις μπορούν να μεταβάλλουν την κινητική κατάσταση των σωμάτων στα οποία εξασκούνται. Για παράδειγμα, ένα σώμα που αφήνεται από κάποιο ύψος με μηδενική αρχική ταχύτητα, αποκτά υπό την επίδραση του βάρους του κατακόρυφη ταχύτητα, η οποία αυξάνεται κατά μέτρο.

Από την καθημερινή μας εμπειρία γνωρίζουμε ότι είναι ευκολότερο να μεταβάλλουμε την κινητική κατάσταση αντικειμένων με μικρή μάζα, ενώ πιο δύσκολα μεταβάλλουμε την κινητική κατάσταση σωμάτων με μεγάλη μάζα. Για παράδειγμα:



- Εξασκώντας συγκεκριμένη δύναμη με μια ρακέτα, μπορούμε να θέσουμε ευκολότερα σε κίνηση μια μπάλα αντισφαίρισης από μια μπάλα καλαθόσφαιρας.

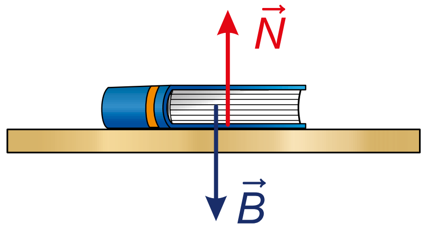


- Ένα φορτηγό, που κινείται με συγκεκριμένη ταχύτητα, χρειάζεται μεγαλύτερη δύναμη για να σταματήσει σε δεδομένο χρονικό διάστημα, σε σχέση με ένα μικρό αυτοκίνητο που κινείται με την ίδια ταχύτητα.

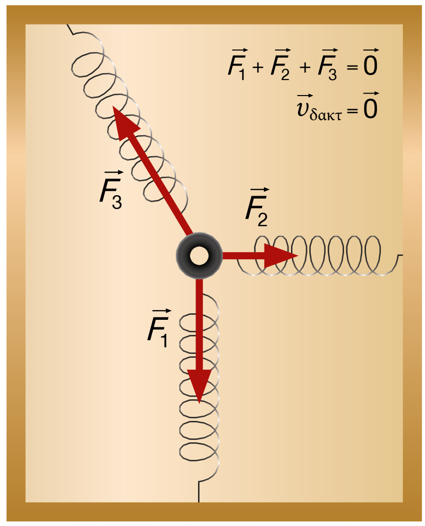
Τέτοιες παρατηρήσεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει σχέση ανάμεσα στη συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα, στην αλλαγή της κινητικής του κατάστασης και στη μάζα του σώματος. Η σχέση αυτή προσδιορίζεται από τους νόμους του Νεύτωνα.

3.11. Ο Πρώτος Νόμος του Νεύτωνα

Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση στην οποία ασκείται **μηδενική συνισταμένη δύναμη** σε ένα σώμα. Σε αυτή την περίπτωση το σώμα διατηρεί αμετάβλητη την ταχύτητά του. Εάν το σώμα ηρεμεί, θα συνεχίσει να ηρεμεί. Για παράδειγμα, ένα ακίνητο βιβλίο πάνω σε ένα οριζόντιο τραπέζι δέχεται το βάρος του και μια κάθετη δύναμη από το τραπέζι. Επειδή οι δυνάμεις αυτές είναι αντίθετες, η συνισταμένη δύναμη στο βιβλίο είναι μηδενική και αυτό παραμένει ακίνητο.



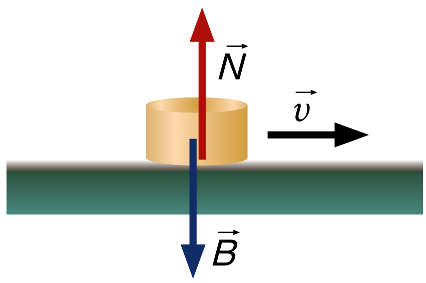
Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται σε κάτοψη ένα δαχτυλίδι που εφάπτεται σε ένα οριζόντιο τραπέζι και έλκεται απο τρία οριζόντια, επιμηκυμένα ελατήρια. Το βάρος του δαχτυλιδιού και η κάθετη δύναμη από το τραπέζι είναι αντίθετες και έχουν μηδενικό άθροισμα (δεν έχουν σχεδιασθεί). Τα μέτρα των δυνάμεων των ελατηρίων μπορούν να προσδιορισθούν από τις επιμηκύνσεις των ελατηρίων. Οι γωνίες των δυνάμεων μπορούν να μετρηθούν με ένα μοιρογνωμόνιο. Όταν η συνισταμένη των τριών δυνάμεων από τα ελατήρια στο δαχτυλίδι είναι ίση με μηδέν, το δαχτυλίδι ηρεμεί.



Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται ένας δίσκος που ηρεμεί πάνω από μια αεροτράπεζα σε λειτουργία. Ο δίσκος ισορροπεί υπό την επίδραση του βάρους του και της κατακόρυφης αντίστασης από τον αέρα.

Εάν ασκήσουμε μια σύντομη οριζόντια ώθηση στον δίσκο, θα αποκτήσει μια οριζόντια ταχύτητα. Επειδή ο δίσκος δεν εφάπτεται στην αεροτράπεζα, θα υφίσταται μηδενική τριβή από αυτήν. Επιπρόσθετα, θα δέχεται μια μικρή οριζόντια δύναμη αντίστασης από τον αέρα, λόγω της κίνησής του. Ο δίσκος θα διατηρήσει σχεδόν αμετάβλητη την ταχύτητά του μέχρι να προσκρούσει στο πλαίσιο που οριοθετεί την αεροτράπεζα.

$$\sum \vec{F} = \vec{B} + \vec{N} = \vec{0}$$



Όταν η οριζόντια τριβή από την αεροτράπεζα είναι αμελητέα, ο δίσκος κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Εάν η οριζόντια αντίσταση του αέρα ήταν μηδενική και η αεροτράπεζα είχε μεγάλες διαστάσεις, ο δίσκος θα συνέχιζε να εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Συμπεραίνουμε ότι *ένα κινούμενο σώμα που δέχεται μηδενική συνισταμένη δύναμη, διατηρεί σταθερή ταχύτητα.*

Εάν η λειτουργία της αεροτράπεζας σταματήσει, ο δίσκος έρχεται σε επαφή με την επιφάνειά της και αρχίζει να δέχεται μια επιπρόσθετη δύναμη κινητικής τριβής. Εξ' αιτίας αυτής της δύναμης η ταχύτητα του δίσκου ελαττώνεται σταδιακά, μέχρις ότου ο δίσκος σταματήσει. Η αλλαγή στην κινητική κατάσταση του δίσκου οφείλεται στην κινητική τριβή.

Αυτές οι παρατηρήσεις συνοψίζονται στον **πρώτο νόμο του Νεύτωνα**, που ονομάζεται και **νόμος της αδράνειας**:

Πρώτος Νόμος ή Νόμος της Αδράνειας

Ένα σώμα, στο οποίο ασκείται μηδενική συνισταμένη δύναμη, κινείται με σταθερή ταχύτητα ή ηρεμεί.

Ο πρώτος νόμος διατυπώνεται μαθηματικά ως εξής:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\upsilon} = \textbf{σταθερή}$$

Να προσέξετε ότι η πιο πάνω σχέση αποτελεί **ισοδυναμία**, δηλαδή ισχύει και αντιστρόφως:

- **Εάν ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα ή ηρεμεί, συμπεραίνουμε ότι στο σώμα δρα μηδενική συνισταμένη δύναμη.**
- **Εάν ένα σώμα κινείται με μεταβαλλόμενη ταχύτητα, δρα σε αυτό μη μηδενική συνισταμένη δύναμη.**

Αφού η ταχύτητα του σώματος παραμένει σταθερή, η επιτάχυνση του σώματος θα είναι μηδενική. Συνεπώς, *ένα σώμα που δέχεται μηδενική συνισταμένη δύναμη έχει μηδενική επιτάχυνση*.

Η τάση ενός σώματος να διατηρεί αμετάβλητη την κινητική του κατάσταση ονομάζεται **αδράνεια.**

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή από παραδείγματα της καθημερινής μας εμπειρίας, όπως τα πιο κάτω:

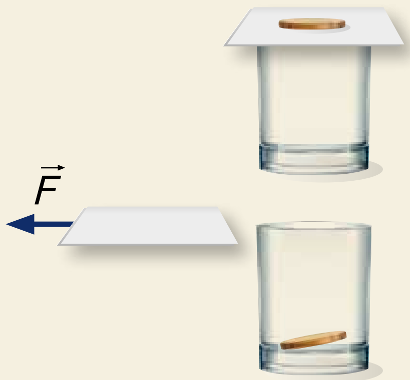
- Όταν ο οδηγός ενός αυτοκινήτου φρενάρει απότομα, οι επιβάτες κινούνται προς τα εμπρός σε σχέση με το αυτοκίνητο.
- Ένας ποδηλάτης συνεχίζει να κινείται για αρκετή ώρα, αφ' ότου σταματήσει να γυρνά τα πετάλια.
- Εάν κινήσουμε απότομα προς τα επάνω μια χάρτινη σακκούλα με ψώνια, θα σπάσει επειδή τα αντικείμενα μεγάλης μάζας στο εσωτερικό της τείνουν να παραμείνουν ακίνητα.
- Εάν τραβήξουμε απότομα ένα τραπεζομάντηλο σε οριζόντια διεύθυνση, τα σερβίτσια του τραπεζιού τείνουν να παραμείνουν ακίνητα (μην το δοκιμάσετε χωρίς την έγκριση των γονιών σας!).

Η σακκούλα με τα ψώνια σπάει εάν την κινήσουμε απότομα προς τα επάνω

Ένα **πείραμα για τη διαπίστωση του νόμου της αδράνειας** απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα. Ένα κέρμα εφάπτεται σε οριζόντιο χαρτόνι και ισορροπεί. Κάτω από το κέρμα, από την άλλη μεριά του χαρτονιού, βρίσκεται ένα ποτήρι.

Εάν το χαρτόνι μετακινηθεί απότομα κατά την οριζόντια διεύθυνση, το κέρμα τείνει να διατηρήσει την κινητική του κατάσταση στην οριζόντια διεύθυνση (δηλαδή να παραμείνει ακίνητο).

Όταν το κέρμα χάσει επαφή με το χαρτόνι, κινείται κατακόρυφα υπό την επίδραση του βάρους του και πέφτει στο ποτήρι.

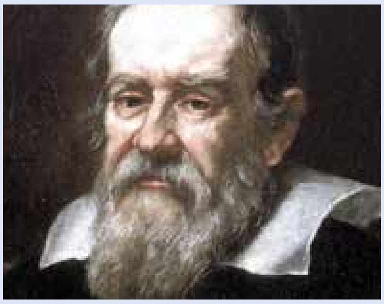


Ο μέγιστος αρχαίος Έλληνας φιλόσοφος από τα Στάγειρα Αριστοτέλης έζησε την περίοδο 384-322 π.Χ. Ήταν μαθητής του Πλάτωνα και δάσκαλος του μεγάλου Αλεξάνδρου. Η διδασκαλία του Αριστοτέλη επηρέασε σημαντικά τη φιλοσοφική και επιστημονική σκέψη του Δυτικού κόσμου για 2000 χρόνια, γι αυτό και θεωρείται μια από τις μεγαλύτερες φυσιογνωμίες όλων των εποχών.

Ο Αριστοτέλης πίστευε ότι η ακινησία είναι η φυσική κατάσταση των σωμάτων. Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, εάν ασκείται σε αυτό μη μηδενική συνισταμένη δύναμη.

Η θεωρία του Αριστοτέλη ήταν λανθασμένη, διότι βασιζόταν σε παρατηρήσεις που αγνοούσαν την επίδραση της τριβής στην κινητική κατάσταση των σωμάτων.

Ο σπουδαίος Ιταλός φυσικός, μαθηματικός και φιλόσοφος Γαλιλαίος (Galileo Galilei) έζησε την περίοδο 1564-1642 στην Ιταλία. Ο Γαλιλαίος εισήγαγε τη σύγχρονη μεθοδολογία των Φυσικών επιστημών, η οποία στηρίζεται στον έλεγχο συγκεκριμένων υποθέσεων με τη διεξαγωγή κατάλληλων πειραμάτων.



Το βιβλίο της Φύσης είναι γραμμένο με μαθηματικούς χαρακτήρες

Galileo Galilei, il Saggiatore

Εκτελώντας πειράματα, ο Γαλιλαίος κατέληξε στην εξής διατύπωση του νόμου της αδράνειας: «Ένα σώμα που κινείται σε μια οριζόντια επιφάνεια, θα συνεχίσει να κινείται στην ίδια κατεύθυνση με σταθερή ταχύτητα, εκτός εάν διαταραχθεί».

Ο Γαλιλαίος μελέτησε επίσης την ελεύθερη πτώση σωμάτων και διατύπωσε την αρχή της επαλληλίας. Υποστήριξε ότι για την ερμηνεία των φυσικών νόμων είναι απαραίτητη η χρήση των μαθηματικών.

Εφαρμογές του Πρώτου Νόμου

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα χρησιμοποιείται στη μελέτη προβλημάτων, στα οποία η συνισταμένη δύναμη σε ένα σώμα είναι μηδενική και το σώμα ηρεμεί ή κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Εάν το σώμα ηρεμεί, μελετούμε **προβλήματα ισορροπίας**. Η συνισταμένη δύναμη σε ένα σώμα που ηρεμεί είναι μηδενική:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \textbf{(Συνθήκη ισορροπίας)}$$

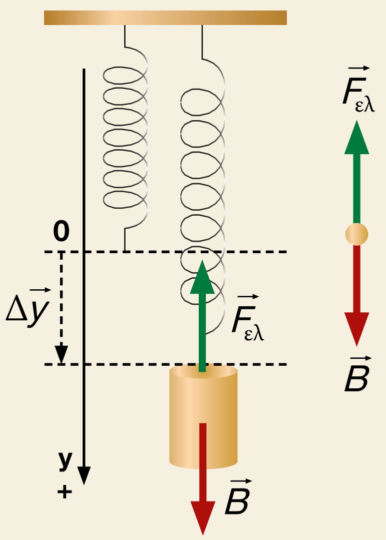
Εφαρμογή της Συνθήκης Ισορροπίας

Για να εφαρμόσουμε τη συνθήκη ισορροπίας σε ένα σώμα, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Αναλύουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα σε συνιστώσες ως προς ένα σύστημα αξόνων.
- Απαιτούμε να μηδενίζεται το άθροισμα των συνιστωσών κατά μήκος κάθε άξονα:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0$$

- Από το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει, προσδιορίζουμε τις συνιστώσες των αγνώστων δυνάμεων.



Παράδειγμα 1

Ισορροπία Σώματος που Κρέμεται από Ελατήριο

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται ένα σώμα μάζας m που κρέμεται από ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k και αμελητέας μάζας. Προσδιορίζουμε τη θέση της ελεύθερης άκρης του ελατηρίου με βάση τον κατακόρυφο άξονα Oy. Η τιμή $y = 0$ αντιστοιχεί στο φυσικό μήκος του ελατηρίου. Θετικές τιμές ($y > 0$) αντιστοιχούν σε **επιμήκυνση**, και αρνητικές τιμές ($y < 0$) σε **συσπείρωση** του ελατηρίου.

Έστω ότι όταν το σώμα ισορροπεί, η ελεύθερη άκρη του ελατηρίου βρίσκεται στη θέση y. Στο δεξιό σχήμα σχεδιάζουμε το σώμα στην προσέγγιση υλικού σημείου, και συμπεριλαμβάνουμε τις δυνάμεις που δρουν σε αυτό. Επειδή το σώμα ισορροπεί, συμπεραίνουμε ότι:

$$\vec{B} + \vec{F}_{ελ} = \vec{0} \Rightarrow B + F_{ελ} = 0 \Rightarrow F_{ελ} = -B$$

Από το νόμο του Hooke προκύπτει για τη δύναμη ελατήριου:

$$F_{ελ} = -ky$$

Από τις πιο πάνω σχέσεις συμπεραίνουμε:

$$B = ky$$

Συμπέρασμα

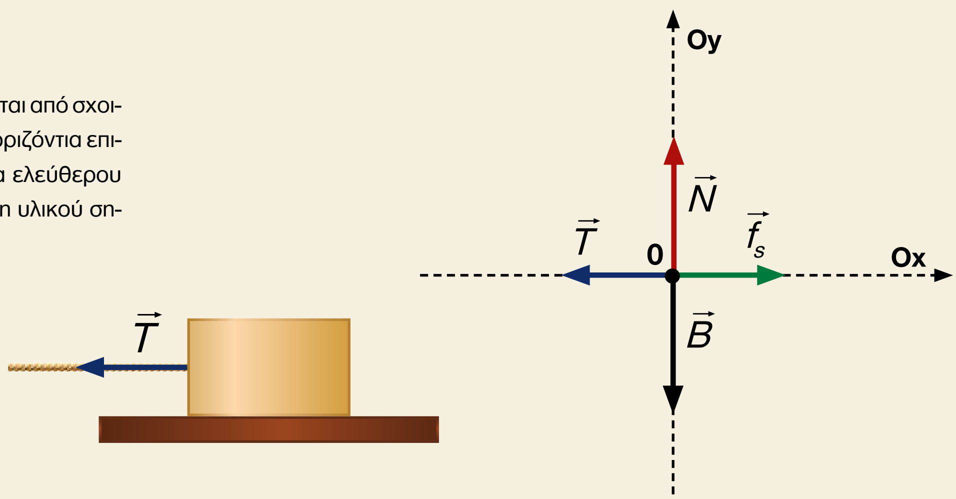
Όταν το σώμα ισορροπεί, η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι ανάλογη με το μέτρο του βάρους του σώματος. Η ιδιότητα αυτή του ελατηρίου χρησιμοποιείται στην κατασκευή ζυγών ελατηρίου.

Παράδειγμα 2

Ισορροπία Σώματος που Τείνεται από Σχοινί σε Ανώμαλη Οριζόντια Επιφάνεια

Στην Εικόνα 3-34 απεικονίζεται ένα σώμα, το οποίο είναι σε επαφή με μια ανώμαλη οριζόντια επιφάνεια και έλκεται με οριζόντια δύναμη $\vec{T}$ από ένα τεντωμένο σχοινί. Έστω ότι το σώμα **παραμένει ακίνητο.** Εκτός από τη δύναμη $\vec{T}$, στο σώμα ασκούνται το βάρος του $\vec{B}$, μια κάθετη δύναμη $\vec{N}$, και μια οριζόντια δύναμη στατικής τριβής $\vec{f_s}$ από την επιφάνεια.

Εικόνα 3-34
Αριστερά: Σώμα που τείνεται από σχοινί και ηρεμεί σε ανώμαλη οριζόντια επιφάνεια. **Δεξιά:** Διάγραμμα ελεύθερου σώματος στην προσέγγιση υλικού σημείου.



Στο δεξιό σχήμα της Εικόνας 3-34 σχεδιάζουμε το σώμα στην προσέγγιση υλικού σημείου και συμπεριλαμβάνουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό. Η στατική τριβή $\vec{f_s}$ έχει αντίθετη φορά από τη δύναμη $\vec{T}$.

Αφού το σώμα παραμένει ακίνητο, η συνισταμένη δύναμη σε αυτό είναι μηδενική, οπότε και *οι συνιστώσες της κατά μήκος των αξόνων Ox και Oy είναι μηδενικές*:

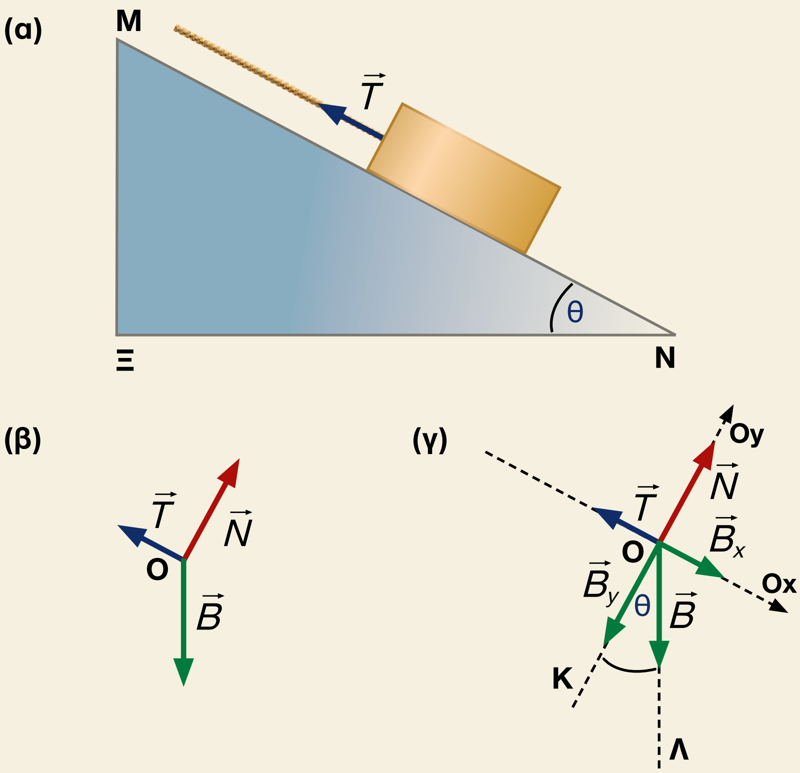
$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F_x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T} + \vec{f_s} = \vec{0} \Rightarrow \quad \vec{f_s} = -\vec{T} \\ \sum \vec{F_y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N} + \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N} = -\vec{B} \end{cases}$$

Συμπεραίνουμε ότι η στατική τριβή $\vec{f_s}$ είναι αντίθετη προς την τάση $\vec{T}$ του σχοινιού, και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από την επιφάνεια είναι αντίθετη προς το βάρος $\vec{B}$.

Παράδειγμα 3

Ισορροπία Σώματος που έλκεται από Σχοινί σε Λείο Κεκλιμένο Επίπεδο

Στην Εικόνα 3-35(α) απεικονίζεται ένα σώμα που ισορροπεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο, γωνίας $M\hat{N}\Xi = \theta$ με την οριζόντια διεύθυνση. Το σώμα έλκεται από το τεντωμένο σχοινί με δύναμη $\vec{T}$. Επιπρόσθετα, ασκούνται στο σώμα το βάρος του $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το επίπεδο. Στην Εικόνα 3-35(β) σχεδιάζουμε το σώμα στην προσέγγιση υλικού σημείου, μαζί με αυτές τις δυνάμεις.



Εικόνα 3-35
(α) Σώμα που ισορροπεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο, υπό την επίδραση τεντωμένου σχοινιού. **(β)** Προσέγγιση υλικού σημείου για το σώμα. Σημειώνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. **(γ)** Ανάλυση των δυνάμεων παράλληλα (Ox) και κάθετα (Oy) στο κεκλιμένο επίπεδο.

Εργαζόμαστε όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα σώματος σε κεκλιμένο επίπεδο: Αναλύουμε τις δυνάμεις αυτές σε διευθύνσεις παράλληλα και κάθετα προς το κεκλιμένο επίπεδο, χρησιμοποιώντας το σύστημα αξόνων της Εικόνας 3-35(γ). Το βάρος αναλύεται στις διανυσματικές συνιστώσες $\vec{B}_x$ και $\vec{B}_y$. Η δύναμη $\vec{T}$ έχει ήδη διεύθυνση κατά μήκος του άξονα Ox, οπότε ισχύει $\vec{T}_x = \vec{T}$. Ομοίως, η δύναμη $\vec{N}$ έχει διεύθυνση κατά μήκος του Oy, οπότε $\vec{N}_y = \vec{N}$.

Επειδή το σώμα ισορροπεί, η συνισταμένη δύναμη σε αυτό ισούται με μηδέν. Συμπεραίνουμε:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{B}_x + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T} = -\vec{B}_x \\ \vec{B}_y + \vec{N} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N} = -\vec{B}_y \end{cases}$$

Όπως δείξαμε προηγουμένως, οι συνιστώσες B_x και B_y μπορούν να εκφρασθούν ως συναρτήσεις του μέτρου του βάρους και της γωνίας $M\hat{N}\Xi = \theta$. Συνεπώς:

$$B_x = |\vec{B}|\eta\mu\theta, \;\; T = -B_x = -|\vec{B}|\eta\mu\theta$$
$$B_y = -|\vec{B}|\sigma\upsilon\nu\theta, \;\; N = -B_y = |\vec{B}|\sigma\upsilon\nu\theta$$

Από την ισορροπία δυνάμεων προκύπτει αμέσως η άνωση, που δρα σε ένα σώμα **οποιουδήποτε σχήματος** από το περιβάλλον ρευστό. Στο επόμενο παράδειγμα μελετούμε αυτό το πρόβλημα.

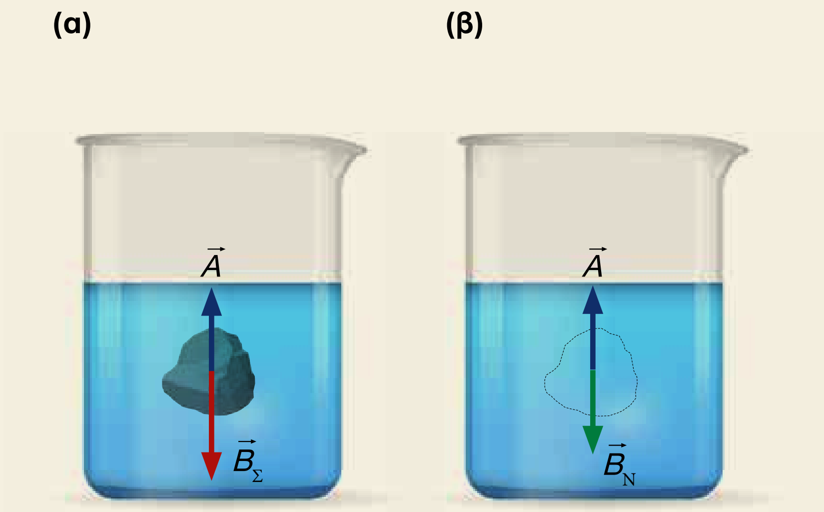
Παράδειγμα 4

Εφαρμογή της Ισορροπίας Δυνάμεων στον Υπολογισμό της Άνωσης Υγρού: Αρχή του Αρχιμήδη

Από την καθημερινή μας εμπειρία γνωρίζουμε ότι ένα σώμα, που είναι ολικά ή μερικά βυθισμένο σε κάποιο υγρό, δέχεται μια συνισταμένη δύναμη από το υγρό με κατακόρυφη διεύθυνση και φορά προς τα επάνω, που ονομάζεται **άνωση**. Ένα σώμα βυθίζεται, ανέρχεται, ή ισορροπεί μέσα στο υγρό, ανάλογα με το εάν το βάρος του είναι μεγαλύτερο, μικρότερο, ή ακριβώς ίσο κατά μέτρο με την άνωση.

Το σώμα *εκτοπίζει* μια ποσότητα υγρού, η οποία έχει ίσο όγκο με τον όγκο του βυθισμένου τμήματος του σώματος. Το σώμα της Εικόνας 3-36(α) είναι ολικά βυθισμένο, και εκτοπίζει όγκο υγρού ίσο με τον συνολικό όγκο του σώματος.

Πειραματικά αποδεικνύεται ότι δύο *σώματα που εκτοπίζουν τον ίδιο όγκο υγρού, δέχονται την ίδια άνωση από το υγρό*. Μπορούμε τότε με το εξής **νοητικό πείραμα** να υπολογίσουμε την άνωση στο σώμα. Φανταζόμαστε ότι το εσωτερικό του δοχείου είναι ομοιόμορφα γεμάτο με υγρό που ηρεμεί, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3-36(β).



Εικόνα 3-36
(α) Ένα σώμα είναι βυθισμένο σε υγρό (π.χ. νερό). Στο σώμα ασκείται το βάρος του $\vec{B}_\Sigma$ και η άνωση $\vec{A}$ από το περιβάλλον υγρό. **(β)** Το εσωτερικό του δοχείου είναι ομοιόμορφα γεμάτο με υγρό. Το υγρό **στο εσωτερικό της διακεκομμένης επιφάνειας** έχει τον ίδιο όγκο με το σώμα, και δέχεται την ίδια άνωση $\vec{A}$. Επειδή το υγρό αυτό ισορροπεί, η άνωση $\vec{A}$ είναι αντίθετη από το βάρος $\vec{B}_N$ του υγρού.

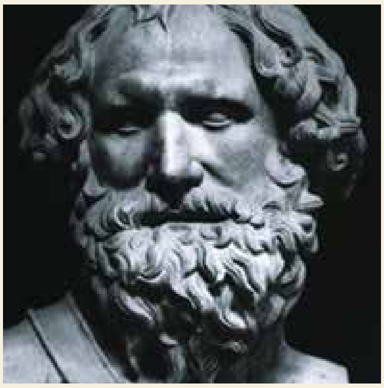
Η διακεκομμένη επιφάνεια της Εικόνας 3-36(β) συμβολίζει το περίγραμμα του σώματος. Το υγρό που περιέχεται στο εσωτερικό αυτής της επιφάνειας *έχει ακριβώς τον ίδιο όγκο με το σώμα, και συνεπώς δέχεται ακριβώς την ίδια άνωση $\vec{A}$ με το σώμα*. Επιπλέον, υφίσταται και τη δύναμη του βάρους της $\vec{B}_N$. Επειδή η ποσότητα του υγρού ηρεμεί (όπως και το υπόλοιπο υγρό) οι δυνάμεις αυτές είναι αντίθετες:

$$\vec{A} = -\vec{B}_N$$

Στην ίδια σχέση καταλήγουμε εάν το σώμα είναι μερικώς βυθισμένο στο υγρό. Συνεπώς:

Ένα σώμα, μερικά ή ολικά βυθισμένο σε ένα υγρό, δέχεται μια κατακόρυφη δύναμη από το υγρό, με φορά προς τα επάνω και μέτρο ίσο με το βάρος του υγρού που εκτοπίζει.

Το συμπέρασμα αυτό ονομάζεται **αρχή της άνωσης** και ανακαλύφθηκε από τον σπουδαίο αρχαίο Έλληνα μαθηματικό και φυσικό από τις Συρακούσες, Αρχιμήδη (287 – 213 π.Χ.).



Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 3.11.1. - 3.11.3., σελ. 231.

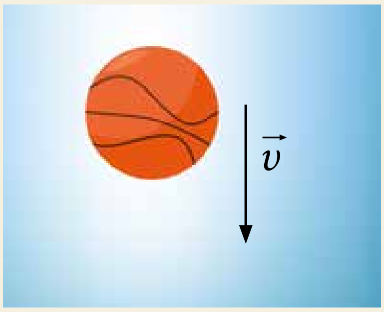
Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με την ένδειξη Σωστό / Λάθος.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Εάν σε ένα σώμα δρα μηδενική συνισταμένη δύναμη, το σώμα παραμένει ακίνητο.	
2	Εάν σε ένα σώμα δρα μία σταθερή, μη μηδενική συνισταμένη δύναμη, το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα.	
3	Εάν ένα σώμα ηρεμεί ή κινείται με σταθερή ταχύτητα, συμπεραίνουμε ότι η συνισταμένη δύναμη σε αυτό είναι μηδενική.	
4	Εάν η συνισταμένη δύναμη σε ένα κινούμενο σώμα μηδενιστεί, η ταχύτητα του σώματος ελαττώνεται και τελικά μηδενίζεται λόγω της αδράνειας.	
5	Αδράνεια είναι η ιδιότητα ενός σώματος να παραμένει ακίνητο, όταν δρα σε αυτό μηδενική συνισταμένη δύναμη.	
6	Ένα σώμα, που κινείται σε καμπύλη τροχιά με ταχύτητα σταθερού μέτρου, δέχεται μηδενική συνισταμένη δύναμη.	

Ασκήσεις

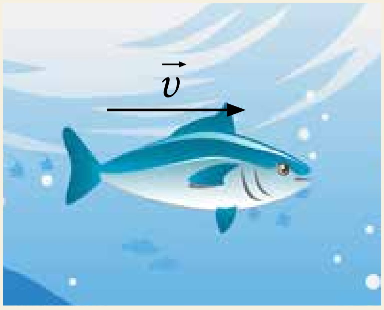
1 Το επόμενο σχήμα δείχνει διάφορα σώματα που ηρεμούν, ή κινούνται. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτά, και να συζητήσετε την προέλευσή τους. Να γράψετε τις εξισώσεις ισορροπίας γι' αυτές τις δυνάμεις.



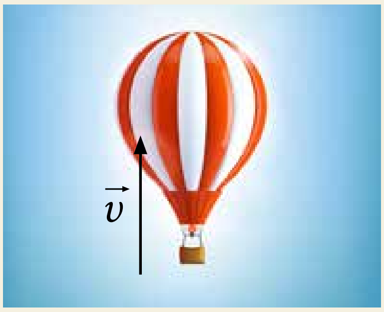
Μία μπάλα που πέφτει με σταθερή ταχύτητα.

Ενα μπαλόνι που ισορροπεί στον αέρα.

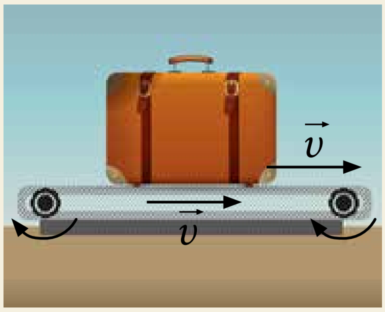
Ένας κροκόδειλος που επιπλέει ακίνητος στην επιφάνεια μίας λίμνης.



Ένα ψάρι που κολυμπά με σταθερή οριζόντια ταχύτητα.



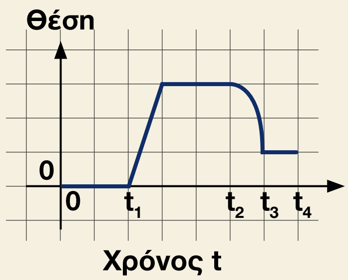
Ένα αερόστατο που ανέρχεται στην ατμόσφαιρα με σταθερή ταχύτητα.



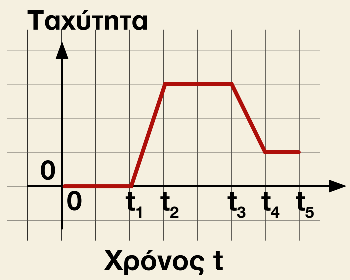
Μία βαλίτσα που κινείται σε οριζόντιο κυλιόμενο ιμάντα με σταθερή ταχύτητα.

2 Το επόμενο σχήμα απεικονίζει γραφικές παραστάσεις (α) θέσης - χρόνου, (β) ταχύτητας - χρόνου και (γ) επιτάχυνσης - χρόνου για τρία σώματα που κινούνται σε ευθεία γραμμή. Να προσδιορίσετε σε ποια χρονικά διαστήματα τα τρία σώματα δέχονται **μηδενική** συνισταμένη δύναμη.

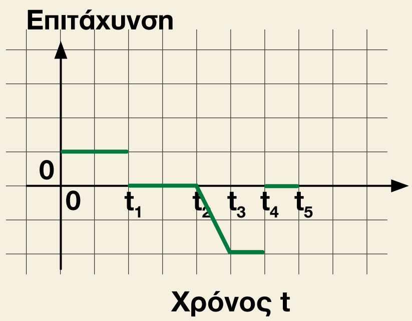
(α)



(β)

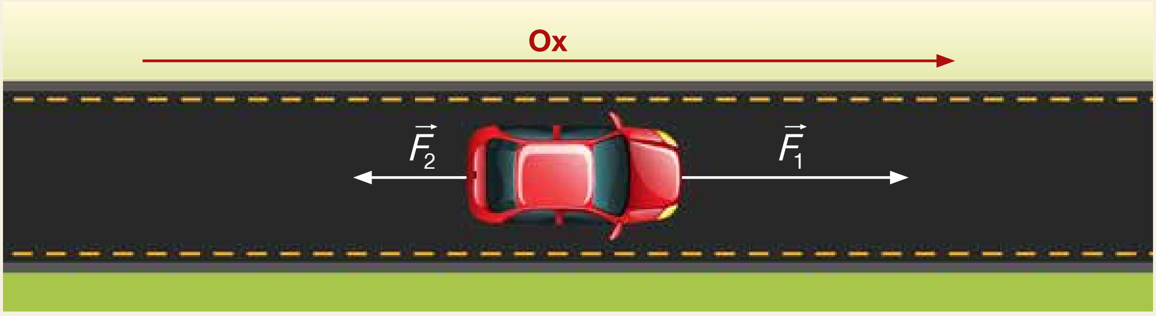


(γ)



3 Κουνώντας τις φτερούγες του, ένα πουλί με βάρος $\vec{B}$ μπορεί να αιωρείται στον αέρα παραμένοντας στην ίδια θέση. Πώς συνδέεται η δύναμη, που δρά σε κάθε φτερούγα του πουλιού από τον αέρα, με το βάρος του πουλιού;

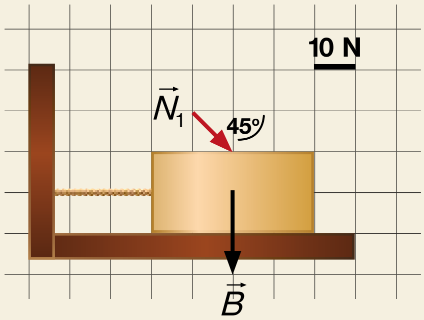
4 Το αυτοκινητάκι της πιο κάτω εικόνας κινείται σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια.



Στο αυτοκινητάκι ασκούνται οι συγγραμμικές και αντίρροπες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με διεύθυνση παράλληλα στον άξονα Ox και μέτρα $|\vec{F}_1| = 24$ N και $|\vec{F}_2| = 12$ N. Να σχεδιάσετε μια τρίτη δύναμη $\vec{F}_3$ που πρέπει να ασκηθεί στο αυτοκινητάκι, έτσι ώστε να κινείται με σταθερή ταχύτητα.

5 Το κουτί του πιο κάτω σχήματος **ισορροπεί** σε επαφή με *λεία* επιφάνεια. Στο σχήμα είναι σχεδιασμένη μία πλάγια δύναμη $\vec{N}_1$ η οποία δρα στο σώμα υπό γωνία 45° ως προς την οριζόντια διεύθυνση, και το βάρος $\vec{B}$ του σώματος.

Το σώμα είναι προσδεδεμένο στον αριστερό κατακόρυφο τοίχο με ένα οριζόντιο, τεντωμένο σχοινί.



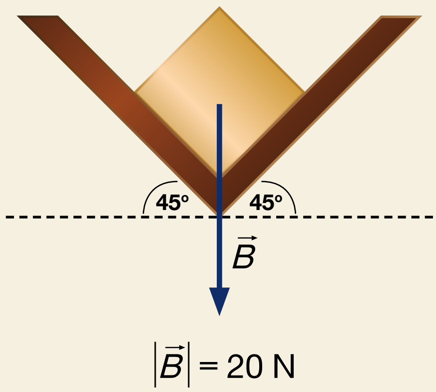
Α. Ποιές επιπρόσθετες δυνάμεις ασκούνται στο σώμα, έτσι ώστε να ισορροπεί;

Β. Να σχεδιάσετε το σώμα και όλες τις δυνάμεις που δρουν σε αυτό στην προσέγγιση υλικού σημείου.

Γ. Να αναλύσετε τις δυνάμεις σε συνιστώσες ως προς κατάλληλο σύστημα αξόνων.

Δ. Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες ισορροπίας και πληροφορίες από το σχήμα, να υπολογίσετε τα μέτρα των αγνώστων δυνάμεων.

6 Ο κύβος του διπλανού σχήματος ισορροπεί σε επαφή με δύο *λείες* επιφάνειες. Στο σχήμα έχει σχεδιαστεί το βάρος του κύβου.

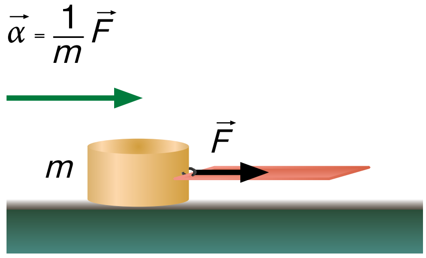


Α. Ποιές επιπρόσθετες δυνάμεις ασκούνται στον κύβο; Να σχεδιάσετε τον κύβο στην **προσέγγιση υλικού σημείου**, μαζί τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτόν.

Β. Να αναλύσετε τις δυνάμεις σε κατάλληλο σύστημα αξόνων, και να γράψετε εξισώσεις ισορροπίας για τις συνιστώσες τους. Χρησιμοποιώντας αυτές τις εξισώσεις, να προσδιορίσετε τα μέτρα των δυνάμεων συναρτήσει του μέτρου του βάρους.

3.12. Εισαγωγή στον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα

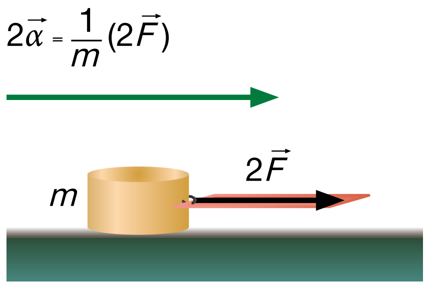
Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, **όταν σε ένα σώμα δρα μη μηδενική συνισταμένη δύναμη, η κινητική κατάσταση του σώματος μεταβάλλεται**, δηλαδή το σώμα κινείται με επιτάχυνση. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα συνδέει την επιτάχυνση ενός σώματος με τη μάζα του και τη συνισταμένη δύναμη που δρα σε αυτό.



Εικόνα 3-37 (α)
Δεδομένη δύναμη από την ταινία προκαλεί δεδομένη επιτάχυνση του σώματος στην ίδια διεύθυνση.

Στη διάταξη του σχήματος 3-37(α) απεικονίζεται ένα σώμα που ηρεμεί πάνω σε έναν αεροδιάδρομο σε λειτουργία. Το σώμα είναι συνδεδεμένο με μια οριζόντια ελαστική ταινία αμελητέας μάζας. Εάν επιμηκύνουμε την ταινία κατά μήκος του αεροδιαδρόμου, παρατηρούμε ότι το σώμα αρχίζει να κινείται. Επειδή η τριβή (αντίσταση του αέρα) είναι αμελητέα, η μοναδική δύναμη στο σώμα κατά την οριζόντια διεύθυνση είναι η δύναμη $\vec{F}$ από την ταινία.

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ είναι ανάλογο με την επιμήκυνση της ταινίας, και μεταβάλλεται με αλλαγή στην επιμήκυνση της ταινίας. Μπορούμε να μετρήσουμε το μέτρο της $\vec{F}$ παρεμβάλλοντας έναν αισθητήρα δύναμης ανάμεσα στην ταινία και στο σώμα. Επιπρόσθετα, μπορούμε να μελετήσουμε την ταχύτητα και επιτάχυνση του σώματος με έναν αισθητήρα κίνησης, όπως εξηγήσαμε στο Κεφάλαιο 2. Καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:



Εικόνα 3-37 (β)
Διπλάσια δύναμη στο ίδιο σώμα προκαλεί διπλάσια επιτάχυνση, στην ίδια κατεύθυνση με τη δύναμη.

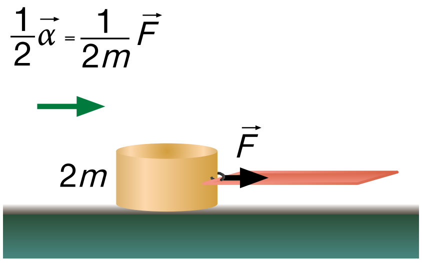
- Εάν φροντίσουμε να διατηρούμε σταθερή τη δύναμη $\vec{F}$, διαπιστώνουμε ότι το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\vec{\alpha}$, η οποία έχει την ίδια κατεύθυνση με τη δύναμη $\vec{F}$.

- Εάν διπλασιασθεί το μέτρο της $\vec{F}$, παρατηρούμε ότι διπλασιάζεται το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3-37(β).

Οι παρατηρήσεις αυτές συνοψίζονται ως εξής:

Η επιτάχυνση που αποκτά το σώμα είναι ανάλογη και έχει την ίδια κατεύθυνση με τη δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται σε αυτό από την ταινία:

$$\vec{\alpha} \propto \vec{F} \qquad \textbf{(σταθερή μάζα)}$$



Εικόνα 3-37 (γ)
Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι αντιστρόφως ανάλογο με τη μάζα του σώματος.

Έστω τώρα ότι επαναλαμβάνουμε το πείραμα με ένα σώμα διπλάσιας μάζας (Εικόνα 3-37 (γ)). Εάν εφαρμόσουμε την ίδια δύναμη $\vec{F}$ όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε ότι το νέο σώμα θα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με τη μισή επιτάχυνση.

Εάν ασκήσουμε την ίδια σταθερή δύναμη σε σώματα διαφορετικής μάζας, διαπιστώνουμε ότι τα σώματα αποκτούν σταθερή επιτάχυνση κατά την κατεύθυνση της δύναμης, με μέτρο αντιστρόφως ανάλογο της μάζας τους:

$$|\vec{\alpha}| \propto 1/m \qquad \textbf{(σταθερή ολική δύναμη)}$$

Θυμηθείτε ότι ορίσαμε ως αδράνεια την τάση των σωμάτων να διατηρούν αμετάβλητη την κινητική τους κατάσταση. Όταν σε ένα σώμα ασκείται μη μηδενική δύναμη, η κινητική του κατάσταση μεταβάλλεται. Η πιο πάνω σχέση επιτάχυνσης - μάζας δηλώνει ότι, **όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα ενός σώματος, τόσο πιο δύσκολο είναι να μεταβληθεί η κινητική του κατάσταση**. Για παράδειγμα, επιταχύνουμε πολύ λιγότερο ένα μεγάλο φορτηγό από μία μπάλα του τένις, δρώντας σε αυτά με μία συγκεκριμένη δύναμη. Το φορτηγό έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από τη μπάλα.

Άρα, προκύπτει το εξής συμπέρασμα:

Η **μάζα** αποτελεί **ποσοτικό μέτρο της αδράνειας** ενός σώματος.

3.13. Διατύπωση του Δευτέρου Νόμου του Νεύτωνα

Στα προηγούμενα παραδείγματα, η δύναμη από την ταινία ήταν ίση με τη συνισταμένη δύναμη στο σώμα, επειδή το βάρος του σώματος και η κατακόρυφη δύναμη από τον αέρα αλληλοαναιρούνταν. Εάν επαναλάβουμε το πείραμα, εξασκώντας διαφορετικές δυνάμεις στο σώμα, διαπιστώνουμε ότι η επιτάχυνση που αποκτά είναι πάντοτε ανάλογη και έχει την ίδια κατεύθυνση με τη **συνισταμένη** δύναμη που ασκείται σε αυτό.

Οι πιο πάνω σχέσεις και συμπεράσματα συνδυάζονται στον εξής νόμο:

Δεύτερος Νόμος: Η επιτάχυνση ενός σώματος είναι ανάλογη με τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό, και αντιστρόφως ανάλογη με τη μάζα του σώματος. Η επιτάχυνση έχει την ίδια κατεύθυνση με τη συνισταμένη δύναμη.

Μαθηματικά, ο δεύτερος νόμος εκφράζεται ως εξής:

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{m}\sum\vec{F}\,, \quad \sum\vec{F} = m\vec{\alpha}$$

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Εάν η συνισταμένη δύναμη σε ένα σώμα είναι ίση με μηδέν, το σώμα έχει μηδενική επιτάχυνση, δηλαδή κινείται με σταθερή ταχύτητα ή ηρεμεί. Αυτό το συμπέρασμα αντιστοιχεί στον πρώτο νόμο του Νεύτωνα.
- Εάν είναι γνωστή η συνισταμένη δύναμη σε ένα σώμα, μπορεί να προσδιορισθεί η επιτάχυνση με την οποία κινείται.
- Αντίστροφα, εάν είναι γνωστή η επιτάχυνση ενός σώματος, μπορεί να προσδιορισθεί η συνισταμένη δύναμη σε αυτό.

Για να εφαρμόσουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε ένα σώμα, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Αναλύουμε όλες τις δυνάμεις που δρουν στο σώμα σε συνιστώσες ως προς κατάλληλο σύστημα αξόνων.
- Υπολογίζουμε τις συνιστώσες της συνισταμένης δύναμης και τις συνδέουμε με τις συνιστώσες της επιτάχυνσης του σώματος, μέσω των σχέσεων:

$$\alpha_x = \frac{\sum F_x}{m}\,, \quad \alpha_y = \frac{\sum F_y}{m}$$

Προσδιορισμός άγνωστης μάζας από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα: Η σχέση αναλογίας μάζας - επιτάχυνσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό μίας άγνωστης μάζας. Έστω ότι ένα σώμα πρότυπης μάζας m_0 αποκτά επιτάχυνση μέτρου $|\vec{\alpha}_0|$ υπό τη δράση συγκεκριμένης δύναμης, και το σώμα άγνωστης μάζας αποκτά επιτάχυνση μέτρου $|\vec{\alpha}|$ υπό τη δράση της ίδιας δύναμης. Από το δεύτερο νόμο προκύπτει:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{|\vec{\alpha}_0|}{|\vec{\alpha}|} \Rightarrow m = \frac{|\vec{\alpha}_0|}{|\vec{\alpha}|}\,m_0$$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 3.13.1. - 3.13.2., σελ. 231.

3.14. Μονάδα Μέτρησης της Δύναμης

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα χρησιμοποιείται για να ορισθεί η μονάδα δύναμης. Στο σύστημα SI η μονάδα αυτή είναι το newton (N).

Ως **1 N ορίζεται** το μέτρο της δύναμης που απαιτείται να εξασκηθεί σε ένα σώμα μάζας 1 kg, για να αποκτήσει επιτάχυνση μέτρου 1 m/s^2.

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Ένα μήλο μάζας 100 g έχει βάρος περίπου ίσο με 1 N. Τυπικές τιμές δυνάμεων αναγράφονται στον Πίνακα 3-1.

3.15. Βάρος

Η ελκτική δύναμη, που ασκεί η Γη σε ένα σώμα, ονομάζεται **βάρος** του σώματος. Όπως αναφέραμε στην ενότητα της ελεύθερης πτώσης, διαπιστώνεται πειραματικά ότι όλα τα σώματα, ανεξαρτήτως μάζας, κινούνται υπό την επίδραση της βαρύτητας με την ίδια σταθερή επιτάχυνση, όταν η αντίσταση του αέρα μπορεί να αγνοηθεί. Η επιτάχυνση αυτή ονομάζεται επιτάχυνση της βαρύτητας, έχει κατακόρυφη διεύθυνση και φορά προς το κέντρο της Γης. Συμβολίζουμε με $\vec{g}$ την επιτάχυνση της βαρύτητας, και με g το μέτρο της.

Το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας μεταβάλλεται με την απόσταση από το κέντρο της Γης, και εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος. **Στα προβλήματα που μελετούμε, θεωρούμε ότι είναι σταθερό, και το θέτουμε ίσο με g = 9,81 m/s^2.**

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα προκύπτει ότι το βάρος ενός σώματος συνδέεται με τη μάζα του και την επιτάχυνση της βαρύτητας με τη σχέση:

$$\vec{B} = m\vec{g}$$

Διάκριση μεταξύ Μάζας και Βάρους. Το βάρος και η μάζα ενός σώματος είναι διαφορετικά φυσικά μεγέθη, και δεν πρέπει να συγχέονται.

- Το βάρος είναι μία μορφή **δύναμης**, και συνεπώς είναι **διανυσματικό** μέγεθος. Το μέτρο και η κατεύθυνση του βάρους ενός σώματος εξαρτώνται από τη θέση του σε σχέση με τη Γη. Σε πολύ μεγάλη απόσταση από τη Γη το βάρος ενός σώματος σχεδόν μηδενίζεται, επειδή μηδενίζεται η επιτάχυνση της βαρύτητας.

- Η μάζα είναι **μονόμετρο** μέγεθος και αποτελεί ιδιότητα του σώματος (μέτρο της αδράνειάς του).
- Εάν ένα σώμα βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση από τη Γη και έχει σχεδόν μηδενικό βάρος, συνεχίζει να παρουσιάζει αδράνεια, λόγω της μάζας του.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερώτηση 3.15.1., σελ. 231.

3.16. Στατική και Κινητική Τριβή

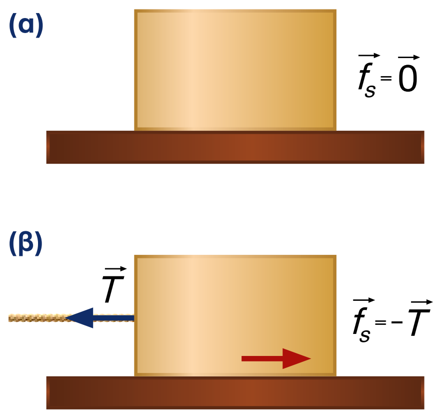
Όπως αναφέραμε προηγουμένως, οι δυνάμεις τριβής εκδηλώνονται μεταξύ δύο σωμάτων που εφάπτονται, **όταν κάποιο αίτιο τείνει να κινήσει ή κινεί το ένα σώμα ως προς το άλλο**, σε διεύθυνση παράλληλη προς τις επιφάνειες επαφής των δύο σωμάτων.

Στατική Τριβή

Στην Εικόνα 3-38(α) απεικονίζεται ένα κιβώτιο που εφάπτεται με ένα οριζόντιο δάπεδο. Επειδή κανένα αίτιο δεν τείνει να μετακινήσει το κιβώτιο παράλληλα προς το δάπεδο, το δάπεδο δεν ασκεί δύναμη τριβής στο κιβώτιο.

Στην Εικόνα 3-38(β), ένα σχοινί έλκει το κιβώτιο με οριζόντια δύναμη $\vec{T}$. Η δύναμη αυτή *τείνει να κινήσει* το κιβώτιο παράλληλα προς το δάπεδο, οπότε το δάπεδο ασκεί στο σώμα μια αντίθετη δύναμη **στατικής τριβής** $\vec{f_s}$. Η τριβή εξουδετερώνει τη δύναμη $\vec{T}$, και το κιβώτιο παραμένει ακίνητο.

Στην Εικόνα 3-38(γ), το σχοινί έλκει το κιβώτιο με μεγαλύτερη δύναμη $\vec{T}$. Η στατική τριβή από το δάπεδο αυξάνεται, και οι δύο δυνάμεις συνεχίζουν να εξουδετερώνονται. Το κιβώτιο παραμένει ακίνητο.

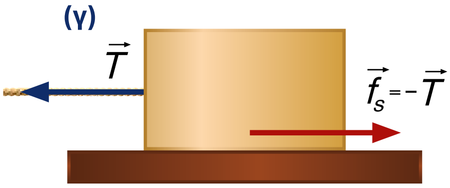


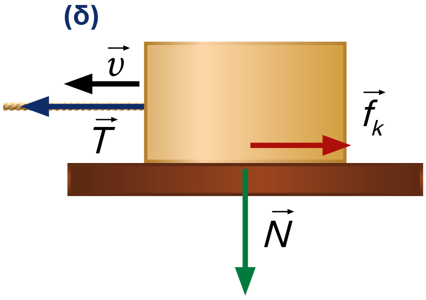
Εικόνα 3-38
(α) Όταν δεν υπάρχει αίτιο που να προκαλεί κίνηση του σώματος κατά μήκος του δαπέδου, δεν ασκείται δύναμη τριβής από το δάπεδο στο σώμα. **(β)** Το σχοινί έλκει το σώμα με μια δύναμη $\vec{T}$ η οποία τείνει να κινήσει το σώμα παράλληλα στην επιφάνεια του δαπέδου. Το δάπεδο ασκεί στο σώμα μια δύναμη **στατικής τριβής** $\vec{f_s}$ η οποία εξουδετερώνει τη δύναμη $\vec{T}$.

Εάν δύο σώματα που εφάπτονται τείνουν να κινηθούν το ένα ως προς το άλλο, αναπτύσσεται μεταξύ τους **στατική τριβή** ($\vec{f_s}$). Το μέτρο της στατικής τριβής δεν μπορεί να υπερβεί μία μέγιστη τιμή $f_{s,\mu\varepsilon\gamma}$, η οποία είναι ανάλογη με το μέτρο της κάθετης δύναμης $\vec{N}$ από το ένα σώμα στο άλλο:

$$|\vec{f_s}| \leq f_{s,\mu\varepsilon\gamma} = \mu_s |\vec{N}|$$

Στην πιο πάνω εξίσωση, $|\vec{f_s}|$ είναι το μέτρο της στατικής τριβής και $|\vec{N}|$ είναι το μέτρο της δύναμης $\vec{N}$. Η σταθερά μ_s ονομάζεται **συντελεστής στατικής τριβής**, και εξαρτάται από το υλικό κατασκευής και τον βαθμό στον οποίο είναι «ανώμαλες» οι επιφάνειες που έρχονται σε επαφή. Ο συντελεστής στατικής τριβής είναι καθαρός αριθμός (δεν έχει μονάδες).





Εικόνα 3-38
(γ) Εάν η τείνουσα δύναμη $\vec{T}$ αυξηθεί, η στατική τριβή αυξάνεται. Εάν η δύναμη $\vec{T}$ δεν υπερβεί μία μέγιστη τιμή, η στατική τριβή την εξουδετερώνει και το σώμα παραμένει ακίνητο. **(δ)** Όταν το σώμα κινείται ως προς το δάπεδο, υφίσταται μια δύναμη **κινητικής τριβής** $\vec{f_k}$ από το δάπεδο, η οποία είναι παράλληλη με την επιφάνεια επαφής σώματος - δαπέδου, και έχει αντίθετη φορά από την κίνηση του σώματος. Το μέτρο της κινητικής τριβής είναι ανάλογο με το μέτρο της κάθετης δύναμης $\vec{N}$ από το σώμα στο δάπεδο.

Κινητική Τριβή

Στην Εικόνα 3-38(δ), η δύναμη $\vec{T}$ του σχοινιού έχει μεγαλύτερο μέτρο από τη μέγιστη τιμή στατικής τριβής που μπορεί να ασκήσει το δάπεδο, οπότε το σώμα αρχίζει να κινείται. Σε αυτή την περίπτωση, το δάπεδο ασκεί στο σώμα μια δύναμη **κινητικής τριβής** $\vec{f_k}$.

Εάν τα σώματα που εφάπτονται κινούνται το ένα ως προς το άλλο, η τριβή ονομάζεται **κινητική** ($\vec{f_k}$). Η κινητική τριβή έχει μέτρο ανάλογο με το μέτρο της κάθετης δύναμης $\vec{N}$ που ασκείται από το ένα σώμα στο άλλο:

$$\left|\vec{f_k}\right| = \mu_k \left|\vec{N}\right|$$

Η σταθερά μ_k ονομάζεται **συντελεστής κινητικής τριβής**, και εξαρτάται από το υλικό κατασκευής και τον βαθμό στον οποίο είναι «ανώμαλες» οι επιφάνειες που έρχονται σε επαφή. Ο συντελεστής κινητικής τριβής δεν έχει μονάδες.

Το μέτρο της κινητικής τριβής είναι συνήθως λίγο μικρότερο από τη μέγιστη τιμή στατικής τριβής, που μπορεί να ασκήσει το ένα σώμα στο άλλο:

$$\left|\vec{f_k}\right| \leq f_{s,\mu\varepsilon\gamma}$$

Ο Πίνακας 3-2 περιέχει τις τιμές συντελεστών στατικής και κινητικής τριβής για διάφορους συνδυασμούς υλικών. Κάποιοι συνδυασμοί μετάλλων μπορεί να έχουν συντελεστές τριβής μεγαλύτερους από τη μονάδα.

Συνδυασμός Σωμάτων	Συντελεστής Στατικής Τριβής	Συντελεστής Κινητικής Τριβής
‘Αργυρος σε άργυρο	1,4	
Πλατίνα σε πλατίνα	1,2	
Χαλκός σε χυτοσίδηρο	1,05	0,29
Καουτσούκ σε σκυρόδεμα (στεγνό)	1,0	0,8
Καουτσούκ σε σκυρόδεμα (βρεγμένο)	0,30	0,25
Γυαλί σε γυαλί	0,94	0,4
Πλεξιγκλάς σε πλεξιγκλάς	0,80	
Ατσάλι σε ατσάλι	0,74	0.57
Τούβλο σε ξύλο	0,6	
Ξύλο σε ξύλο	0,25 - 0,5	0,2
Κερωμένο ξύλο σε υγρό χιόνι	0,14	0,1
Τεφλόν σε τεφλόν	0,04	0,04
Ατσάλι σε πάγο		0,01
Ανθρώπινες αρθρώσεις	0,01	0,003

Πίνακας 3-2
Προσεγγιστικοί συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής για διάφορους συνδυασμούς υλικών.

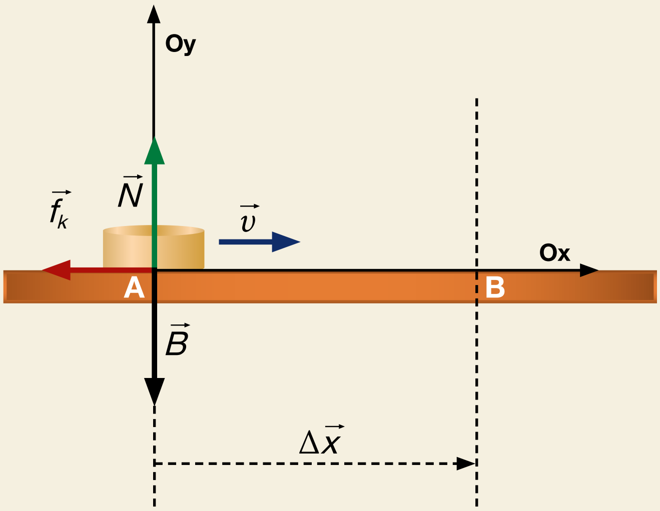
Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερώτηση 3.16.1., σελ. 232.

3.17. Εφαρμογές του Δεύτερου Νόμου

Παράδειγμα 1
Σώμα που σταματά σε Αεροτράπεζα

Ένας δίσκος μάζας m κινείται με οριζόντια ταχύτητα $\vec{u}$ επάνω σε οριζόντια αεροτράπεζα (Εικόνα 3-39). Σε κάποια στιγμή διακόπτεται η ροή του αέρα, οπότε ο δίσκος δέχεται μια επιπρόσθετη οριζόντια δύναμη κινητικής τριβής $\vec{f}_k$. Θεωρούμε ότι αυτή η δύναμη είναι συνεχώς σταθερή. Από τη στιγμή που σταματά η λειτουργία της αεροτράπεζας, ο δίσκος μετατοπίζεται κατά $\Delta\vec{x}$ μέχρι να ακινητοποιηθεί. Θα υπολογίσουμε την επιτάχυνση του δίσκου και την κινητική τριβή.

Για τη μελέτη της κίνησης χρησιμοποιούμε το σύστημα αξόνων της Εικόνας 3-39. Κατά την κατακόρυφη διεύθυνση Oy δρουν στο δίσκο το βάρος του $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από την αεροτράπεζα.



Εικόνα 3-39
Ο δίσκος κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ πάνω σε οριζόντια αεροτράπεζα. Στο σημείο Α διακόπτεται η ροή του αέρα, οπότε ο δίσκος αρχίζει να δέχεται την οριζόντια κινητική τριβή $\vec{f}_k$. Ο δίσκος ακινητοποιείται στο σημείο Β.

Επειδή ο δίσκος έχει συνεχώς μηδενική κατακόρυφη ταχύτητα και επιτάχυνση, οι δύο δυνάμεις είναι αντίθετες:

$$\vec{\alpha}_y = \vec{0} \Rightarrow \vec{N} + \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N} = -\vec{B}$$

Στην οριζόντια διεύθυνση Ox, ο δίσκος δέχεται τη δύναμη κινητικής τριβής $\vec{f}_k$. Η επιτάχυνση $\vec{\alpha}_x$ που προκαλεί η δύναμη $\vec{f}_k$ υπολογίζεται από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$\vec{\alpha}_x = \frac{1}{m}\vec{f}_k$$

Επειδή η δύναμη $\vec{f}_k$ είναι σταθερή, η επιτάχυνση $\vec{\alpha}_x$ είναι επίσης σταθερή. Συνεπώς, ο δίσκος εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση κατά την οριζόντια διεύθυνση. Από τη σχέση ταχύτητας - μετατόπισης (Κεφάλαιο 2), προκύπτει:

$$\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 = 2\alpha_x \Delta x \Rightarrow \alpha_x = -\frac{\upsilon^2}{2\Delta x}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις τιμές $\upsilon_{\alpha\rho\chi} = \upsilon$, $\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} = 0$. Επειδή η μετατόπιση είναι θετική ($\Delta x > 0$) το αρνητικό πρόσημο στην πιο πάνω σχέση δηλώνει ότι η επιτάχυνση είναι αρνητική ($\alpha_x < 0$). Άρα, το διάνυσμα $\vec{\alpha}_x$ έχει αρνητική κατεύθυνση.

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις, προσδιορίζουμε την κινητική τριβή:

$$f_k = m\alpha_x = -\frac{m\upsilon^2}{2\Delta x}$$

Ομοίως, το διάνυσμα $\vec{f}_k$ είναι προσανατολισμένο κατά την αρνητική κατεύθυνση του Ox.

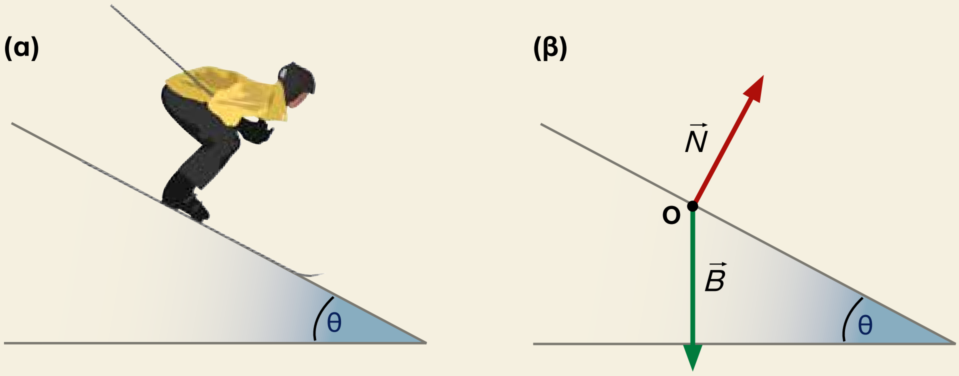
Αριθμητική Εφαρμογή: Έστω ότι ο δίσκος έχει μάζα 275 g και αρχική ταχύτητα 3,5 m/s, και σταματά μετά από 109 cm. Αντικαθιστούμε στο πιο πάνω αποτέλεσμα και βρίσκουμε:

$$f_k = -\frac{(0{,}275\ \text{kg}) \times (3{,}5\ \text{m/s})^2}{2 \times (1{,}09\ \text{m})} = -1{,}5\ \text{N}$$

Παράδειγμα 2

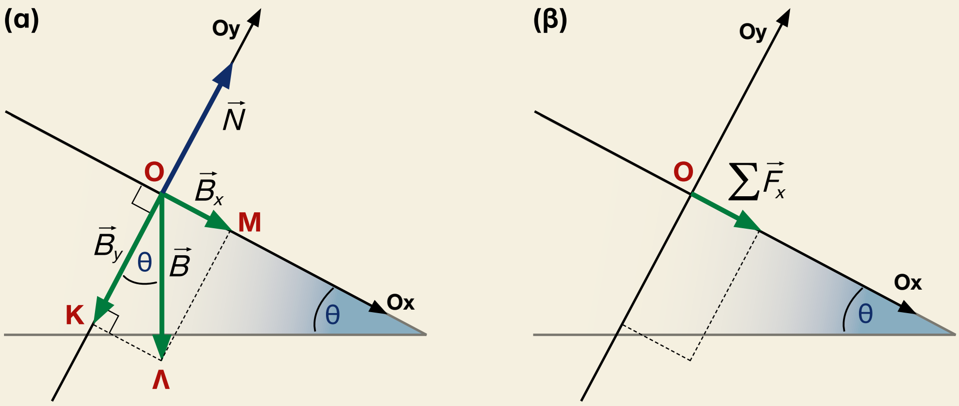
Σκιέρ που επιταχύνεται σε Κεκλιμένη Επίπεδη Πίστα

Η Εικόνα 3-40 απεικονίζει έναν σκιέρ μάζας m ο οποίος κατεβαίνει σε μια επίπεδη χιονισμένη πίστα, που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση. Στον σκιέρ εφαρμόζεται το βάρος του $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από την πίστα. Θεωρούμε ότι η κινητική τριβή από την πίστα στον σκιέρ είναι αμελητέα.



Εικόνα 3-40
(α) Σκιέρ που κατεβαίνει σε επίπεδη χιονισμένη πίστα υπό την επίδραση του βάρους του $\vec{B}$ και μιας κάθετης δύναμης $\vec{N}$ από την πίστα. **(β)** Αναπαράσταση **υλικού σημείου** για τον σκιέρ.

Στην Εικόνα 3-40(β) αναπαριστούμε τον σκιέρ στην προσέγγιση υλικού σημείου, μαζί με τις δυνάμεις $\vec{B}$ και $\vec{N}$. Για να προσδιορίσουμε την επιτάχυνση του σκιέρ, αναλύουμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες παράλληλα και κάθετα στο κεκλιμένο επίπεδο, όπως σε προηγούμενα παραδείγματα (Εικόνα 3-41(α)).



Εικόνα 3-41
(α) Ανάλυση των δυνάμεων, που ασκούνται στον σκιέρ, σε συνιστώσες παράλληλα (άξονας Ox) και κάθετα (άξονας Oy) στο κεκλιμένο επίπεδο. **(β)** Συνιστώσες της συνισταμένης δύναμης στον σκιέρ.

Όπως δείξαμε σε προηγούμενο παράδειγμα, οι συνιστώσες του βάρους είναι $B_x = mg\,ημθ$, $B_y = -mg\,συνθ$ όπου mg είναι το **μέτρο** του βάρους $\vec{B}$. Επίσης, ισχύει $\vec{N}_y = \vec{N}$ επειδή η δύναμη $\vec{N}$ είναι ήδη παράλληλη με τον άξονα Oy.

Ο σκιέρ κινείται με επιτάχυνση $\vec{\alpha}_x$ κατά τη διεύθυνση Οx. Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε αυτή τη διεύθυνση, προκύπτει:

$$\vec{\alpha}_x = \frac{1}{m}\vec{B}_x \Rightarrow \alpha_x = \frac{B_x}{m} = g\eta\mu\theta$$

Η επιτάχυνση στον άξονα Oy είναι μηδενική. Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο σε αυτή τη διεύθυνση, προκύπτει:

$$\vec{\alpha}_y = \vec{0} \Rightarrow \frac{1}{m}(\vec{B}_y + \vec{N}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{N} = -\vec{B}_y \Rightarrow N = -B_y = mg\sigma\upsilon\nu\theta$$

Οι συνιστώσες της συνισταμένης δύναμης, $\sum\vec{F}$, απεικονίζονται στην Εικόνα 3-31(β). Η συνιστώσα κατά μήκος του Οx ισούται με B_x και αυτή κατά μήκος του Oy ισούται με μηδέν.

Αριθμητική Εφαρμογή: Ο σκιέρ έχει μάζα 65,5 kg και η πίστα σχηματίζει γωνία $\theta = 25^o$ με την οριζόντια διεύθυνση. Η επιτάχυνση του σκιέρ κατά τη διεύθυνση της πίστας είναι:

$$\alpha_x = (9{,}81\ m/s^2)\ \eta\mu 25^o = (9{,}81\ m/s^2)\ x\ 0{,}4226 = 4{,}15\ m/s^2$$

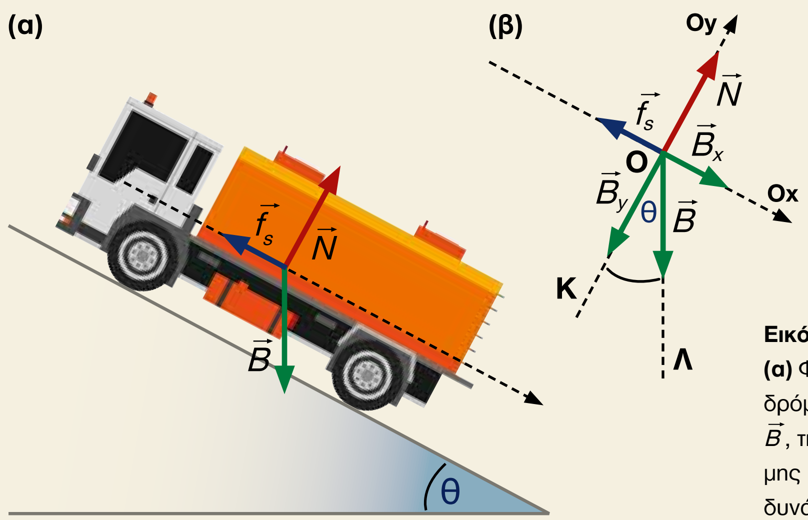
Η κάθετη δύναμη από την πίστα στον σκιέρ είναι:

$$N = (65{,}5\ kg)\ x\ (9{,}81\ m/s^2)\ x\ 0{,}9063 = 582\ N$$

Παράδειγμα 3

Υπολογισμός του Συντελεστή Στατικής Τριβής.

Η Εικόνα 3-42 απεικονίζει ένα φορτηγό μάζας m που σταθμεύει σε ένα μη λείο ανηφορικό δρόμο. Στο φορτηγό ασκείται το βάρος του, η κάθετη δύναμη από το έδαφος και μία δύναμη στατικής τριβής $\vec{f}_s$. Για να μην αρχίσει να ολισθαίνει το φορτηγό, πρέπει η γωνία του δρόμου να μην υπερβαίνει κάποια οριακή τιμή $\theta_{o\rho}$. Θα προσδιορίσουμε τον συντελεστή στατικής τριβής σαν συνάρτηση της οριακής γωνίας.



Εικόνα 3-42
(α) Φορτηγό που ισορροπεί σε ανηφορικό δρόμο υπό την επίδραση του βάρους του $\vec{B}$, της κάθετης δύναμης $\vec{N}$ και της δύναμης στατικής τριβής $\vec{f}_s$. **(β)** Ανάλυση των δυνάμεων σε συνιστώσες.

Οι τιμές των συνιστωσών προκύπτουν όπως στο παράδειγμα σώματος που ισορροπεί σε μη λείο κεκλιμένο επίπεδο:

$$\text{Άξονας Ox: } \vec{f_s} = -\vec{B_x} \Rightarrow f_s = -mg\eta\mu\theta$$
$$\text{Άξονας Oy: } \vec{N} = -\vec{B_y} \Rightarrow N = +mg\sigma\upsilon\nu\theta$$

Το μέτρο $|\vec{f_s}|$ της στατικής τριβής μεγαλώνει με τη γωνία θ και αποκτά τη μέγιστη τιμή του όταν $\theta = \theta_{o\rho}$:

$$f_{s,\mu\varepsilon\gamma} = mg\eta\mu\theta_{o\rho} \Rightarrow \mu_s|\vec{N}| = mg\eta\mu\theta_{o\rho} \Rightarrow \mu_s\, mg\sigma\upsilon\nu\theta_{o\rho} = mg\eta\mu\theta_{o\rho} \Rightarrow \mu_s = \varepsilon\varphi\theta_{o\rho}$$

Παρατηρούμε ότι η ορική γωνία μεγαλώνει με τον συντελεστή τριβής.

Αριθμητική Εφαρμογή: Στον Πίνακα 3-2 περιλαμβάνουμε τιμές του συντελεστή στατικής τριβής για διάφορους συνδυασμούς υλικών. Για στεγνό δρόμο βρίσκουμε:

$$\varepsilon\varphi\theta_{o\rho} = 1{,}0 \Rightarrow \theta_{o\rho} = 45^{o}$$

Εάν ο δρόμος είναι βρεγμένος, η οριακή γωνία είναι σημαντικά μικρότερη:

$$\varepsilon\varphi\theta_{o\rho} = 0{,}30 \Rightarrow \theta_{o\rho} = 17^{o}$$

Ερώτηση

Εξαρτάται η οριακή γωνία από τη μάζα του φορτηγού;

Ερωτήσεις Κατανόησης

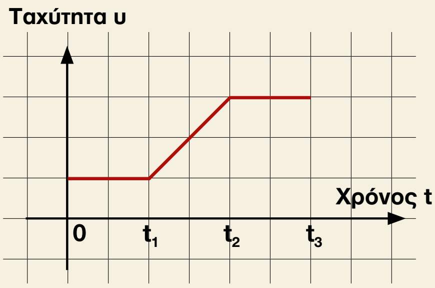
Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με την ένδειξη Σωστό / Λάθος.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Εάν δύο σώματα κινούνται με ίσες επιταχύνσεις, συμπεραίνουμε ότι στα σώματα δρουν ίσες συνισταμένες δυνάμεις.	
2	Το μέτρο της επιτάχυνσης ενός σώματος είναι αντιστρόφως ανάλογο με τη μάζα του.	
3	Εάν διπλασιαστεί το μέτρο της συνισταμένης δύναμης σε ένα σώμα, διπλασιάζεται η επιτάχυνσή του.	
4	Όλα τα υλικά σώματα έχουν αδράνεια.	
5	Ένα υλικό σώμα, που βρίσκεται στο διάστημα και δεν υφίσταται βαρυτικές δυνάμεις, δεν έχει αδράνεια.	
6	Η αδράνεια ενός σώματος στην επιφάνεια της Σελήνης είναι ίδια με την αδράνεια του ίδιου σώματος στην επιφάνεια της Γής.	
7	Η επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί ελεύθερη πτώση είναι ανάλογη με το βάρος του.	

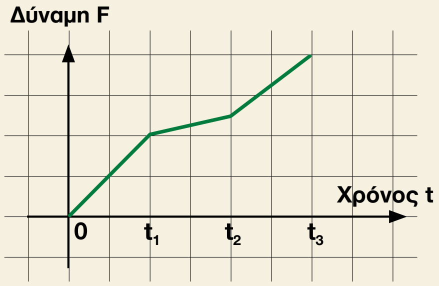
8	Η επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί ελεύθερη πτώση είναι αντιστρόφως ανάλογη με τη μάζα του.	
9	Εάν ένα σώμα βρίσκεται πολύ μακριά από τη Γη και έχει μηδενικό βάρος, μηδενίζεται και η μάζα του.	
10	Σε μία κατακόρυφη βολή, στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του βλήματος μηδενίζεται: α. Η ταχύτητα του βλήματος.	
	β. Η επιτάχυνση του βλήματος.	
11	Το μέτρο της στατικής τριβής, που ασκείται σε ένα σώμα, είναι ανάλογο με το μέτρο της κάθετης δύναμης από το σώμα στην επιφάνεια.	
12	Το μέτρο της κινητικής τριβής, που ασκείται σε ένα σώμα, είναι ανάλογο με το μέτρο της κάθετης δύναμης από το σώμα στην επιφάνεια.	

Ασκήσεις

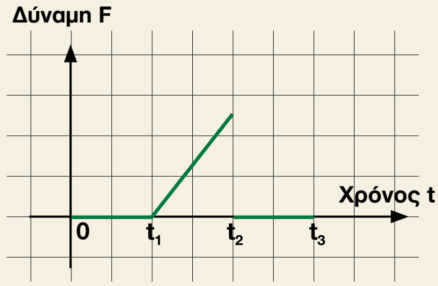
1 Η διπλανή γραφική παράσταση απεικονίζει την ταχύτητα ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου.
Ποια από τις γραφικές παραστάσεις (α) - (δ) αντιστοιχεί στο διάγραμμα δύναμης - χρόνου του σώματος;



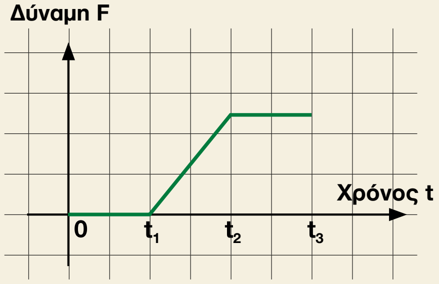
(α)



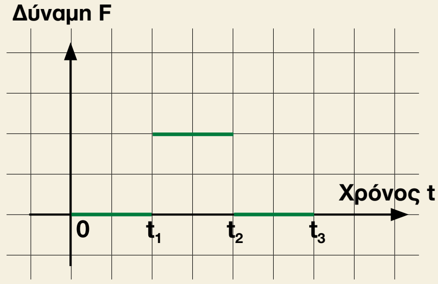
(β)



(γ)



(δ)



❷ Ένα αυτοκίνητο μάζας 1000 kg ξεκινά από ηρεμία και αποκτά οριζόντια ταχύτητα 108 km/h μετά από χρονικό διάστημα 10 s. Να υποθέσετε ότι η κίνηση του αυτοκινήτου είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου και το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που προσδίδει στο αυτοκίνητο αυτή την επιτάχυνση.

❸ Το μεγαλύτερο πλοίο που κατασκευάστηκε ποτέ ήταν το δεξαμενόπλοιο Seawise Giant. Το πλοίο αυτό είχε μάζα 657 000 τόνους και μήκος 458 m και δεν χωρούσε σε κανένα λιμάνι. Ένα τέτοιο πλοίο έχει τεράστια αδράνεια λόγω της μάζας του: Ξεκινώντας από τη μέγιστη ταχύτητα πλεύσης του (30 km/h) το Seawise Giant χρειαζόταν να διανύσει απόσταση 9 km για να σταματήσει.

Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του Seawise Giant, τη συνισταμένη οριζόντια δύναμη που ασκούνταν επάνω του, και το χρονικό διάστημα που χρειαζόταν για να σταματήσει. Θεωρείστε ότι η δύναμη αυτή ήταν σταθερή.

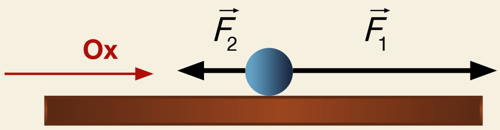
❹ Στο σώμα του διπλανού σχήματος, μάζας 2 kg, ασκούνται οι συγγραμμικές δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με μέτρα $|\vec{F}_1| = 6$ N και $|\vec{F}_2| = 2$ N. Να προσδιορίσετε την κατεύθυνση και να υπολογίσετε το μέτρο της άγνωστης δύναμης $\vec{X}$ που πρέπει να εφαρμοσθεί στο σώμα, εάν αυτό:

Α. ισορροπεί.

Β. κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα +3 m/s.

Γ. κινείται με οριζόντια επιτάχυνση +2 m/s^2.

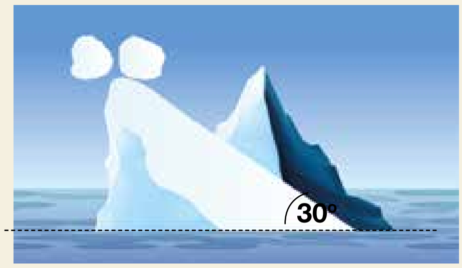
Δ. κινείται με οριζόντια επιτάχυνση –4 m/s^2.



❺ Δύο κομμάτια πάγου αποκολλώνται ταυτόχρονα και από το ίδιο ύψος ως προς μία οριζόντια πεδιάδα, με μηδενική αρχική ταχύτητα. Το πρώτο κομμάτι εκτελεί ελεύθερη πτώση, και το δεύτερο κομμάτι ολισθαίνει κατά μήκος μιας κεκλιμένης πλαγιάς χωρίς τριβές.

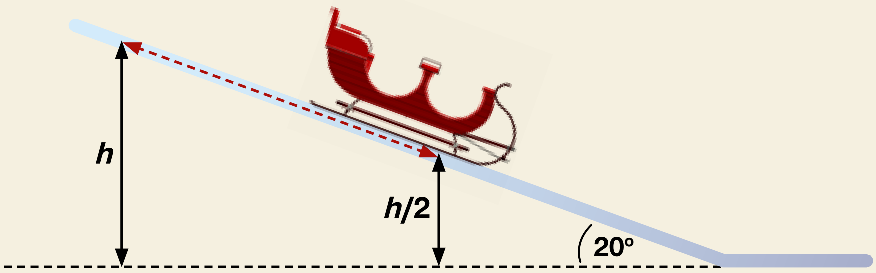
Α. Ποιο από τα δύο κομμάτια πάγου θα φτάσει πρώτο στην οριζόντια πεδιάδα και γιατί;

Β. Εάν το κεκλιμένο επίπεδο σχηματίζει γωνία $\theta = 30^\circ$ με την οριζόντια διεύθυνση, να βρεθεί ο λόγος των χρονικών διαστημάτων που διαρκούν οι κινήσεις των κομματιών.



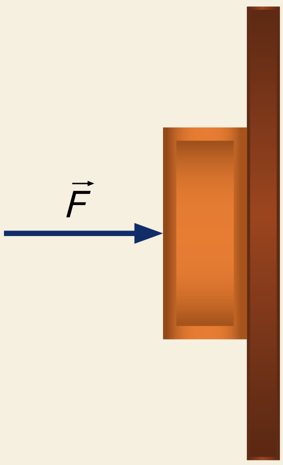
❻ Στο ανοικτό τουρνουά τένις του Μονάχου, το 2010, ο Μάρκος Παγδατής πραγματοποίησε το πιο γρήγορο σέρβις της διοργάνωσης. Η μπάλα έφυγε από τον Παγδατή με ταχύτητα μέτρου 225 km/h, έφτασε στον αντίπαλο παίκτη με ταχύτητα μέτρου 200 km/h, και αυτός την απέκρουσε προσδίδοντάς της ταχύτητα με μέτρο 160 km/h και αντίθετη κατεύθυνση. Η χρονική διάρκεια της επαφής της μπάλας με τη ρακέτα, κατά τα κτυπήματα των δύο παικτών, ήταν 0,1 s και 0,2 s, αντίστοιχα. Εάν η μάζα μιας μπάλας τένις ισούται με 0,1 kg, να υπολογίσετε τη μέση δύναμη που ασκήθηκε στην μπάλα από τους δύο παίκτες.

7 Ένα έλκηθρο ξεκινά από την ηρεμία κατά μήκος μιας χιονισμένης επίπεδης πλαγιάς, η οποία σχηματίζει γωνία $\theta = 20^o$ με την οριζόντια πεδιάδα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Το έλκηθρο ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω στην πλαγιά. Το αρχικό ύψος από την οριζόντια πεδιάδα είναι ίσο με h. Να υπολογίσετε συναρτήσει του h και της επιτάχυνσης της βαρύτητας, τον χρόνο που χρειάζεται για να μειωθεί το ύψος σε $h/2$.

8 Ένα τούβλο μάζας m ισορροπεί σε επαφή με έναν κατακόρυφο ξύλινο τοίχο. Στο τούβλο ασκείται η κάθετη προς την επιφάνεια του τοίχου δύναμη $\vec{F}$ όπως στο σχήμα.

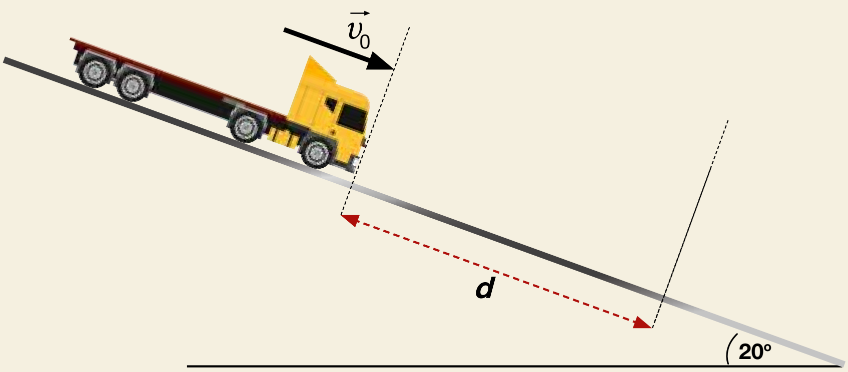


Α. Ποιες άλλες δυνάμεις πρέπει να ασκούνται στο τούβλο για να ισορροπεί; Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις και να εξηγήσετε την προέλευσή τους.

Β. Για να ισορροπεί το τούβλο, η δύναμη $\vec{F}$ πρέπει να έχει ένα **ελάχιστο** μέτρο. Να βρείτε μία σχέση ανάμεσα στο μέτρο αυτό, τη μάζα m, την επιτάχυνση της βαρύτητας, και τον συντελεστή στατικής τριβής μ_s μεταξύ του τούβλου και του τοίχου.

Γ. Εάν το τούβλο έχει μάζα m = 550 g, να υπολογίσετε το ελάχιστο μέτρο της $\vec{F}$.

9 Ενα φορτηγό της οδικής βοήθειας, με συνολική μάζα m, εισέρχεται σε απότομο κατηφορικό δρόμο και ο οδηγός πατά απότομα τα φρένα για να το σταματήσει.



Οι τροχοί του φορτηγού σταματούν ακαριαία να στρέφονται, οπότε δρουν σε αυτούς δυνάμεις κινητικής τριβής από το δρόμο. Στο σημείο που αρχίζουν να επενεργούν τα φρένα, το φορτηγό έχει ταχύτητα μέτρου υ_0. Το φορτηγό ακινητοποιείται αφού διανύσει απόσταση *d*.

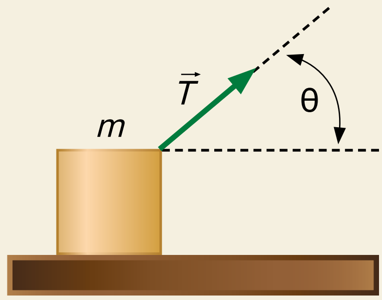
Να εκφράσετε την απόσταση *d* σαν συνάρτηση της μάζας *m* του φορτηγού, του συντελεστή κινητικής τριβής μ_k , της ταχύτητας υ_0 , και της επιτάχυνσης της βαρύτητας.

Να επιλέξετε κατάλληλη τιμή του συντελεστή κινητικής τριβής από τον Πίνακα 3-2, και να υπολογίσετε την απόσταση *d* για **στεγνό** δρόμο, εάν η συνολική μάζα $m = 2500$ kg και η αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 30$ m/s.

10 Ένας μικρός κύβος μάζας *m* είναι τοποθετημένος σε μια *λεία*, οριζόντια επιφάνεια. Ο κύβος έλκεται με δύναμη μέτρου *T* από ένα σχοινί που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση.

Α. Να προσδιορίσετε την επιτάχυνση του κύβου και την κάθετη δύναμη από την επιφάνεια συναρτήσει των μεγεθών *m*, *T*, *g* και θ.

Β. Φαντασθείτε ότι η γωνία θ του σχοινιού με την οριζόντια διεύθυνση μεταβάλλεται, αλλά η τείνουσα δύναμη διατηρεί σταθερό μέτρο *T*, το οποίο είναι **μεγαλύτερο από το βάρος του κύβου**. Για ποια τιμή της γωνίας του σχοινιού ο κύβος χάνει την επαφή του με την επιφάνεια;



$|\vec{T}| = T =$ σταθερό

11 Μια διαστημική κάψουλα μάζας 100 kg, η οποία αρχικά ηρεμεί, επιταχύνεται με σταθερή δύναμη μέτρου 10 N για 100 χρόνια. Να χρησιμοποιήσετε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για να υπολογίσετε την ταχύτητά της και να σχολιάστε το αποτέλεσμα σας. Γιατί δεν χρησιμοποιείται αυτή η μέθοδος για πραγματοποίηση διαστρικών ταξιδιών; (Υπόδειξη: *Κανένα υλικό σώμα δεν μπορεί να αποκτήσει ταχύτητα ίση ή μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός στο κενό*).

3.18. Ο Τρίτος Νόμος του Νεύτωνα

Στην αρχή του Κεφαλαίου 3, αναφέραμε ότι δύο σώματα που αλληλεπιδρούν, ασκούν δυνάμεις το ένα στο άλλο. Όταν ένα σώμα επιδρά σε ένα άλλο σώμα ασκώντας του μια δύναμη (δράση), το δεύτερο σώμα επιδρά επίσης στο πρώτο και του ασκεί δύναμη (αντίδραση): στη φύση οι δυνάμεις εμφανίζονται πάντα κατά **ζεύγη**. Πειραματικά αποδεικνύεται ότι οι δυνάμεις αυτές είναι αντίθετες μεταξύ τους. Η διαπίστωση αυτή αποτελεί τον **τρίτο νόμο του Νεύτωνα**.

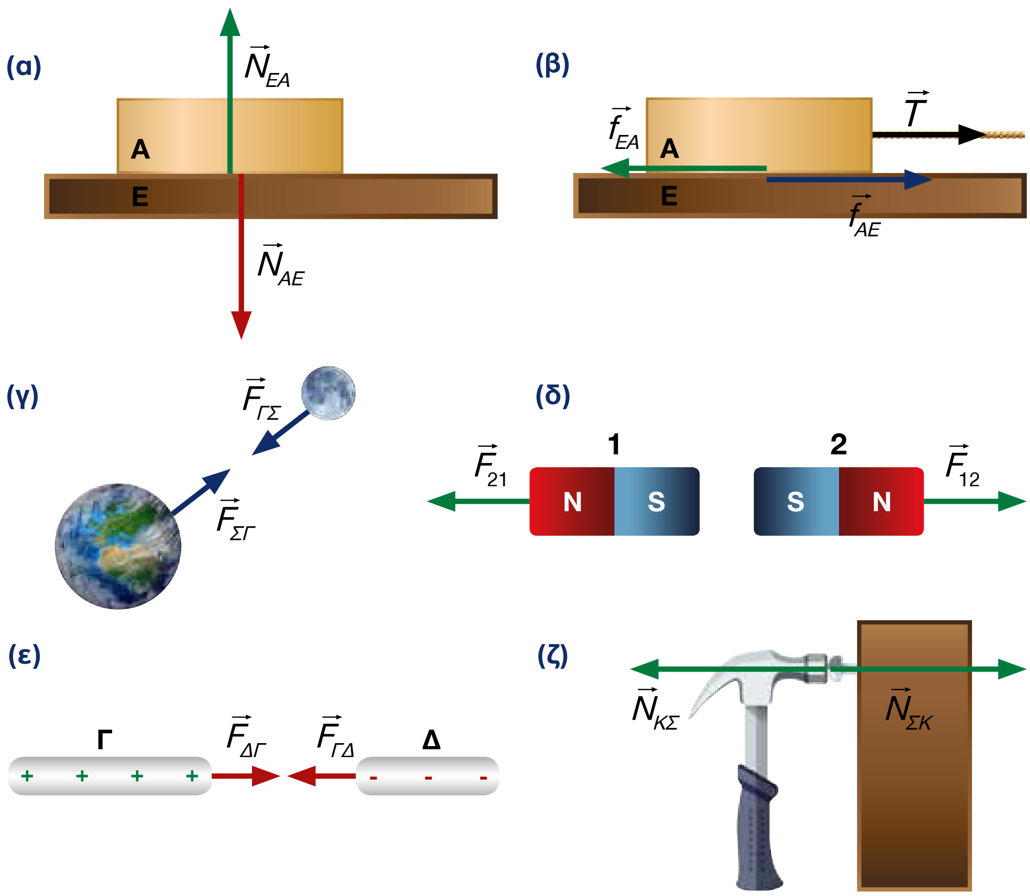
Τρίτος Νόμος του Νεύτωνα: Όταν ένα σώμα Α ασκεί μια δύναμη $\vec{F}_{AB}$ σε ένα σώμα Β, το σώμα Β ασκεί στο πρώτο σώμα δύναμη $\vec{F}_{BA}$. Οι δυνάμεις αυτές ονομάζονται ζεύγος δράσης - αντίδρασης και είναι αντίθετες μεταξύ τους, δηλαδή έχουν ίσα μέτρα, την ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

3.19. Παραδείγματα Δράσης - Αντίδρασης

Η Εικόνα 3-43 απεικονίζει μερικά παραδείγματα ζευγών δράσης - αντίδρασης.

Ένα σώμα πάνω σε ένα τραπέζι δέχεται μια κάθετη δύναμη $\vec{N}_{EA}$ από την επιφάνεια του τραπεζιού, και ασκεί στο τραπέζι μια αντίθετη δύναμη $\vec{N}_{EA} = -\vec{N}_{AE}$ (σχήμα α). Έστω ότι στο σώμα εφαρμόζεται μια οριζόντια δύναμη $\vec{T}$, που τείνει να το μετακινήσει. Εάν η επιφάνεια του τραπεζιού δεν είναι λεία, ασκεί στο σώμα μια δύναμη στατικής ή κινητικής τριβής $\vec{f}_{EA}$, ανάλογα με το εάν το σώμα παραμένει ακίνητο ή αρχίζει να κινείται. Και στις δύο περιπτώσεις, το σώμα θα ασκήσει μια αντίθετη δύναμη $\vec{f}_{AE} = -\vec{f}_{EA}$ στην επιφάνεια (σχήμα β).



Εικόνα 3-43
Παραδείγματα ζευγών δυνάμεων δράσης - αντίδρασης. **(α)** Κάθετες δυνάμεις μεταξύ σώματος και επιφάνειας. **(β)** Δυνάμεις τριβής μεταξύ σωμάτων σε σχετική κίνηση. **(γ)** Βαρυτικές έλξεις μεταξύ Γης και Σελήνης. **(δ)** Δυνάμεις μεταξύ μαγνητών. Παραδείγματα ζευγών δυνάμεων δράσης - αντίδρασης. **(ε)** Ηλεκτρικές δυνάμεις μεταξύ δύο φορτισμένων ράβδων. **(ζ)** Κάθετες δυνάμεις ανάμεσα σε σφυρί και καρφί.

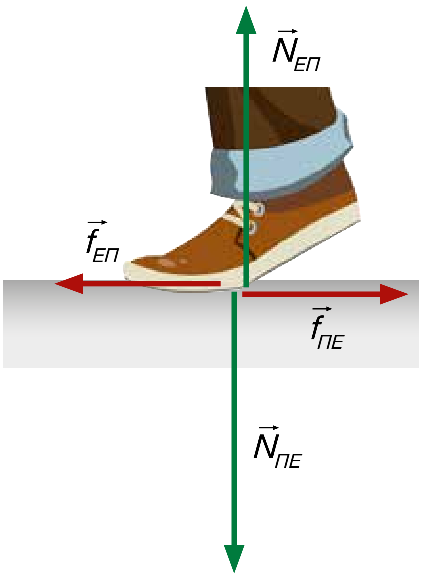
Η Γη ασκεί ελκτική βαρυτική δύναμη στη Σελήνη και η Σελήνη ασκεί αντίθετη ελκτική δύναμη στη Γη (σχήμα γ). Ομοίως, εξ΄αιτίας της βαρύτητας κάθε σώμα ασκεί στη Γη δύναμη αντίθετη από τη δύναμη του βάρους του. Δύο μαγνήτες ή δύο ηλεκτρικά φορτισμένα σώματα ασκούν αντίθετες δυνάμεις το ένα στο άλλο (σχήματα δ και ε). Όταν ένα σφυρί ασκεί δύναμη σε ένα καρφί, δέχεται αντίθετη δύναμη από αυτό (σχήμα ζ).

Για να βαδίσουμε χρησιμοποιούμε τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα (Εικόνα 3-44): Ακουμπάμε το πέλμα μας στο έδαφος και προσπαθούμε να το μετακινήσουμε παράλληλα με την επιφάνεια του εδάφους. Το πέλμα μας ασκεί δύναμη στατικής τριβής $\vec{f}_{ΠΕ}$ στο έδαφος, με φορά αντίθετη από αυτή της επιθυμητής κίνησης. Το έδαφος ασκεί αντίθετη δύναμη $\vec{f}_{ΕΠ}$ στο πέλμα μας, η οποία μας κινεί κατά την επιθυμητή κατεύθυνση.

Επιπρόσθετα, το πέλμα ασκεί στο έδαφος την κάθετη δύναμη $\vec{N}_{ΠΕ}$ και δέχεται την αντίθετη δύναμη $\vec{N}_{ΕΠ}$ (ζεύγος δράσης - αντίδρασης).

Όταν το έδαφος είναι λείο (π.χ. μία παγωμένη επιφάνεια), δεν μπορούμε να ασκήσουμε επαρκή δύναμη τριβής στην επιφάνειά του, οπότε δεν δεχόμαστε επαρκή δύναμη αντίδρασης και έχουμε δυσκολία στο βάδισμα.

Εικόνα 3-44
Στο βάδισμα προς τα εμπρός, το πέλμα ασκεί δύναμη $\vec{f}_{ΠΕ}$ παράλληλα προς το έδαφος και αντίθετα προς τη φορά της κίνησης. Το έδαφος ασκεί αντίθετη δύναμη αντίδρασης $\vec{f}_{ΕΠ}$ στο πόδι μας, η οποία το ωθεί προς τη φορά της κίνησης.



Ερώτηση
Να εξηγήσετε πώς επιταχύνεται ένας κολυμβητής.

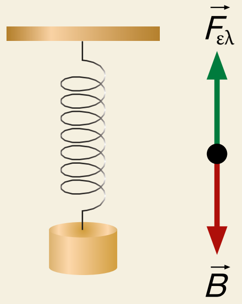
Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 3.19.1. - 3.19.3., σελ. 231.

3.20. Διάγραμμα Ελεύθερου Σώματος

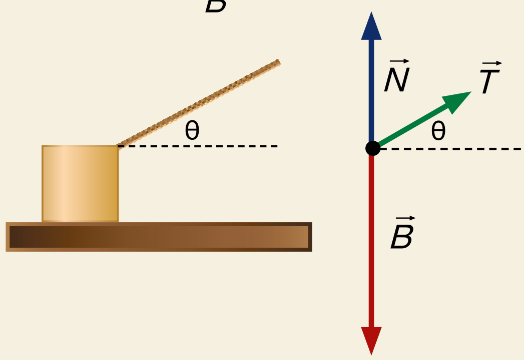
Για να μελετήσουμε την επίδραση μίας ή περισσοτέρων δυνάμεων σε ένα σώμα, μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα ξεχωριστό διάγραμμα, στο οποίο περιλαμβάνουμε (σε πιστή αναπαράσταση ή στο μοντέλο υλικού σημείου) το σώμα μόνο του, χωρίς το περιβάλλον του, όπως και *όλες τις δυνάμεις που δρουν σε αυτό.* Ένα τέτοιο διάγραμμα ονομάζεται **διάγραμμα ελεύθερου σώματος**.

Οι δυνάμεις ενός ζεύγους δράσης - αντίδρασης **δεν ασκούνται στο ίδιο σώμα**. Στο διάγραμμα ελεύθερου σώματος περιλαμβάνουμε μόνο *τις δυνάμεις που ασκούνται στο υπό μελέτη σώμα*. Παραδείγματα τέτοιων διαγραμμάτων δίνονται πιο κάτω, στην προσέγγιση υλικού σημείου.

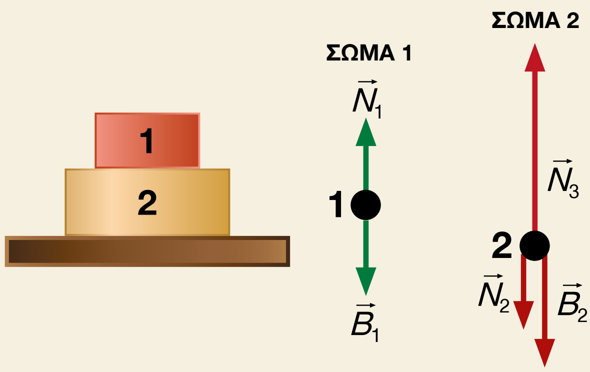
Παραδείγματα Διαγραμμάτων Ελεύθερου Σώματος



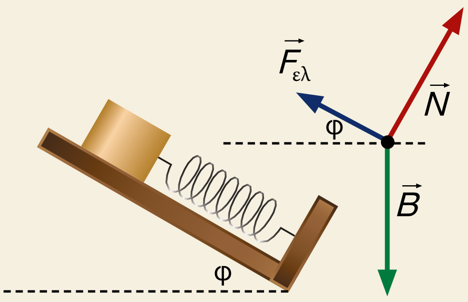
Σώμα που κρέμεται από ελατήριο και ισορροπεί. Στο σώμα ασκείται το βάρος του $\vec{B}$ και η δύναμη $\vec{F}_{ελ}$ από το ελατήριο.



Σώμα που έλκεται από σχοινί πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Στο σώμα ασκείται το βάρος του $\vec{B}$, η τάση $\vec{T}$ από το σχοινί, και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από την επιφάνεια.



Σύστημα σωμάτων που ηρεμούν σε οριζόντιο έδαφος. Στο σώμα 1 ασκείται το βάρος του $\vec{B}_1$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}_1$ από το σώμα 2. Στο σώμα 2 ασκείται το βάρος του $\vec{B}_2$ η κάθετη δύναμη $\vec{N}_2$ από το σώμα 1 (ζεύγος δράσης - αντίδρασης με τη δύναμη $\vec{N}_1$) και η κάθετη δύναμη $\vec{N}_3$ από το έδαφος.



Σώμα που ισορροπεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο και συμπιέζει ελατήριο. Στο σώμα ασκείται το βάρος του $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το κεκλιμένο επίπεδο, και η δύναμη $\vec{F}_{ελ}$ από το ελατήριο.

Ερώτηση

Για κάθε ένα από τα σώματα του προηγούμενου παραδείγματος, να προσδιορίσετε τις δυνάμεις που αποτελούν ζεύγος δράσης - αντίδρασης με τις σχεδιασμένες δυνάμεις.

Εφαρμογές του Τρίτου Νόμου

3.21. Σχοινί Αμελητέας Μάζας μεταδίδει Ίση Δύναμη στα Άκρα του

Χρησιμοποιώντας τον τρίτο νόμο, μπορούμε να δείξουμε ότι όταν ένα αβαρές σχοινί τείνεται με κάποια δύναμη στο ένα άκρο του, ασκεί ίση δύναμη από το άλλο άκρο του. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Α. Σχοινί σε ισορροπία

Στην Εικόνα 3-45(α) απεικονίζεται ένα οριζόντιο σχοινί αμελητέας μάζας. Το άκρο Α του σχοινιού είναι στερεωμένο σε έναν ακλόνητο τοίχο και το άκρο Β τείνεται με δύναμη $\vec{F}_1$. Ο τοίχος ασκεί στο άκρο Α του σχοινιού δύναμη $\vec{F}_2$.

Το σχήμα 3-45(β) απεικονίζει το διάγραμμα ελεύθερου σώματος του σχοινιού. Επειδή το σχοινί ισορροπεί, προκύπτει από τον πρώτο νόμο:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

Εικόνα 3-45
(α) Το σχοινί είναι στερεωμένο στον τοίχο από το άκρο του Α, και τείνεται με δύναμη από το δεύτερο άκρο του Β. **(β)** Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το σχοινί.

(α)

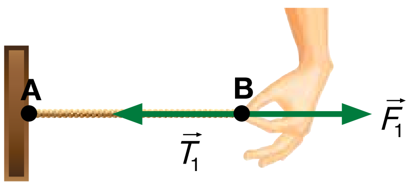
(β)

Συνεπώς, **το σχοινί τείνεται από τα δύο άκρα του με αντίθετες δυνάμεις**.

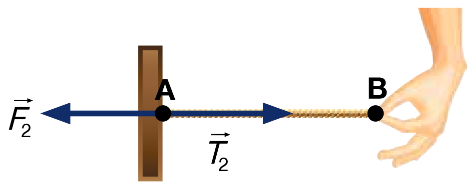
Το σχοινί ασκεί στο χέρι τη δύναμη $\vec{T}_1$ από το άκρο του Β (Εικόνα 3-45(γ)). Επειδή οι $\vec{T}_1$ και $\vec{F}_1$ είναι ζεύγος δράσης - αντίδρασης, ισχύει $\vec{T}_1 = -\vec{F}_1$. Ομοίως, το σχοινί ασκεί στον τοίχο τη δύναμη $\vec{T}_2$ από το άκρο του Α (Εικόνα 3-45(δ)). Επειδή οι $\vec{T}_2$ και $\vec{F}_2$ είναι ζεύγος δράσης - αντίδρασης, προκύπτει $\vec{T}_2 = -\vec{F}_2$.

Εικόνα 3-45
Οι δυνάμεις **(γ)** $\vec{F}_1$ και $\vec{T}_1$ και **(δ)** $\vec{F}_2$ και $\vec{T}_2$ είναι ζεύγη δράσης αντίδρασης.

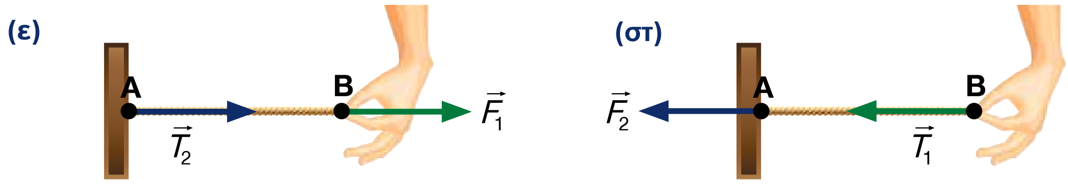
(γ)



(δ)



Συνδυάζοντας αυτές τις σχέσεις, συμπεραίνουμε ότι $\vec{T}_2 = \vec{F}_1$ και $\vec{T}_1 = \vec{F}_2$. **Όταν το σχοινί τείνεται με κάποια δύναμη στο ένα άκρο του, ασκεί ίση δύναμη στο σώμα που συνδέεται στο άλλο άκρο του** (Εικόνα 3-45(ε) και (στ)).

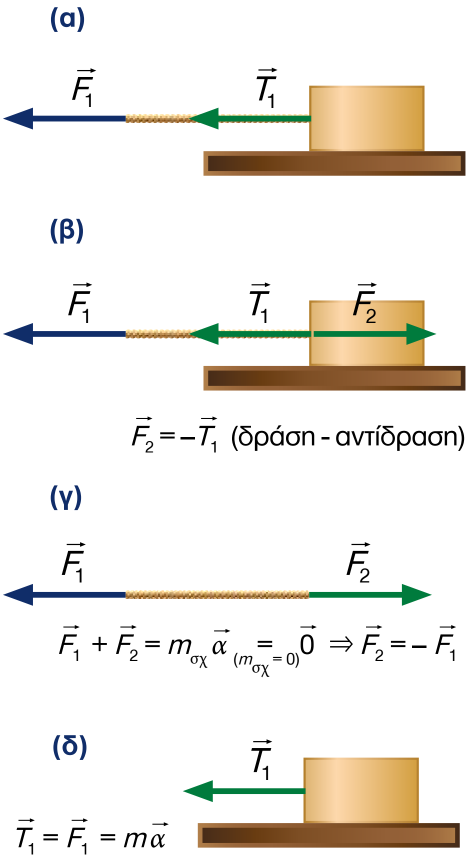


Εικόνα 3-45
(ε) $\vec{T}_2 = \vec{F}_1$ και **(στ)** $\vec{T}_1 = \vec{F}_2$. Το σχοινί τείνεται με δύναμη από ένα άκρο του, και έλκει με ίση δύναμη από το άλλο άκρο του.

Τα συμπεράσματα αυτά βασίσθηκαν στο γεγονός ότι το σχοινί ισορροπεί. Όπως δείχνουμε στο παράδειγμα 3Β, τα συμπεράσματα αυτά ισχύουν και για σχοινί αμελητέας μάζας που επιταχύνεται.

Β. Επιταχυνόμενο σχοινί

Στην Εικόνα 3-46 απεικονίζεται ένα σώμα δεμένο σε ένα σχοινί.



Εικόνα 3-46
(α) Σώμα σε επαφή με τεντωμένο σχοινί αμελητέας μάζας. Στην ελεύθερη άκρη του σχοινιού ασκείται δύναμη $\vec{F}_1$. Το σχοινί έλκει το σώμα με δύναμη $\vec{T}_1$. **(β)** Το σώμα έλκει το σχοινί με δύναμη $\vec{F}_2$. Οι δυνάμεις $\vec{F}_2$ και $\vec{T}_1$ είναι ζεύγος δράσης - αντί δρασης. **(γ)** Διάγραμμα **ελεύθερου σώματος** για το σχοινί. Με εφαρμογή του δεύτερου νόμου προκύπτει ότι οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, που ασκούνται στα άκρα του σχοινιού, είναι **αντίθετες**. **(δ)** Διάγραμμα ελεύθερου σώματος *για το σώμα*. Το σχοινί ασκεί στο σώμα ίση δύναμη με τη δύναμη υπό την οποία τείνεται από το άλλο άκρο του.

Η ελεύθερη άκρη του σχοινιού τείνεται με τη δύναμη $\vec{F}_1$ και το σχοινί ασκεί στο σώμα τη δύναμη $\vec{T}_1$. Σύμφωνα με τον **τρίτο νόμο** του Νεύτωνα, το σώμα ασκεί στο σχοινί μια δύναμη αντίδρασης $\vec{F}_2 = -\vec{T}_1$, η οποία σημειώνεται στην Εικόνα 3-46(β). Στην Εικόνα 3-46(γ) σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το σχοινί. Στις δύο άκρες του σχοινιού ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Επειδή το σχοινί έχει αμελητέα μάζα, προκύπτει από το δευτέρο νόμο ότι οι δυνάμεις αυτές είναι αντίθετες:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \underbrace{m_{σχ}}_{=0}\vec{α} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

Συνδυάζοντας τα συμπεράσματα του τρίτου και δεύτερου νόμου, προκύπτει:

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = -\vec{T}_1 \Rightarrow \vec{T}_1 = \vec{F}_1$$

Συνεπώς, **η δύναμη, που ασκεί το σχοινί στο σώμα, ισούται με τη δύναμη με την οποία τείνεται από το άλλο άκρο του.**

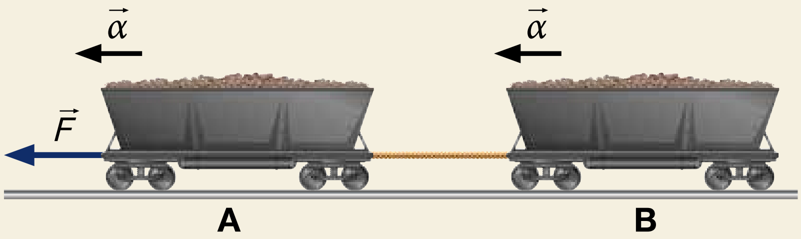
Ερώτηση
Πώς αλλάζει το προηγούμενο αποτέλεσμα, εάν το σχοινί έχει μη μηδενική μάζα;

Τα πιο πάνω συμπεράσματα είναι χρήσιμα στην επίλυση διαφόρων προβλημάτων με σώματα που τείνονται από σχοινιά. Μελετούμε αμέσως πιο κάτω διάφορα αντιπροσωπευτικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1

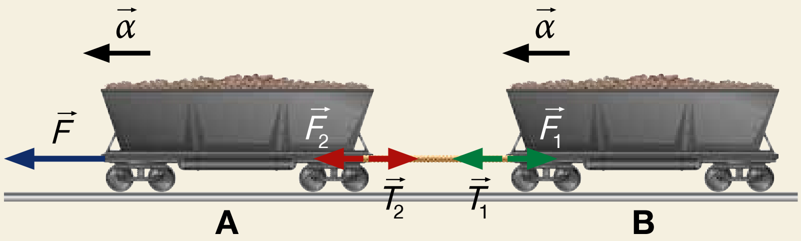
Δύο Σώματα που τείνονται από Διαδοχικά Σχοινιά σε Λεία Οριζόντια Επιφάνεια

Η Εικόνα 3-47 απεικονίζει ένα τραινάκι με δύο βαγόνια Α και Β, που συνδέονται μεταξύ τους με σχοινί και κινούνται σε οριζόντιο δάπεδο υπό την επίδραση της οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$. Οι τριβές με το δάπεδο θεωρούνται αμελητέες. Οι μάζες των βαγονιών είναι m_A και m_B. Θα προσδιορίσουμε την επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ των δύο βαγονιών και τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτά από το σχοινί.



Εικόνα 3-47
Τα δύο βαγόνια Α και Β είναι συνδεδεμένα με σχοινί και κινούνται με επιτάχυνση $\vec{\alpha}$. Στο πρώτο βαγόνι εφαρμόζεται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$.

Το διάγραμμα της Εικόνας 3-48 απεικονίζει όλες τις δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των βαγονιών και του σχοινιού. Δυνάμεις που συνιστούν ζεύγη δράσης-αντίδρασης σημειώνονται με το ίδιο χρώμα. Στο διάγραμμα αγνοούμε τα βάρη των βαγονιών και τις κάθετες δυνάμεις από το έδαφος, επειδή τα βαγόνια δεν κινούνται στην κατακόρυφη διεύθυνση.



Εικόνα 3-48
Ζεύγη δράσης - αντίδρασης για τις δυνάμεις μεταξύ των βαγονιών Α και Β και του σχοινιού. Δυνάμεις που συνιστούν ζεύγος δράσης - αντίδρασης σημειώνονται με το ίδιο χρώμα.

Για να εφαρμόσουμε τους νόμους του Νεύτωνα, επικεντρωνόμαστε ξεχωριστά σε κάθε σώμα και **εργαζόμαστε σταδιακά με τη βοήθεια διαγραμμάτων ελεύθερου σώματος**.

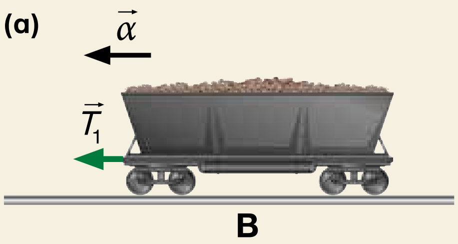
Θεωρούμε πρώτα το βαγόνι Β, στο οποίο ασκείται μόνο η δύναμη $\vec{T}_1$ από το σχοινί. Στην Εικόνα 3-49(α) σχεδιάζουμε διαγράμματα ελεύθερου σώματος για το Β και για το σχοινί. Από το δεύτερο νόμο προκύπτει:

$$\vec{T}_1 = m_B \vec{\alpha}$$

Στο σχοινί δρα η δύναμη $\vec{F}_1$ από το βαγόνι Β (δράση - αντίδραση με την $\vec{T}_1$), και η δύναμη $\vec{F}_2$ από το βαγόνι Α. Επειδή το σχοινί έχει αμελητέα μάζα, ισχύει $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. Συνεπώς:

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_1 &= -\vec{T}_1 \\ \vec{F}_2 &= -\vec{F}_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{F}_2 = \vec{T}_1 \Rightarrow \vec{F}_2 = m_B \vec{\alpha}$$

(α)

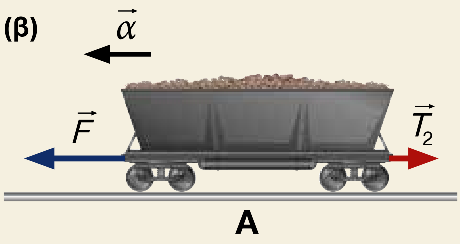


$\vec{T}_1 = m_B\vec{\alpha}$

$\vec{F}_1 = -\vec{T}_1$ (δράση - αντίδραση)

$m_{σχ} = 0 \Rightarrow \vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \Rightarrow \vec{F}_2 = \vec{T}_1 = m_B\vec{\alpha}$

(β)



$$\left.\begin{array}{l}\vec{F} + \vec{T}_2 = m_B\vec{\alpha} \\ \vec{T}_2 = -\vec{F}_2 = -\, m_B\vec{\alpha}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F} = (m_A + m_B)\,\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{1}{m_A + m_B}\vec{F}$$

(δράση - αντίδραση)

Εικόνα 3-49
(α) Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το βαγόνι B (αριστερό σχήμα) και για το σχοινί (δεξιό σχήμα). **(β)** Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το βαγόνι A.

Στην Εικόνα 3-49(β) σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το βαγόνι A. Η δύναμη $\vec{T}_2$ από το σχοινί είναι ζεύγος δράσης - αντίδρασης με την $\vec{F}_2$. Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

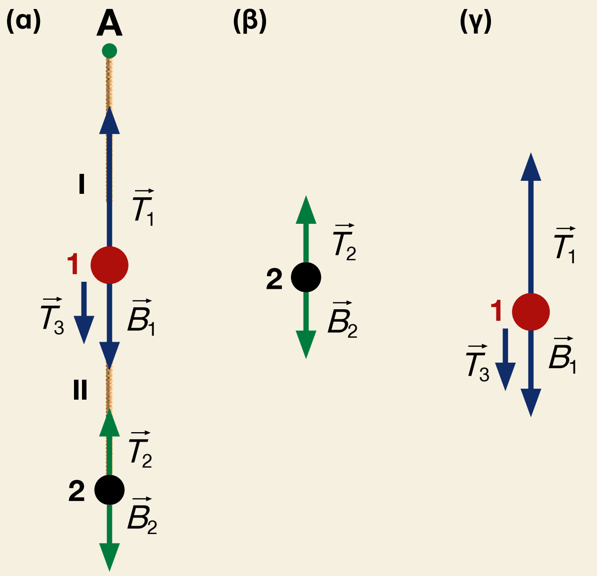
$$\vec{F} + \vec{T}_2 = m_A\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{F} - \vec{F}_2 = m_A\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{F} - m_B\vec{\alpha} = m_A\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{1}{m_A + m_B}\vec{F}$$

Έχοντας προσδιορίσει την επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ μπορούμε να εκφράσουμε τις τάσεις $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ σαν συναρτήσεις της $\vec{F}$ και των μαζών των σωμάτων:

$$\vec{T}_1 = -\vec{T}_2 = m_B\vec{\alpha} = \frac{m_B}{m_A + m_B}\vec{F}$$

Παράδειγμα 2
Σώματα που αναρτώνται από Σχοινιά και ισορροπούν σε Κατακόρυφη Διεύθυνση
Η Εικόνα 3-50 απεικονίζει ένα σύστημα σωμάτων 1 και 2 που ισορροπούν. Το σώμα 1 κρέμεται από το σημείο A της οροφής με το σχοινί **I**. Το σώμα 2 κρέμεται από το σώμα 1 με το σχοινί **II**. Οι δυνάμεις που δρούν στο σώμα 1 σημειώνονται με μπλε χρώμα, και οι δυνάμεις στο σώμα 2 με πράσινο χρώμα. Θεωρούμε ότι τα σχοινιά έχουν αμελητέα μάζα.

Στο σώμα 1 εφαρμόζεται το βάρος του $\vec{B}_1$, η δύναμη $\vec{T}_1$ από το σχοινί **I** με φορά προς τα επάνω, και η δύναμη $\vec{T}_3$ από το σχοινί **II** με φορά προς τα κάτω. Στο σώμα 2 εφαρμόζεται το βάρος του $\vec{B}_2$ και η δύναμη $\vec{T}_2$ από το σχοινί **II** με φορά προς τα επάνω.



Εικόνα 3-50

(α) Τα σώματα 1 και 2 κρέμονται από τα σχοινιά I και II και ισορροπούν. Στο σχήμα σημειώνονται οι δυνάμεις στα δύο σώματα. **(β)** και **(γ)**. Διαγράμματα ελεύθερου σώματος για το σώμα 2 και 1.

Θεωρούμε πρώτα το σώμα 2, το οποίο δέχεται το μικρότερο αριθμό δυνάμεων. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\vec{B}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{T}_2 = -\vec{B}_2$$

Συνεπώς, η δύναμη $\vec{T}_2$ με την οποία το σχοινί **II** έλκει το σώμα 2, είναι αντίθετη με το βάρος του.

Το σώμα 1 δέχεται τις δυνάμεις $\vec{B}_1$, $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_3$. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\vec{B}_1 + \vec{T}_1 + \vec{T}_3 = m_1\vec{\alpha}_1 = \vec{0} \Rightarrow \vec{T}_1 + \vec{T}_3 = -\vec{B}_1$$

Οι δυνάμεις $\vec{T}_2$ και $\vec{T}_3$ είναι αντίθετες επειδή ασκούνται από τα δύο άκρα του σχοινιού **II.** Έτσι $\vec{T}_3 = -\vec{T}_2 = \vec{B}_2$ και ο δεύτερος νόμος για το σώμα 1 απλουστεύεται:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_3 = -\vec{B}_1 \Rightarrow \vec{T}_1 + \vec{B}_2 = -\vec{B}_1 \Rightarrow \vec{T}_1 = -(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)$$

Το μέτρο της $\vec{T}_1$ ισούται με το άθροισμα των μέτρων των δύο βαρών. **Συνεπώς, η δύναμη $\vec{T}_1$ έχει μεγαλύτερο μέτρο από την δύναμη $\vec{T}_2$.**

Ερώτηση

Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε τις δυνάμεις που τείνουν τα σχοινιά **I** και **II.**

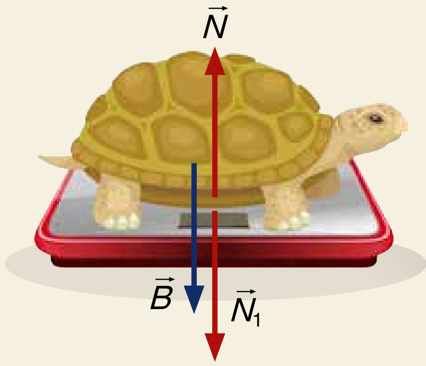
3.22. Άλλες Εφαρμογές του Τρίτου Νόμου

Παράδειγμα 1

Ζυγός Ελατηρίου

Μια χελώνα μάζας m ισορροπεί πάνω σε μια ζυγαριά. Θα αποδείξουμε ότι η ζυγαριά μετρά δύναμη ίση με το βάρος της χελώνας.

Όταν η χελώνα ισορροπεί, πιέζει τη ζυγαριά με δύναμη που είναι ίση με το βάρος της.



Στη χελώνα ασκούνται το βάρος της $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από τη ζυγαριά. Επειδή η χελώνα ισορροπεί, προκύπτει από το δεύτερο νόμο:

$$\vec{B} + \vec{N} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N} = -\vec{B}$$

Η χελώνα πιέζει τη ζυγαριά με μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{N}_1$, η οποία είναι **ζεύγος δράσης - αντίδρασης** με τη $\vec{N}$. Συνεπώς, $\vec{N}_1 = -\vec{N} = \vec{B}$.

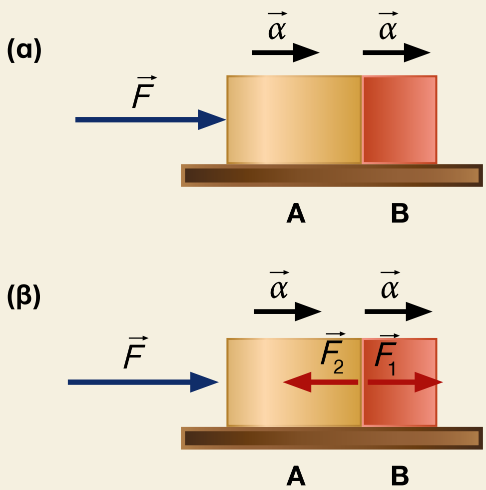
Μια συνηθισμένη ζυγαριά περιέχει ελατήριο, που συσπειρώνεται **ανάλογα με το μέτρο της δύναμης $\vec{N}_1$.** Όταν το σώμα και η ζυγαριά ισορροπούν, η δύναμη που μετρά η ζυγαριά *είναι ίση με το βάρος του σώματος.*

Συνήθως, μια ζυγαριά βαθμονομείται σε kg και η ένδειξή της αντιστοιχεί στη *μάζα* του σώματος.

Παράδειγμα 2

Σώματα που εφάπτονται και κινούνται με Κοινή Επιτάχυνση σε Οριζόντια Επιφάνεια

Τα σώματα Α και Β της Εικόνας 3-51(α) εφάπτονται μεταξύ τους και με μια *λεία* οριζόντια επιφάνεια. Στο σώμα Α ασκείται μια *γνωστή* οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ η οποία προσδίδει στα δύο σώματα κοινή επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ προς την κατεύθυνση της $\vec{F}$. Χρησιμοποιώντας τους νόμους του Νεύτωνα, **θα υπολογίσουμε την επιτάχυνση των δύο σωμάτων συναρτήσει της δύναμης $\vec{F}$.**

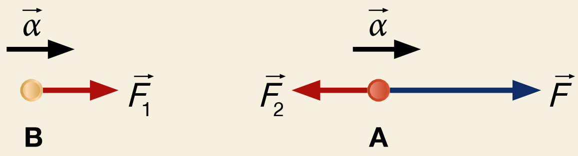


Εικόνα 3-51

(α) Τα σώματα Α και Β εφάπτονται μεταξύ τους και με μια **λεία** οριζόντια επιφάνεια. Στο σώμα Α επιδρά μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ που το μετακινεί προς την κατεύθυνση του Β.

(β) Το σώμα Α ασκεί δύναμη $\vec{F}_1$ στο σώμα Β, και το σώμα Β ασκεί δύναμη $\vec{F}_2$ στο Α. Οι $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι ζεύγος δράσης - αντίδρασης.

(γ)



Εικόνα 3-51
(γ) Αριστερά: Διάγραμμα **ελεύθερου σώματος** για το Β στην προσέγγιση υλικού σημείου. Η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του Β οφείλεται στη δύναμη $\vec{F}_1$ από το Α. **Δεξιά:** Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το Α. Η επιτάχυνση του Α οφείλεται στη συνισταμένη των $\vec{F}$ και $\vec{F}_2$.

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, το σώμα Α τείνει να κινηθεί προς την κατεύθυνση της $\vec{F}$, οπότε πιέζει το σώμα Β. Μεταξύ των Α και Β αναπτύσσονται οι *κάθετες* δυνάμεις $\vec{F}_1$ (από το Α στο Β) και $\vec{F}_2$ (από το Β στο Α), όπως φαίνεται στην Εικόνα 3-51(β). Οι δυνάμεις αυτές συνιστούν ζεύγος δράσης-αντίδρασης: $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$.

Στην Εικόνα 3-51(γ) σχεδιάζουμε τα αντίστοιχα **διαγράμματα ελεύθερου σώματος** των Α και Β, στην προσέγγιση υλικού σημείου. Θεωρούμε **πρώτα το σώμα Β**, επειδή σε αυτό επιδρά μόνο μια δύναμη. Εκφράζουμε τη δύναμη $\vec{F}_1$ ως προς την επιτάχυνση $\vec{\alpha}$, χρησιμοποιώντας τον δεύτερο νόμο:

$$\vec{F}_1 = m_B\vec{\alpha}$$

Το σώμα Α δέχεται τις δυνάμεις $\vec{F}$ και $\vec{F}_2$. Επειδή η δύναμη $\vec{F}_2$ είναι αντίθετη από την $\vec{F}_1$ προκύπτει ότι $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = -m_B\vec{\alpha}$. Ο δεύτερος νόμος δίνει για το σώμα Α:

$$\vec{F} + \vec{F}_2 = m_A\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{F} - m_B\vec{\alpha} = m_A\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{F} = (m_A + m_B)\,\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{1}{m_A + m_B}\vec{F}$$

Από την τελευταία σχέση υπολογίζουμε τη δύναμη $\vec{F}_1$ συναρτήσει της $\vec{F}$:

$$\vec{F}_1 = m_B\vec{\alpha} = \frac{m_B}{m_A + m_B}\vec{F}$$

Παρατηρήστε ότι το σώμα Α ασκεί στο σώμα Β μικρότερη δύναμη από την δύναμη $\vec{F}$. Για παράδειγμα, εάν $m_B = \mathrm{m}$, $m_A = 2\mathrm{m}$, βρίσκουμε ότι $\vec{F}_1 = \frac{1}{3}\vec{F}$. Αυτό συμβαίνει διότι η δύναμη $\vec{F}$ επιταχύνει μαζί τα δύο σώματα Α και Β, τα οποία έχουν συνολική μάζα $M = m_A + m_B$. Επειδή το σώμα Β έχει μάζα $m_B < M$, χρειάζεται μικρότερη δύναμη για να αποκτήσει την κοινή επιτάχυνση $\vec{\alpha}$. **Θα είχαμε κάνει λάθος, εάν είχαμε υποθέσει ότι η δύναμη $\vec{F}$ μεταβιβάζεται από το Α στο Β.**

Ομοίως, **η συνισταμένη δύναμη που επιταχύνει το σώμα Α είναι μικρότερη από την $\vec{F}$** :

$$\vec{F} + \vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{F}_1 = \vec{F} - \frac{m_B}{m_A + m_B}\vec{F} = \frac{m_A}{m_A + m_B}\vec{F}$$

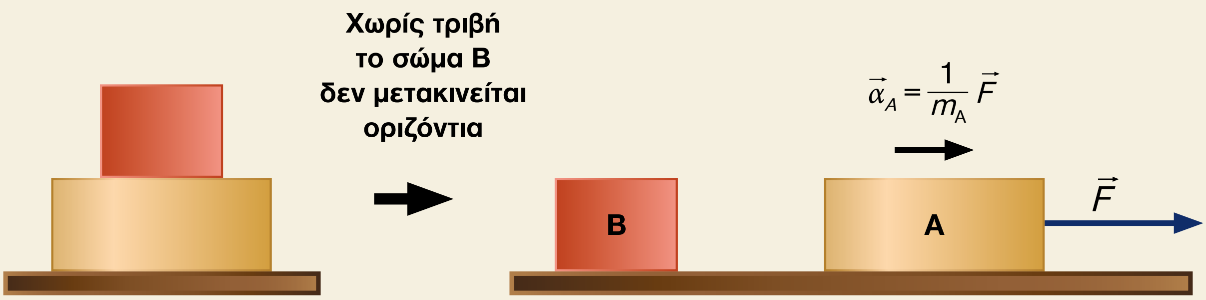
Εάν $m_B = \mathrm{m}$, $m_A = 2\mathrm{m}$, προκύπτει ότι $\vec{F} + \vec{F}_2 = \frac{2}{3}\vec{F}$.

Παράδειγμα 3

Σώματα που κινούνται μαζί με Στατική Τριβή σε Οριζόντιο Έδαφος

Η Εικόνα 3-52 απεικονίζει ένα σύστημα σωμάτων Α και Β, τα οποία αρχικά ηρεμούν σε επαφή με λείο οριζόντιο έδαφος. Σε κάποια στιγμή ασκείται στο σώμα Α μια σταθερή, *γνωστή* οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ η οποία μετακινεί το Α.

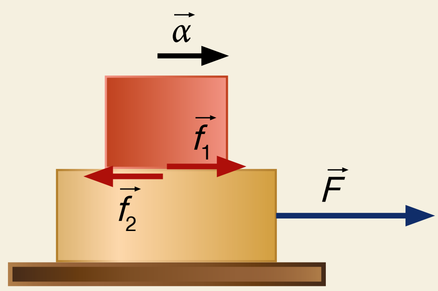
Α. Εάν οι επιφάνειες των σωμάτων Α και Β είναι λείες, δεν ασκούνται δυνάμεις τριβής μεταξύ τους. Επομένως, η συνισταμένη οριζόντια δύναμη στο σώμα Α είναι η $\vec{F}$ και το σώμα αποκτά οριζόντια επιτάχυνση $\vec{\alpha}_A = \frac{1}{m_A}\vec{F}$. Η οριζόντια δύναμη στο σώμα Β είναι μηδενική, οπότε προκύπτει από τον **νόμο της αδράνειας** ότι θα παραμείνει ακίνητο στην οριζόντια διεύθυνση. Όταν χάσει επαφή με το Α, το Β πέφτει στο έδαφος, όπως φαίνεται στο δεξιό σχήμα της Εικόνας 3-52.



Εικόνα 3-52
Αριστερά: Δύο σώματα Α και Β ηρεμούν σε οριζόντιο έδαφος. Δεξιά: Εάν το σώμα Α αποκτήσει οριζόντια ταχύτητα με εφαρμογή μιας δύναμης $\vec{F}$, και μεταξύ των Α και Β δεν υπάρχει τριβή, το Β παραμένει ακίνητο στην οριζόντια διεύθυνση και πέφτει στο έδαφος μόλις χάσει επαφή με το Α.

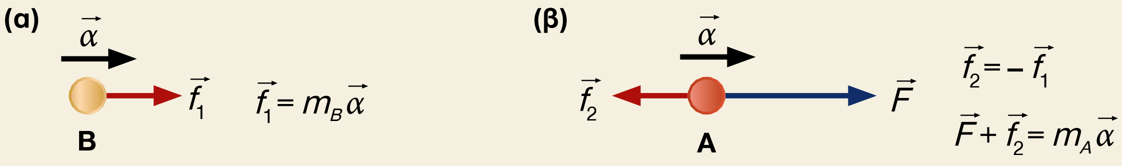
Β. Εάν οι επιφάνειες των σωμάτων Α και Β δεν είναι λείες, *αναπτύσσονται μεταξύ των Α και Β οι οριζόντιες δυνάμεις τριβής* $\vec{f}_1$ και $\vec{f}_2$ (ζεύγος δράσης - αντίδρασης, Εικόνα 3-53). Εάν τα σώματα κινούνται με *κοινή ταχύτητα* και επιτάχυνση $\vec{\alpha}$, οι $\vec{f}_1$ και $\vec{f}_2$ είναι δυνάμεις **στατικής τριβής**.

Εικόνα 3-53
Μεταξύ των Α και Β ασκούνται δυνάμεις στατικής τριβής $\vec{f}_1$ και $\vec{f}_2$ (ζεύγος δράσης-αντίδρασης). Το σώμα Β αποκτά οριζόντια ταχύτητα εξ΄ αιτίας της στατικής τριβής $\vec{f}_1$. Τα σώματα Α και Β **κινούνται μαζί** με επιτάχυνση $\vec{\alpha}$.



Στην Εικόνα 3-54 σχεδιάζουμε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για τα δύο σώματα.

Εικόνα 3-54
Διαγράμματα ελεύθερου σώματος για **(α)** το σώμα Β, και **(β)** το σώμα Α.



Από τον δεύτερο νόμο προκύπτει:

$$\text{Σώμα Β:}\quad \vec{f}_1 = m_B\vec{\alpha}$$

$$\text{Σώμα Α:}\quad \left.\begin{aligned} \vec{F} + \vec{f}_2 &= m_A\vec{\alpha} \\ \vec{f}_2 = -\vec{f}_1 &= -m_B\vec{\alpha} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{F} = m_A\vec{\alpha} + m_B\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{1}{m_A + m_B}\vec{F}$$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις, προκύπτει:

$$\vec{f}_1 = m_B\vec{\alpha} = \frac{m_B}{m_A + m_B}\vec{F}$$

Το αποτέλεσμα αυτό εκφράζει τη δύναμη $\vec{f}_1$ που **χρειάζεται** να ασκείται στο Β, έτσι ώστε να κινείται με επιτάχυνση $\vec{\alpha}$.

Γ. Το μέτρο της στατικής τριβής $\vec{f}_1$ δεν μπορεί να υπερβεί κάποια **μέγιστη τιμή**, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\left|\vec{f}_{s,\,\mu\varepsilon\gamma}\right| = \mu_s\left|\vec{N}\right|$$

με μ_s τον συντελεστή στατικής τριβής και $\left|\vec{N}\right|$ το μέτρο της κάθετης δύναμης από το σώμα Α στο Β. Επειδή το Β ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, η κάθετη δύναμη που δέχεται από το Α είναι αντίθετη με το βάρος του $\left(\left|\vec{N}\right| = m_B g\right)$ όπως δείξαμε στο παράδειγμα 1 του ζυγού ελατηρίου. Συνεπώς:

$$\left|\vec{f}_1\right| \le \left|\vec{f}_{s,\,\mu\varepsilon\gamma}\right| = \mu_s\left|\vec{N}\right| = \mu_s m_B g$$

Αντικαθιστώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα για την $\vec{f}_1$ συμπεραίνουμε:

$$\left|\vec{f}_1\right| \le \mu_s m_B g \Rightarrow \frac{m_B}{m_A + m_B}\left|\vec{F}\right| \le \mu_s m_B g \Rightarrow \left|\vec{F}\right| \le \mu_s(m_A + m_B)g$$

Εάν η πιο πάνω ανισότητα δεν ικανοποιείται, το σώμα Β αρχίζει να ολισθαίνει ως προς το Α.

Αριθμητική Εφαρμογή: Έστω ότι τα σώματα Α και Β είναι ξύλινα κιβώτια με μάζες 4 kg και 1 kg αντίστοιχα. Από τον Πίνακα 3-2, ο συντελεστής στατικής τριβής ξύλου σε ξύλο ισούται με 0,25 – 0,5. Υποθέτοντας μία ενδιάμεση τιμή $\mu_s = 0{,}40$ παίρνουμε:

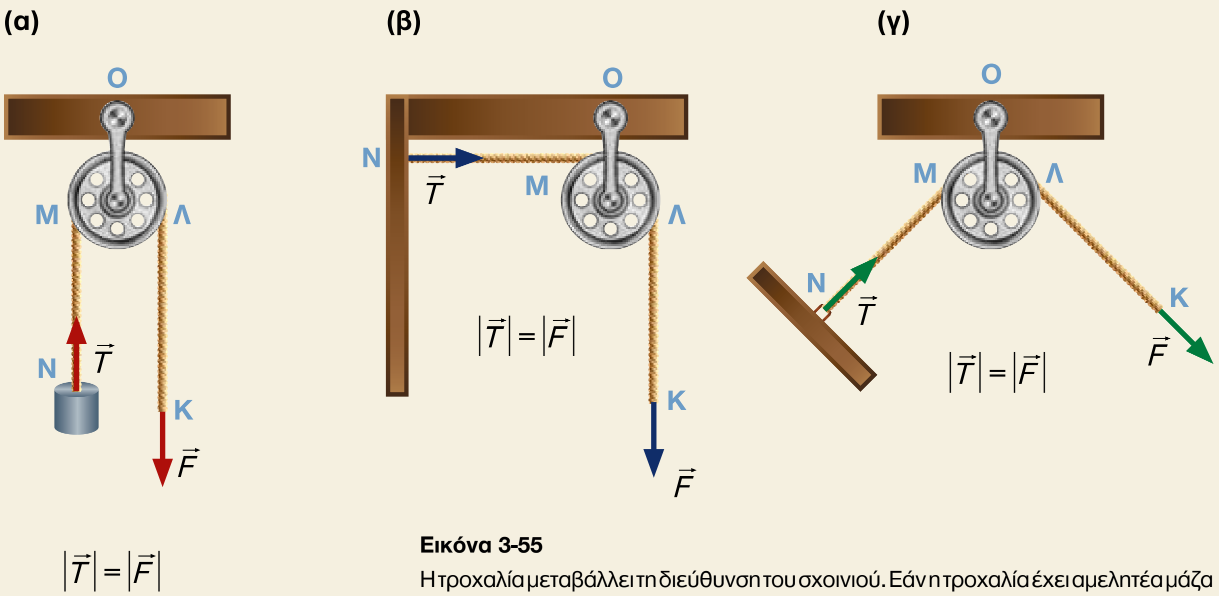
$$\mu_s(m_A + m_B)g = 0{,}40 \times (5\ \text{kg}) \times (9{,}81\ \text{m/s}^2) = 19{,}6\ \text{N}$$

3.23. Εφαρμογές του Τρίτου Νόμου σε Προβλήματα με Τροχαλίες

Μερικές **Προτεινόμενες Δραστηριότητες**, με τις οποίες θα ασχοληθείτε, χρησιμοποιούν τροχαλίες. Τα επόμενα παραδείγματα εξηγούν τη χρήση τροχαλιών σε προβλήματα ισορροπίας και κίνησης.

Λίγα προκαταρκτικά λόγια για τις τροχαλίες

Η Εικόνα 3-55(α) απεικονίζει μια **τροχαλία**, η οποία είναι στερεωμένη στο σημείο Ο της οροφής.



Εικόνα 3-55

Η τροχαλία μεταβάλλει τη διεύθυνση του σχοινιού. Εάν η τροχαλία έχει αμελητέα μάζα και δεν υπάρχουν τριβές με τον άξονα περιστροφής της, η τροχαλία αλλάζει την κατεύθυνση της δύναμης που ασκείται στα άκρα του σχοινιού (επειδή αλλάζει την κατεύθυνση του σχοινιού), χωρίς να μεταβάλλει το μέτρο της. Εάν ασκηθεί δύναμη $\vec{F}$ στο άκρο Κ του σχοινιού, το άλλο άκρο του σχοινιού ασκεί δύναμη $\vec{T}$ με διαφορετική κατεύθυνση αλλά ίδιο μέτρο.

Ο τροχός της τροχαλίας έχει ένα αυλάκι, μέσα από το οποίο διέρχεται ένα σχοινί, και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. **Η τροχαλία αλλάζει τη διεύθυνση του σχοινιού**: Αν θεωρήσουμε το άκρο Κ σαν αρχή του σχοινιού, το σχοινί κατευθύνεται προς τα επάνω, εισέρχεται στον τροχό στο σημείο Λ, εξέρχεται με κατακόρυφη διεύθυνση στο σημείο Μ και καταλήγει στο άκρο Ν.

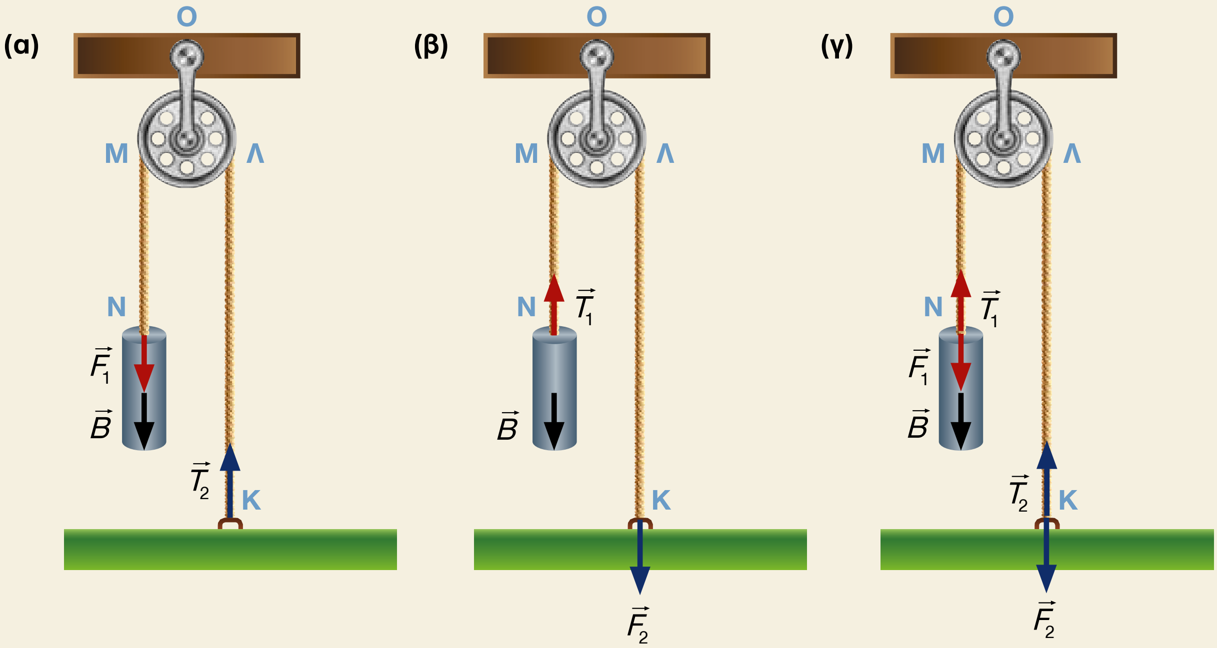
Έστω ότι ασκούμε στο άκρο Κ του σχοινιού μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ με φορά προς τα κάτω. Εάν το άκρο Ν του σχοινιού είναι συνδεδεμένο με ένα σώμα, θα ασκήσει στο σώμα αυτό μια δύναμη $\vec{T}$ με διεύθυνση κατά μήκος του τμήματος **ΝΜ** του σχοινιού και φορά προς τα πάνω. Αποδεικνύεται θεωρητικά και πειραματικά ότι **εάν η τροχαλία έχει αμελητέα μάζα και αμελητέα τριβή με τον άξονα περιστροφής της**, οι δυνάμεις $\vec{T}$ και $\vec{F}$ έχουν ίσα μέτρα: $|\vec{T}|=|\vec{F}|$. **Η τροχαλία αλλάζει την κατεύθυνση της δύναμης που ασκείται στα άκρα του σχοινιού (επειδή αλλάζει την κατεύθυνση του σχοινιού), χωρίς να μεταβάλλει το μέτρο της.**

Οι Εικόνες 3-55(β) και 3-55(γ) απεικονίζουν επιπρόσθετα παραδείγματα τροχαλιών, στα οποία το σχοινί εξέρχεται από τις δύο πλευρές της τροχαλίας σε διάφορες διευθύνσεις. Οι δυνάμεις $\vec{F}$ προς το σχοινί και $\vec{T}$ από το σχοινί έχουν διευθύνσεις κατά μήκος των δύο τμημάτων του σχοινιού και ίσα μέτρα.

Παράδειγμα 1

Ισορροπία Σώματος με Χρήση Τροχαλίας

Η Εικόνα 3-56(α) απεικονίζει μια **τροχαλία**, η οποία είναι στερεωμένη στο σημείο Ο της οροφής. Το άκρο Κ του σχοινιού είναι στερεωμένο στο έδαφος. Στο δεύτερο άκρο Ν είναι στερεωμένο ένα σώμα μάζας m.



Εικόνα 3-56

Η τροχαλία μεταβιβάζει τη δύναμη που ασκείται στο άκρο της, δηλαδή αλλάζει τη διεύθυνση χωρίς να αλλάζει το μέτρο της. **(α)** Το σώμα τείνει το άκρο Ν του σχοινιού με δύναμη $\vec{F}_1$ και το άκρο Κ του σχοινιού ασκεί στο έδαφος μια αντίθετη δύναμη $\vec{T}_2$. **(β)** Το έδαφος ασκεί στο άκρο Κ μια δύναμη $\vec{F}_2$ (ζεύγος δράσης - αντίδρασης με την $\vec{T}_2$), και το άκρο Ν τείνει το σώμα με δύναμη $\vec{T}_1$ (ζεύγος δράσης - αντίδρασης με την $\vec{F}_1$). **(γ)** Απεικόνιση όλων των δυνάμεων μεταξύ του σώματος, σχοινιών και εδάφους.

Το σώμα τείνει να κινηθεί προς το έδαφος υπό την επίδραση του βάρους του $\vec{B}$. Επειδή το σχοινί **δεν είναι εκτατό** και το άκρο Κ του σχοινιού είναι στερεωμένο στο έδαφος, το σχοινί αντιστέκεται στην κίνηση.

Το σώμα ασκεί μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}_1$ στο άκρο Ν του σχοινιού, με φορά προς τα κάτω. Όπως εξηγήσαμε προηγουμένως, η τροχαλία έχει την ιδιότητα να «μεταβιβάζει» αυτή τη δύναμη, δηλαδή να αλλάζει την κατεύθυνσή της χωρίς να μεταβάλλει το μέτρο της: Το τμήμα ΛΚ του σχοινιού ασκεί στο έδαφος την κατακόρυφη δύναμη $\vec{T}_2$, η οποία έχει φορά προς τα πάνω και μέτρο $|\vec{T}_2| = |\vec{F}_1| = F$.

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 3-56(β), λόγω του τρίτου νόμου του Νεύτωνα το έδαφος ασκεί στο άκρο Κ του σχοινιού μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}_2$ με φορά προς το έδαφος. Η δύναμη αυτή συνιστά ζεύγος δράσης-αντίδρασης με την $\vec{T}_2$, οπότε $|\vec{F}_2| = |\vec{T}_2| = F$. Η δύναμη αυτή «μεταβιβάζεται» μέσω του σχοινιού της τροχαλίας: το άκρο Ν ασκεί δύναμη $\vec{T}_1$ στο σώμα, με φορά προς τα επάνω, με μέτρο $|\vec{T}_1| = |\vec{F}_2| = F$. Οι δυνάμεις $\vec{T}_1$ και $\vec{F}_1$ είναι ζεύγος δράσης - αντίδρασης. Η Εικόνα 3-56(γ) περιέχει όλες τις δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των σχοινιών, του εδάφους και του σώματος.

Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στο σώμα, καταλήγουμε σε μια σχέση που συνδέει τις δυνάμεις αυτές με το βάρος του σώματος:

$$\vec{B} + \vec{T}_1 = m\vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T}_1 = -\vec{B}$$

Άρα, όταν το σώμα ισορροπεί, έλκει το άκρο Ν με δύναμη ίση με το βάρος του ($\vec{F}_1 = -\vec{T}_1 = \vec{B}$). Ομοίως, το έδαφος ασκεί στο δεύτερο άκρο Κ του σχοινιού δύναμη ίση με το βάρος του σώματος ($\vec{F}_2 = \vec{B}$).

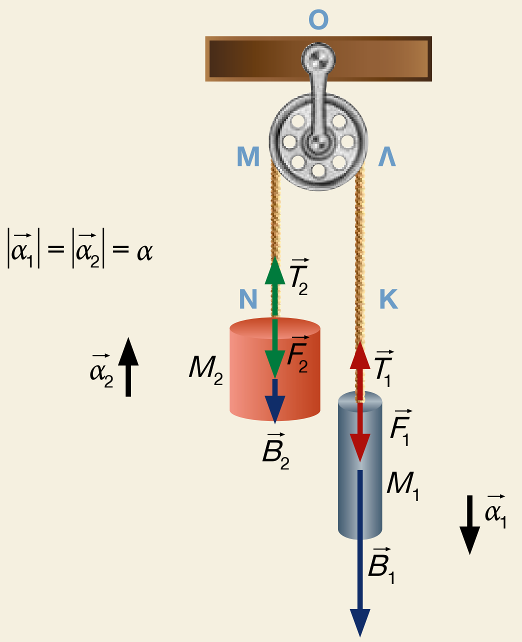
Στα παραδείγματα κίνησης που μελετούμε πιο κάτω, η τροχαλία έχει αμελητέα μάζα και τριβές με τον άξονα περιστροφής της. Το σχοινί έχει σταθερό μήκος (είναι μη εκτατό) και περιστρέφεται μαζί με την τροχαλία χωρίς να ολισθαίνει. Όπως εξηγήσαμε προηγουμένως, σε αυτή την περίπτωση η τροχαλία αλλάζει την κατεύθυνση της δύναμης που ασκείται στα άκρα του σχοινιού χωρίς να μεταβάλλει το μέτρο της. Το ίδιο ισχύει εάν η τροχαλία είναι ακίνητη (δεν περιστρέφεται), και το σχοινί ολισθαίνει στην τροχαλία χωρίς τριβές.

Παράδειγμα 2
Η Μηχανή Atwood

Στην Εικόνα 3-57 απεικονίζεται η μηχανή Atwood, η οποία εφευρέθηκε το 1784 από τον Άγγλο μαθηματικό George Atwood. Αποτελείται από δύο σώματα που συνδέονται μεταξύ τους μέσω τροχαλίας με μή εκτατό σχοινί αμελητέας μάζας. Τα σώματα 1 και 2 έχουν μάζες M_1 και M_2 και συνδέονται στα άκρα Κ και Ν του σχοινιού. Η τροχαλία είναι στερεωμένη στο σημείο Ο της οροφής.

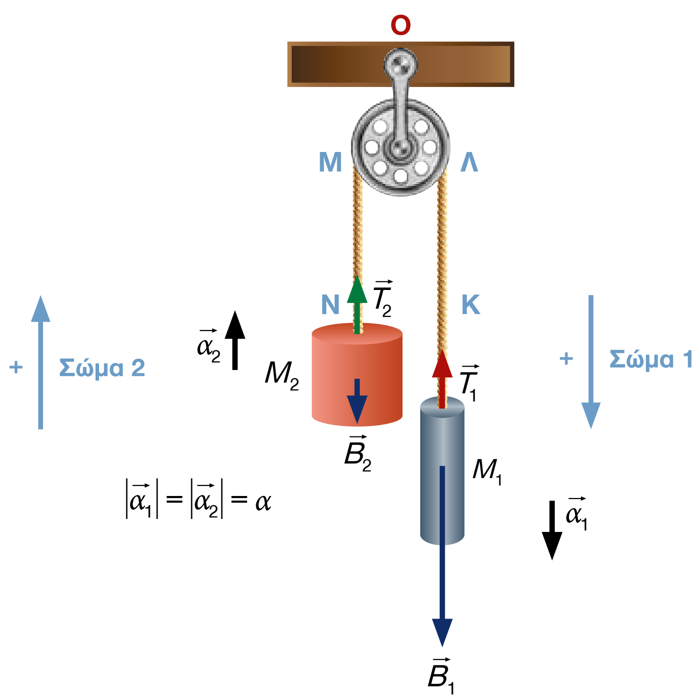
Θα εξετάσουμε την περίπτωση στην οποία $M_1 > M_2$. Εάν τα σώματα αφεθούν ελεύθερα από ηρεμία, το σώμα 1 κινείται προς τα κάτω και το σώμα 2 προς τα επάνω. Επειδή το σχοινί είναι μή εκτατό (έχει σταθερό μήκος), τα σώματα διανύουν ίσες **κατά μέτρο** μετατοπίσεις σε ίσα χρονικά διαστήματα, δηλαδή έχουν ίσες κατά μέτρο ταχύτητες και επιταχύνσεις: $|\vec{\alpha}_1| = |\vec{\alpha}_2| = \alpha$.

Το σώμα 1 ασκεί στο άκρο Κ του σχοινιού κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}_1$ με φορά προς τα κάτω. Η δύναμη αυτή μεταβιβάζεται μέσω της τροχαλίας στο άκρο Ν του σχοινιού, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Το άκρο Ν του σχοινιού ασκεί στο σώμα 2 μια κατακόρυφη δυναμη $\vec{T}_2$ η οποία έχει φορά προς τα επάνω και μέτρο $|\vec{T}_2| = |\vec{F}_1| = T$.



Εικόνα 3-57
Η μηχανή Atwood κινεί δύο σώματα που συνδέονται με σχοινί. Το σώμα 1 τείνει το άκρο Κ του σχοινιού με δύναμη $\vec{F}_1$ και το άκρο Κ ασκεί αντίθετη δύναμη $\vec{T}_1$ στο σώμα 1 (ζεύγος δράσης - αντίδρασης με την $\vec{F}_1$). Το σώμα 2 τείνει το άκρο Ν του σχοινιού με δύναμη $\vec{F}_2$ και το άκρο Ν τείνει το σώμα 2 με αντίθετη δύναμη $\vec{T}_2$ (ζεύγος δράσης - αντίδρασης με την $\vec{F}_2$).

Το σώμα 2 ασκεί στο άκρο Ν μια δύναμη $\vec{F}_2$. Η δύναμη αυτή μεταβιβάζεται στο άκρο Κ, αλλάζοντας διεύθυνση. Έτσι, το άκρο Κ ασκεί στο σώμα 1 μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{T}_1$ με φορά προς τα πάνω και μέτρο $|\vec{T}_1| = |\vec{F}_2|$. Οι δυνάμεις $\vec{F}_2$, $\vec{T}_2$ και $\vec{F}_1$, $\vec{T}_1$ είναι ζεύγη δράσης - αντίδρασης. Συνεπώς, όλες οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα: $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$.



Προσοχή
Στο παράδειγμα αυτό, όπως και σε κάποιες άλλες εφαρμογές (επόμενη άσκηση 10), είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε **διαφορετικούς άξονες** για τα δύο σώματα. Θα χρησιμοποιήσουμε κατακόρυφο άξονα με **θετική κατεύθυνση προς τα κάτω για το σώμα 1** (την κατεύθυνση της επιτάχυνσης του 1), και κατακόρυφο άξονα **με θετική κατεύθυνση προς τα πάνω για το σώμα 2** (την κατεύθυνση της επιτάχυνσης του 2), όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο για το σώμα 1, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\vec{B}_1 + \vec{T}_1 = M_1 \vec{\alpha}_1$$

Στην ανωτέρω σχέση έχουμε γράψει τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα **σε μορφή διανυσματικών συνιστωσών**. Σε **μορφή συνιστωσών** η σχέση γράφεται

$$B_1 + T_1 = M_1 \alpha_1$$

Να παρατηρήσετε ότι οι συνιστώσες των δυνάμεων και της επιτάχυνσης ικανοποιούν ακριβώς την ίδια εξίσωση με τις διανυσματικές συνιστώσες. Με βάση την επιλογή για τη θετική κατεύθυνση του άξονα για το σώμα 1, η αλγεβρική τιμή της συνιστώσας B_1 είναι θετική ($B_1 = M_1 g$), και αυτή της συνιστώσας T_1 είναι αρνητική ($T_1 = -T$). Η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι θετική, $\alpha_1 = \alpha$. Αντικαθιστώντας τις αλγεβρικές τιμές στην πιο πάνω εξίσωση, βρίσκουμε:

$$M_1 g - T = M_1 \alpha$$

Ομοίως, με βάση τη θετική κατεύθυνση του άξονα για το σώμα 2, η αλγεβρική τιμή της συνιστώσας B_2 είναι αρνητική ($B_2 = -M_2 g$) και της συνιστώσας T_2 είναι θετική ($T_2 = T$). Η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι θετική, $\alpha_2 = \alpha$.

$$\vec{B}_2 + \vec{T}_2 = M_2 \vec{\alpha}_2 \Rightarrow B_2 + T_2 = M_2 \alpha_2 \Rightarrow -M_2 g + T = M_2 \alpha$$

Εάν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις, καταλήγουμε στην εξής σχέση για το **μέτρο** της επιτάχυνσης:

$$\left.\begin{aligned} M_1 g - T &= M_1 \alpha \\ -M_2 g + T &= M_2 \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow (M_1 - M_2)\, g = (M_1 + M_2)\, \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\, g$$

Από τα πιο πάνω αποτελέσματα υπολογίζεται και το μέτρο της τάσης του σχοινιού:

$$T = M_1 g - M_1 \alpha = M_1 g \left(1 - \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\right) = \frac{2 M_1 M_2}{M_1 + M_2}\, g$$

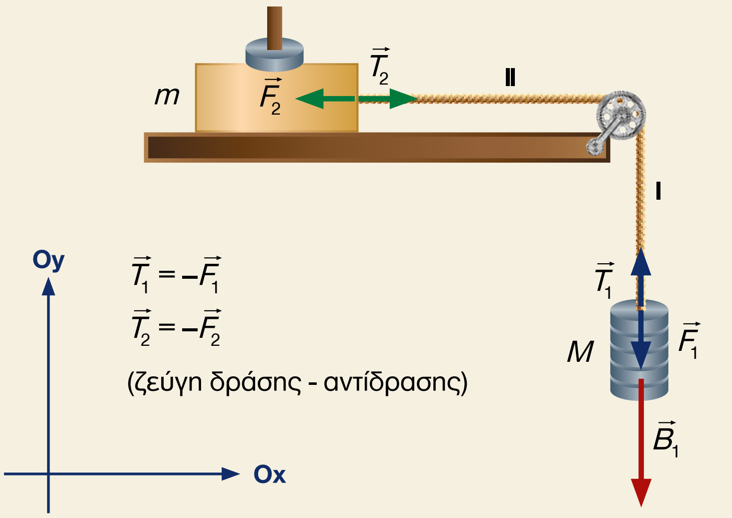
- Αν οι μάζες των σωμάτων είναι ίσες ($M_1 = M_2 = M$), η επιτάχυνση είναι μηδενική, $\alpha = 0$. Αν τα σώματα ήταν αρχικά ακίνητα, θα παραμείνουν ακίνητα. Στην περίπτωση αυτή, το μέτρο της τάσης του σχοινιού είναι ίσο με το βάρος κάθε σώματος, $T = Mg$.
- Αν η μάζα M_2 του σώματος 2 μηδενισθεί, το μέτρο της επιτάχυνσης γίνεται ίσο με $\alpha = g$. Το σώμα 1 εκτελεί ελεύθερη πτώση και η τάση του σχοινιού μηδενίζεται.
- Η προηγούμενη σχέση βασίζεται στην αρχική επιλογή $M_1 > M_2$. Στην περίπτωση που $M_2 > M_1$ το μέτρο α της επιτάχυνσης γίνεται $\alpha = \dfrac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2} g$. Εάν η μάζα M_1 μηδενισθεί και η μάζα $M_2 \neq 0$, η σχέση προβλέπει ότι $\alpha = g$. Σε αυτή την περίπτωση το σώμα 2 εκτελεί ελεύθερη πτώση.

3.24. Πειραματική Επαλήθευση του Δεύτερου Νόμου του Νεύτωνα

Έχοντας μελετήσει τα προηγούμενα παραδείγματα τροχαλιών, μπορούμε να αναλύσουμε την επόμενη διάταξη (Εικόνα 3-58), η οποία χρησιμοποιείται πολύ συχνά στη μελέτη του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα. Το σύστημα είναι παρόμοιο με αυτό του προηγούμενου παραδείγματος, με τη διαφορά ότι το σώμα 2 κινείται σε λείο οριζόντιο τραπέζι ή αεροδιάδρομο.

Τα σώματα 1 και 2 συνδέονται με σχοινί μέσω μιας αβαρούς τροχαλίας. Η τροχαλία χωρίζει το σχοινί σε δύο τμήματα **I** και **II**, με κατακόρυφη και οριζόντια διεύθυνση, αντίστοιχα. Οι μάζες των σωμάτων 1 και 2 είναι M και m και μπορούν να μεταβάλλονται με προσθαφαίρεση σταθμών (μικροί κύλινδροι στο σχήμα).

Το σώμα 1 κινείται κατακόρυφα με επιτάχυνση $\vec{\alpha}_1$, και το σώμα 2 κινείται με οριζόντια επιτάχυνση $\vec{\alpha}_2$. Επειδή το σχοινί παραμένει τεντωμένο, τα σώματα διαγράφουν συνεχώς ίσες, κατά μέτρο, μετατοπίσεις σε ίσα χρονικά διαστήματα. Συνεπώς οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις τους έχουν το ίδιο μέτρο: $|\vec{\alpha}_1| = |\vec{\alpha}_2| = \alpha$.



Εικόνα 3-58
Στη διπλανή διάταξη, τα σώματα 1 και 2 συνδέονται με ένα σχοινί μέσω τροχαλίας. Οι συνολικές μάζες των σωμάτων 1 και 2 είναι αντίστοιχα, M και m. Οι μάζες αυτές μπορούν να μεταβάλλονται με προσθαφαίρεση σταθμών στα δύο σώματα. Τα σώματα 1 και 2 κινούνται με επιταχύνσεις $\vec{\alpha}_1$ και $\vec{\alpha}_2$ αντίστοιχα. Επειδή το σχοινί που συνδέει τα σώματα παραμένει τεντωμένο, οι επιταχύνσεις αυτές έχουν ίσα μέτρα: $|\vec{\alpha}_1| = |\vec{\alpha}_2| = \alpha$. Τα ζεύγη δράσης - αντίδρασης σημειώνονται με ίδιο χρώμα.

Στην Εικόνα 3-58 απεικονίζονται οι δυνάμεις που ασκούνται ανάμεσα στα δύο σώματα και το σχοινί. Το σώμα 1 κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω με την επίδραση του βάρους του $\vec{B}_1$ και εξαναγκάζει σε κίνηση, μέσω του σχοινιού, το σώμα 2. Το σώμα 1 έλκει προς τα κάτω το τμήμα **I** του σχοινιού με μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}_1$. Μέσω της τροχαλίας, η δύναμη αυτή «μεταβιβάζεται» στο οριζόντιο τμήμα **II** του σχοινιού: το τμήμα **II** ασκεί την οριζόντια δύναμη $\vec{T}_2$ στο σώμα 2, η οποία έχει το ίδιο μέτρο με την $\vec{F}_1$: $|\vec{T}_2| = |\vec{F}_1| = T$. Εξ' αιτίας της δύναμης $\vec{T}_2$ το σώμα 2 κινείται με επιτάχυνση $\vec{\alpha}_2$.

Από τον τρίτο νόμο προκύπτει ότι το σώμα 2 ασκεί οριζόντια δύναμη $\vec{F}_2$ στο σχοινί **II**, η οποία συνιστά ζεύγος δράσης - αντίδρασης με την $\vec{T}_2$. Συνεπώς, $|\vec{F}_2| = |\vec{T}_2| = T$. Η δύναμη $\vec{F}_2$ «μεταβιβάζεται» από την τροχαλία, και το σχοινί **I** ασκεί κατακόρυφη δύναμη $\vec{T}_1$ στο σώμα 1 με μέτρο ίσο με αυτό της $\vec{F}_2$: $|\vec{T}_1| = |\vec{F}_2| = T$. Η $\vec{T}_1$ συνιστά ζεύγος δράσης - αντίδρασης με την $\vec{F}_1$.

Στο σώμα 2 ασκούνται επίσης το βάρος του και μια κάθετη δύναμη από το τραπέζι (παραλείπονται στην Εικόνα 3-58). Οι δυνάμεις αυτές είναι αντίθετες και η συνισταμένη τους μηδενίζεται. Το σώμα 2 δεν μετατοπίζεται στην κατακόρυφη διεύθυνση.

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 3-58, στο σώμα 1 ασκούνται οι κατακόρυφες δυνάμεις $\vec{B}_1$ και $\vec{T}_1$. Θα χρησιμοποιήσουμε το σύστημα αξόνων της εικόνας, στο οποίο ο κατακόρυφος άξονας Oy έχει θετική φορά προς τα επάνω. Με αυτή την επιλογή, η συνιστώσα του βάρους B_1 είναι αρνητική ($B_1 = -Mg$) και η συνιστώσα T_1 είναι θετική, $T_1 = T$. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για το σώμα 1 έχει τη μορφή:

$$\vec{B}_1 + \vec{T}_1 = M\vec{\alpha}_1 \Rightarrow B_1 + T_1 = M\alpha_1 \Rightarrow -Mg + T = -M\alpha$$

Στο σώμα 2 ασκείται η οριζόντια δύναμη $\vec{T}_2$ η οποία είναι προσανατολισμένη κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα Ox. O δεύτερος νόμος για το σώμα 2 έχει τη μορφή:

$$\vec{T}_2 = m\vec{\alpha}_2 \Rightarrow T_2 = m\alpha_2 \Rightarrow T = m\alpha$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις, καταλήγουμε στην επόμενη σχέση για το μέτρο των επιταχύνσεων:

Σχέση 1: $$\left.\begin{array}{l} -Mg + T = -M\alpha \\ T = m\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow -Mg = -(M+m)\,\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{M}{M+m}g = \frac{1}{M+m}\left|\vec{B}_1\right|$$

Έχοντας υπολογίσει την επιτάχυνση α μπορούμε να εξαγάγουμε την επόμενη σχέση ανάμεσα στο μέτρο της δύναμης που επιταχύνει το σώμα 2 και τις μάζες των δύο σωμάτων:

Σχέση 2: $$T = m\alpha \Rightarrow T = \frac{mM}{M+m}g$$

Πείραμα 1

Η σχέση 1 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την **πειραματική επαλήθευση του δεύτερου νόμου** του Νεύτωνα. Έστω ότι μεταφέρουμε σταθμά μεταξύ των σωμάτων 1 και 2, έτσι ώστε *να παραμένει σταθερό το άθροισμα μαζών $M+m$.* Η σχέση 1 υποδεικνύει ότι η **μετρούμενη επιτάχυνση α είναι ανάλογη με το μέτρο $\left|\vec{B}_1\right|$ του βάρους του σώματος 1**. Εάν διπλασιασθεί το βάρος $\left|\vec{B}_1\right|$ (υπό σταθερή συνολική μάζα $M+m$) θα διπλασιασθεί η μετρούμενη επιτάχυνση.

Η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης α συναρτήσει του βάρους $\left|\vec{B}_1\right|$ είναι ευθεία γραμμή με κλίση $1/(M+m)$. Συνεπώς, **η μετρούμενη επιτάχυνση είναι αντιστρόφως ανάλογη με το άθροισμα μαζών** $M+m$. Εάν επαναλάβουμε το πείραμα με διπλάσια συνολική μάζα $M+m$, ένα δεδομένο βάρος $\left|\vec{B}_1\right|$ θα προκαλεί επιτάχυνση μέτρου $\alpha/2$.

Πείραμα 2

Ανάμεσα στο σώμα 2 και στο σχοινί **ΙΙ** παρεμβάλλουμε έναν αισθητήρα δύναμης, ο οποίος προσδιορίζει το μέτρο T της δύναμης $\vec{T}_2$. Έστω ότι μεταβάλλουμε τη μάζα m του σώματος 2. Μετρούμε το μέτρο T της δύναμης στο σώμα 2 με τον αισθητήρα και το μέτρο α της επιτάχυνσης με αισθητήρα κίνησης. Η σχέση 2 υποδεικνύει ότι **αυτά τα μέτρα θα είναι ανάλογα μεταξύ τους.** Ο συντελεστής αναλογίας είναι η μάζα m του σώματος 2.

Ερωτήσεις Κατανόησης

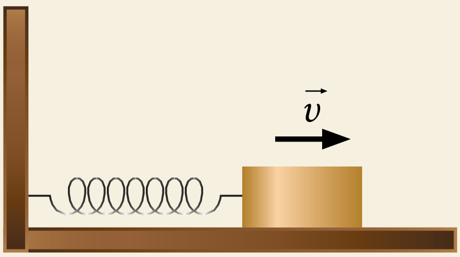
Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με την ένδειξη Σωστό / Λάθος.

Α/Α		Σωστό / Λάθος
1	Οι δυνάμεις δράσης - αντίδρασης ασκούνται στο ίδιο σώμα.	
2	Οι δυνάμεις δράσης - αντίδρασης ασκούνται πάντοτε σε διαφορετικά σώματα.	
3	Ένα φορτηγό μεγάλης μάζας συγκρούεται με ένα αυτοκίνητο πολύ μικρότερης μάζας. Το φορτηγό ασκεί στο αυτοκίνητο πολύ μεγαλύτερη δύναμη από ό,τι το αυτοκίνητο στο φορτηγό.	
4	Οι δυνάμεις δράσης - αντίδρασης που ασκούνται μεταξύ δύο σωμάτων έχουν ίσα μέτρα, ανεξάρτητα από τη μάζα των σωμάτων.	
5	Η επιτάχυνση, που αποκτά ένα σώμα υπό την επίδραση ζεύγους δυνάμεων δράσης-αντίδρασης, είναι μηδενική, επειδή οι δυνάμεις είναι αντίθετες.	
6	Σε ένα διάγραμμα ελεύθερου σώματος συμπεριλαμβάνουμε όλα τα ζεύγη δυνάμεων δράσης - αντίδρασης που ασκούνται στο υπό μελέτη σώμα.	
7	Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα ισχύει μόνο για δυνάμεις επαφής.	
8	Ένα σώμα ισορροπεί σε οριζόντια επιφάνεια. Η αντίδραση στο βάρος του σώματος είναι η κάθετη δύναμη από το έδαφος στο σώμα.	
9	Ένα σώμα πέφτει στην ατμόσφαιρα. Η αντίδραση στο βάρος του σώματος είναι η αντίσταση από τον αέρα στο σώμα.	
10	Όταν ένα σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση, δεν υπάρχει αντίδραση στο βάρος του.	
11	Η αντίδραση στο βάρος ενός σώματος είναι η βαρυτική έλξη από τη Γη στο σώμα.	

12	Η αντίδραση στο βάρος ενός σώματος είναι η βαρυτική έλξη από το σώμα στη Γη.	
13	Ένα τεντωμένο σχοινί έλκει δύο σώματα στερεωμένα στα άκρα του. Οι δυνάμεις από το σχοινί στα σώματα είναι ζεύγος δράσης - αντίδρασης.	
14	Ένας άνθρωπος δένει το άκρο ενός σχοινιού σε ένα δέντρο και τείνει το άλλο άκρο με το χέρι του:	
	α) Το σχοινί δέχεται δύναμη μόνο από το χέρι του ανθρώπου.	
	β) το σχοινί δέχεται την ίδια δύναμη από το χέρι και το δένδρο.	
	γ) το σχοινί δέχεται μεγαλύτερη δύναμη από το δένδρο, επειδή το δένδρο είναι ακλόνητο.	

Ασκήσεις

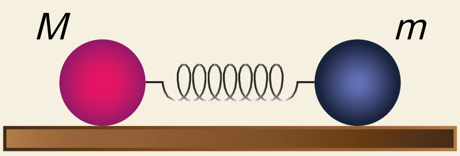
1 Στο σχήμα απεικονίζεται ένα κουτί, το οποίο εφάπτεται με μια **τραχιά** οριζόντια επιφάνεια και με ένα **συσπειρωμένο** ελατήριο, και κινείται στην οριζόντια διεύθυνση στην κατεύθυνση του βέλους.



Α. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το κουτί.

Β. Για κάθε δύναμη που δρα στο κουτί, να προσδιορίσετε τη δύναμη με την οποία συνιστά ζεύγος δράσης - αντίδρασης και να εξηγήσετε σε ποιο σώμα ασκείται.

2 Στο σχήμα απεικονίζονται δύο σφαίρες με μάζες M και m, οι οποίες είναι στερεωμένες στα άκρα ενός **επιμηκυμένου** ελατηρίου **αμελητέας μάζας**. Το έδαφος είναι λείο.

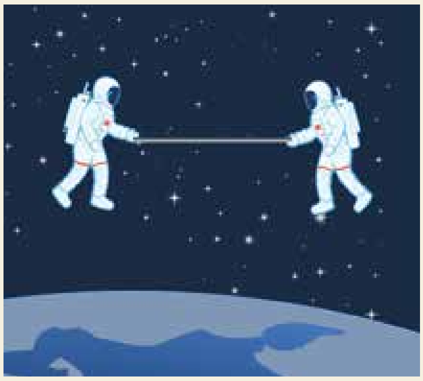


Α. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τις δύο σφαίρες και για το ελατήριο. Να προσδιορίσετε τα ζεύγη δράσης - αντίδρασης και να εξηγήσετε σε ποιό σώμα ασκείται κάθε δύναμη.

Β. Να αποδείξετε ότι οι σφαίρες ασκούν ίσες κατά μέτρο δυνάμεις στο ελατήριο. Να σχεδιάσετε και να συγκρίνετε τις επιταχύνσεις των δύο σφαιρών.

3 Δύο αστροναύτες που εκτελούν εργασίες συντήρησης του διαστημικού σταθμού, αποφασίζουν να παίξουν διελκυστίνδα τραβώντας τα άκρα ενός καλωδίου.

Το καλώδιο είναι μη εκτατό και έχει αμελητέα μάζα. Ο Jim είναι πιο δυνατός και μπορεί να εξασκεί μέγιστη δύναμη μέτρου 700 N. Ο John μπορεί να εξασκεί μέγιστη δύναμη μέτρου 550 N. Μαζί με τη διαστημική τους στολή, οι δύο αστροναύτες έχουν μάζα 200 kg ο καθένας. Αρχικά οι δύο αστροναύτες είναι ακίνητοι.



Να περιγράψετε την κίνηση των δύο αστροναυτών και να προσδιορίσετε τις αρχικές επιταχύνσεις τους, εάν ο κάθε αστροναύτης τραβά το καλώδιο όσο πιο δυνατά μπορεί.

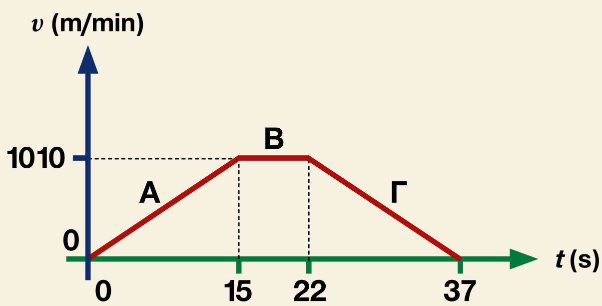
4 Στο πιο κάτω σχήμα απεικονίζεται ένας δαμαστής αλόγων, που προσπαθεί να μετακινήσει ένα ατίθασο άλογο πάνω σε οριζόντιο, τραχύ έδαφος. Και οι δύο ισορροπούν. Το σχοινί έχει αμελητέα μάζα και είναι τεντωμένο.

i. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στον άνθρωπο, στο σχοινί, και στο άλογο.

ii. Να κατατάξετε τις οριζόντιες δυνάμεις σε ζεύγη δράσης - αντίδρασης και να συγκρίνετε τα μέτρα τους.

iii. Ο άνθρωπος καταφέρνει να τραβήξει το άλογο προς την κατεύθυνσή του. Να συγκρίνετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σχοινί από τον άνθρωπο και το άλογο.

5 Ο ταχύτερος ανελκυστήρας του κόσμου είναι εγκατεστημένος στον ουρανοξύστη Taipei 101, στην Ταϊβάν. Ο ανελκυστήρας αναπτύσσει μέγιστη ταχύτητα 1010 m/min και χρειάζεται 37 s για να ανέλθει από αρχικό ύψος 25 m έως το τελικό ύψος 381 m, όπου βρίσκεται το παρατηρητήριο. Το κάτω δεξιά (προσεγγιστικό) διάγραμμα απεικονίζει την ταχύτητα του ανελκυστήρα σαν συνάρτηση του χρόνου.



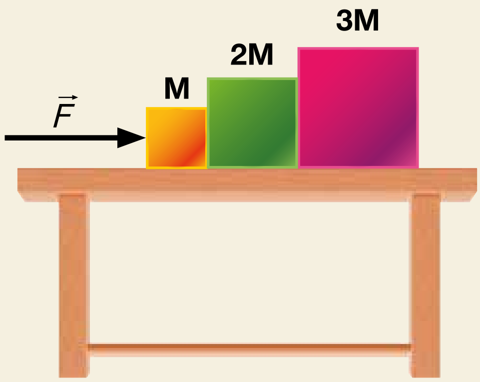
Α. Χρησιμοποιώντας το διάγραμμα, να υπολογίσετε την επιτάχυνση του ανελκυστήρα στα τμήματα της διαδρομής Α και Γ, κατά τα οποία η ταχύτητά του μεταβάλλεται.

Β. Να υπολογίσετε τη δύναμη που νιώθει ένας επιβάτης μάζας 80 kg από το πάτωμα του ανελκυστήρα στα τρία τμήματα της διαδρομής.

6 Ένας φυλακισμένος σκοπεύει να δραπετεύσει από τη φυλακή του. Για τον σκοπό αυτό έχει ετοιμάσει ένα «σχοινί» από σεντόνια.

Το «σχοινί» αντέχει δύναμη μέγιστου μέτρου 600 N. Αν ο φυλακισμένος έχει μάζα 70 kg να βρείτε με ποιά επιτάχυνση χρειάζεται να κατεβαίνει έτσι ώστε να μην σπάσει το σχοινί.

7 Τρεις κύβοι με μάζες M, $2M$, και $3M$ είναι τοποθετημένοι σε λείο οριζόντιο τραπέζι και εφάπτονται μεταξύ τους. Το σύστημα επιταχύνεται υπό την επίδραση οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$, η οποία ασκείται στον κύβο μάζας M.



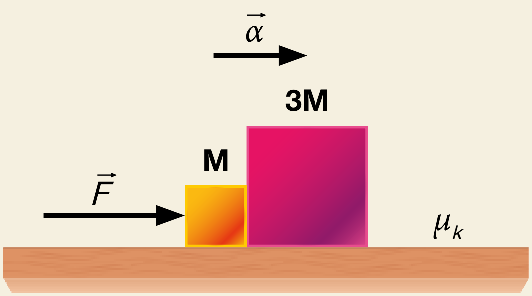
Α. Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για τους τρείς κύβους. Με βάση αυτά τα διαγράμματα, να προσδιορίσετε την επιτάχυνση των κύβων.

Β. Να υπολογίσετε τη συνισταμένη δύναμη στον κύβο μάζας $2M$.

Γ. Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκεί ο κύβος μάζας M στον κύβο μάζας $2M$.

Υπόδειξη: *Όπως στα παραδείγματα, να ξεκινήσετε από τον κύβο στον οποίο ασκείται μόνο μια οριζόντια δύναμη.*

8 Το διπλανό σχήμα απεικονίζει δύο κιβώτια σε επαφή με ένα ανώμαλο τραπέζι. Ο συντελεστής κινητικής τριβής ανάμεσα στα κιβώτια και το τραπέζι ισούται με μ_k.



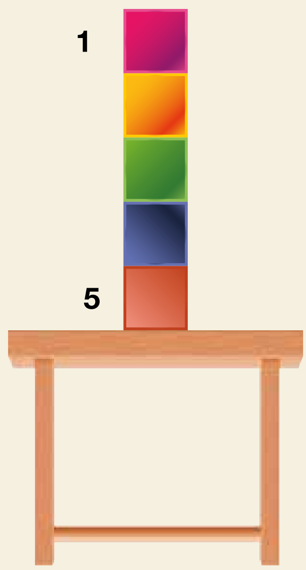
Στο αριστερό κιβώτιο δρα μία οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, όπως στο σχήμα. Η δύναμη προκαλεί κίνηση των δύο κιβωτίων με *κοινή επιτάχυνση* $\vec{\alpha}$. Να υπολογίσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στα δύο κιβώτια και την επιτάχυνση $\vec{\alpha}$.

9 Ένα παιδί φτιάχνει έναν κατακόρυφο πύργο από πέντε όμοιους κύβους που ισορροπούν σε ένα οριζόντιο τραπέζι, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αριθμούμε τους κύβους από 1 έως 5, από την υψηλότερη προς τη χαμηλότερη θέση. Το βάρος κάθε κύβου ισούται με 10 N.

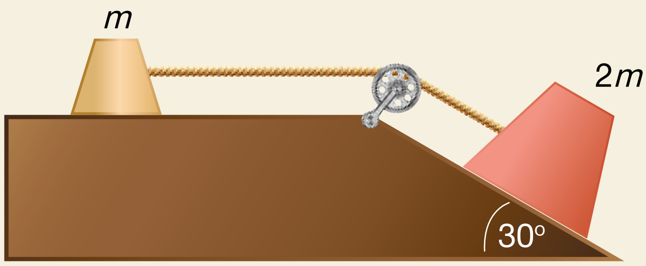
Α. Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στον 2ο κύβο. Να προσδιορίσετε το μέτρο τους και να υπολογίσετε τη συνισταμένη τους.

Β. Να προσδιορίσετε τη δύναμη που ασκεί ο 4ος κύβος πάνω στον 3ο κύβο.

Γ. Να προσδιορίσετε τη δύναμη που ασκεί ο 1ος στον 5ο κύβο.



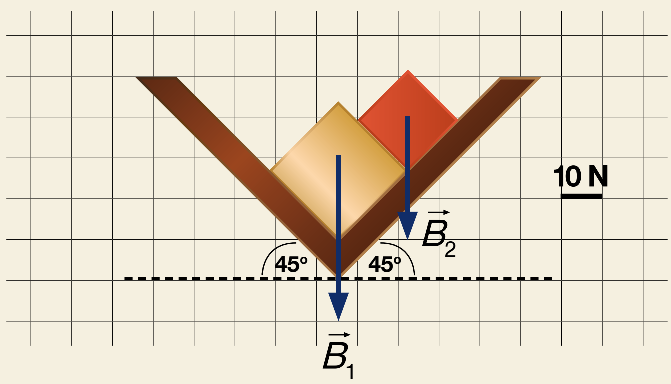
10 Δύο σώματα με μάζες m και $2m$ συνδέονται μεταξύ τους με σχοινιά αμελητέας μάζας, όπως στο σχήμα.



Το σώμα μάζας $2m$ εφάπτεται με κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία 30° με την οριζόντια διεύθυνση, και το σώμα μάζας m εφάπτεται με οριζόντια επιφάνεια. Όλες οι επιφάνειες είναι λείες.

Το σύστημα αφήνεται να κινηθεί ελεύθερα από την ηρεμία. Να προσδιορίσετε την επιτάχυνση των σωμάτων και την τάση του σχοινιού συναρτήσει των μεγεθών m και g.

11 Τα κουτιά του πιο κάτω σχήματος εφάπτονται μεταξύ τους και με δύο λείες επιφάνειες και **ισορροπούν.**



Α. Να υπολογίσετε τα μέτρα των βαρών $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ από τις πληροφορίες του σχήματος.

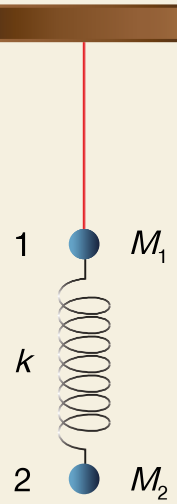
Β. Να καθορίσετε τις δυνάμεις που δρουν στα δύο κουτιά, και να να σχεδιάσετε τα αντίστοιχα διαγράμματα ελεύθερου σώματος, στην προσέγγιση υλικού σημείου.

Γ. Να αναλύσετε τις δυνάμεις πάνω στα κουτιά ως προς κατάλληλο σύστημα αξόνων, και να υπολογίσετε τα μέτρα τους.

12 Το επόμενο σχήμα απεικονίζει δύο σφαίρες που κρέμονται από την οροφή ενός δωματίου. Η σφαίρα 1 έχει μάζα M_1 και κρέμεται μέσω κατακόρυφου νήματος. Η σφαίρα 2 έχει μάζα M_2 και κρέμεται από τη σφαίρα 1 μέσω ελατηρίου με αμελητέα μάζα και σταθερά ελαστικότητας k.

Α. Αρχικά οι σφαίρες ηρεμούν. Χρησιμοποιώντας διαγράμματα ελεύθερου σώματος, να υπολογίσετε την τάση του νήματος $\vec{T}$ στη σφαίρα 1 και την επιμήκυνση του ελατηρίου Δx συναρτήσει των δύο μαζών, της σταθεράς k και της επιτάχυνσης της βαρύτητας g.

Β. Έστω ότι καίμε με ένα σπίρτο το νήμα. Ποια από τις δύο σφαίρες θα έχει μεγαλύτερη αρχική επιτάχυνση και γιατί;



Ερωτήσεις Ελέγχου Κατανόησης Εννοιών

3.11.1. Ένας συμμαθητής σας εξασκεί μία οριζόντια δύναμη σε ένα πολύ βαρύ τραπέζι, αλλά αυτό παραμένει ακίνητο. Ο συμμαθητής σας συμπεραίνει ότι ένα σώμα μεγάλης μάζας παραμένει ακίνητο, ακόμη κι εάν εξασκείται σε αυτό κάποια δύναμη. Είναι σωστό αυτό το συμπέρασμα;

3.11.2. Μία συμμαθήτριά σας ισχυρίζεται ότι για να κινείται με σταθερή ταχύτητα ένα σώμα, χρειάζεται να εξασκείται σε αυτό κάποια δύναμη. Για να υποστηρίξει τη γνώμη της, η συμμαθήτριά σας λέει: «Όταν σπρώχνω ένα καροτσάκι με ψώνια με σταθερή δύναμη, αυτό κινείται με σταθερή ταχύτητα. Όταν σταματώ να το σπρώχνω, το καροτσάκι παύει να κινείται.» Να συζητήσετε κατά πόσο έχει δίκιο η συμμαθήτριά σας.

3.11.3. Ένα παιδί τραβά με ένα σχοινί ένα αυτοκινητάκι και το κινεί σε λείο οριζόντιο έδαφος με οριζόντια επιτάχυνση. Σε κάποια στιγμή το σχοινί κόβεται, και η συνισταμένη δύναμη στο αυτοκινητάκι μηδενίζεται. Ποιο από τα επόμενα είναι σωστό;

(α) Το αυτοκίνητο πρέπει να διατηρήσει την κινητική του κατάσταση, άρα θα συνεχίσει να κινείται με την επιτάχυνση που είχε αμέσως πριν κοπεί το σχοινί.
(β) Για να διατηρήσει την κινητική του κατάσταση το αυτοκίνητο θα συνεχίσει να κινείται με την ταχύτητα που είχε αμέσως πριν κοπεί το σχοινί.
(γ) Επειδή η δύναμη στο αυτοκίνητο μηδενίζεται, η ταχύτητά του ελαττώνεται σταδιακά μέχρι να σταματήσει.

3.13.1. Δύο μπάλες έχουν μάζες m και $2m$. Ένας φίλος σας χρησιμοποιεί τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και συμπεραίνει ότι εάν τις χτυπήσουμε με μία ρακέτα του τένις, οι μπάλες αποκτούν επιταχύνσεις μέτρου $|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\alpha}|/2$. Είναι σωστό αυτό το συμπέρασμα;

3.13.2. Εάν εφαρμόσετε δύναμη μέτρου $|\vec{F}|$ στο αυτοκίνητό σας, αυτό αποκτά επιτάχυνση μέτρου $|\vec{\alpha}|$. Ένας φίλος σας συμπεραίνει ότι για να προσδώσει στο αυτοκίνητό του επιτάχυνση μέτρου $2|\vec{\alpha}|$ πρέπει να του ασκήσει δύναμη μέτρου $2|\vec{F}|$. Είναι σωστό αυτό το συμπέρασμα;

3.15.1. Σε μία ταινία διαστημικής φαντασίας ο Superman σταματά έναν μετεωρίτη που κατευθύνεται προς τη Γη με μεγάλη ταχύτητα, και τον εκτοξεύει μακριά από τη Γη. Ένας φίλος σας λέει ότι εάν ένα σώμα δεν έχει βάρος, μπορούμε να ελαττώσουμε ή να αυξήσουμε την ταχύτητά του εύκολα, ανεξάρτητα από τη μάζα του. Να συζητήσετε κατά πόσο αυτή η γνώμη είναι σωστή.

3.16.1. Δύο χάρτινα κουτιά Α και Β με μάζες m και $2m$ εφάπτονται με μία τραχιά οριζόντια επιφάνεια. Εάν εφαρμόσουμε την ίδια οριζόντια δύναμη στα δύο κουτιά, ποιο από τα επόμενα συμπεράσματα είναι σωστό;

(α) Η στατική τριβή στο κουτί Β έχει συνεχώς διπλάσιο μέτρο από τη στατική τριβή στο κουτί Α.

(β) Στα δύο κουτιά δρουν ίσες δυνάμεις στατικής τριβής.

(γ) Η μέγιστη στατική τριβή στο κουτί Β είναι διπλάσια από τη μέγιστη στατική τριβή στο κουτί Α.

3.19.1. Να εξηγήσετε πώς επιταχύνεται ένας κολυμβητής.

3.19.2. Ένας μαθητής επιχειρηματολογεί ότι η κάθετη δύναμη από το πάτωμα του διαστημοπλοίου, που δρα σε έναν αστροναύτη όταν βρίσκεται στη Γη, είναι αντίδραση στο βάρος του αστροναύτη. Ο μαθητής στηρίζει το επιχείρημά του λέγοντας ότι «σε συνθήκες έλλειψης βαρύτητας ο αστροναύτης έχει μηδενικό βάρος. Η κάθετη δύναμη από το πάτωμα του διαστημοπλοίου μηδενίζεται επίσης». Είναι σωστό αυτό το επιχείρημα;

3.19.3. Αφού όλες οι δυνάμεις εμφανίζονται σε ζεύγη δράσης – αντίδρασης, πώς είναι δυνατόν η συνισταμένη δύναμη, που δρα σε ένα σώμα, να μην είναι πάντα μηδενική;

- **Οι απαντήσεις των ερωτήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου, σελ. 302.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Στο Κεφάλαιο 4:

- **Ορίζουμε** το Έργο Δύναμης και την Κινητική Ενέργεια
- **Αποδεικνύουμε** το θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας για σταθερή και μεταβαλλόμενη συνισταμένη δύναμη
- **Εισάγουμε** την έννοια της διατηρητικής ή συντηρητικής δύναμης
- **Περιγράφουμε** παραδείγματα διατηρητικών δυνάμεων (δύναμη βάρους, δύναμη ελατηρίου)
- **Ορίζουμε** τη Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια και τη Δυναμική Ενέργεια Ελατηρίου
- **Ορίζουμε** τη Μηχανική Ενέργεια συστήματος σωμάτων
- **Συζητούμε** μετατροπές μεταξύ Δυναμικής και Κινητικής Ενέργειας κατά την κίνηση σωμάτων υπό την επίδραση διατηρητικών δυνάμεων (δύναμη βάρους, δύναμη ελατηρίου). Για αυτά τα παραδείγματα κίνησης δείχνουμε ότι η Μηχανική Ενέργεια διατηρείται
- **Λύνουμε** προβλήματα κίνησης χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας
- **Εξηγούμε** ότι όταν επενεργούν επιπρόσθετες δυνάμεις σε ένα σώμα, εκτός του βάρους του και της δύναμης ελατηρίου, η μεταβολή στη Μηχανική Ενέργεια του σώματος ισούται με το έργο αυτών των δυνάμεων
- **Συζητούμε** διάφορες μορφές ενέργειας (Εσωτερική Κινητική Ενέργεια, Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια, Χημική Ενέργεια, Εσωτερική Ενέργεια, Πυρηνική Ενέργεια, Θερμότητα)
- **Συζητούμε** την αρχή της διατήρησης της ενέργειας
- **Παρουσιάζουμε** παραδείγματα μετατροπών μεταξύ μορφών ενέργειας

Όπως μάθαμε στο Κεφάλαιο 3, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα συνδέει το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας ενός σώματος με τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό. Εάν γνωρίζουμε τη συνισταμένη δύναμη, μπορούμε με εφαρμογή του δεύτερου νόμου να προσδιορίσουμε την ταχύτητα του σώματος σαν συνάρτηση του χρόνου.

Στο Κεφάλαιο 2 είχαμε μελετήσει δύο τέτοιες περιπτώσεις κινήσεων: Όταν η συνισταμένη δύναμη στο σώμα είναι μηδενική, η ταχύτητα του σώματος περιγράφεται από τη σχέση ταχύτητας - χρόνου της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης. Όταν η συνισταμένη δύναμη είναι μη μηδενική αλλά σταθερή, η ταχύτητα περιγράφεται από τη σχέση ταχύτητας-χρόνου της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.

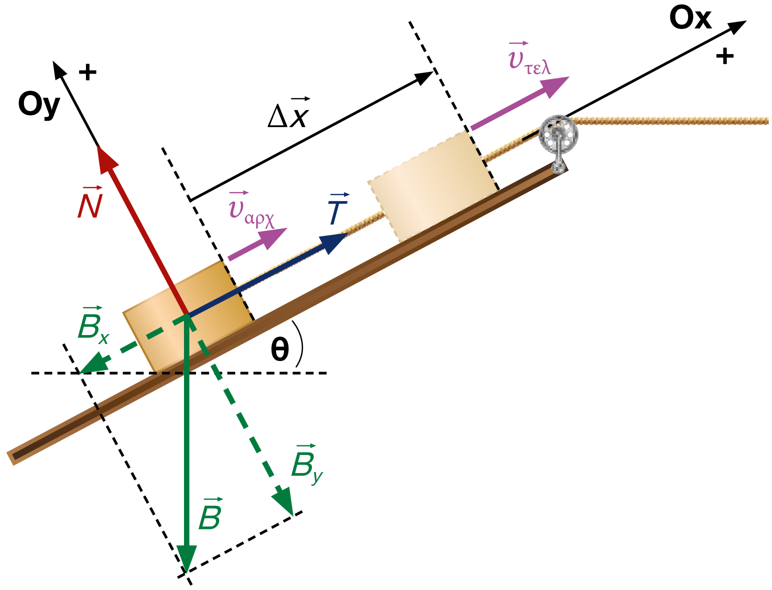
Στη γενικότερη περίπτωση μιας μη σταθερής δύναμης, *η ταχύτητα του σώματος δεν μπορεί να εκφρασθεί με μια απλή σχέση με τον χρόνο*, και ο προσδιορισμός της είναι πιο δύσκολος. Σε πολλά προβλήματα μπορεί να εφαρμοσθεί μια εναλλακτική μέθοδος για τον προσδιορισμό της ταχύτητας ενός σώματος, η οποία δεν απαιτεί τη χρήση του δευτέρου νόμου του Νεύτωνα. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στη θεμελιώδη έννοια της **ενέργειας** και στην **αρχή της διατήρησης της ενέργειας**.

Έργο Δύναμης και Κινητική Ενέργεια

Θα μελετήσουμε διάφορες περιπτώσεις **ευθύγραμμης κίνησης**, στις οποίες ένα σώμα διαγράφει μια μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ υπό την επίδραση μιας συνισταμένης δύναμης. Θα δείξουμε ότι οι τιμές της ταχύτητας του σώματος στην αρχή και το τέλος της μετατόπισης συνδέονται με μια φυσική ποσότητα, που ονομάζεται **Έργο Δύναμης**. Από τη σύνδεση αυτή θα προκύψει η έννοια της **Κινητικής Ενέργειας**. Θεωρούμε πρώτα το πιο κάτω παράδειγμα.

4.1. Σώμα μετατοπίζεται υπό την Επίδραση Σταθερών Δυνάμεων

Η Εικόνα 4-1 απεικονίζει ένα σώμα, το οποίο μετατοπίζεται κατά μήκος ενός λείου κεκλιμένου επιπέδου μέσω σχοινιού. Στο σώμα ασκούνται η τάση από το σχοινί $\vec{T}$, το βάρος του $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το κεκλιμένο επίπεδο. Αναλύουμε αυτές τις δυνάμεις σε συνιστώσες ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων Ox και Oy. **Ο άξονας Ox είναι παράλληλος με τη διεύθυνση της κίνησης** (κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου), και η θετική του φορά συμπίπτει με τη φορά της μετατόπισης. Ο άξονας Oy είναι κάθετος στο κεκλιμένο επίπεδο. Οι θετικές φορές υποδεικνύονται με το «+».



Εικόνα 4-1
Ένα σώμα ανεβαίνει σε λείο κεκλιμένο επίπεδο υπό την επίδραση του βάρους του $\vec{B}$ και μιας σταθερής δύναμης $\vec{T}$.

Η συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης κατά τη διεύθυνση του άξονα Oy είναι ίση με μηδέν, $\sum\vec{F}_y = \vec{N} + \vec{B}_y = \vec{0}$, και το σώμα δεν μετατοπίζεται σε αυτή τη διεύθυνση. Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox. Εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη διεύθυνση Ox:

$$\sum\vec{F}_x = m\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{B}_x + \vec{T} = m\vec{\alpha} \Rightarrow B_x + T = m\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{B_x + T}{m}$$

Η τελευταία ισότητα συνδέει την **αλγεβρική τιμή** της επιτάχυνσης με τις **συνιστώσες** της δύναμης του βάρους και της τάσης του νήματος στον άξονα Ox.

Ερώτηση
Ποια είναι τα πρόσημα των μεγεθών της τελευταίας ισότητας;

Λαμβάνοντας υπ΄ όψη τη θετική φορά του άξονα Ox, προκύπτει ότι $T > 0$ και $B_x < 0$. Το πρόσημο της επιτάχυνσης α είναι θετικό εάν $B_x + T > 0$, και αρνητικό στην αντίθετη περίπτωση.

Έστω ότι το σώμα μετατοπίζεται κατά $\Delta\vec{x}$ κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Από τη μελέτη της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης στο Κεφάλαιο 2, γνωρίζουμε ότι η αρχική και τελική ταχύτητα του σώματος, $\upsilon_{\alpha\rho\chi}$ και $\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}$, ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση:

$$2\alpha\Delta x = \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 \Rightarrow 2\,\frac{B_x + T}{m}\,\Delta x = \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 \Rightarrow$$

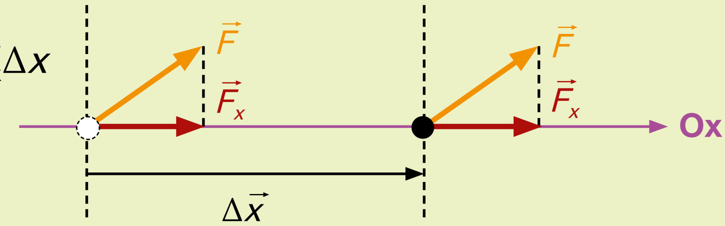
$$B_x\Delta x + T\Delta x = \frac{1}{2}\,m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}\,m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2$$

Στο αριστερό μέλος της τελευταίας εξίσωσης εμφανίζονται γινόμενα της μορφής $F_x\Delta x$, τα οποία περιέχουν την **αλγεβρική τιμή** της μετατόπισης Δx και τις συνιστώσες F_x των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα **κατά τη διεύθυνση της μετατόπισης** (άξονας Ox). Στο δεξιό μέλος εμφανίζεται η μεταβολή της ποσότητας $1/2m\upsilon^2$. Η εξίσωση **συνδέει τη μετατόπιση του σώματος με την ταχύτητά του**, και επιτρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα του σώματος σαν συνάρτηση της μετατόπισής του, **χωρίς να χρειάζεται να λύσουμε τις εξισώσεις του Νεύτωνα** για το σώμα. Αυτή η διαπίστωση οδηγεί στον ορισμό δύο πολύ σημαντικών φυσικών ποσοτήτων, του **Έργου Δύναμης** και της **Κινητικής Ενέργειας**.

4.2. Έργο Σταθερής Δύναμης

Έστω ότι σε ένα σώμα ασκείται κάποια σταθερή δύναμη $\vec{F}$, και το σώμα μετατοπίζεται κατά $\Delta\vec{x}$. Ως **έργο της σταθερής δύναμης** $\vec{F}$ **ορίζουμε** το γινόμενο της αλγεβρικής τιμής της μετατόπισης Δx επί τη συνιστώσα F_x της δύναμης κατά τη διεύθυνση της μετατόπισης. Εξ΄ ορισμού, **το έργο της κάθετης στη μετατόπιση συνιστώσας μιας δύναμης είναι ίσο με μηδέν.**

$$W = F_x\Delta x$$



Στο παράδειγμα της Εικόνας 4.1, το έργο της κάθετης δύναμης $\vec{N}$ και το έργο της διανυσματικής συνιστώσας του βάρους $\vec{B}_y$ είναι ίσα με μηδέν, αφού οι δυνάμεις αυτές είναι κάθετες στη διεύθυνση της μετατόπισης.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερώτηση 4.2.1., σελ. 294.

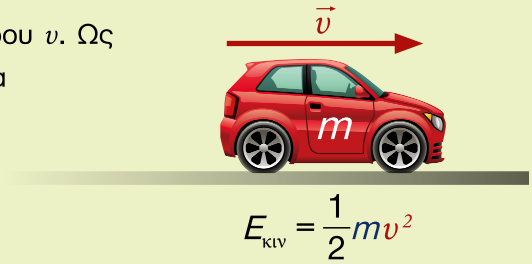
4.3. Μονάδα Μέτρησης του Έργου

Το έργο είναι μονόμετρο μέγεθος. Θα το συμβολίζουμε με το γράμμα *W* από την αγγλική λέξη *Work*. Η μονάδα έργου στο σύστημα SI είναι το Joule. Από τον ορισμό του έργου προκύπτει ότι 1 Joule = 1 N x 1 m. Το Joule συμβολίζεται και απλούστερα ως J.

4.4. Κινητική Ενέργεια Σώματος

Έστω ότι ένα σώμα μάζας m κινείται με ταχύτητα μέτρου υ. Ως **Κινητική Ενέργεια** του σώματος **ορίζουμε** την ποσότητα

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} m\upsilon^2$$



Η Κινητική Ενέργεια έχει ως μονάδα μέτρησης το Joule, όπως το έργο:

$$\text{kg x (m/s)}^2 = \underbrace{\text{kg x (m/s}^2)}_{=1\,\text{N}} \text{ x m} = \text{N x m} = \text{Joule}$$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 4.4.1. - 4.4.4., σελ. 294.

4.5. Το Έργο Δύναμης μπορεί να έχει Θετική, Αρνητική, ή Μηδενική Τιμή

Θετικό Έργο

Η Εικόνα 4-2 απεικονίζει διάφορες περιπτώσεις σωμάτων τα οποία μετακινούνται υπό την επίδραση μιας δύναμης. Ο κηπουρός της Εικόνας 4-2(α) σπρώχνει ένα καροτσάκι, ασκώντας του δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 100 N. Η διεύθυνση της δύναμης σχηματίζει γωνία 30° με την οριζόντια διεύθυνση, και το καροτσάκι μετακινείται οριζόντια κατά 2 m.

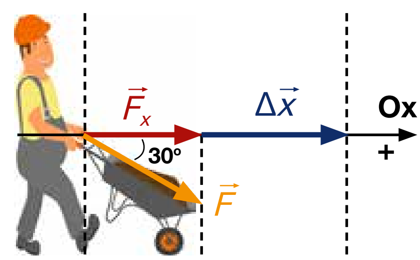
Σχεδιάζουμε τον άξονα Ox κατά τη διεύθυνση της μετατόπισης, και επιλέγουμε ως θετική τη φορά της μετατόπισης. Η συνιστώσα $\vec{F}_x$ της δύναμης ως προς τον άξονα Ox έχει την ίδια φορά με τη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ και η αλγεβρική της τιμή ισούται με

$$F_x = +|\vec{F}|\sigma\upsilon\nu 30° = 100 \text{ x } 0{,}866 \text{ N} = 86{,}6 \text{ N}$$

Επειδή η διανυσματική συνιστώσα $\vec{F}_x$ είναι **ομόρροπη** με τη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$, το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι **θετικό** και ισούται με

$$W = F_x \Delta x = 86{,}6 \text{ N x } 2 \text{ m} = 173{,}2 \text{ J}$$

(α)

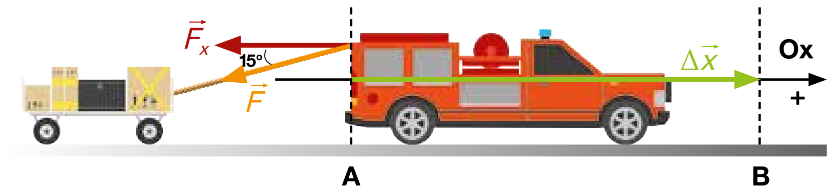


Εικόνα 4-2
(α) Ο κηπουρός μετακινεί το καροτσάκι κατά $\Delta\vec{x}$ ασκώντας μια πλάγια δύναμη που σχηματίζει γωνία 30° με την οριζόντια διεύθυνση. Η συνιστώσα $\vec{F}_x$ είναι ομόρροπη με τη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ και το έργο είναι θετικό.

Το έργο μιας δύναμης που ασκείται σε ένα κινούμενο σώμα είναι **θετικό**, εάν η συνιστώσα της δύναμης κατά τη διεύθυνση της μετατόπισης του σώματος είναι **ομόρροπη** με τη μετατόπιση. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι **η δύναμη παράγει έργο**.

Αρνητικό Έργο

Η Εικόνα 4-2(β) απεικονίζει ένα αυτοκίνητο που έλκει ένα καροτσάκι. Το καροτσάκι ασκεί στο αυτοκίνητο, μέσω του σχοινιού, μια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 800 N. Η διεύθυνση της δύναμης σχηματίζει γωνία 15° με την οριζόντια διεύθυνση. Το αυτοκίνητο μετακινείται οριζόντια κατά 8 m από το σημείο Α στο Β, όπως στο σχήμα.



Εικόνα 4-2
(β) Η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται από το σχοινί στο αυτοκίνητο, είναι **αντίρροπη** με τη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ του αυτοκινήτου. Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι **αρνητικό**.

Για να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ σχεδιάζουμε έναν άξονα Ox κατά τη διεύθυνση της μετατόπισης, και επιλέγουμε ως θετική τη φορά τη μετατόπισης. Η συνιστώσα $\vec{F}_x$ της δύναμης ως προς τον άξονα αυτό έχει αντίθετη φορά από τη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ και η αλγεβρική της τιμή είναι

$$F_x = -\left|\vec{F}\right|\sigma\upsilon\nu 15^o = (-800\text{ N})\times 0{,}966 = -772{,}7\text{ N}$$

Επειδή η συνιστώσα $\vec{F}_x$ και η μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ είναι αντίρροπες, το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι αρνητικό και ισούται με

$$W = F_x\Delta x = (-772{,}7\text{ N})\times(8\text{ m}) = -6181{,}9\text{ J}$$

Το έργο μιας δύναμης που ασκείται σε ένα κινούμενο σώμα είναι **αρνητικό**, εάν η συνιστώσα της δύναμης κατά μήκος της μετατόπισης του σώματος είναι **αντίρροπη** με τη μετατόπιση. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι η **δύναμη καταναλώνει έργο**.

Σημαντική παρατήρηση
Η σχέση ορισμού του έργου $W = F_x\Delta x$ είναι εύχρηστη, διότι έχει **πάντα την ίδια μορφή**, $W = F_x\Delta x$, ανεξάρτητα από τη φορά της μετατόπισης και της δύναμης.

- Το **πρόσημο** του έργου W προκύπτει από τα πρόσημα της μετατόπισης Δx και της συνιστώσας F_x της δύναμης, κατά τη διεύθυνση της μετατόπισης.

Αντιστρόφως, από τη σχέση ορισμού $W = F_x \Delta x$ μπορεί να υπολογισθεί αμέσως:

- Η αλγεβρική τιμή της συνιστώσας F_x , αν είναι γνωστό το έργο και η μετατόπιση:

$$F_x = W / \Delta x$$

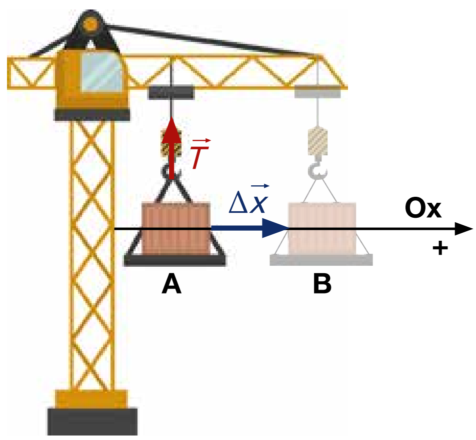
- Η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης Δx , αν είναι γνωστό το έργο και η συνιστώσα F_x :

$$\Delta x = W / F_x$$

Θα μελετήσουμε σχετικά παραδείγματα στις Ενότητες **4.6** και **4.9.**

Μηδενικό Έργο

Η Εικόνα 4-2(γ) απεικονίζει έναν γερανό από τον οποίο, κρέμεται ένα κιβώτιο. Η πλατφόρμα του γερανού ολισθαίνει με σταθερή οριζόντια ταχύτητα, μετακινώντας οριζόντια το κιβώτιο από το σημείο Α στο σημείο Β. Ο γάντζος ασκεί στην πλατφόρμα μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{T}$. Επειδή η δύναμη αυτή είναι κάθετη στη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$, η συνιστώσα T_x κατά μήκος της μετατόπισης είναι ίση με μηδέν. Συνεπώς, το έργο της δύναμης $\vec{T}$ είναι ίσο με μηδέν: $W = T_x \Delta x = 0$.



Εικόνα 4-2
(γ) Η δύναμη $\vec{T}$ από τον γάντζο στην πλατφόρμα, είναι κάθετη στη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ του κιβωτίου. Το έργο της δύναμης $\vec{T}$ είναι ίσο με μηδέν.

Το έργο μιας δύναμης που ασκείται σε ένα κινούμενο σώμα είναι ίσο με **μηδέν**, εάν η δύναμη είναι συνεχώς **κάθετη** στη μετατόπιση του σώματος.

Εάν η πλατφόρμα του γερανού είναι ακίνητη, το έργο της δύναμης $\vec{T}$ είναι επίσης ίσο με μηδέν, επειδή το σημείο εφαρμογής της δύναμης δεν μετατοπίζεται.

Το έργο μιας δύναμης που ασκείται σε ένα σώμα είναι ίσο με **μηδέν**, εάν το σημείο εφαρμογής της δύναμης είναι ακίνητο.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 4.5.1. - 4.5.2., σελ. 294.

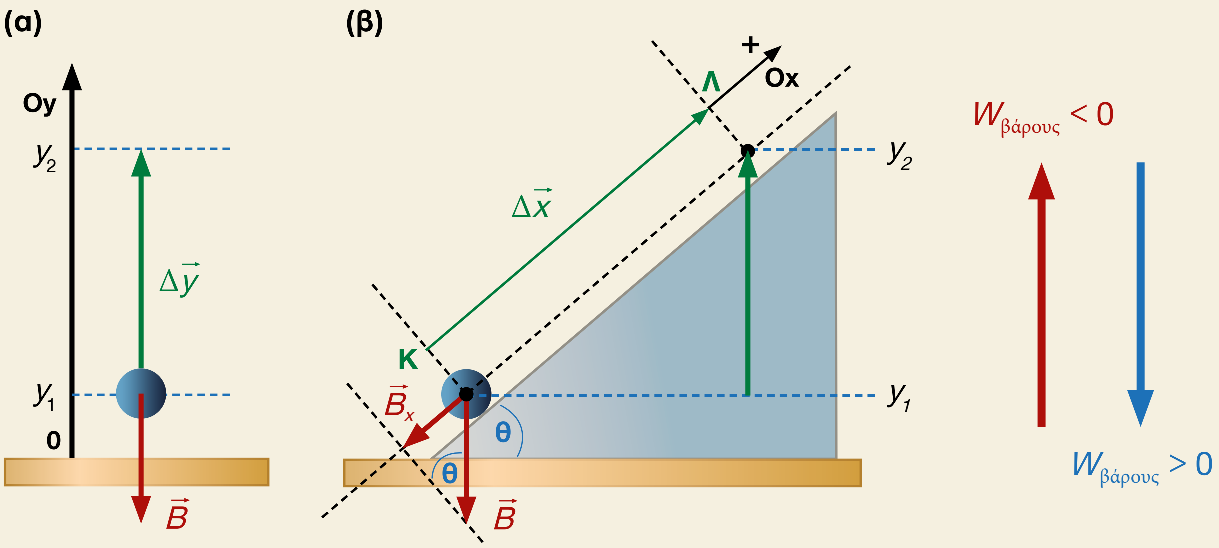
Παράδειγμα 1
Έργο Βάρους

(α) Κατακόρυφη Μετατόπιση

Το σχήμα **(α)** απεικονίζει μια σφαίρα, η οποία μετακινείται κατά μήκος κατακόρυφης ευθείας από αρχικό ύψος y_1 σε τελικό ύψος y_2 .

Θεωρούμε τον κατακόρυφο άξονα Oy, θέτουμε ως σημείο αναφοράς ($y = 0$) το έδαφος, και επιλέγουμε ως θετική τη φορά προς τα επάνω (η οποία συμπίπτει με τη φορά της μετατόπισης). Το βάρος της σφαίρας έχει αρνητική αλγεβρική τιμή $B = -mg$ και η μετατόπιση έχει αλγεβρική τιμή $\Delta y = y_2 - y_1$. Με βάση τα προηγούμενα, το έργο του βάρους ισούται με

$$W = B\Delta y = -mg\,(y_2 - y_1)$$



$B = -mg$

$\Delta y = y_2 - y_1$

$W_{βάρους} = B\Delta y$

$= -mg\,(y_2 - y_1)$

$$\left.\begin{aligned} B_x &= -mg\,ημθ \\ \Delta x = \mathrm{K\Lambda} &= \frac{y_2 - y_1}{ημθ} \end{aligned}\right\} \Rightarrow W_{βάρους} = B_x \Delta x = (-mg\,ημθ)\,\frac{y_2 - y_1}{ημθ} = -mg\,(y_2 - y_1)$$

Το **έργο του βάρους** ενός σώματος είναι αρνητικό, όταν το σώμα μεταβαίνει από μικρότερο σε μεγαλύτερο ύψος, επειδή το βάρος έχει αντίθετη κατεύθυνση από τη μετατόπιση. Στην αντίθετη περίπτωση το έργο του βάρους είναι θετικό.

(β) Μετατόπιση κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου
Στο σχήμα **(β)**, το ίδιο σώμα ανυψώνεται κατά την ίδια απόσταση κατά μήκους του κεκλιμένου επιπέδου ΚΛ.

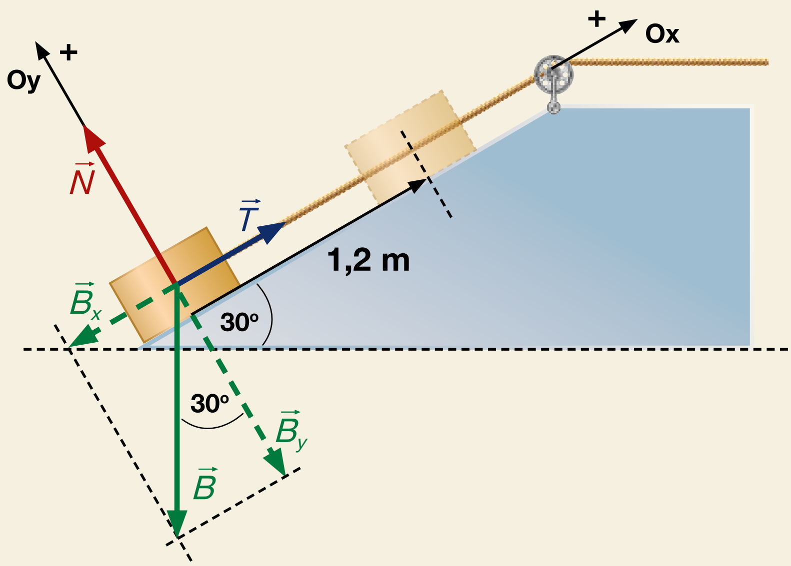
Η συνιστώσα του βάρους του σώματος κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου ισούται με $B_x = -\,mg\,ημθ$, και η μετατόπιση του σώματος ισούται με $Δx = ΚΛ = (y_2 - y_1)/$ ημθ. Συνεπώς, το έργο του βάρους του σώματος ισούται με

$$W_{βάρους} = B_x Δx = (-\,mg\,ημθ)\,\frac{y_2 - y_1}{ημθ} = -mg\,(y_2 - y_1)$$

Να παρατηρήσετε ότι το **έργο του βάρους εξαρτάται μόνο από τη διαφορά** $y_2 - y_1$ **του τελικού από το αρχικό ύψος**. Αργότερα θα δείξουμε ότι αυτό το αποτέλεσμα ισχύει για οποιαδήποτε διαδρομή που συνδέει την ίδια αρχική και τελική θέση.

Παράδειγμα 2
Έργο Δυνάμεων σε Σώμα που κινείται σε Κεκλιμένο Επίπεδο

Ένα δοχείο μάζας 0,85 kg ρυμουλκείται μέσω σχοινιού με **σταθερή ταχύτητα** κατά μήκος *λείου* κεκλιμένου επιπέδου 30°. Το δοχείο μετακινείται σε απόσταση 1,2 m κατά μήκος του επιπέδου. Στο δοχείο ασκούνται η δύναμη $\vec{T}$ από το σχοινί, το βάρος του $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το επίπεδο. Θα υπολογίσουμε το έργο των δυνάμεων αυτών.



Θεωρούμε ως θετική τη φορά της μετατόπισης του δοχείου. Επιλέγουμε τον άξονα Ox παράλληλο με τη μετατόπιση και τη θετική του φορά να συμπίπτει με αυτή της μετατόπισης. Ο άξονας Oy είναι κάθετος στον Ox. Οι θετικές φορές των αξόνων υποδεικνύονται ως «+».

Επειδή έχουμε επιλέξει ως θετική φορά του άξονα Οx τη φορά της κίνησης, η συνιστώσα B_x του βάρους έχει αλγεβρική τιμή $B_x = -|\vec{B}|\,\eta\mu 30^o = -\,mg\,\eta\mu 30^o$. Έτσι, το έργο του βάρους είναι:

$$W_{\vec{B}} = B_x \Delta x = (-\,mg\,\eta\mu 30^o)\,\Delta x = -\,(0{,}85\text{ kg}) \times (9{,}81\text{ m/s}^2) \times 0{,}5 \times (1{,}2\text{ m}) = -\,5{,}0\text{ J}$$

Το έργο του βάρους είναι αρνητικό, επειδή η διανυσματική συνιστώσα $\vec{B}_x$ είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$.

Το δοχείο μετακινείται με σταθερή ταχύτητα. Συνεπώς, από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, προκύπτει ότι η τάση του σχοινιού είναι αντίθετη με τη συνιστώσα B_x

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x + T = 0 \Rightarrow T = -\,B_x \Rightarrow T = +mg\,\eta\mu 30^o$$

Το έργο της τάσης του σχοινιού είναι αντίθετο με το έργο του βάρους:

$$T = -\,B_x \Rightarrow T\Delta x = -\,B_x \Delta x \Rightarrow W_{\vec{T}} = -W_{\vec{B}} = +5{,}0\text{ J}$$

Το έργο της τάσης είναι θετικό, επειδή η τάση $\vec{T}$ είναι ομόρροπη με τη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$.

Επειδή η δύναμη $\vec{N}$ είναι κάθετη στη μετατόπιση, το έργο αυτής της δύναμης είναι ίσο με μηδέν, $W_{\vec{N}} = 0$.

4.7. Συνήθεις Παρανοήσεις που σχετίζονται με την Έννοια του Έργου στην Καθημερινή Ζωή

Στην καθημερινή ζωή συνδέουμε συχνά το έργο μίας δύναμης με το αίσθημα της κόπωσης που μας προκαλεί. Όπως εξηγούμε στις επόμενες ερωτήσεις, είναι δυνατόν η εφαρμογή μίας δύναμης να προκαλεί κόπωση, ακόμη κι εάν η δύναμη αυτή δεν παράγει έργο.

Ερώτηση 1

Ο άνθρωπος της διπλανής εικόνας κρατά ένα καλάθι με ψώνια και παραμένει ακίνητος. Ο άνθρωπος ασκεί στο καλάθι τη δύναμη $\vec{F}$ η οποία είναι αντίθετη με το συνολικό βάρος $\vec{B}$ του καλαθιού.

i. Ποιο είναι το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τον άνθρωπο στο καλάθι;

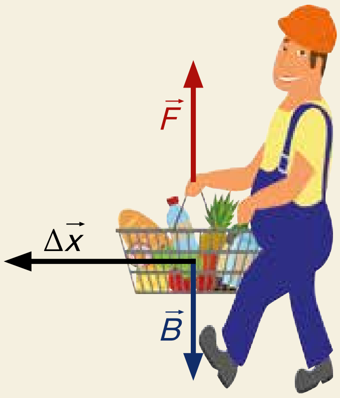
ii. Μετά από λίγη ώρα, ο άνθρωπος νιώθει κουρασμένος. Σχετίζεται το αίσθημα και το μέγεθος της κούρασής του με το έργο της $\vec{F}$;

Απάντηση

Επειδή το καλάθι είναι ακίνητο, **το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι ίσο με μηδέν**. Το αίσθημα της κούρασης προέρχεται από το γεγονός ότι ο άνθρωπος πρέπει να διατηρεί τους μύες του σε συστολή, έτσι ώστε να εξασκούν τη δύναμη $\vec{F}$ για πολλή ώρα, και εξαρτάται από το μέγεθος της δύναμης που πρέπει να εξασκήσει. **Το αίσθημα της κούρασης δεν είναι αντιπροσωπευτικό κριτήριο για το μέγεθος του έργου μιας δύναμης που ασκεί ένας άνθρωπος.**

Ερώτηση 2

Ένας άνθρωπος περπατά σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα, κρατώντας ένα καλάθι με ψώνια. Κατά τη διάρκεια του βαδίσματός του μετακινεί οριζόντια το καλάθι, ασκώντας του την δύναμη $\vec{F}$. Εάν η οριζόντια μετατόπιση του καλαθιού είναι $\Delta\vec{x}$, ποιο είναι το έργο της δύναμης $\vec{F}$; Σχετίζεται το αίσθημα της κούρασης που νιώθει ο άνθρωπος με το έργο αυτής της δύναμης;



Απάντηση

Επειδή ο άνθρωπος μετακινεί το καλάθι οριζόντια με σταθερή ταχύτητα, η δύναμη $\vec{F}$ δεν έχει οριζόντια συνιστώσα και είναι αντίθετη με το βάρος του καλαθιού. Επειδή η δύναμη $\vec{F}$ είναι κάθετη στη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$, **το έργο της είναι ίσο με μηδέν**. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, το αίσθημα της κούρασης προέρχεται από το γεγονός ότι οι μύες των χεριών του ανθρώπου συστέλλονται για να εξασκούν τη δύναμη αυτή για πολλή ώρα, και δεν είναι αντιπροσωπευτικό κριτήριο για το μέγεθος του έργου της δύναμης $\vec{F}$.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερώτηση 4.7.1., σελ. 295.

4.8. Το Θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας

Στο παράδειγμα της Εικόνας 4-1, είχαμε καταλήξει στη σχέση

$$B_x\Delta x + T\Delta x = \frac{1}{2}m\upsilon^2_{\tau\varepsilon\lambda} - \frac{1}{2}m\upsilon^2_{\alpha\rho\chi}$$

Η ποσότητα $B_x\Delta x + T\Delta x$ *είναι το άθροισμα των έργων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα, ή ισοδύναμα το έργο της συνισταμένης δύναμης* $\sum\vec{F} = \vec{N} + \vec{B} + \vec{T} = \vec{B}_x + \vec{T}$. Η ποσότητα $\frac{1}{2}m\upsilon^2_{\tau\varepsilon\lambda} - \frac{1}{2}m\upsilon^2_{\alpha\rho\chi}$ είναι η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του σώματος, $\Delta E_{\kappa\iota\nu}$. Η ισότητα αυτή οδηγεί στο εξής **Θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας**.

Θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας για Σταθερή Συνισταμένη Δύναμη

Όταν ένα σώμα μετατοπίζεται κατά $\Delta\vec{x}$ υπό την επίδραση πολλών σταθερών δυνάμεων, η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του σώματος ισούται με το συνολικό έργο των δυνάμεων αυτών, ή ισοδύναμα με το έργο της συνισταμένης δύναμης:

$$W = \sum(F_x\Delta x) = \left(\sum F_x\right)\Delta x = \Delta E_{\kappa\iota\nu}$$

Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα Έργου - Κινητικής ενέργειας για τη συνισταμένη πολλών δυνάμεων, μπορούμε να υπολογίσουμε ξεχωριστά το έργο κάθε δύναμης και να προσθέσουμε αλγεβρικά τα επιμέρους έργα. Εναλλακτικά, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συνισταμένη δύναμη και να υπολογίσουμε το έργο της, όπως θα δούμε σε παραδείγματα που ακολουθούν.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 4.8.1. - 4.8.3., σελ. 295.

4.9. Εφαρμογές του Θεωρήματος Έργου - Κινητικής Ενέργειας σε Προβλήματα Κίνησης

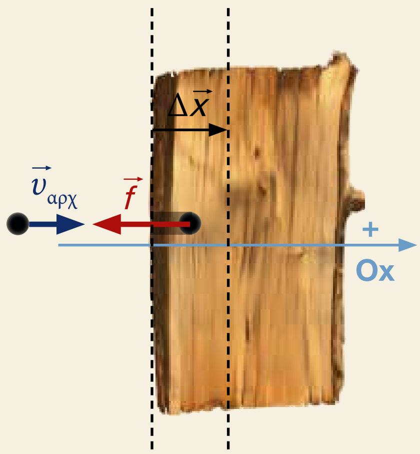
Όταν ένα σώμα κινείται υπό την επίδραση μιας συνισταμένης δύναμης, μπορούμε να προσδιορίσουμε την ταχύτητά του χρησιμοποιώντας το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας.

Παράδειγμα 1

Υπολογισμός της Ταχύτητας από τη Μεταβολή Κινητικής Ενέργειας

Ένα καρότσι μάζας 24 kg ξεκινά από πρεμία και μετακινείται σε οριζόντια διεύθυνση κατά 1 m υπό την επίδραση σταθερής οριζόντιας συνισταμένης δύναμης, μέτρου 48 N. Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας, μπορούμε να υπολογίσουμε την τελική ταχύτητα του καροτσιού:

$$W = E^{\text{κιν}}_{\text{τελ}} - E^{\text{κιν}}_{\text{αρχ}} \Rightarrow F\Delta x = \frac{1}{2}\, m\upsilon^2_{\text{τελ}} \Rightarrow \upsilon_{\text{τελ}} = \sqrt{\frac{2F\Delta x}{m}} = \sqrt{\frac{2 \text{ x } 48 \text{ x } 1}{24}\,\frac{\text{N m}}{\text{kg}}} = \sqrt{4\,\frac{\text{kg (m/s}^2\text{) m}}{\text{kg}}} = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Παράδειγμα 2

Εκτίμηση της Συνισταμένης Δύναμης που ασκείται σε Σώμα για να το ακινητοποιήσει

Μια σφαίρα μάζας 20 g, που κινείται με οριζόντια ταχύτητα 500 m/s, προσκρούει σε έναν ξύλινο κορμό. Η σφαίρα εισχωρεί ευθύγραμμα και οριζόντια μέσα στον κορμό μέχρι ένα τελικό βάθος 10 cm, στο οποίο ακινητοποιείται. Θεωρούμε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης της σφαίρας μέσα στον κορμό ασκείται πάνω της σταθερή συνισταμένη δύναμη $\vec{f}$ που είναι αντίρροπη, προς τη μετατόπισή της $\Delta\vec{x}$. Θα υπολογίσουμε το μέτρο της δύναμης $\vec{f}$.

Επιλέγουμε τον άξονα Ox παράλληλο με τη μετατόπιση, και τη θετική φορά να συμπίπτει με αυτή της μετατόπισης. Με αυτή την επιλογή, η μετατόπιση είναι θετική ($\Delta x = +10$ cm) και η $\vec{f}$ έχει αρνητική αλγεβρική τιμή $f < 0$. Το έργο της $\vec{f}$ ισούται με $W = f\,\Delta x$. Από το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας:

$$W = E^{\text{κιν}}_{\text{τελ}} - E^{\text{κιν}}_{\text{αρχ}} \Rightarrow f\Delta x = \underbrace{\frac{1}{2}\, m\upsilon^2_{\text{τελ}}}_{=0} - \frac{1}{2}\, m\upsilon^2_{\text{αρχ}} \Rightarrow f = -\frac{1}{2}\,\frac{m\upsilon^2_{\text{αρχ}}}{\Delta x} = -\frac{(0{,}02 \text{ kg}) \text{ x } (500 \text{ m/s})^2}{2 \text{ x } (0{,}10 \text{ m})} = -25\,000 \text{ N}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η δύναμη έχει αντίθετη φορά από τη μετατόπιση.

Η δύναμη που ασκεί ο κορμός στη σφαίρα είναι τεράστια. Από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, συμπεραίνουμε οτι η σφαίρα ασκεί μια δύναμη ίσου μέτρου στον κορμό! Σε τέτοιες δυνάμεις οφείλεται η καταστρεπτική ικανότητα μιας σφαίρας.

Παράδειγμα 3

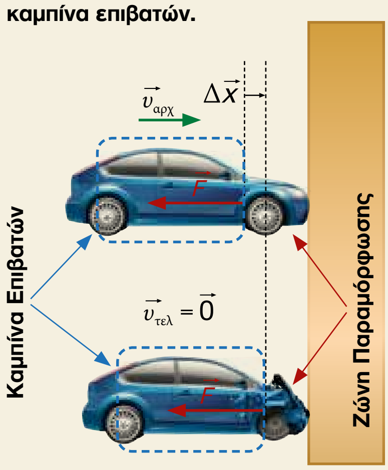
Προστατευτικά Τμήματα στα Σύγχρονα Αυτοκίνητα

Τα αυτοκίνητα που κατασκευάζονται με σύγχρονες προδιαγραφές διαθέτουν προστατευτικές «ζώνες παραμόρφωσης» (crumble zones) στο μπροστινό και πίσω μέρος τους, δηλαδή τμήματα (π.χ. προφυλακτήρες) κατασκευασμένα από εύκαμπτα υλικά. Κατά τη διάρκεια ενός ατυχήματος τα τμήματα αυτά συμπιέζονται σε μεγάλο βαθμό, επιτρέποντας στην καμπίνα των επιβατών να διανύει μεγαλύτερη απόσταση προτού ακινητοποιηθεί. Με αυτό τον τρόπο ελαττώνεται σημαντικά η μέση δύναμη που ασκείται στην καμπίνα (και στους επιβάτες), όπως εξηγούμε σε αυτό το παράδειγμα.

Παραμόρφωση του μπροστινού μέρους αυτοκινήτου σε έλεγχο σύγκρουσης (crash test).

Α. Ένα αυτοκίνητο συγκρούεται με έναν ακλόνητο τοίχο. Τη στιγμή της σύγκρουσης, το αυτοκίνητο κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου 15 m/s. Το μπροστινό μέρος του αυτοκινήτου (ζώνη παραμόρφωσης) συμπιέζεται και επιτρέπει στην καμπίνα των επιβατών να διαγράψει οριζόντια μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ με μέτρο 0,45 m, μέχρι να ακινητοποιηθεί. Κατά τη διάρκεια αυτής της μετακίνησης, η καμπίνα δέχεται μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ από το μπροστινό μέρος (θεωρούμε σταθερό το μέτρο της δύναμης).

Απόσταση εφαρμογής της δύναμης $\vec{F}$ από τη ζώνη παραμόρφωσης στην καμπίνα επιβατών.



Θα υπολογίσουμε την αλγεβρική τιμή της δύναμης $\vec{F}$ για την περίπτωση που η συνολική μάζα της καμπίνας και των επιβατών είναι 2000 kg. Υπολογίζουμε πρώτα το έργο της $\vec{F}$ από το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας, λαμβάνοντας υπόψη ότι η τελική ταχύτητα της καμπίνας έχει μηδενική τιμή:

$$W = \underbrace{E^{κιν}_{τελ}}_{=0} - E^{κιν}_{αρχ} = -\frac{1}{2}m\upsilon^2_{αρχ} = -\ (1000\ \text{kg})\ \text{x}\ (15\ \text{m/s})^2 = -225\,000\ \underbrace{\text{kg m/s}^2}_{=1\,\text{N}}\ \text{m} = -225\,000\ \text{Joule}$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα για το έργο, προκύπτει η μέση δύναμη:

$$W = F\Delta x = F = \frac{W}{\Delta x} = \frac{-225\,000}{0{,}45}\ \frac{\text{Joule}}{\text{m}} = -500\,000\ \text{N}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η δύναμη $\vec{F}$ είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση. Η δύναμη αυτή αντιστοιχεί σε βάρος ενός σώματος με μάζα 50 τόνων.

Β. Τα αυτοκίνητα παλαιοτέρων προδιαγραφών ήταν κατασκευασμένα από πιο άκαμπτα υλικά και δεν περιείχαν ζώνες παραμόρφωσης. Το μπροστινό (και το πίσω) μέρος ενός τέτοιου αυτοκινήτου διατηρούσε σε μεγάλο βαθμό το σχήμα του κατά τη διάρκεια μιας σύγκρουσης, οπότε και η μετατόπιση της καμπίνας μέχρι την τελική της ακινητοποίηση ήταν πολύ μικρότερη.

Ένα αυτοκίνητο παλαιότερης γενιάς κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου 15 m/s και συγκρούεται με τον ίδιο ακλόνητο τοίχο του παραδείγματος **Α**. Επειδή το αυτοκίνητο δεν διαθέτει αντίστοιχη ζώνη παραμόρφωσης στο μπροστινό του μέρος, η μετατόπιση της καμπίνας μέχρι να ακινητοποιηθεί είναι πολύ μικρότερη, $\Delta x' = 5$ cm. Επειδή η αρχική και η τελική ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι οι ίδιες με το παράδειγμα **Α**, το έργο έχει την ίδια τιμή ($W = -\Delta E_{\kappa\iota\nu}$). Δεδομένου ότι η μέση δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη της μετατόπισης, προκύπτει ότι το μέτρο της είναι μεγαλύτερο κατά 9 φορές:

$$F = \frac{W}{\Delta x'} = \frac{-225\,000}{0{,}05}\,\frac{\text{Joule}}{\text{m}} = -4\,500\,000\ \text{N}$$

Να παρατηρήσετε ότι:

1. Το έργο της δύναμης που πρέπει να ασκηθεί σε ένα κινούμενο σώμα για να το ακινητοποιήσει ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος, και συνεπώς καθορίζεται από την αρχική και τελική ταχύτητα του σώματος.
2. Το έργο ισούται με το γινόμενο της δύναμης επί τη μετατόπιση κατά την οποία δρα η δύναμη. Για δεδομένο έργο, όσο μεγαλώνει το μέτρο της μετατόπισης τόσο μικραίνει το μέτρο της απαιτούμενης δύναμης.

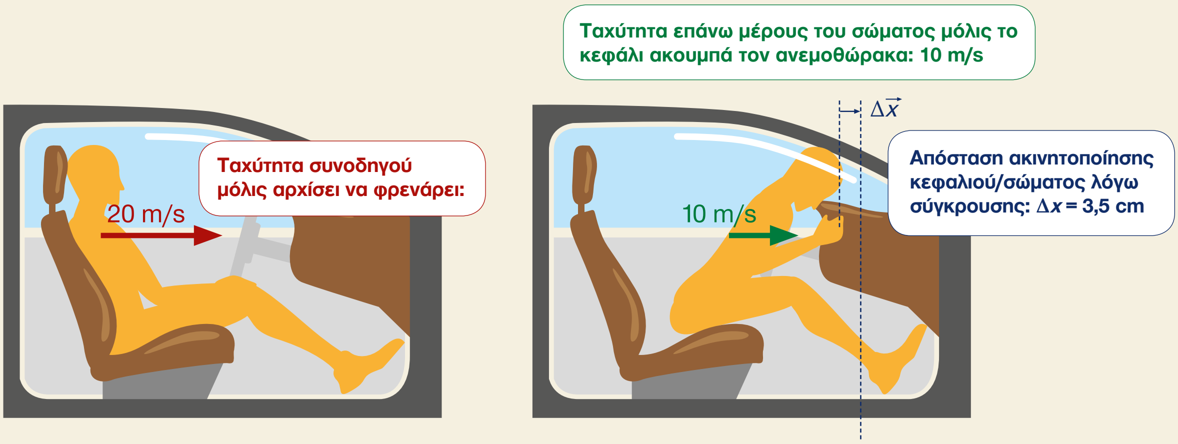
Με βάση τις πιο πάνω παρατηρήσεις επεξηγείται και η χρησιμότητα της ζώνης ασφαλείας των οχημάτων, την οποία μελετούμε στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4

Η Λειτουργία της Ζώνης Ασφαλείας

Η τροχαία κάνει συχνά εκστρατείες ευαισθητοποίησης των οδηγών σχετικά με τη χρήση των ζωνών ασφαλείας. Σε αυτό το παράδειγμα θα διαπιστώσουμε τη σημασία που έχει η ζώνη ασφαλείας για την αποφυγή τραυματισμών.

Α. Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 72 km/h (20 m/s). Ο οδηγός αντιλαμβάνεται ξαφνικά ένα εμπόδιο και φρενάρει. Η ταχύτητα του αυτοκινήτου μειώνεται απότομα εξ΄αιτίας της δύναμης τριβής από το οδόστρωμα προς τα ελαστικά του αυτοκινήτου. Εάν ο συνοδηγός έχει μάζα 70 kg και δεν φορά ζώνη ασφαλείας, συνεχίζει να κινείται περίπου με την αρχική του ταχύτητα λόγω αδράνειας, και πλησιάζει τον ανεμοθώρακα. Έστω ότι το κεφάλι του συνοδηγού συναντά τον ανεμοθώρακα με ταχύτητα 36 km/h (10 m/s). Θα υποθέσουμε ότι κατά τη διάρκεια της επαφής του κεφαλιού, κινείται μόνο το επάνω μέρος του σώματος του συνοδηγού, το οποίο έστω ότι έχει συνολική μάζα 35 kg.



Εκτιμούμε ότι από τη στιγμή που το κεφάλι έρχεται σε επαφή με τον ανεμοθώρακα, το κεφάλι και το επάνω μέρος του σώματος διαγράφει (λόγω της παραμόρφωσης του κεφαλιού) απόσταση 3,5 cm μέχρι να ακινητοποιηθεί. Θα υπολογίσουμε τη μέση δύναμη που ασκεί ο ανεμοθώρακας στο κεφάλι (και στο επάνω μέρος του σώματος) του συνοδηγού.

Εργαζόμενοι όπως προηγουμένως, βρίσκουμε:

$$W = E^{\text{κιν}}_{\text{τελ}} - E^{\text{κιν}}_{\text{αρχ}} \Rightarrow F\Delta x = \underbrace{\frac{1}{2}m\upsilon^2_{\text{τελ}}}_{=0} - \frac{1}{2}m\upsilon^2_{\text{αρχ}} \Rightarrow F = -\frac{1}{2}\frac{m\upsilon^2_{\text{αρχ}}}{\Delta x} = -\frac{(35\text{ kg})\times(10\text{ m/s})^2}{2\times 0{,}035\text{ m}} = -50\,000\text{ N}$$

Η δύναμη αυτή είναι περίπου ίση με το βάρος ενός σώματος μάζας 5 τόνων.

Β. Ο συνοδηγός φορά ζώνη ασφαλείας. Στο διπλανό σχήμα, το κάθισμα του συνοδηγού (και το αυτοκίνητο) έχει ήδη ακινητοποιηθεί, αλλά αυτός συνεχίζει να κινείται λόγω αδράνειας, με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\text{αρχ}}$. Κατά τη διάρκεια της μετακίνησης του συνοδηγού η ζώνη ασφαλείας προεκτείνεται, και ασκεί μια δύναμη $\vec{F}$ στο σώμα του συνοδηγού. Τελικά, το σώμα του συνοδηγού σταματά αφού έχει μετατοπισθεί κατά $\Delta x = 0{,}35$ m.

Εστω ότι τη στιγμή που ακινητοποιείται το κάθισμα, όλο το σώμα του συνοδηγού (m = 70 kg) κινείται με ταχύτητα $\upsilon_{\text{αρχ}} = 10$ m/s. Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συνοδηγού. Από το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση δύναμη:

$$W = \underbrace{\frac{1}{2}m\upsilon^2_{\text{τελ}}}_{=0} - \frac{1}{2}m\upsilon^2_{\text{αρχ}} = F\Delta x \Rightarrow F = -\frac{1}{2}\frac{m\upsilon^2_{\text{αρχ}}}{\Delta x} = -\frac{(70\text{ kg})\times(10\text{ m/s})^2}{2\times 0{,}35\text{ m}} = -10\,000\text{ N}$$

Να παρατηρήσετε ότι η δύναμη που ασκείται στον συνοδηγό γίνεται πέντε φορές μικρότερη με τη χρήση της ζώνης ασφαλείας, επειδή αυτή η δύναμη επενεργεί κατά μήκος μεγαλύτερης απόστασης.

Το κράνος των μοτοσυκλετιστών περιέχει στο εσωτερικό του κατάλληλο μαλακό υλικό. Κατά την πρόσκρουση του κεφαλιού του μοτοσυκλετιστή, το κεφάλι συμπιέζει το υλικό και δέχεται κάποια δύναμη από αυτό, που το ακινητοποιεί. Επειδή το υλικό είναι μαλακό, η δύναμη που ασκεί στο κεφάλι υφίσταται για μεγαλύτερη απόσταση (ίση με τη μεταβολή του πάχους του υλικού). Όπως και στην περίπτωση της ζώνης ασφαλείας, η μέση δύναμη στο κεφάλι ελαττώνεται σημαντικά με την αύξηση της απόστασης, ελαττώνοντας την πιθανότητα σοβαρού τραυματισμού.

4.10. Το Θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας ισχύει και για Μεταβαλλόμενη Συνισταμένη Δύναμη

Σε πολλές περιπτώσεις, κάποιες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα μπορεί να αλλάζουν με τη θέση του σώματος. Σχετικό παράδειγμα αποτελεί η δύναμη ελατηρίου, που ασκείται σε ένα σώμα συνδεδεμένο με την ελεύθερη άκρη του ελατηρίου. Η δύναμη αυτή μεταβάλλεται γραμμικά με τη θέση x του σώματος: $F_{ελ} = -kx$, όπου $x = 0$ είναι η θέση για μηδενική παραμόρφωση του ελατηρίου. Όπως αποδεικνύουμε πιο κάτω, και στην περίπτωση μεταβαλλόμενης συνισταμένης δύναμης, το έργο της ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του σώματος.

Θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας για Μεταβαλλόμενη Συνισταμένη Δύναμη

Όταν ένα σώμα μετατοπίζεται υπό την επίδραση μιας μεταβαλλόμενης συνισταμένης δύναμης $\vec{F}$, η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του σώματος ισούται με το έργο αυτής της δύναμης.

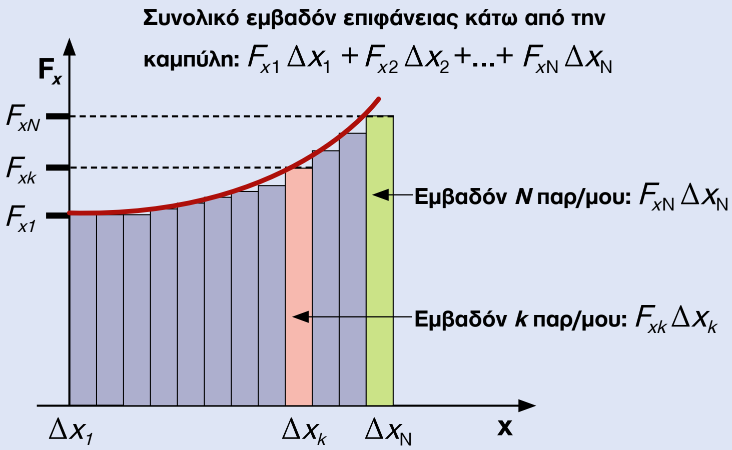
$$W_{\vec{F}} = E^{κιν}_{τελ} - E^{κιν}_{αρχ}$$

Ένθετο

Απόδειξη του Θεωρήματος Έργου - Κινητικής Ενέργειας για την Περίπτωση Μεταβαλλόμενης Συνισταμένης Δύναμης

Θα εξετάσουμε τη γενικότερη περίπτωση ενός σώματος που κινείται σε ευθεία γραμμή υπό την επίδραση μεταβαλλόμενης συνισταμένης δύναμης $\vec{F}$. Θα εξηγήσουμε πώς υπολογίζεται το συνολικό έργο της $\vec{F}$, και θα δείξουμε ότι και σε αυτή την περίπτωση το έργο ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος.

Στην Εικόνα 4-3 απεικονίζεται η γραφική παράσταση της συνιστώσας F_x της μεταβαλλόμενης συνισταμένης δύναμης σαν συνάρτηση της θέσης. Χωρίζουμε τη συνολική μετατόπιση Δx σε πολύ μικρά τμήματα. Η τιμή της συνιστώσας F_x μεταβάλλεται από τμήμα σε τμήμα. Εάν τα τμήματα επιλεγούν αρκετά μικρά, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η *τιμή της F_x παραμένει προσεγγιστικά σταθερή σε κάθε τμήμα.* Συνεπώς, κατά τη διάρκεια οποιασδήποτε μικρής μετατόπισης Δx_k το σώμα δέχεται την επίδραση σταθερής συνισταμένης δύναμης F_{xk} .



Εικόνα 4-3
Γραφική παράσταση της συνιστώσας F_x μιας μεταβαλλόμενης συνισταμένης δύναμης σαν συνάρτηση της θέσης *x*.

Εάν η ταχύτητα του σώματος στην αρχή και το τέλος της μετατόπισης Δx_k έχει τιμές υ_k και υ_{k+1}, προκύπτει:

$$F_{xk}\,\Delta x_k = \frac{1}{2}\,m\upsilon_{k+1}^2 - \frac{1}{2}\,m\upsilon_k^2$$

Εφαρμόζοντας αυτή τη σχέση σε κάθε τμήμα ξεχωριστά, βρίσκουμε:

$$\left.\begin{array}{l} F_{x1}\,\Delta x_1 = \dfrac{1}{2}\,m\upsilon_2^2 - \dfrac{1}{2}\,m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 \\ F_{x2}\,\Delta x_2 = \dfrac{1}{2}\,m\upsilon_3^2 - \dfrac{1}{2}\,m\upsilon_2^2 \\ \dots \\ F_{xN}\,\Delta x_N = \dfrac{1}{2}\,m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \dfrac{1}{2}\,m\upsilon_N^2 \end{array}\right\} \Rightarrow F_{x1}\,\Delta x_1 + F_{x2}\,\Delta x_2 + \dots + F_{xN}\,\Delta x_N = \frac{1}{2}\,m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}\,m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2$$

Η ποσότητα $W = F_{x1}\,\Delta x_1 + F_{x2}\,\Delta x_2 + \dots + F_{xN}\,\Delta x_N$ είναι **το συνολικό έργο της συνισταμένης δύναμης κατά τη συνολική μετατόπιση** $\Delta\vec{x} = \Delta\vec{x}_1 + \dots \Delta\vec{x}_N$.

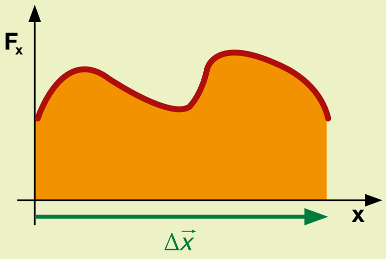
Οι ποσότητες $\frac{1}{2}\,m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2$ και $\frac{1}{2}\,m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2$ είναι, αντίστοιχα, η κινητική ενέργεια του σώματος στο τέλος και την αρχή της συνολικής μετατόπισης $\Delta\vec{x}$. Από την πιο πάνω ισότητα προκύπτει ότι το έργο της συνισταμένης δύναμης $\vec{F}$ ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος κατά τη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$. Συνεπώς, το θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας ισχύει και για μεταβαλλόμενη συνισταμένη δύναμη.

4.11. Γραφικός Υπολογισμός του Έργου Μεταβαλλόμενης Δύναμης

Στην περίπτωση μεταβαλλόμενης δύναμης, το έργο της δύναμης δεν μπορεί να υπολογισθεί από ένα γινόμενο της μορφής *«δύναμη x μετατόπιση»*, επειδή η τιμή της δύναμης αλλάζει με τη θέση του σώματος. Μελετώντας την Εικόνα 4-3, διαπιστώνουμε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη της F_x ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους ορθογωνίων παραλληλογράμμων, $F_{x1}\,\Delta x_1 + F_{x2}\,\Delta x_2 + \dots + F_{xN}\,\Delta x_N$ και άρα με **το συνολικό έργο** W **της**

δύναμης κατά τη συνολική μετατόπιση. Η διαπίστωση αυτή οδηγεί σε μια μέθοδο για τον υπολογισμό του έργου μιας μεταβαλλόμενης δύναμης:

***W* δύναμης *F* = συνολικό εμβαδόν επιφάνειας κάτω από την καμπύλη**



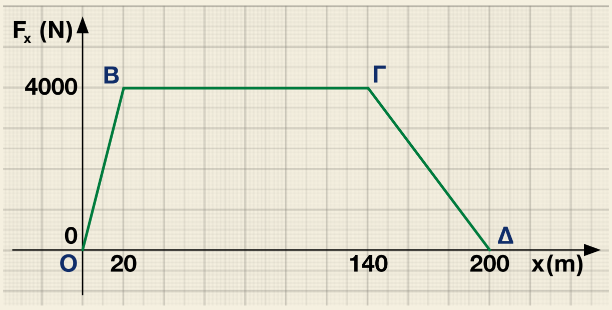
Εάν γνωρίζουμε πώς εξαρτάται από τη θέση x η συνιστώσα F_x της δύναμης *κατά τη διεύθυνση της μετατόπισης* $\Delta\vec{x}$, σχεδιάζουμε την καμπύλη της F_x σαν συνάρτηση της θέσης. Το συνολικό έργο της δύναμης $\vec{F}$ ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη.

Στον υπολογισμό του εμβαδού **χρησιμοποιούμε τις αλγεβρικές τιμές της συνιστώσας F_x και της μετατόπισης**, οπότε το έργο μπορεί να έχει θετικό ή αρνητικό πρόσημο.

Παράδειγμα 1

Βαγονάκι που κινείται υπό την Επίδραση Μεταβαλλόμενης Δύναμης

Ένα βαγονάκι ρυμουλκείται σε μια ευθύγραμμη σιδηροτροχιά από τη θέση $x = 0$ m στη θέση $x = 200$ m υπό την επίδραση μιας μεταβλητής δύναμης *F*. Η Εικόνα 4-4 απεικονίζει τη γραφική παράσταση της συνιστώσας F_x της δύναμης πάνω στην ευθεία της μετατόπισης, συναρτήσει της θέσης του βαγονιού. Να υπολογίσετε το συνολικό έργο της δύναμης που ρυμουλκεί το βαγονάκι.



Εικόνα 4-4
Γραφική παράσταση της συνιστώσας F_x της δύναμης που ρυμουλκεί το βαγονάκι σαν συνάρτηση της θέσης. Το έργο της δύναμης είναι ίσο με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη.

Το ζητούμενο έργο ισούται με το εμβαδόν του τραπεζίου ΟΒΓΔ. Στον υπολογισμό του εμβαδού, η μετατόπιση και η δύναμη εισέρχονται με τις αλγεβρικές τους τιμές. Η μετατόπιση είναι θετική επειδή το βαγονάκι κινείται από τη θέση $x = 0$ m στη θέση $x = 200$ m. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η αλγεβρική τιμή της δύναμης είναι επίσης θετική, δηλαδή η δύναμη είναι ομόρροπη με τη μετατόπιση και παράγει έργο. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$W = E_{ΟΒΓΔ} = \frac{1}{2}(120 + 200) \times 4\,000 \text{ N} \times \text{m} = 640\,000 \text{ Joule}$$

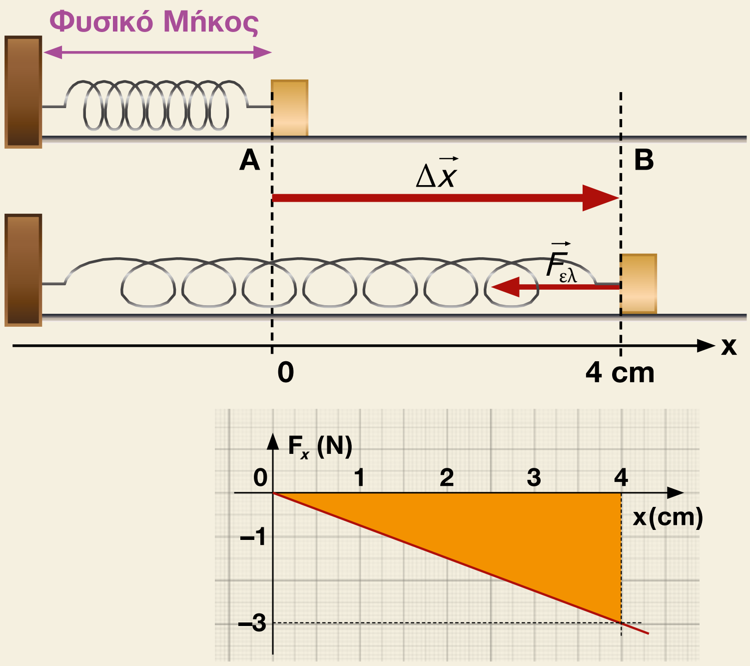
Το πρόσημο του έργου είναι θετικό, σε συμφωνία με το γεγονός ότι η δύναμη παράγει έργο.

Παράδειγμα 2

Σώμα που κινείται υπό την Επίδραση Ελατηρίου

Ένα σώμα είναι συνδεδεμένο με οριζόντιο ελατήριο. Το σώμα μετακινείται από το σημείο Α, που αντιστοιχεί στο φυσικό μήκος του ελατηρίου, στο σημείο Β. Κατά τη διάρκεια αυτής της μετατόπισης το ελατήριο επιμηκύνεται κατά 4 cm. Επιλέγουμε τη θέση $x = 0$ στο σημείο Α και τη θετική φορά του άξονα Οx προς τα δεξιά. Το σημείο Β είναι στη θέση +4 cm.

Η δύναμη ελατηρίου εξαρτάται από τη θέση της ελεύθερης άκρης του, σύμφωνα με το νόμο του Hooke. Η αλγεβρική τιμή της δύναμης ελατηρίου απεικονίζεται σαν συνάρτηση της θέσης της ελεύθερης άκρης του ελατηρίου στο πιο κάτω σχήμα. Στη θέση $x = 0$ (φυσικό μήκος του ελατηρίου) η δύναμη είναι ίση με μηδέν. Για θετικές τιμές της θέσης, η δύναμη είναι αρνητική επειδή έχει φορά προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα Οx.



Από το διάγραμμα, μπορούμε να υπολογίσουμε το συνολικό έργο της δύναμης ελατηρίου για τη μετακίνηση από το Α στο Β. Το ζητούμενο έργο ισούται με το εμβαδόν του πορτοκαλί τριγώνου:

$$W = \frac{1}{2} \times (-3\ \text{N}) \times (+4\ \text{cm}) = -0{,}06\ \text{Joule}$$

Το πρόσημο του έργου είναι αρνητικό, επειδη η δύναμη ελατηρίου έχει αντίθετη φορά από τη μετατόπιση.

Σημείωση

Στην Ενότητα **4.17** θα μελετήσουμε μία γενική σχέση για το έργο της δύναμης ελατηρίου σαν συνάρτηση της μετατόπισης.

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με την ένδειξη Σωστό / Λάθος.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Όταν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα κινούμενο σώμα είναι ομόρροπη με τη μετατόπιση του σώματος, το μέτρο της ταχύτητας του σώματος αυξάνεται.	
2	Όταν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα κινούμενο σώμα είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση του σώματος, το μέτρο της ταχύτητας του σώματος ελαττώνεται.	
3	Όταν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα κινούμενο σώμα είναι κάθετη στη μετατόπισή του, η ταχύτητα του σώματος έχει συνεχώς σταθερό μέτρο.	
4	Όταν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα κινούμενο σώμα είναι ίση με μηδέν, το έργο αυτής της δύναμης είναι πάντοτε ίσο με μηδέν.	
5	Σε ένα σώμα ασκούνται δύο αντίθετες δυνάμεις. Τα έργα αυτών των δυνάμεων είναι ίσα μεταξύ τους.	
6	Ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα υπό την επίδραση πολλών δυνάμεων. Το συνολικό έργο αυτών των δυνάμεων μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό ή μηδενικό.	
7	Ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα υπό την επίδραση πολλών δυνάμεων. Κάθε μια από τις δυνάμεις ασκεί μηδενικό έργο στο σώμα.	
8	Δύο κινούμενα σώματα Α και Β έρχονται σε ηρεμία υπό την επίδραση δύο δυνάμεων $\vec{F}_A$ και $\vec{F}_B$ **.** Για να είναι ίσα τα έργα των δυνάμεων αυτών, πρέπει τα σώματα Α και Β να έχουν:	
	Α. Την ίδια μάζα.	
	Β. Το ίδιο μέτρο αρχικής ταχύτητας (πριν την εφαρμογή των δυνάμεων).	
	Γ. Την ίδια αρχική κινητική ενέργεια (πριν την εφαρμογή των δυνάμεων).	
9	Ένα σώμα κινείται σε ευθεία γραμμή με αρχική ταχύτητα μέτρου υ. Σε κάποια στιγμή το σώμα αρχίζει να υφίσταται την επίδραση μιας σταθερής δύναμης F, εξαιτίας της οποίας ακινητοποιείται, αφού μετατοπισθεί κατά Δx. Το έργο της απαιτούμενης δύναμης F:	
	Α. Αυξάνεται, εάν αυξηθεί η μετατόπιση Δx.	
	Β. Αυξάνεται, εάν αυξηθεί το μέτρο της δύναμης F.	
	Γ. Παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από τα μέτρα της δύναμης και της μετατόπισης.	

Α/Α		Σωστό / Λάθος
10	Η απαιτούμενη δύναμη F:	
	Α. Είναι ανεξάρτητη από τη μετατόπιση Δx του σώματος, κατά την οποία εφαρμόζεται.	
	Β. Είναι αντιστρόφως ανάλογη με τη μετατόπιση Δx.	
	Γ. Είναι ανάλογη με τη μετατόπιση Δx.	

Ασκήσεις

1 Στους Ολυμπιακούς αγώνες της Ατλάντας (1996), ο τρεις φορές χρυσός ολυμπιονίκης της άρσης βαρών Πύρρος Δήμας έκανε παγκόσμιο ρεκόρ στην κατηγορία των 83 κιλών με την τεχνική μίας κίνησης (αρασέ ή απόσπασης), ανυψώνοντας 180,0 kg. Ο αθλητής έχει ύψος 1,73 m. Εάν υποθέσουμε ότι στην τελική του στάση με κατακόρυφα χέρια σήκωσε τη μπάρα σε ύψος 2,0 m, να υπολογίσετε το συνολικό έργο του βάρους της μπάρας και των σταθμών.

2 Σε μια άσκηση του Κεφαλαίου 3 αναφέραμε ότι το δεξαμενόπλοιο Seawise Giant, μάζας 657 000 τόνων, χρειαζόταν να διανύσει 9 km στην οριζόντια διεύθυνση για να σταματήσει, εάν η αρχική του ταχύτητα ήταν 30 km/h. Από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας να υπολογίσετε το έργο της οριζόντιας συνισταμένης δύναμης που απαιτούνταν για να σταματήσει το πλοίο, και το μέτρο αυτής της δύναμης. Θεωρείστε ότι η δύναμη αυτή ήταν σταθερή.

3 Με την εξέλιξη των διαστημικών ταξιδιών, και για σκοπούς προετοιμασίας ενός ταξιδιού στον πλανήτη Άρη στο σύντομο μέλλον, οι επιστήμονες μελετούν τη συμπεριφορά των τοιχωμάτων διαστημοπλοίων, κατά την πρόσπτωση σε αυτά μετεωριτών με τεράστιες ταχύτητες.

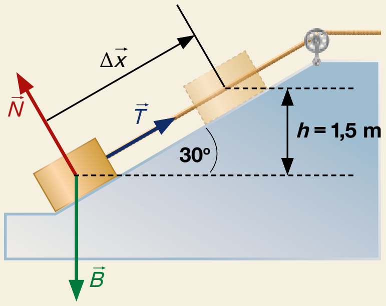
Εκτιμάται ότι θραύσματα μετεωριτών μπορεί να κινούνται στο διάστημα με ταχύτητες 200 km/s. Για το σκοπό αυτό, η NASA εκτελεί πειράματα με ειδικά κατασκευασμένα όπλα ελαφρού αερίου (light gas guns). Με τη σημερινή τεχνολογία, ένα τέτοιο όπλο μπορεί να επιταχύνει ένα βλήμα μάζας 15,4 g από ηρεμία μέχρι τελική ταχύτητα 6,9 km/s κατά μήκος μιας κάννης μήκους 6,7 m.

Να υπολογίσετε:

Α. Την κινητική ενέργεια του βλήματος όταν φεύγει από την κάννη του όπλου.

Β. Τη μέση δύναμη που υφίσταται το βλήμα μέσα στην κάννη του όπλου.

❹ Ενα κιβώτιο μάζας 20 kg ρυμουλκείται κατά μήκος ενός λείου κεκλιμένου επιπέδου υπό την επίδραση μιας δύναμης $\vec{T}$, του βάρους του $\vec{B}$ και μιας κάθετης δύναμης $\vec{N}$ από το επίπεδο, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

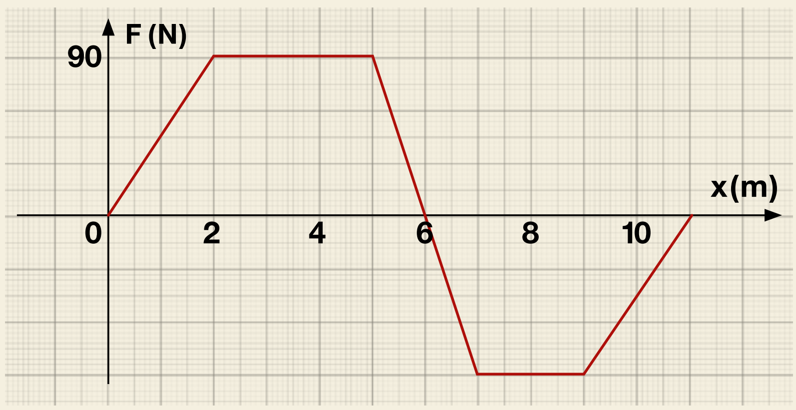


Α. Το κιβώτιο ρυμουλκείται με σταθερή ταχύτητα. Να υπολογίσετε το έργο κάθε μίας από τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό. Να συγκρίνετε το άθροισμα αυτών των έργων με το έργο της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο κιβώτιο.

Β. Το κιβώτιο έχει την ίδια τιμή ταχύτητας στην αρχή και στο τέλος της μετατόπισής του, αλλά η ταχύτητα που έχει σε ενδιάμεσες θέσεις είναι άγνωστη.

Μπορείτε από αυτά τα δεδομένα να υπολογίσετε την τάση $\vec{T}$ του σχοινιού; Μπορείτε να υπολογίσετε το έργο της τάσης;

❺ Στο πιο κάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της συνισταμένης δύναμης που μετακινεί ένα καροτσάκι κατά μήκος ένος άξονα Οx, σαν συνάρτηση της θέσης του καροτσιού.



Το καροτσάκι ξεκινά από τη θέση x = 0 m με μηδενική ταχύτητα και μετακινείται μέχρι τη θέση x = 11 m.

Να υπολογίσετε το έργο που έχει παράξει η δύναμη όταν το καροτσάκι βρίσκεται στις θέσεις x = 4 m, 6 m και 11 m, καθώς και την ταχύτητα του καροτσιού στις ίδιες θέσεις.

Η Έννοια της Δυναμικής Ενέργειας

Στα προηγούμενα χρησιμοποιήσαμε το έργο δύναμης και το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για να υπολογίσουμε την ταχύτητα διαφόρων σωμάτων. Το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο όταν είναι εφικτός ο υπολογισμός του έργου, δηλαδή όταν είναι γνωστή η δύναμη σε κάθε σημείο της διαδρομής του σώματος.

Γενικά, το έργο μιας δύναμης που εφαρμόζεται σε ένα κινούμενο σώμα εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα. Όμως, **το έργο ορισμένων δυνάμεων είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή του σώματος** στο οποίο δρουν, και καθορίζεται πλήρως εάν είναι γνωστή η αρχική και τελική θέση του σώματος.

Το έργο αυτών των δυνάμεων μπορεί να εκφρασθεί με τη βοήθεια μιας συνάρτησης της θέσης, που ονομάζεται **δυναμική ενέργεια**. Θα μελετήσουμε τα παραδείγματα της δύναμης βάρους και της δύναμης ελατηρίου, και την αντίστοιχη δυναμική ενέργεια.

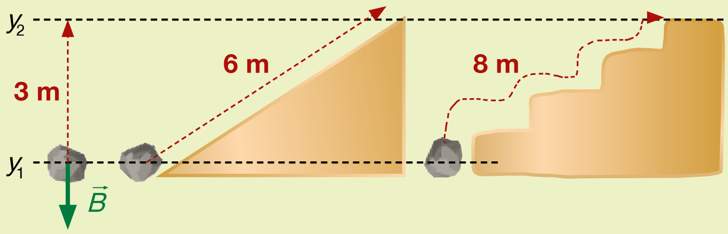
4.12. Ορισμός της Διατηρητικής ή Συντηρητικής Δύναμης

Η δύναμη, το έργο της οποίας εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του σώματος και όχι από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα, ονομάζεται **διατηρητική ή συντηρητική.**

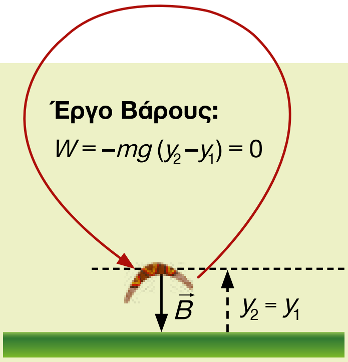
Το βάρος είναι παράδειγμα διατηρητικής δύναμης. Όπως δείξαμε στην Ενότητα 4-6, το έργο του βάρους ενός σώματος, που κινείται κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου, εξαρτάται μόνο από την **κατακόρυφη μετατόπιση** του σώματος. Σε Ένθετο που ακολουθεί αποδεικνύουμε ότι το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και για μετακίνηση του σώματος κατά μήκος **οποιασδήποτε καμπυλόγραμμης διαδρομής.** Συνεπώς:

Το έργο του βάρους ενός σώματος **δεν εξαρτάται από τη διαδρομή**, αλλά μόνο από **την αρχική και τελική** θέση του σώματος, και συγκεκριμένα από τη **διαφορά του τελικού από το αρχικό ύψος**:

$$W_{\text{βάρους}} = -mg(y_2 - y_1)$$



Εάν η αρχική και η τελική θέση του σώματος ταυτίζονται, η διαδρομή ονομάζεται **κλειστή.** Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι το έργο του βάρους σε μια κλειστή διαδρομή είναι ίσο με μηδέν. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει για όλες τις διατηρητικές δυνάμεις:



Το έργο οποιασδήποτε διατηρητικής δύναμης κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής είναι ίσο με μηδέν.

Για παράδειγμα, το έργο του βάρους κατά μήκος μίας **κλειστής** διαδρομής είναι **ίσο με μηδέν**.

Όπως συζητούμε στην Ενότητα 4.17, **η δύναμη ελατηρίου είναι επίσης διατηρητική δύναμη**. Στη φύση υπάρχουν κι άλλες διατηρητικές δυνάμεις. Σε επόμενη τάξη θα μάθουμε ότι οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις είναι διατηρητικές.

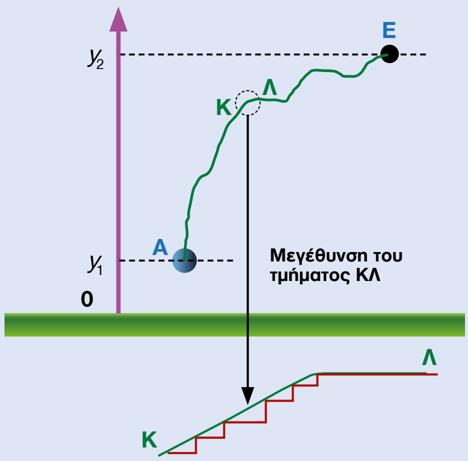
Ένθετο

Έργο του Βάρους κατά Μήκος Αυθαίρετης Καμπυλόγραμμης Διαδρομής.

Στο σχήμα 4-5(α) σχεδιάζουμε μια καμπυλόγραμμη διαδρομή που ξεκινά από το αρχικό σημείο Α και καταλήγει στο τελικό σημείο Ε. Η διαδρομή αυτή μπορεί να προσεγγισθεί από μια τεθλασμένη γραμμή με πολλά οριζόντια και κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα. Γι΄ αυτό το λόγο θα υπολογίσουμε το έργο του βάρους κατά μήκος μιας τεθλασμένης διαδρομής.

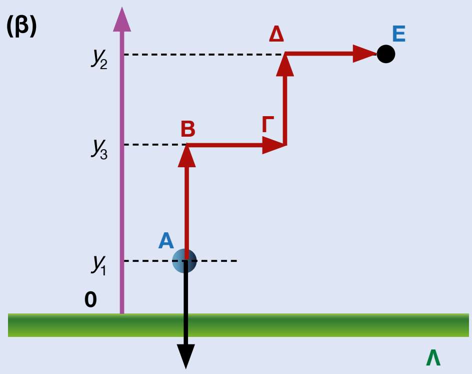
Η Εικόνα 4-5(β) απεικονίζει ένα σώμα μάζας *m* το οποίο μετακινείται από το σημείο Α στο σημείο Ε κατά μήκος της τεθλασμένης ΑΒΓΔΕ. Για να υπολογίσουμε το έργο του βάρους του σώματος κατά μήκος αυτής της διαδρομής, θεωρούμε ξεχωριστά τα οριζόντια και κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα που την αποτελούν.

(α)



Χρησιμοποιώντας κατάλληλο αριθμό οριζόντιων και κατακόρυφων ευθύγραμμων τμημάτων, μπορούμε να προσεγγίσουμε το τμήμα ΚΛ της καμπύλης με την τεθλασμένη γραμμή. Το ίδιο ισχύει για όλη την καμπύλη ΑΕ.

(β)



$$W_{ΑΒΓΔΕ} = W_{ΑΒ} + W_{ΒΓ} + W_{ΓΔ} + W_{ΔΕ} = W_{ΑΒ} + 0 + W_{ΓΔ} + 0 = -mg(y_3 - y_1) - mg(y_2 - y_3) = -mg(y_2 - y_1)$$

Το έργο του βάρους είναι ίσο με μηδέν κατά μήκος των οριζόντιων τμημάτων ΒΓ και ΔΕ, επειδή η διεύθυνση του βάρους είναι κάθετη σε αυτά. Στα κατακόρυφα τμήματα ΑΒ και ΓΔ, χρησιμοποιούμε το προηγούμενο αποτέλεσμα:

$$W_{AB} + W_{\Gamma\Delta} = -\,mg\,(y_3 - y_1) - mg\,(y_2 - y_3) = -\,mg\,(y_2 - y_1)$$

Συνεπώς, το έργο του βάρους εξαρτάται μόνο από τη διαφορά ύψους του τελικού σημείου Ε της τροχιάς από το αρχικό σημείο Α. Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει για οποιαδήποτε τεθλασμένη γραμμή που ενώνει τα σημεία Α και Ε.

Επειδή η καμπυλόγραμμη διαδρομή του σχήματος 4-5(α) μπορεί να προσεγγισθεί από μια τεθλασμένη γραμμή με πολλά οριζόντια και κατακόρυφα τμήματα, συμπεραίνουμε ότι το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει για μετακίνηση κατά μήκος της.

Εικόνα 4-5
(α) Οποιαδήποτε καμπυλόγραμμη διαδρομή μπορεί να προσεγγισθεί από μια τεθλασμένη γραμμή με οριζόντια και κατακόρυφα τμήματα. **(β)** Η σφαίρα μάζας *m* μετακινείται από το σημείο Α στο σημείο Ε, διαγράφοντας την τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΕ. Στα οριζόντια τμήματα ΒΓ και ΔΕ, το έργο του βάρους είναι ίσο με μηδέν. **Μόνο τα κατακόρυφα τμήματα συνεισφέρουν στο έργο του βάρους**. Η συνολική μετατόπιση κατά μήκος αυτών των τμημάτων είναι ίση με την διαφορά ύψους $y_2 - y_1$ του τελικού σημείου της τεθλασμένης από το αρχικό της σημείο.

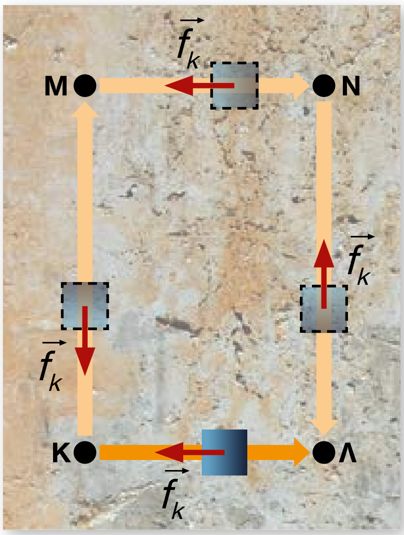
Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 4.12.1. - 4.12.3., σελ. 295.

4.13 Μη Διατηρητικές Δυνάμεις

Σε αντίθεση με το βάρος, το έργο άλλων δυνάμεων εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα. Σε αυτή την ενότητα μελετούμε το παράδειγμα της κινητικής τριβής.

$$W^{MN} = -\left|\vec{f}_k\right| l_{MN}$$

$$W^{KM} = -\left|\vec{f}_k\right| l_{KM}$$



$$W^{N\Lambda} = -\left|\vec{f}_k\right| l_{N\Lambda}$$

$$W^{K\Lambda} = -\left|\vec{f}_k\right| l_{K\Lambda}$$

$$W^{KM} + W^{MN} + W^{N\Lambda} \neq W^{K\Lambda}$$

Εικόνα 4-6
Η κινητική τριβή καταναλώνει διαφορετικό έργο κατά μήκος των τροχιών ΚΛ και ΚΜΝΛ. Η κινητική τριβή είναι μη διατηρητική δύναμη.

Η Εικόνα 4-6 απεικονίζει ένα σώμα, που κινείται σε ένα οριζόντιο, μη λείο δάπεδο. Όταν το σώμα μετακινείται, δρα συνεχώς σε αυτό μία δύναμη κινητικής τριβής από το δάπεδο, η οποία έχει σταθερό μέτρο $|\vec{f}_k| = \mu_k|\vec{N}|$, όπου μ_k είναι ο συντελεστής κινητικής τριβής, και $|\vec{N}|$ είναι το μέτρο της κάθετης δύναμης από το δάπεδο στο σώμα. Η δύναμη κινητικής τριβής $\vec{f}_k$ έχει αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση της κίνησης του σώματος.

Α. Έστω ότι το σώμα μεταβαίνει από το σημείο Κ στο σημείο Λ **μέσω της ευθύγραμμης τροχιάς ΚΛ**. Το έργο της τριβής για τη διαδρομή ΚΛ είναι ίσο με:

$$W_{f_k} = -|\vec{f}_k|\, l_{\text{ΚΛ}}$$

όπου $l_{\text{ΚΛ}}$ είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ. Επειδή η τριβή είναι αντίθετη προς τη μετατόπιση, το έργο της είναι αρνητικό.

Β. Εναλλακτικά, έστω ότι το σώμα μεταβαίνει από το σημείο Κ στο σημείο Λ κατά μήκος της πολυγωνικής τροχιάς ΚΜΝΛ. Επειδή η τριβή είναι συνεχώς αντίθετη με την κατεύθυνση της κίνησης, το αντίστοιχο έργο κατά μήκος κάθε ευθύγραμμου τμήματος είναι αρνητικό. Το συνολικό έργο κατά μήκος της τροχιάς ΚΜΝΛ είναι:

$$W_{f_k}^{\text{ΚΜΝΛ}} = -|\vec{f}_k|\, l_{\text{ΚΜ}} - |\vec{f}_k|\, l_{\text{ΜΝ}} - |\vec{f}_k|\, l_{\text{ΝΛ}}$$

Συνεπώς, **το έργο της τριβής εξαρτάται από τη διαδρομή** που ακολουθεί το σώμα.

Οι δυνάμεις, το έργο των οποίων εξαρτάται από τη διαδρομή, ονομάζονται **μη διατηρητικές.** Παραδείγματα μη διατηρητικών δυνάμεων είναι η κινητική τριβή και η αντίσταση του αέρα.

Άσκηση
Να δείξετε ότι το έργο της τριβής κατά μήκος της κλειστής διαδρομής ΚΜΝΛΚ δεν είναι ίσο με μηδέν. Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει γενικότερα: **Το έργο μίας μη διατηρητικής δύναμης, κατά μήκος μίας κλειστής διαδρομής, δεν είναι γενικά ίσο με μηδέν.**

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 4.13.1. - 4.13.2., σελ. 295.

4.14. Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια

Ας εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας για σώμα που κινείται κατακόρυφα και μεταβαίνει από μια αρχική σε μια τελική θέση μόνο **υπό την επίδραση του βάρους του**:

$$W = E^{\kappa\iota\nu}_{\tau\varepsilon\lambda} - E^{\kappa\iota\nu}_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow -mg(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \Rightarrow$$

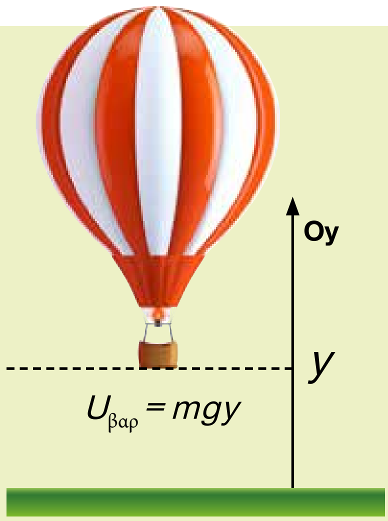
$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + mgy_2$$

Η τελευταία ισότητα **συνδέει την ταχύτητα του σώματος με το ύψος του από την επιφάνεια του εδάφους**, και επιτρέπει τον υπολογισμό της ταχύτητας του σώματος σαν συνάρτηση του ύψους, **χωρίς χρήση των εξισώσεων της ελεύθερης πτώσης**. Εκτός από την κινητική ενέργεια του σώματος $1/2m\upsilon^2$, στην ισότητα αυτή εμφανίζεται και η ποσότητα mgy, η οποία έχει επίσης μονάδες ενέργειας: kg (m/s^2) m = N m = Joule. Αυτή η διαπίστωση οδηγεί στον ορισμό της **Βαρυτικής Δυναμικής Ενέργειας**:

Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης, για σώμα μάζας *m* που βρίσκεται σε ύψος *y* από την επιφάνεια της Γης:

$$U_{\beta\alpha\rho}(y) = mgy$$

Σημείωση
Η βαρυτική δυναμική ενέργεια οφείλεται στις ελκτικές δυνάμεις μεταξύ ενός σώματος και της Γης, οι οποίες εμφανίζονται ως ζεύγος δράσης - αντίδρασης. Γι΄ αυτό, η βαρυτική δυναμική ενέργεια δεν συνδέεται με το σώμα, αλλά με το **σύστημα σώματος - Γης**. Αμέσως πιο κάτω επεξηγούμε την έννοια του συστήματος σωμάτων.

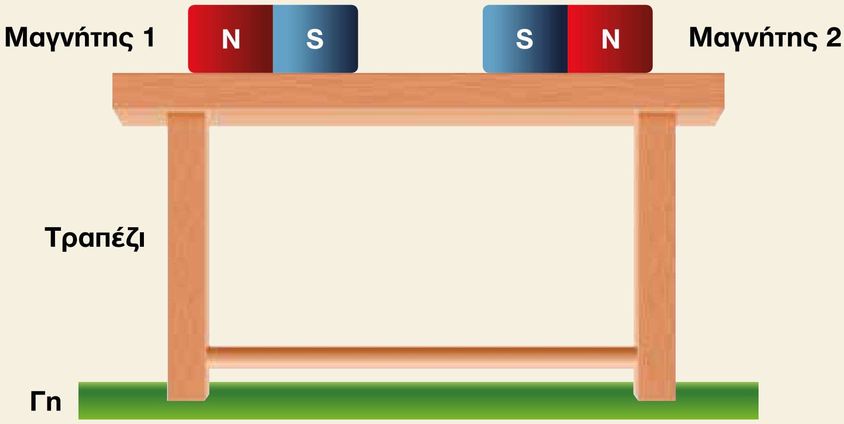


Σύστημα Σωμάτων
Ορίζουμε ως σύστημα σωμάτων ένα σύνολο από ένα ή περισσότερα σώματα. Όλες οι δυνάμεις που δρουν ανάμεσα στα σώματα του συστήματος είναι **εσωτερικές δυνάμεις** του συστήματος. Όλες οι δυνάμεις, που ασκούνται στα σώματα του συστήματος από εξωτερικά αίτια, ονομάζονται **εξωτερικές δυνάμεις**.

- Στο σύστημα που ορίζεται από ένα σώμα και τη Γη («σύστημα σώματος - Γης»), εσωτερικές δυνάμεις είναι το βάρος του σώματος και η έλξη από το σώμα στη Γη (αντίδραση στο βάρος). Εάν το σώμα πιέζει τη Γη, εσωτερικές δυνάμεις είναι επίσης η κάθετη δύναμη από τη Γη στο σώμα και η αντίδραση σε αυτή.
- Ένα ελατήριο κι ένα σώμα, συνδεδεμένα μεταξύ τους, αποτελούν ένα «σύστημα ελατηρίου - σώματος», με εσωτερικές δυνάμεις τη δύναμη ελατηρίου στο σώμα και τη δύναμη από το σώμα στο ελατήριο (αντίδραση στη δύναμη ελατηρίου).
- Ένα σώμα μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως σύστημα. Τότε, όλες οι δυνάμεις που δρουν σε αυτό είναι εξωτερικές.

Ερώτηση

Το επόμενο σχήμα δείχνει δύο μαγνήτες που εφάπτονται σε ένα τραπέζι. Επειδή οι νότιοι πόλοι (S) των μαγνητών είναι προσανατολισμένοι ο ένας προς τον άλλο, οι μαγνήτες απωθούνται μεταξύ τους.



Να προσδιορίσετε τις εσωτερικές και τις εξωτερικές δυνάμεις των ακόλουθων συστημάτων:

(α) Μαγνήτης 1, **(β)** Μαγνήτης 2, **(γ)** Τραπέζι,

(δ) Μαγνήτης 1-Μαγνήτης 2, **(ε)** Μαγνήτης 1-Τραπέζι, **(στ)** Μαγνήτης 2-Τραπέζι,

(ζ) Μαγνήτης 1-Μαγνήτης 2-Τραπέζι.

Αργότερα θα μελετήσουμε και άλλες μορφές δυναμικής ενέργειας. Γενικά, κάθε μορφή δυναμικής ενέργειας οφείλεται σε κάποια αλληλεπίδραση μεταξύ σωμάτων. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, οι δυνάμεις μεταξύ σωμάτων εμφανίζονται κατά ζεύγη δράσης - αντίδρασης. Γι αυτό κάθε μορφή δυναμικής ενέργειας *δεν συνδέεται με ένα σώμα, αλλά με ένα σύστημα σωμάτων που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.*

Σύνδεση Έργου Βάρους - Βαρυτικής Δυναμικής Ενέργειας

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας επιτρέπει **να υπολογίσουμε το έργο του βάρους ενός σώματος κατά τη μετατόπισή του από μια αρχική θέση ύψους y_1 σε τελική θέση ύψους y_2.**

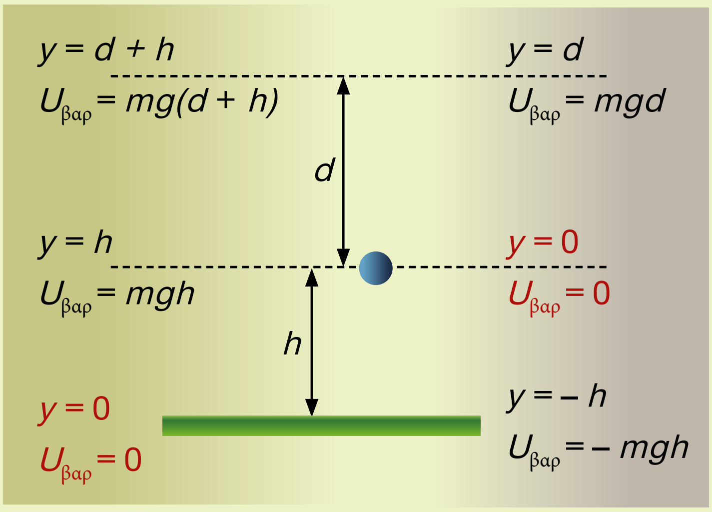
Το έργο του βάρους ενός σώματος ισούται με την **αρνητική** μεταβολή στη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης:

$$W_{y_1 \to y_2} = U_{\beta\alpha\rho}(y_1) - U_{\beta\alpha\rho}(y_2) = -\Delta U_{\beta\alpha\rho}$$

Επισήμανση

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση ορισμού $U_{βαρ} = mgy$, ακόμη κι εάν το ύψος αναφοράς $y = 0$ δεν επιλεγεί στην επιφάνεια του εδάφους, επειδή *η διαφορά δυναμικής ενέργειας μεταξύ δύο σημείων θα παραμείνει ίδια*. Συνεπώς:

Το έργο του βάρους θα ισούται πάλι με τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας.



Αριστερά: Το ύψος αναφοράς $y = 0$ είναι στο έδαφος. **Δεξιά:** Το ύψος αναφοράς είναι στη θέση του σώματος.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 4.14.1. - 4.14.2., σελ. 296.

4.15. Ορισμός της Μηχανικής Ενέργειας για Σώμα που κινείται υπό την Επίδραση του Βάρους του

Σύμφωνα με τα πιο πάνω, ένα σώμα που βρίσκεται σε κάποιο ύψος y από την επιφάνεια της Γής και κινείται **υπό την επίδραση του βάρους του**, συνδέεται με δύο φυσικά μεγέθη: την κινητική ενέργεια $E_{κιν}$ και τη βαρυτική δυναμική ενέργεια $U_{βαρ}$.

Το άθροισμα της κινητικής ενέργειας και της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ορίζεται ως η **μηχανική ενέργεια** του συστήματος σώματος - Γης.

$$E_{μηχ} = E_{κιν} + U_{βαρ} = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + mgy$$

Από τον ορισμό της μηχανικής ενέργειας προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m\upsilon_1^2 + mg\,y_1 = \frac{1}{2} m\upsilon_2^2 + mg\,y_2 \Rightarrow E_{μηχ}^{αρχ} = E_{μηχ}^{τελ}$$

Συμπεραίνουμε:

Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας

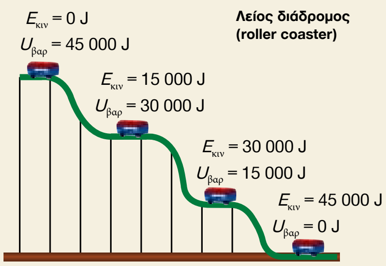
Εάν η μοναδική δύναμη που ασκείται σε ένα κινούμενο σώμα είναι το βάρος του, η Μηχανική Ενέργεια του Συστήματος Σώματος - Γης διατηρείται σταθερή:

$$E_{μηχ}^{αρχ} = E_{μηχ}^{τελ} \Rightarrow \Delta E_{μηχ} = 0 \Rightarrow \Delta E_{κιν} = -\Delta U_{βαρ}$$

Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας ισχύει και εάν το ύψος αναφοράς της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας δεν επιλεγεί στην επιφάνεια του εδάφους.

Σημείωση 1

Στον προηγούμενο ορισμό της Μηχανικής Ενέργειας έχουμε συμπεριλάβει τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης, αλλά μόνο την κινητική ενέργεια του σώματος. Η Γη μπορεί να θεωρηθεί ακίνητη, με μηδενική κινητική ενέργεια. Αυτό οφείλεται στο ότι η Γη έχει τεράστια αδράνεια, οπότε η μεταβολή στην κινητική της κατάσταση λόγω της βαρυτικής έλξης από το σώμα είναι αμελητέα.



Σημείωση 2

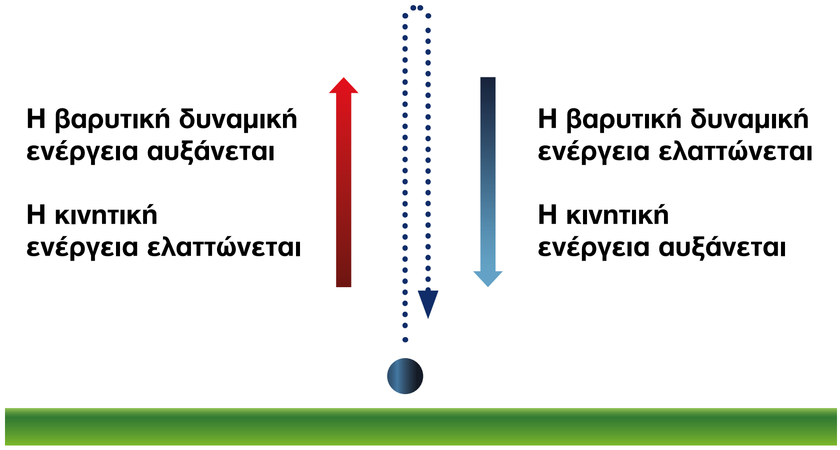
Στην προηγούμενη απόδειξη διατήρησης της μηχανικής ενέργειας του συστήματος σώματος - Γης, θεωρήσαμε κατακόρυφη κίνηση του σώματος υπό την επίδραση του βάρους του. Όμως, η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας ενός σώματος, που κινείται μόνο υπό την επίδραση του βάρους του, **ισχύει γενικά και για καμπυλόγραμμες κινήσεις**.

Μετατροπή μεταξύ Κινητικής Ενέργειας και Βαρυτικής Δυναμικής Ενέργειας για Σώμα που κινείται υπό την Επίδραση του Βάρους του.

Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας οδηγεί σε μία απλή σχέση που συνδέει τη μεταβολή της κινητικής και της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, για σώμα που κινείται υπό την επίδραση του βάρους του. Συγκεκριμένα:

Όταν το έργο του βάρους είναι θετικό (το σώμα κατέρχεται), η βαρυτική δυναμική ενέργεια ελαττώνεται. Εάν η μόνη δύναμη που κινεί το σώμα είναι το βάρος του, η βαρυτική δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια:

$$\Delta E_{μηχ} = 0 \Rightarrow \Delta E_{κιν} = -\Delta U_{βαρ} > 0$$



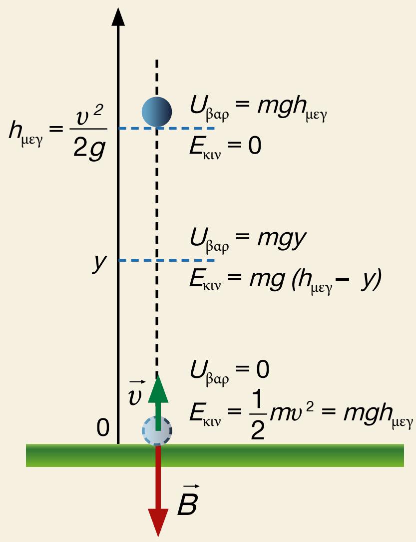
Αντιστρόφως, όταν ένα σώμα ανέρχεται, η βαρυτική δυναμική ενέργεια αυξάνεται, επειδή αυξάνεται το ύψος από την επιφάνεια της Γης. Σε αυτή την περίπτωση η κινητική ενέργεια του σώματος μετατρέπεται σε βαρυτική δυναμική ενέργεια:

$$\Delta E_{κιν} = -\Delta U_{βαρ} < 0$$

Παράδειγμα

Εφαρμογή της Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας στην Μελέτη της Κατακόρυφης Βολής

A. Ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα $\vec{υ}$ από το έδαφος, και κινείται υπό την επίδραση μόνο του βάρους του.



i. Εφαρμόζοντας την αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, θα υπολογίσουμε το μέγιστο ύψος $h_{μεγ}$, στο οποίο θα φθάσει το σώμα. Επιλέγουμε κάποιο ύψος στο οποίο η μηχανική ενέργεια είναι γνωστή, και απαιτούμε η μηχανική ενέργεια στο μέγιστο ύψος $h_{μεγ}$ (όπου η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται στιγμιαία) να έχει την ίδια τιμή.

Στο έδαφος, όπου η δυναμική ενέργεια μηδενίζεται, η μηχανική ενέργεια ταυτίζεται με την κινητική ενέργεια. Συνεπώς:

$$E_{κιν}(h_{μεγ}) + U_{βαρ}(h_{μεγ}) = E_{κιν}(0) + U_{βαρ}(0) \Rightarrow 0 + mgh_{μεγ} = \frac{1}{2}mυ^2 + 0 \Rightarrow h_{μεγ} = υ^2/(2g)$$

Το αποτέλεσμα για το μέγιστο ύψος συμπίπτει με αυτό στο οποίο είχαμε καταλήξει από τις εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.

ii. Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, μπορούμε να βρούμε μια έκφραση για την κινητική ενέργεια του σώματος σαν συνάρτηση του ύψους του από το έδαφος.

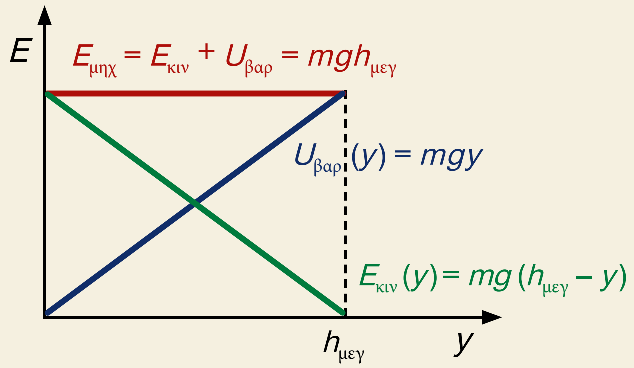
Η βαρυτική δυναμική ενέργεια σε ύψος y είναι ίση με $U_{βαρ} = mgy$. Εφαρμόζοντας την αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, καταλήγουμε στη σχέση:

$$E_{κιν}(y) + U_{βαρ}(y) = E_{κιν}(0) + U_{βαρ}(0) \Rightarrow E_{κιν}(y) + mgy = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow E_{κιν}(y) = mg\,(h_{μεγ} - y)$$

Στην πιο πάνω σχέση χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα $h_{μεγ} = \upsilon^2/(2g) \Rightarrow \upsilon^2 = 2gh_{μεγ}$.

iii. Στο ίδιο διάγραμμα σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, της κινητικής ενέργειας και της μηχανικής ενέργειας του συστήματος σώματος - Γης σαν συνάρτηση του ύψους του από το έδαφος **κατά τη διάρκεια της ανόδου του.**

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο πιο κάτω διάγραμμα.



Η βαρυτική δυναμική ενέργεια και η κινητική ενέργεια μεταβάλλονται γραμμικά με το ύψος, αλλά **το άθροισμά τους (που είναι ίσο με τη μηχανική ενέργεια) παραμένει σταθερό.**

iv. Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του σώματος κατά την κάθοδό του, σαν συνάρτηση του ύψους. Εφαρμόζοντας την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, παίρνουμε:

$$E_{κιν}(h_{μεγ}) + U_{βαρ}(h_{μεγ}) = E_{κιν}(y) + U_{βαρ}(y) \Rightarrow 0 + mgh_{μεγ} = E_{κιν}(y) + mgy \Rightarrow E_{κιν}(y) = mg(h_{μεγ} - y)$$

Παρατηρούμε ότι η κινητική ενέργεια του σώματος εξαρτάται με τον ίδιο τρόπο από το ύψος κατά την κάθοδο και την άνοδο. Άρα, σε ένα συγκεκριμένο ύψος, η ταχύτητα του σώματος έχει το ίδιο μέτρο κατά την άνοδο και κάθοδό του.

Β. Κατά την κίνηση του σώματος πραγματοποιούνται οι εξής μετατροπές κινητικής και βαρυτικής δυναμικής ενέργειας:

Κατά την κάθοδο του σώματος η βαρυτική δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια. Κατά την άνοδο του σώματος, η κινητική ενέργεια του σώματος μετατρέπεται σε βαρυτική δυναμική ενέργεια. Και στις δύο περιπτώσεις, η μηχανική ενέργεια του συστήματος του σώματος - Γης παραμένει σταθερή.

Τονίζουμε ότι η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας καθιστά εφικτό τον υπολογισμό της τελικής ταχύτητας ενός σώματος από την αρχική ταχύτητά του και τη θέση του, χωρίς να χρειάζεται να λύσουμε τις εξισώσεις του Νεύτωνα για το σώμα, και χωρίς να μας απασχολεί η κινητική του κατάσταση σε ενδιάμεσες θέσεις. Η έννοια της ενέργειας είναι δηλαδή ένα συμπληρωματικό εργαλείο για τη μελέτη της κίνησης σωμάτων.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερώτηση 4.15.1., σελ. 296.

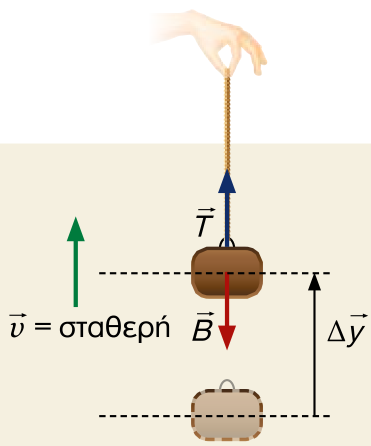
4.16. Η Μηχανική Ενέργεια του Συστήματος Σώματος - Γης δεν διατηρείται όταν δρουν Επιπρόσθετες Δυνάμεις με Μη Μηδενικό Συνολικό Έργο

Στα προηγούμενα δείξαμε ότι εάν η μοναδική δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα είναι το βάρος του, η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης παραμένει σταθερή. Εάν στο σώμα ασκούνται επιπρόσθετες δυνάμεις με μη μηδενικό συνολικό έργο, η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης δεν διατηρείται. Παραδείγματα επιπρόσθετων δυνάμεων είναι η αντίσταση από τον αέρα, η τριβή από το έδαφος, ή μια τάση σχοινιού. Μελετούμε σχετικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1

Σώμα που ανυψώνεται με Σταθερή Ταχύτητα

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται ένα σώμα, το οποίο ανυψώνεται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ υπό την επίδραση του βάρους του $\vec{B}$ και της τάσης $\vec{T}$ του σχοινιού. Επειδή η ταχύτητα είναι σταθερή, η συνισταμένη δύναμη στο σώμα είναι ίση με μηδέν. Από το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας συμπεραίνουμε:



$$W_{\vec{B}} + W_{\vec{T}} = \Delta E_{κιν} \Rightarrow -\Delta U_{βαρ} + W_{\vec{T}} = \Delta E_{κιν} \Rightarrow W_{\vec{T}} = \Delta U_{βαρ} + \Delta E_{κιν} \Rightarrow W_{\vec{T}} = \Delta E_{μηχ}$$

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης δεν διατηρείται επειδή στο σώμα **δεν ασκείται μόνο το βάρος του**, αλλά και η τάση $\vec{T}$ του σχοινιού. Η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας ισούται με το (θετικό) έργο της επιπρόσθετης δύναμης $\vec{T}$ από το σχοινί.

Καταλήγουμε στο πιο κάτω γενικό συμπέρασμα:

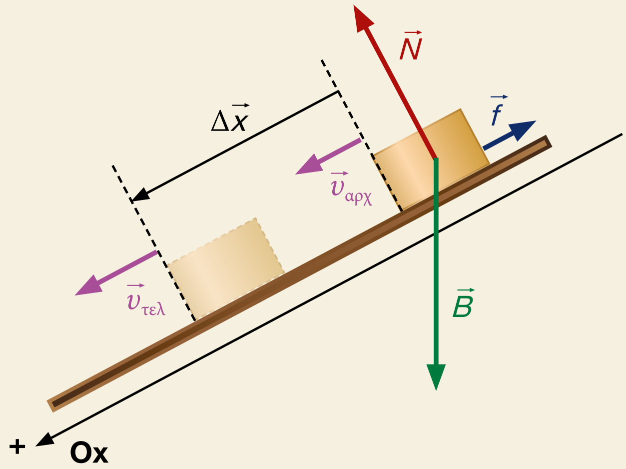
Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης δεν διατηρείται όταν στο σώμα ασκούνται εκτός από το βάρος του και επιπρόσθετες δυνάμεις με μη μηδενικό έργο. Η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας ισούται με το συνολικό έργο των δυνάμεων αυτών:

$$\Delta E_{μηχ} = \sum W_{\vec{F}}$$

Παράδειγμα 2

Η Δύναμη Τριβής

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται ένα σώμα που κατεβαίνει σε ένα τραχύ κεκλιμένο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται το βάρος του $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το επίπεδο και η δύναμη κινητικής τριβής $\vec{f}$ από το επίπεδο, η οποία είναι αντίρροπη προς τη μετατόπιση. Το σώμα μετατοπίζεται κατά $\Delta\vec{x}$. Επιλέγουμε τον άξονα Ox παράλληλο με την μετατόπιση, και τη θετική φορά να συμπίπτει με αυτή της μετατόπισης (σημειώνεται με « + » στο σχήμα). Η τριβή $\vec{f}$ έχει αρνητική αλγεβρική τιμή (f < 0).



Το έργο του βάρους $\vec{B}$ ισούται με την αρνητική μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος σώματος - Γης: $W_{\vec{B}} = -\Delta U_{βαρ}$. Εφαρμόζοντας τη σχέση έργου - κινητικής ενέργειας για το σώμα, προκύπτει:

$$\Delta E_{κιν} = W_{\vec{B}} + W_{\vec{f}} + W_{\vec{N}} \Rightarrow \Delta E_{κιν} = -\Delta U_{βαρ} + W_{\vec{f}} + W_{\vec{N}} \Rightarrow \Delta E_{κιν} + \Delta U_{βαρ} = W_{\vec{f}} + W_{\vec{N}} \Rightarrow \Delta E_{μηχ} = W_{\vec{f}} + W_{\vec{N}}$$

Όπως και στο παράδειγμα 1, **η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης δεν διατηρείται.** Αυτό οφείλεται στο ότι στο σώμα ασκούνται εκτός από το βάρος του και οι επιπρόσθετες δυνάμεις $\vec{f}$ και $\vec{N}$. **Το συνολικό έργο των επιπρόσθετων αυτών δυνάμεων ισούται με τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος σώματος - Γης**.

Στο παράδειγμα που μελετούμε, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ δεν παράγει έργο επειδή είναι κάθετη στη μετατόπιση του σώματος. Η τριβή $\vec{f}$ είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση και καταναλώνει έργο $W_{\vec{f}} = f\Delta x < 0$. Τελικά:

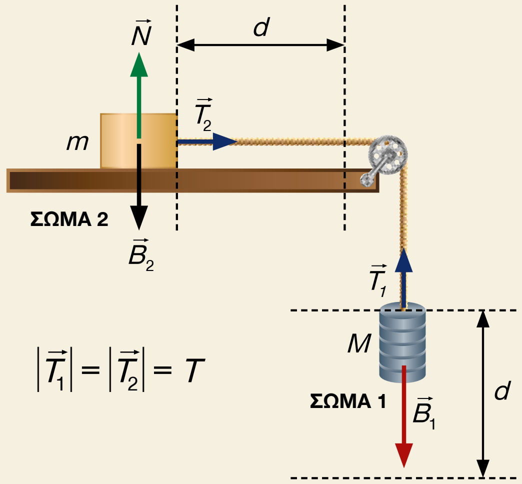
$$\Delta E_{μηχ} = W_{\vec{f}} = f\Delta x < 0$$

Επειδή το έργο της τριβής είναι αρνητικό, η μηχανική ενέργεια ελαττώνεται.

Παράδειγμα 3

Στο Κεφάλαιο 3 χρησιμοποιήσαμε τη διάταξη του πιο κάτω σχήματος για να μελετήσουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. **Μελετούμε εδώ την ίδια διάταξη, χρησιμοποιώντας το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας**.

Τα σώματα 1 και 2 έχουν μάζες M και m και συνδέονται μέσω τροχαλίας με αβαρές σχοινί. Υποθέτουμε ότι το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο και δεν εξασκεί τριβή, και ότι η τροχαλία έχει αμελητέα μάζα και οι τριβές με τον άξονά της μπορούν να αγνοηθούν.



Το σώμα 1 κινείται υπό την επίδραση του βάρους του $\vec{B}_1$ και της δύναμης $\vec{T}_1$ από το σχοινί. Το σώμα 2 κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{T}_2$ από το σχοινί. Όπως είχαμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 3, οι δυνάμεις $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ έχουν ίσα μέτρα: $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$.

Στο σώμα 2 ασκούνται επίσης το βάρος του $\vec{B}_2$ και μια κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το επίπεδο, οι οποίες έχουν μηδενική συνισταμένη.

Θα υποθέσουμε ότι τα σώματα αφήνονται από ηρεμία και μετακινούνται σε απόσταση d.

Κίνηση του σώματος 1

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας:

$$W_{\vec{B}_1} + W_{\vec{T}_1} = \Delta E_{\text{κιν},1}$$

Το έργο του βάρους $\vec{B}_1$ και η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος σώματος 1-Γης συνδέονται με τη σχέση $W_{\vec{B}_1} = -\Delta U_{\text{βαρ},1}$. Η δύναμη $\vec{T}_1$ είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση και το έργο της ισούται με $W_{\vec{T}_1} = -Td$. Έτσι, παίρνουμε:

$$W_{\vec{B}_1} + W_{\vec{T}_1} = \Delta E_{\text{κιν},1} \Rightarrow -\Delta U_{\text{βαρ},1} - Td = \Delta E_{\text{κιν},1} \Rightarrow \Delta E_{\text{μηχ},1} = -Td$$

Παρατηρείστε ότι η **μηχανική ενέργεια $E_{\text{μηχ},1}$ του συστήματος σώμα 1 - Γη δεν διατηρείται**. Αυτό οφείλεται στο ότι στο σώμα ασκείται εκτός από το βάρος του και η επιπρόσθετη δύναμη $\vec{T}_1$ από το σχοινί, η οποία παράγει μη μηδενικό έργο. Η μεταβολή στη μηχανική ενέργεια του συστήματος σώμα 1-Γη ισούται με το έργο της δύναμης $\vec{T}_1$.

Κίνηση του σώματος 2

Το σώμα 2 μετακινείται προς τα δεξιά κατά την ίδια απόσταση d. Η δύναμη $\vec{T}_2$ είναι ομόρροπη με τη μετατόπιση του σώματος 2, και το έργο της ισούται με $W_{\vec{T}_2} = +Td$. Οι δυνάμεις $\vec{B}_2$ και $\vec{N}$ παράγουν μηδενικό έργο, επειδή είναι κάθετες στη μετατόπιση του σώματος 2. Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας, παίρνουμε:

$$\Delta E_{κιν,2} = W_{\vec{B}_2} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{T}_2} \Rightarrow \Delta E_{κιν,2} = 0 + 0 + Td \Rightarrow \Delta E_{κιν,2} + \underbrace{\Delta U_{βαρ,2}}_{=0} = Td \Rightarrow \Delta E_{μηχ,2} = Td$$

Στην προηγούμενη σχέση χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος 2 - Γης παραμένει σταθερή. Παρατηρείστε ότι η **μηχανική ενέργεια** $E_{μηχ,2}$ **του συστήματος σώμα 2 - Γη δεν διατηρείται**. Εκτός από το βάρος του, στο σώμα 2 ασκούνται και οι επιπρόσθετες δυνάμεις $\vec{T}_2$ (από το σχοινί) και $\vec{N}$ (από το επίπεδο). Η δύναμη $\vec{N}$ δεν παράγει έργο, αλλά η $\vec{T}_2$ παράγει μη μηδενικό έργο. Η μεταβολή στη μηχανική ενέργεια του συστήματος σώμα 2 - Γη ισούται με το έργο της δύναμης $\vec{T}_2$.

Συνολικό σύστημα σώμα 1 - σώμα 2 - Γη

Από τις τελευταίες δύο σχέσεις, προκύπτει:

$$\left.\begin{aligned} \Delta E_{μηχ,1} &= -Td \\ \Delta E_{μηχ,2} &= Td \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta E_{μηχ,1} + \Delta E_{μηχ,2} = 0$$

Η συνολική μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος 1 - σώματος 2 - Γης διατηρείται, επειδή **το συνολικό έργο των επιπρόσθετων δυνάμεων** $\vec{N}$**,** $\vec{T}_1$ **και** $\vec{T}_2$ **τυχαίνει να είναι ίσο με μηδέν.** Από αυτή τη διατήρηση μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα των δύο σωμάτων. Εάν ξεκινούν από πρεμία και μετατοπίζονται κατά d προκύπτει:

$$\Delta E_{μηχ,1} + \Delta E_{μηχ,2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon^2 - Mgd + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(M+m)\,\upsilon^2 = Mgd \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{2M}{M+m}\,gd$$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερώτηση 4.16.1., σελ. 296.

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με την ένδειξη Σωστό / Λάθος.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Το έργο του βάρους είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή.	
2	Το έργο του βάρους είναι μηδενικό μόνο όταν η μετατόπιση του σώματος είναι οριζόντια.	
3	Το έργο του βάρους είναι πάντα αρνητικό όταν το τελικό ύψος είναι μεγαλύτερο από το αρχικό.	
4	Η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος σώματος-Γης παραμένει αμετάβλητη όταν το σώμα μετατοπίζεται οριζόντια.	

5	Η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος σώματος - Γης αυξάνεται όταν το σώμα ανέρχεται.	
6	Ένα σώμα κινείται μόνο υπό την επίδραση του βάρους του. Όταν το σώμα κατέρχεται, η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης μετατρέπεται σε κινητική.	
7	Ένα σώμα κινείται κατακόρυφα μόνο υπό την επίδραση του βάρους του. Στο μέγιστο ύψος μηδενίζεται η κινητική ενέργεια.	
8	Ένα σώμα ανέρχεται κατακόρυφα μόνο υπό την επίδραση του βάρους του. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης αυξάνεται.	
9	Ένα σώμα κατέρχεται κατακόρυφα υπό την επίδραση του βάρους του και της αντίστασης από τον αέρα. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης ελαττώνεται.	
10	Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, υπό την επίδραση του βάρους του και της αντίστασης του αέρα, με αρχική ταχύτητα υ_0 προς τα επάνω. Όταν επιστρέψει στο αρχικό ύψος, η κινητική του ενέργεια είναι ίση με την αρχική.	
11	Οι ράμπες αναπήρων κατασκευάζονται με μικρή κλίση για να ελαττώνεται το έργο του βάρους κατά την άνοδο σε συγκεκριμένο ύψος από το έδαφος.	

Ασκήσεις

1 Μία μικρή μεταλλική σφαίρα μάζας 0,35 kg εκτοξεύεται από την επιφάνεια του εδάφους με αρχική κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου υ = 10 m/s. Να θεωρήσετε ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

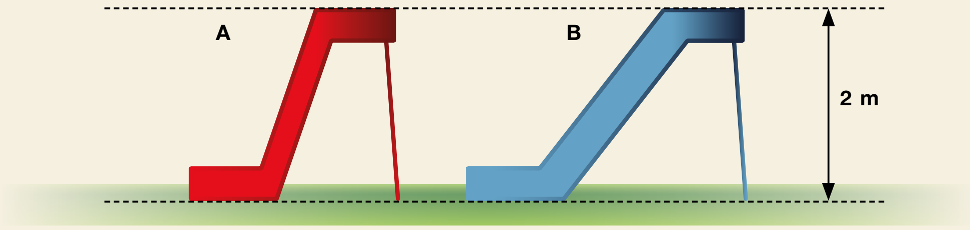
Α. Να υπολογίσετε την αρχική κινητική και δυναμική ενέργεια της σφαίρας.

Β. Χρησιμοποιώντας την αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φθάσει η σφαίρα. Εξαρτάται το ύψος αυτό από τη μάζα της μπάλας;

Γ. Να υπολογίσετε την ταχύτητα της σφαίρας όταν επιστρέψει στο έδαφος.

2 Μια παιδική χαρά είναι εξοπλισμένη με δύο εντελώς *λείες* τσουλήθρες Α και Β, που απεικονίζονται στο σχήμα που ακολουθεί.

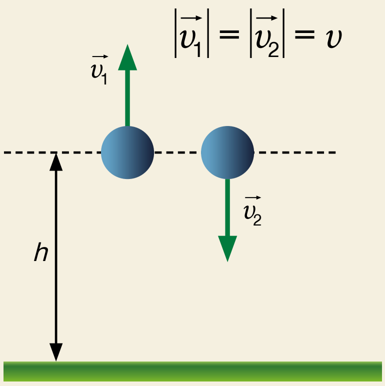
Δύο παιδιά με μάζες 15 kg και 20 kg αντίστοιχα, χρησιμοποιούν τις τσουλήθρες. Να υποθέσετε ότι τα παιδιά μπορούν να περιγραφούν σαν υλικά σημεία, και ξεκινούν από την κορυφή της κάθε τσουλήθρας με μηδενική ταχύτητα. Χρησιμοποιώντας την διατήρηση μηχανικής ενέργειας, να υπολογίσετε:



Α. Το έργο του βάρους των παιδιών κατά την κάθοδό τους.

Β. Την ταχύτητα με την οποία θα φθάσουν στο έδαφος.

Γ. Την κινητική ενέργεια κάθε παιδιού όταν φθάσει στο έδαφος.



3 Δύο μπάλες ξεκινούν από το ίδιο ύψος h από την επιφάνεια της Γης με αντίθετες αρχικές κατακόρυφες ταχύτητες μέτρου υ. Να θεωρήσετε ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Χρησιμοποιώντας την αρχή της διατήρησης μηχανικής ενέργειας, να υπολογίσετε τις ταχύτητες που έχουν οι μπάλες όταν φθάνουν στη Γη.

4 Μια μπάλα καλαθόσφαιρας, μάζας 500 g, ρίχνεται κατακόρυφα προς τα επάνω από ύψος 1 m με αρχική ταχύτητα μέτρου 8 m/s και φθάνει σε μέγιστο ύψος 3 m από το έδαφος.

Α. Να υπολογίσετε την αρχική μηχανική ενέργεια της μπάλας και την μηχανική ενέργεια στο μέγιστο ύψος της.

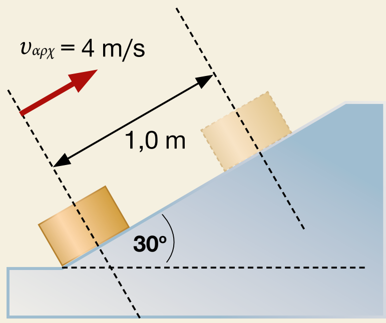
Β. Ξεκινώντας από το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας για τη μπάλα, να βρείτε μια σχέση που να συνδέει τη μεταβολή μηχανικής ενέργειας της μπάλας με το έργο της αντίστασης του αέρα. Να υπολογίσετε το έργο της αντίστασης του αέρα.

5 Στις 14 Οκτωβρίου 2012, ο Felix Baumgartner έσπασε το παγκόσμιο ρεκόρ πτώσης, κάνοντας άλμα από ύψος 38 969 m. Η συνολική μάζα του (μαζί με την προστατευτική στολή) ήταν 118 kg.

Α. Να υπολογίσετε με τι ταχύτητα θα έφθανε στο έδαφος, αν δεν υπήρχε αντίσταση του αέρα. (Στην πραγματικότητα, η μέγιστη ταχύτητα που ανέπτυξε ήταν 1358 km/h).

Β. Εάν η ταχύτητα με την οποία έφθασε στο έδαφος ήταν 8 m/s να υπολογίσετε το συνολικό έργο της αντίστασης του αέρα.

6 Ένα σώμα μάζας 3,0 kg σπρώχνεται στιγμιαία προς τα επάνω κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου, με αρχική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{αρχ}$ = 4 m/s. Κατά τη διάρκεια της κίνησής του, στο σώμα ασκείται μια σταθερή τριβή ολίσθησης από το επίπεδο. Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται αφού διατρέξει 1,0 m κατά μήκος του επιπέδου.

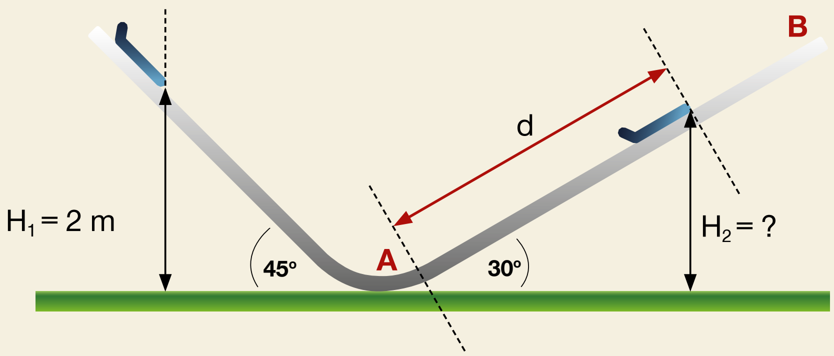


Α. Ξεκινώντας από το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας για το σώμα, να βρείτε μια σχέση που να συνδέει το έργο της τριβής ολίσθησης και τη μεταβολή μηχανικής ενέργειας του συστήματος σώματος - Γης.

Β. Να υπολογίσετε το έργο της τριβής κατά την άνοδο του σώματος.

Γ. Να προσδιορίσετε την ταχύτητα του σώματος όταν επιστρέψει στην αρχική του θέση. Να θεωρήσετε ότι η κινητική τριβή που υφίσταται το σώμα έχει το ίδιο μέτρο κατά την άνοδο και κάθοδο του σώματος.

7 Μια σανίδα χιονιού μάζας (snowboard) m = 250 g αφήνεται από την ηρεμία να κινηθεί κατά μήκος της πίστας του πιο κάτω σχήματος.



Α. Εάν η τριβή από την πίστα μπορεί να αγνοηθεί, να χρησιμοποιήσετε την αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος H_2, στο οποίο θα φθάσει η σανίδα στην πίστα ΑΒ.

Β. Εάν κατά την κίνηση στην πίστα ΑΒ ασκείται στη σανίδα μια σταθερή δύναμη κινητικής τριβής με μέτρο Τ = (mg)/2, να υπολογίσετε (i) το ύψος στο οποίο θα φθάσει η σανίδα, (ii) το έργο της τριβής, και (iii) τη μεταβολή στη μηχανική ενέργεια. (iv) Να εξηγήσετε γιατί δεν διατηρείται η μηχανική ενέργεια σε αυτή την περίπτωση.

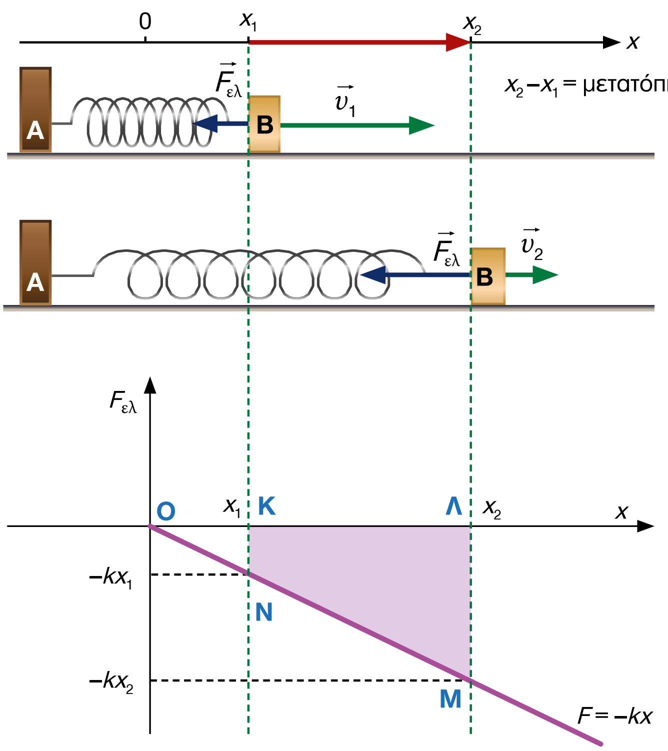
8 Ο ελικοειδής δρόμος «24-ζιγκ» της εικόνας είναι κατασκευασμένος στην Κίνα και φέρει αυτή την ονομασία από τις 24 στροφές («ζιγκ-ζαγκ») που τον αποτελούν. Η υψομετρική διαφορά του τέλους του δρόμου (ευθεία ΑΒ) από την αρχή του (ευθεία ΓΔ) είναι 260 m και το μήκος του δρόμου είναι περίπου 4 km. Το σχεδόν ευθύγραμμο μονοπάτι (κόκκινη γραμμή) ξεκινά και καταλήγει στο ίδιο υψόμετρο με τον ελικοειδή δρόμο, και έχει μήκος περίπου 300 m.

Α. Ποιόν από τους δύο δρόμους θα ακολουθούσατε προκειμένου το βάρος σας να καταναλώσει λιγότερο έργο;

Β. Γιατί στις απότομες πλαγιές των βουνών κατασκευάζονται ελικοειδείς δρόμοι σαν αυτόν της εικόνας, αντί για ευθύγραμμους δρόμους με κατεύθυνση προς την κορυφή;

4.17. Έργο Δύναμης Ελατηρίου

Στην Εικόνα 4-7 απεικονίζεται ένα σώμα μάζας m το οποίο είναι στερεωμένο στην ελεύθερη άκρη ενός οριζόντιου ελατηρίου αμελητέας μάζας, και κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο.



Εικόνα 4-7
Το σώμα είναι προσδεδεμένο στην ελεύθερη άκρη Β του ελατηρίου, και μετακινείται από τη θέση x_1 στη θέση x_2. Η γραφική παράσταση απεικονίζει τη δύναμη από το ελατήριο στο σώμα σαν συνάρτηση της θέσης της άκρης Β. Το εμβαδόν του τραπεζίου ΚΛΜΝ ισούται με το έργο της δύναμης ελατηρίου για τη μετακίνηση $x_1 \longrightarrow x_2$.

Έργο δύναμης ελατηρίου για την

μετατόπιση από x_1 σε x_2 =

Εμβαδόν τραπεζίου ΚΛΜΝ:

$$W = E_{\text{ΚΛΜΝ}} = \frac{1}{2}(\text{ΚΝ} + \text{ΛΜ})(\text{ΚΛ}) =$$

$$\frac{1}{2}(-kx_1 - kx_2)(x_2 - x_1) = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

Η άκρη Α του ελατηρίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο τοίχο. Η άκρη Β είναι ελεύθερη να κινηθεί, και η θέση της περιγράφεται με τη βοήθεια του οριζόντιου άξονα Οx. Η τιμή $x = 0$ αντιστοιχεί στη θέση της ελεύθερης άκρης Β, όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Για θετικές τιμές της θέσης ($x > 0$) το ελατήριο είναι επιμηκυμένο, και για αρνητικές τιμές ($x < 0$) είναι συσπειρωμένο. Στο σώμα ασκείται το βάρος του $\vec{B}$, μια κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το έδαφος, και η δύναμη ελατηρίου $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$. Οι δυνάμεις $\vec{B}$ και $\vec{N}$ είναι αντίθετες (δεν συμπεριλαμβάνονται στο σχήμα). Η συνισταμένη δύναμη στο σώμα είναι η **δύναμη ελατηρίου**.

Στο κάτω μέρος της Εικόνας 4-9 απεικονίζεται η γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής $F_{\varepsilon\lambda}$ της δύναμης ελατηρίου σαν συνάρτηση της θέσης x της ελεύθερης άκρης Β. Έστω ότι το σώμα μετατοπίζεται από την αρχική θέση x_1 στην τελική θέση x_2. Όπως αποδείξαμε προηγουμένως, το έργο της δύναμης ελατηρίου για αυτή τη μετατόπιση ισούται με το εμβαδόν της αντίστοιχης επιφάνειας κάτω από τη γραφική παράσταση, δηλαδή του τραπεζίου ΚΛΜΝ. **Οι πλευρές του τραπεζίου εισέρχονται με τις αλγεβρικές τους τιμές** στον υπολογισμό αυτού του εμβαδού:

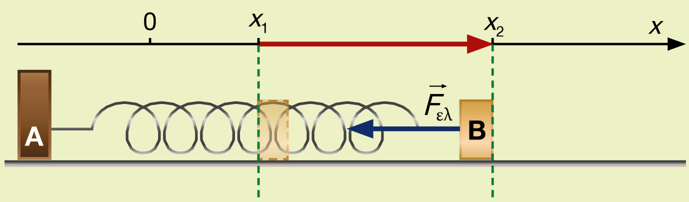
$$W_{x_1 \to x_2} = \frac{1}{2}(-kx_1 - kx_2)(x_2 - x_1) = -\frac{1}{2}k(x_1 + x_2)(x_2 - x_1) = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

Στην πιο πάνω σχέση, **το έργο της δύναμης ελατηρίου εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση του σώματος**. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η ίδια σχέση περιγράφει το έργο της δύναμης ελατηρίου, για οποιαδήποτε διαδρομή που ξεκινά από τη θέση x_1 και καταλήγει στη θέση x_2 (η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση). Συνεπώς, **η δύναμη ελατηρίου είναι διατηρητική**.

Έργο Δύναμης Ελατηρίου για Μετακίνηση της Ελεύθερης Άκρης του από μια Αρχική Θέση x_1 σε μια Τελική Θέση x_2.

$$W_{x_1 \to x_2} = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

Η μορφή αυτή είναι σωστή εάν η ελεύθερη (κινούμενη) άκρη του ελατηρίου είναι στη θέση $x=0$, όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.



Το έργο της δύναμης ελατηρίου είναι **αρνητικό** εάν η τελική θέση είναι μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή από την αρχική θέση $|x_2| > |x_1|$, επειδή σε αυτή την περίπτωση η δύναμη ελατηρίου και η μετατόπιση είναι αντίρροπες.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 4.17.1., σελ. 296.

4.18. Δυναμική Ενέργεια Συστήματος Σώματος - Ελατηρίου

Έστω ότι το σώμα της Εικόνας 4-7 διέρχεται από τη θέση $x = x_1$ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ και από τη θέση $x = x_2$ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$. Επειδή η δύναμη ελατηρίου $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ είναι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα, από το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας προκύπτει ότι το έργο της $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος. Συνεπώς:

$$W_{x_1 \to x_2} = E^{\kappa\iota\nu}_{\tau\varepsilon\lambda} - E^{\kappa\iota\nu}_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow -\frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \Rightarrow$$

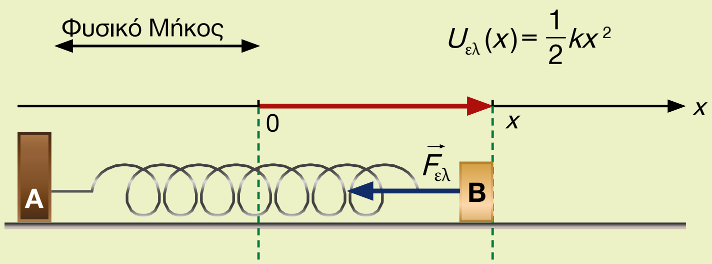
$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$

Στην τελευταία ισότητα έχει εμφανισθεί εκτός από την κινητική ενέργεια του σώματος $1/2m\upsilon^2$, και η ποσότητα $1/2kx^2$, η οποία εξαρτάται από τη θέση της ελεύθερης άκρης του ελατηρίου. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται **Δυναμική Ενέργεια του Συστήματος Σώματος - Ελατηρίου** (ή δυναμική ενέργεια ελατηρίου) και την συμβολίζουμε με $U_{\varepsilon\lambda}$.

Δυναμική Ενέργεια Συστήματος Σώματος - Ελατηρίου, όταν το μήκος του ελατηρίου διαφέρει κατά *x* από το φυσικό του μήκος:

$$U_{\varepsilon\lambda}(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Η δυναμική ενέργεια ελατηρίου έχει μονάδες ενέργειας [(N/m) m² = N m = Joule].



Σύνδεση Έργου Δύναμης Ελατηρίου - Δυναμικής Ενέργειας Ελατηρίου

Ο πιο πάνω ορισμός της δυναμικής ενέργειας ελατηρίου μας επιτρέπει **να εκφράσουμε το έργο δύναμης ελατηρίου, κατά τη μετατόπιση της ελεύθερης άκρης του από μια αρχική θέση x_1 σε τελική θέση x_2, χρησιμοποιώντας τη δυναμική ενέργεια ελατηρίου:**

$$W_{x_1 \to x_2} = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) = -[U_{\varepsilon\lambda}(x_2) - U_{\varepsilon\lambda}(x_1)] = -\Delta U_{\varepsilon\lambda}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι το έργο της δύναμης ελατηρίου ισούται με την **αρνητική** μεταβολή στη δυναμική ενέργεια του συστήματος ελατηρίου-σώματος. Όπως δείξαμε πριν, μία παρόμοια σχέση συνδέει το έργο του βάρους με τη μεταβολή στη βαρυτική δυναμική ενέργεια.

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερώτηση 4.18.1., σελ. 296.

4.19. Ορισμός της Μηχανικής Ενέργειας για την περίπτωση Σώματος Προσδεδεμένου σε Οριζόντιο Ελατήριο

Επειδή το ελατήριο έχει αμελητέα μάζα, η κινητική ενέργεια του ελατηρίου είναι συνεχώς ίση με μηδέν. Το άθροισμα της κινητικής ενέργειας του σώματος και της δυναμικής ενέργειας σώματος - ελατηρίου είναι η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος - ελατηρίου.

Μηχανική Ενέργεια Συστήματος Σώματος - Ελατηρίου = Κινητική Ενέργεια + Δυναμική Ενέργεια

$$E_{\mu\eta\chi} = E_{\kappa\iota\nu} + U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Όπως δείξαμε στην **Ενότητα 4.18**, η θέση και η ταχύτητα ενός σώματος, που κινείται σε οριζόντια διεύθυνση υπό την επίδραση της δύναμης αβαρούς ελατηρίου, συνδέονται με την πιο κάτω σχέση:

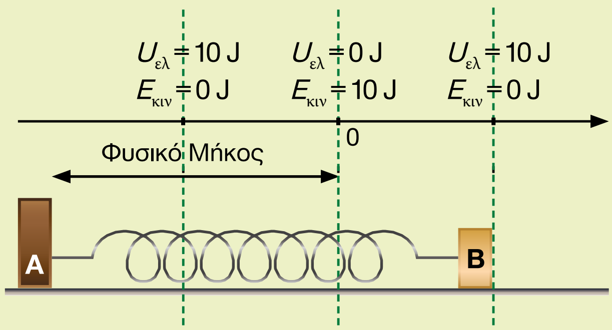
$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$

Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος - ελατηρίου της Εικόνας 4-7 παραμένει σταθερή. Συμπεραίνουμε ότι:

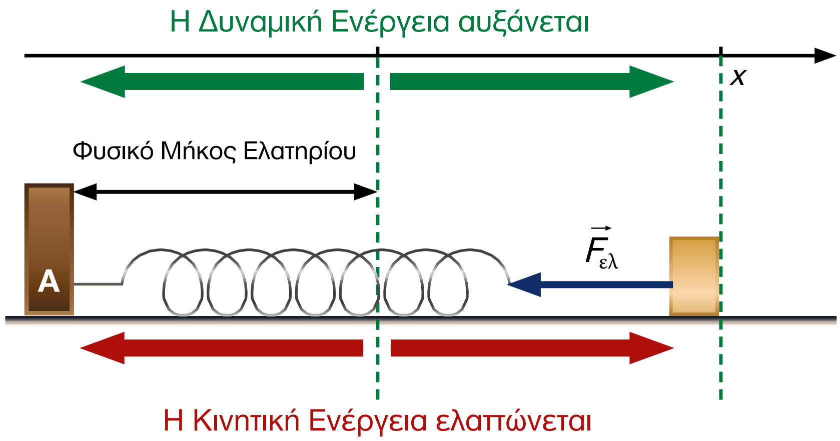
Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας Σώματος συνδεδεμένου με Οριζόντιο Ελατήριο

Εάν η μοναδική δύναμη που κινεί ένα σώμα συνδεδεμένο με ελατήριο είναι η δύναμη ελατηρίου, η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος-ελατηρίου παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος.

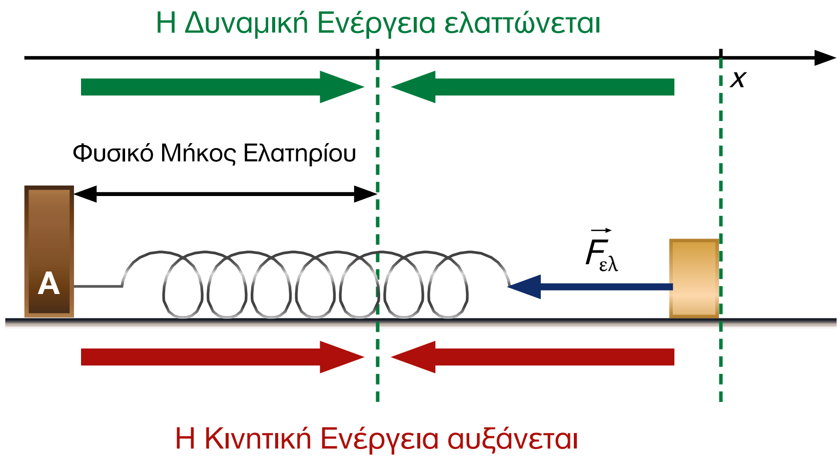
$$E^{\alpha\rho\chi}_{\mu\eta\chi} = E^{\tau\varepsilon\lambda}_{\mu\eta\chi} \Rightarrow \Delta E_{\mu\eta\chi} = 0 \Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu} = -\Delta U_{\varepsilon\lambda}$$



Όταν το σώμα κινείται έτσι ώστε το ελατήριο να παραμορφώνεται, η δύναμη από το ελατήριο στο σώμα καταναλώνει έργο επειδή είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση του σώματος. Σε αυτή την περίπτωση, η δυναμική ενέργεια ελατηρίου αυξάνεται επειδή αυξάνεται η απόλυτη τιμή της θέσης x. *Εάν η μόνη δύναμη που κινεί το σώμα είναι η δύναμη ελατηρίου, η κινητική ενέργεια μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια σώματος - ελατηρίου:* $(\Delta E_{κιν} = -\Delta U_{ελ} < 0)$.



Αντίθετα, όταν το σώμα κινείται έτσι ώστε το ελατήριο να επανακτά το φυσικό του μήκος, η δύναμη ελατηρίου παράγει έργο. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου ελαττώνεται επειδή ελαττώνεται η απόλυτη τιμή της θέσης x. *Εάν η μόνη δύναμη που κινεί το σώμα είναι η δύναμη ελατηρίου, η δυναμική ενέργεια ελατηρίου μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του σώματος:* $(\Delta U_{ελ} = -\Delta E_{κιν} < 0)$.



Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερώτηση 4.19.1., σελ. 296.

4.20. Εφαρμογές της Αρχής της Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για Σύστημα Σώματος - Ελατηρίου

Παράδειγμα 1

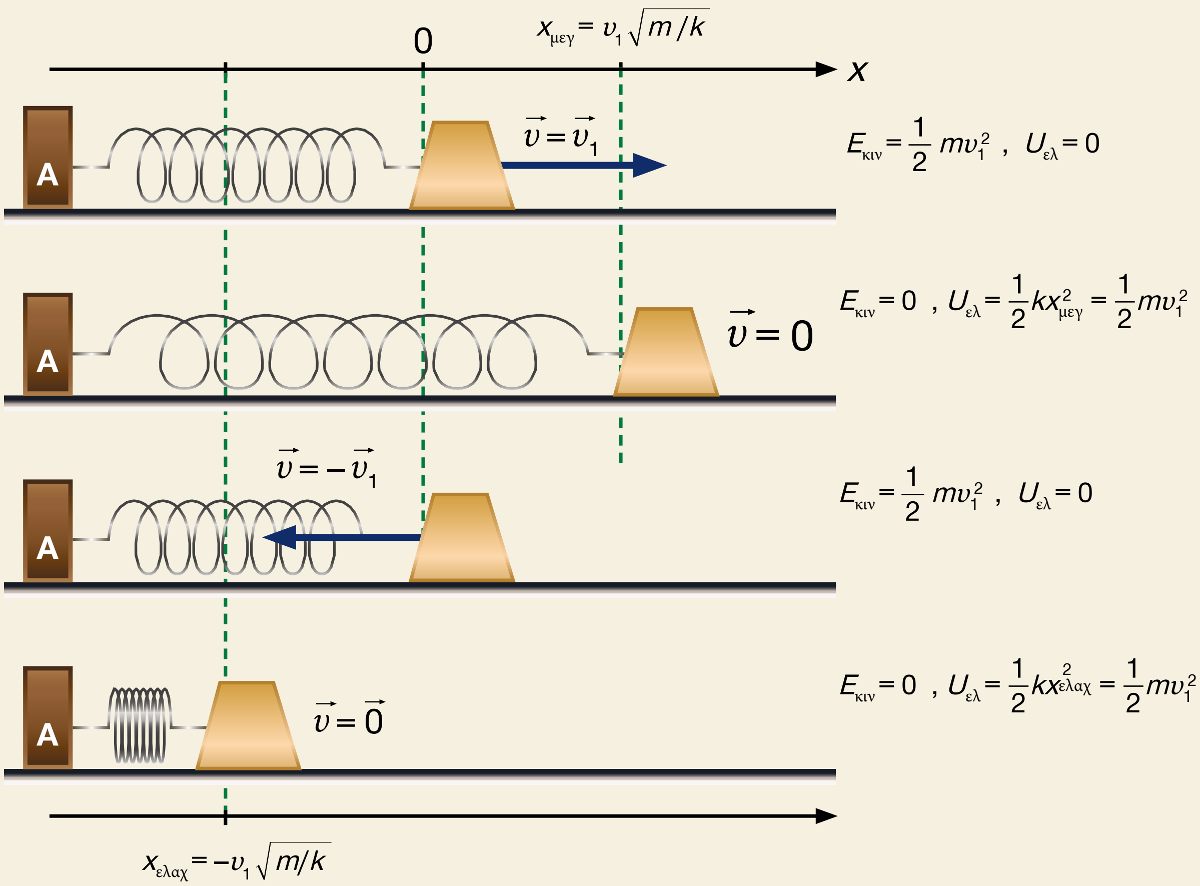
Υπολογισμός της Ταχύτητας Σώματος που συνδέεται με Οριζόντιο Ελατήριο

Ένα σώμα είναι συνδεδεμένο με οριζόντιο αβαρές ελατήριο και εφάπτεται σε οριζόντιο λείο τραπέζι. Στο σώμα προσδίδεται θετική ταχύτητα $\upsilon_1 > 0$ στη θέση $x = 0$, για την οποία το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

i. Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση μηχανικής ενέργειας, θα προσδιορίσουμε τις θέσεις στις οποίες μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος.

Το βάρος του σώματος και η κάθετη δύναμη από το λείο τραπέζι δεν παράγουν έργο. Επειδή η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι η δύναμη ελατηρίου, η μηχανική ενέργεια Σώματος - Ελατηρίου διατηρείται. Στις θέσεις όπου μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος, η κινητική ενέργεια μηδενίζεται και η δυναμική ενέργεια παίρνει τη μέγιστη δυνατή τιμή. Από την αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, προκύπτει:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \pm\,\upsilon_1\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow x_{\mu\varepsilon\gamma} = +\upsilon_1\sqrt{\frac{m}{k}}\,,\ x_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = -\upsilon_1\sqrt{\frac{m}{k}}$$



Επειδή αρχικά το σώμα έχει θετική ταχύτητα στη θέση $x = 0$, θα κινηθεί προς τη θετική κατεύθυνση (όπου αυξάνονται οι τιμές τιμές θέσεων). Συνεπώς, η πρώτη θέση στην οποία μηδενίζεται η ταχύτητά του δίνεται από τη θετική λύση $x_{μεγ} = +\upsilon_1\sqrt{m/k}$. Σε εκείνο το σημείο, το ελατήριο είναι επιμηκυμένο και η δύναμη ελατηρίου αναγκάζει το σώμα να κινηθεί προς την αρνητική κατεύθυνση. Το σώμα θα επιστρέψει στην θέση $x = 0$ έχοντας αρνητική ταχύτητα, και θα συνεχίσει να κινείται μέχρι την αρνητική θέση $x_{ελαχ} = -\upsilon_1\sqrt{m/k}$, όπου μηδενίζεται ξανά η ταχύτητά του.

ii. Ας προσδιορίσουμε την ταχύτητα του σώματος, όταν επιστρέψει στη θέση $x = 0$

Όταν το σώμα επιστρέψει για πρώτη φορά στη θέση ισορροπίας, η δυναμική ενέργεια ελατηρίου μηδενίζεται, και η συνολική μηχανική ενέργεια ισούται με την κινητική ενέργεια του σώματος. Συνεπώς, το σώμα έχει ταχύτητα:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}k\left(\upsilon_1\sqrt{m/k}\right)^2 \Rightarrow \upsilon_2 = \pm\upsilon_1$$

Επειδή το σώμα κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, αποδεκτή λύση είναι η αρνητική $\upsilon_2 = -\upsilon_1$.

iii. Η ταχύτητα του σώματος σε μια ενδιάμεση θέση x.

Σε μια ενδιάμεση θέση, οι τιμές της κινητικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας ελατηρίου είναι μη μηδενικές. Εξισώνοντας τη μηχανική ενέργεια στις θέσεις x και $x_{μεγ}$, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0 + \frac{1}{2}kx_{μεγ}^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(x_{μεγ}^2 - x^2\right)}$$

Τα δύο πρόσημα αντιστοιχούν στις τιμές της ταχύτητας, για την περίπτωση που το σώμα κινείται προς τη θετική ή αρνητική κατεύθυνση.

Να παρατηρήσετε ότι η επίλυση του προηγούμενου προβλήματος με χρήση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα θα ήταν πιο δύσκολη, επειδή η συνισταμένη δύναμη στο σώμα είναι μεταβαλλόμενη, και συνεπώς η κίνηση του σώματος δεν είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη. Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, η επίλυση γίνεται εύκολη.

Παράδειγμα 2

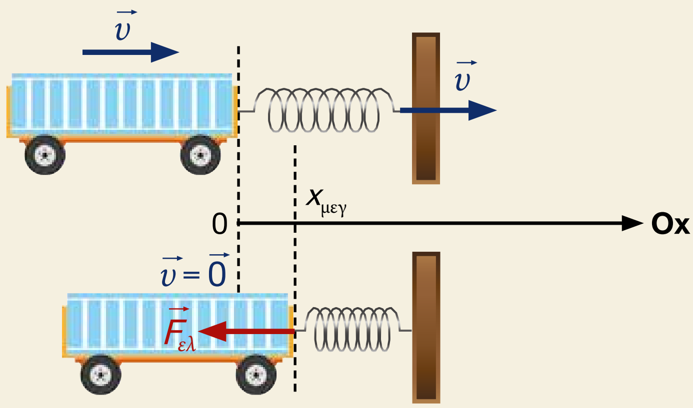
Καροτσάκι με προφυλακτήρα ελατηρίου

Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζεται ένα καροτσάκι, το οποίο περιέχει ένα ελατήριο στο μπροστινό του μέρος. Το καροτσάκι ακουμπά τον τοίχο με ταχύτητα μέτρου υ. Κατά την πρόσκρουση, το ελατήριο συσπειρώνεται μέχρις ότου το καροτσάκι ακινητοποιηθεί. Από τη διατήρηση μηχανικής ενέργειας για το σύστημα αυτοκίνητο-ελατήριο, προκύπτει για τη μέγιστη συσπείρωση $x_{μεγ}$:

$$E_{κιν}^{αρχ} = U_{ελ}^{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}kx_{μεγ}^2 \Rightarrow x_{μεγ} = \upsilon\sqrt{m/k}$$

Το καροτσάκι ακουμπά τον τοίχο με ταχύτητα μέτρου υ.

Το καροτσάκι ακινητοποιείται, αφού το ελατήριο έχει συμπιεσθεί κατά x.



Στη θέση μέγιστης συσπείρωσης $x_{μεγ}$, η δύναμη από το ελατήριο στο καροτσάκι αποκτά μέγιστο μέτρο:

$$F=-kx_{μεγ}=-\upsilon\sqrt{km}$$

Παρατηρείστε ότι για δεδομένη ταχύτητα, η δύναμη που ασκείται στο καροτσάκι ελαττώνεται, εάν ελαττωθεί η σταθερά ελατηρίου (ταυτόχρονα αυξάνεται η μέγιστη συσπείρωση $x_{μεγ}$).

Όπως αναφέραμε σε προηγούμενο παράδειγμα, τα σύγχρονα αυτοκίνητα διαθέτουν προστατευτικές «ζώνες παραμόρφωσης» (crumble zones), οι οποίες συμπιέζονται και ελαττώνουν τη δύναμη που ασκείται στην καμπίνα του οδηγού. Το απλό αυτό μοντέλο μας βοηθά να κατανοήσουμε τη λειτουργία των ζωνών παραμόρφωσης: όσο πιο «μαλακό» είναι το υλικό της ζώνης παραμόρφωσης (μικρό k), τόσο πιο μεγάλη η παραμόρφωση και τόσο πιο μικρή η δύναμη που υφίσταται η καμπίνα. (Στην πραγματικότητα, η παραμόρφωση αυτών των ζωνών είναι μόνιμη και η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται, όπως εξηγούμε στο τέλος του κεφαλαίου).

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 4.20.1. - 4.20.2, σελ. 297.

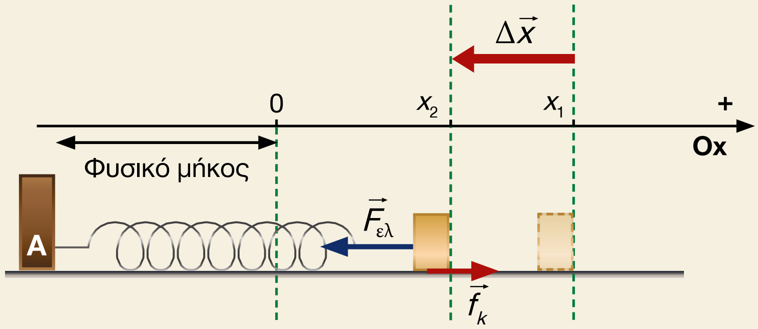
4.21. Η Μηχανική Ενέργεια του Συστήματος Σώματος - Ελατηρίου δεν διατηρείται όταν ασκούνται Επιπρόσθετες Δυνάμεις με μη Μηδενικό Συνολικό Έργο

Στην Ενότητα **4.16** δείξαμε ότι η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης δεν διατηρείται, εάν στο σώμα ασκούνται επιπρόσθετες δυνάμεις, εκτός από το βάρος του, με μη μηδενικό έργο. Ομοίως, η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος - ελατηρίου δεν διατηρείται, όταν στο σώμα δρούν επιπρόσθετες δυνάμεις, εκτός της δύναμης ελατηρίου, με μη μηδενικό έργο. Στο επόμενο παράδειγμα, στο σώμα δρα επίσης και η κινητική τριβή από το έδαφος.

Παράδειγμα

Σύστημα Σώματος και Οριζόντιου Ελατηρίου σε επαφή με μη Λεία Επιφάνεια

Στο πιο κάτω σχήμα απεικονίζεται ένα σώμα μάζας m, το οποίο είναι στερεωμένο στην ελεύθερη άκρη ενός οριζόντιου ελατηρίου αμελητέας μάζας, και κινείται σε μη λείο οριζόντιο δάπεδο.



Στο σώμα ασκείται η δύναμη ελατηρίου $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ και η δύναμη κινητικής τριβής $\vec{f}_k$ από το δάπεδο. Στην κατακόρυφη διεύθυνση ασκούνται στο σώμα το βάρος του $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το δάπεδο (δεν είναι σχεδιασμένες).

Επιλέγουμε τον άξονα Ox παράλληλο με την μετατόπιση, και τη θετική φορά προς τα δεξιά (σημειώνεται με «+» στο σχήμα). Το σώμα μετατοπίζεται κατά $\Delta\vec{x}$ (από τη θέση x_1 στη θέση x_2).

Το έργο του βάρους $\vec{B}$ και της κάθετης δύναμης $\vec{N}$ είναι μηδενικό. Εφαρμόζοντας τη σχέση έργου - κινητικής ενέργειας για το σώμα, προκύπτει:

$$\Delta E_{\kappa\iota\nu} = W_{\vec{F}_{\varepsilon\lambda}} + W_{\vec{f}_k} \Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu} = -\Delta U_{\varepsilon\lambda} + W_{\vec{f}_k} \Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu} + \Delta U_{\varepsilon\lambda} = W_{\vec{f}_k} \Rightarrow \Delta E_{\mu\eta\chi} = W_{\vec{f}_k}$$

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος - ελατηρίου δεν διατηρείται, επειδή στο σώμα δρα και η επιπρόσθετη δύναμη $\vec{f}_k$. **Το συνολικό έργο αυτής της δύναμης ισούται με τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος σώματος - ελατηρίου.**

Επειδή η τριβή και η μετατόπιση έχουν αντίθετη φορά, το έργο της τριβής είναι αρνητικό και η μηχανική ενέργεια ελαττώνεται:

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = W_{\vec{f}_k} = f_k \Delta x < 0$$

Καταλήγουμε στο πιο κάτω γενικό συμπέρασμα:

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος - ελατηρίου **δεν διατηρείται** όταν στο σώμα ασκούνται εκτός από τη δύναμη ελατηρίου και επιπρόσθετες δυνάμεις με μη μηδενικό συνολικό έργο.

Η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας ισούται με το συνολικό έργο των δυνάμεων αυτών:

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = \sum W_{\vec{F}}$$

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερώτηση 4.21.1., σελ. 297.

Ερωτήσεις Κατανόησης

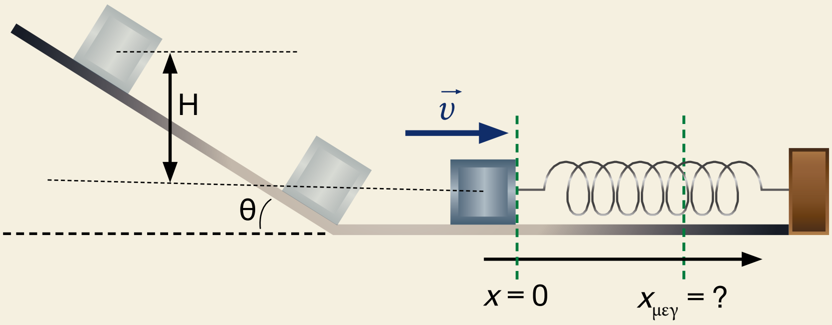
Οι επόμενες ερωτήσεις αναφέρονται σε ένα σώμα προσδεδεμένο στην μία άκρη οριζόντιου, αβαρούς ελατηρίου. Η άλλη άκρη του ελατηρίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο. Το σώμα κινείται σε λείο, οριζόντιο δάπεδο υπό την επίδραση της δύναμης του ελατηρίου.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με την ένδειξη Σωστό / Λάθος.

Α/Α	ΠΡΟΤΑΣΗ	Σωστό / Λάθος
1	Όταν το ελατήριο επαναφέρεται στο φυσικό του μήκος, το έργο της δύναμης ελατηρίου είναι θετικό.	
2	Όταν αυξάνεται η παραμόρφωση του ελατηρίου, το έργο της δύναμης ελατηρίου είναι αρνητικό.	
3	Η δύναμη ελατηρίου είναι διατηρητική.	
4	Η δυναμική ενέργεια του συστήματος Σώματος - Ελατηρίου είναι θετική όταν το ελατήριο είναι παραμορφωμένο.	
5	Η δυναμική ενέργεια του συστήματος Σώματος - Ελατηρίου ελαττώνεται πάντοτε όταν ελαττώνεται το μήκος του ελατηρίου.	
6	Η μηχανική ενέργεια του συστήματος Σώματος - Ελατηρίου παραμένει σταθερή.	
7	Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι μέγιστη όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.	

Ασκήσεις

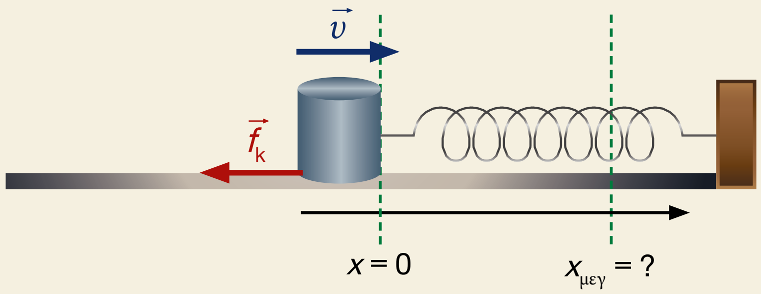
1. Ένα σώμα μάζας m αρχίζει να κινείται από την ηρεμία στο κεκλιμένο δάπεδο του σχήματος, συνεχίζει την κίνησή του στο οριζόντιο δάπεδο και τελικά προσκρούει με ταχύτητα μέτρου υ σε αβαρές οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k. Να υποθέσετε ότι όλα τα δάπεδα είναι λεία.



Α. Εφαρμόζοντας την αρχή της διατήρησης μηχανικής ενέργειας για το σύστημα σώματος - Γης, να υπολογίσετε την ταχύτητα που θα έχει το σώμα όταν συναντήσει το ελατήριο, σαν συνάρτηση των m, H και θ.

Β. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας για το σύστημα Σώματος - Ελατηρίου, να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου σαν συνάρτηση των m, H, θ και k.

❷ Ένα σώμα μάζας $m = 25$ kg κινείται σε ένα τραχύ οριζόντιο δάπεδο, και προσκρούει με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 4$ m/s σε αβαρές οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 400$ N/m. Εκτός από τη δύναμη ελατηρίου, στο σώμα ασκείται από το δάπεδο και μια σταθερή δύναμη κινητικής τριβής, μέτρου $|\vec{f}_k| = mg/2$.



Α. Έστω ότι στη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_{μεγ}$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας, να εξαγάγετε μια σχέση ανάμεσα στο έργο της τριβής και στη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος ελατηρίου - σώματος στα σημεία $x = 0$ και $x_{μεγ}$. Η σχέση αυτή είναι δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς τη μεταβλητή $x_{μεγ}$.

Β. Αντικαθιστώντας τις τιμές της μάζας, της ταχύτητας του σώματος και της σταθεράς ελατηρίου, να υπολογίσετε τη θέση $x_{μεγ}$ της μέγιστης συσπείρωσης.

Μορφές Ενέργειας που χρησιμοποιούνται στην Περιγραφή του Φυσικού Κόσμου, και Μετατροπές Μορφών Ενέργειας

4.22. Διάφορες Μορφές Ενέργειας

Στις προηγούμενες ενότητες του Κεφαλαίου 4 εξετάσαμε υλικά σώματα, τα οποία κινούνται στο χώρο υπό την επίδραση **διατηρητικών δυνάμεων** όπως το βάρος και η δύναμη ελατηρίου, και συνδέσαμε την κινητική κατάσταση και τη θέση αυτών των σωμάτων στο χώρο με συγκεκριμένες μορφές ενέργειας: την **κινητική ενέργεια**, τη **βαρυτική δυναμική ενέργεια** και τη **δυναμική ενέργεια ελατηρίου**. Σε αυτή την ενότητα θα συζητήσουμε επιπρόσθετες μορφές ενέργειας, που χαρακτηρίζουν τα διάφορα σώματα.

Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια

Οι ηλεκτρικές δυνάμεις μπορούν να παράγουν έργο και να μεταβάλλουν την κινητική κατάσταση φορτισμένων σωματιδίων. Ένα σύστημα φορτίων, που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με ηλεκτρικές δυνάμεις, έχει **ηλεκτρική δυναμική ενέργεια**.

Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 3, τα άτομα και μόρια της ύλης ασκούν μεταξύ τους ηλεκτρικές δυνάμεις, οι οποίες οφείλονται στα ηλεκτρικά φορτία των πυρήνων και των ηλεκτρονίων τους. *Ακόμη και εάν τα άτομα ή μόρια είναι ηλεκτρικά ουδέτερα, οι ηλεκτρικές δυνάμεις μεταξύ τους είναι μη μηδενικές, εξαιτίας της ασυμμετρικής κατανομής του θετικού φορτίου των πυρήνων τους και του αρνητικού φορτίου των ηλεκτρονίων τους*. Ένα σώμα έχει **εσωτερική δυναμική ενέργεια** εξαιτίας των ηλεκτρικών δυνάμεων που ασκούνται μεταξύ των ατόμων ή μορίων του.

Εσωτερική Κινητική Ενέργεια ενός Σώματος

Ένα σώμα που βρίσκεται σε ηρεμία (π.χ. μια πέτρα που ηρεμεί στην επιφάνεια του εδάφους, το νερό στο εσωτερικό ενός ακίνητου ποτηριού, το αέριο στο εσωτερικό ενός ακίνητου μπαλονιού) έχει μηδενική κινητική ενέργεια: $\upsilon_{σωμ} = 0 \Rightarrow E_{κιν} = 1/2 M \upsilon_{σωμ}^2 = 0$. Στη σχέση αυτή, M είναι η συνολική μάζα του σώματος και $\upsilon_{σωμ} = 0$ είναι η ταχύτητα με την οποία το παρατηρούμε να κινείται σαν ένα σύνολο.

Εάν παρατηρήσουμε τα σωματίδια που αποτελούν ένα ακίνητο σώμα, θα διαπιστώσουμε ότι *βρίσκονται σε συνεχή κίνηση*. Εάν ανοίξουμε μια φιάλη με άρωμα, θα αντιληφθούμε μετά από κάποιο χρονικό διάστημα ότι τα μόρια του αρώματος έχουν διασκορπισθεί στο χώρο του δωματίου. Εάν τοποθετήσουμε μια σταγόνα μελανιού στο εσωτερικό ενός ποτηριού με νερό, θα παρατηρήσουμε μετά από λίγο ότι τα σωματίδια του μελανιού διαχέονται σε όλο τον όγκο του νερού.

Η σταγόνα μελανιού διαχέεται στο νερό, εξαιτίας της κίνησης των μορίων του και των μορίων του νερού.

Τα άτομα ή μόρια ενός αερίου, υγρού ή στερεού σώματος κινούνται συνεχώς προς όλες τις κατευθύνσεις με διάφορες ταχύτητες, ακόμη κι όταν το σώμα δεν μετακινείται στο χώρο. Οι ταχύτητες των ατόμων ή μορίων ενός σώματος αλλάζουν συνεχώς κατά μέτρο και κατεύθυνση, εξαιτίας των συγκρούσεών τους με άλλα άτομα ή μόρια.

Εξαιτίας της κίνησής του, κάθε άτομο ή μόριο ενός σώματος έχει **εσωτερική κινητική ενέργεια**. Θεωρούμε ότι τα άτομα ή μόρια του σώματος αποτελούν υλικά σημεία. Τότε, η κινητική ενέργεια κάποιου μορίου είναι ίση με $E_{κιν,i} = 1/2 m_i \upsilon_i^2$. Σε αυτή τη σχέση, m_i είναι η μάζα του μορίου και υ_i είναι το μέτρο της ταχύτητας που μετρούμε ότι έχει το μόριο, *όταν το σώμα είναι ακίνητο* ($\vec{\upsilon}_{σωμ} = \vec{0}$). Το άθροισμα των εσωτερικών κινητικών ενεργειών όλων των ατόμων ή μορίων ενός σώματος ισούται με τη συνολική εσωτερική κινητική ενέργεια του σώματος:

Εσωτερική Κινητική Ενέργεια (Σώμα που αποτελείται από μονοατομικά μόρια)

$$E_{\text{κιν}}^{\text{εσωτ}} = \sum E_{\text{κιν},i} = \sum \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2 \qquad (\vec{\upsilon}_{\text{σωμ}} = \vec{0})$$

Εάν τα μόρια ενός σώματος αποτελούνται από περισσότερα άτομα, η κίνησή τους είναι πιο σύνθετη: καθώς τα μόρια μετατοπίζονται, ταυτόχρονα περιστρέφονται και τα άτομά τους ταλαντώνονται. Αυτές οι κινήσεις συνεισφέρουν στην συνολική κινητική ενέργεια.

Χημική Ενέργεια

Όταν οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ δύο ή περισσοτέρων ατόμων είναι αρκετά ισχυρές, ώστε τα άτομα αυτά να δημιουργούν σταθερά και ανεξάρτητα συσσωματώματα που ονομάζονται μόρια, θεωρούμε ότι μεταξύ των ατόμων αναπτύσσονται χημικοί δεσμοί. Για παράδειγμα, στο μόριο του μεθανίου ένα άτομο άνθρακα σχηματίζει χημικούς δεσμούς με τέσσερα άτομα υδρογόνου.

Εξαιτίας των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων και της κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων και των πυρήνων, κάθε χημικός δεσμός περιέχει ενέργεια που την ονομάζουμε **χημική ενέργεια**. Ομοίως, ένα μονοατομικό μόριο περιέχει ενέργεια εξαιτίας των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων και της κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων και του πυρήνα του.

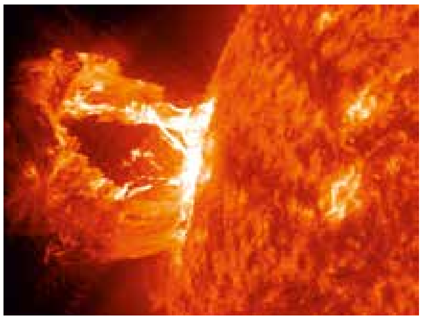
Όταν διασπάται ένας χημικός δεσμός κατά τη διάρκεια μιας χημικής αντίδρασης, απελευθερώνεται ενέργεια. Για παράδειγμα, ενέργεια απελευθερώνεται κατά την καύση διαφόρων ενώσεων, όπως οι θρεπτικές ουσίες και το πετρέλαιο.

Συνολική Εσωτερική Ενέργεια

Όπως αναφέραμε πιο πάνω, οι δομικοί λίθοι (άτομα ή μόρια) ενός σώματος έχουν εσωτερική κινητική και ηλεκτρική δυναμική ενέργεια, καθώς και χημική ενέργεια. Το άθροισμα αυτών των μορφών ενέργειας είναι η **συνολική εσωτερική ενέργεια** ενός σώματος. Στη συνολική εσωτερική ενέργεια δεν περιλαμβάνεται η κινητική ενέργεια εξαιτίας της συνολικής κίνησης του σώματος, ή η δυναμική ενέργεια που έχει το σώμα εξαιτίας της θέσης του ή της αλληλεπίδρασής του με άλλα σώματα (π.χ. η βαρυτική δυναμική ενέργεια, η ενέργεια ελατηρίου και η ενέργεια λόγω αλληλεπίδρασης με άλλα φορτισμένα σώματα).

Πυρηνική Ενέργεια

Οι πυρήνες αποτελούνται από υποατομικά σωματίδια (πρωτόνια και νετρόνια) που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με πυρηνικές δυνάμεις. Εξαιτίας αυτών των αλληλεπιδράσεων, οι πυρήνες περιέχουν ενέργεια που την ονομάζουμε **πυρηνική ενέργεια.** Κατά τη διάσπαση μεγάλων ασταθών πυρήνων (πυρηνική σχάση), ή κατά τη συνένωση μικρών πυρήνων σε μεγαλύτερους (πυρηνική σύντηξη), απελευθερώνεται ενέργεια. Σε τέτοιες **πυρηνικές αντιδράσεις**, η συνολική μάζα των τελικών πυρήνων είναι μικρότερη από τη συνολική μάζα των αρχικών πυρήνων. Το έλλειμμα μάζας Δm οφείλεται στη μετατροπή μάζας σε ενέργεια ΔE σύμφωνα με τη φημισμένη εξίσωση του Einstein $\Delta E = \Delta mc^2$ (όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός).



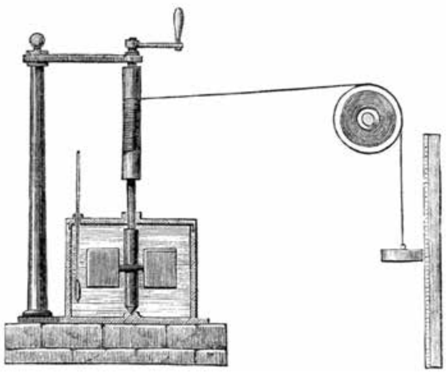
Η ακτινοβολία του ήλιου οφείλεται σε πυρηνικές αντιδράσεις.

Η Έννοια της Θερμότητας

Από την καθημερινή μας εμπειρία γνωρίζουμε ότι εάν φέρουμε σε επαφή δύο σώματα με διαφορετικές θερμοκρασίες, μετά από λίγο οι θερμοκρασίες των σωμάτων θα εξισωθούν. Η εξίσωση των θερμοκρασιών επιτυγχάνεται με μεταφορά ενέργειας από το σώμα υψηλότερης στο σώμα χαμηλότερης θερμοκρασίας. **Η ενέργεια που μεταφέρεται από ένα σώμα υψηλής θερμοκρασίας σε ένα σώμα χαμηλής θερμοκρασίας, εξαιτίας της διαφοράς θερμοκρασίας τους, ονομάζεται θερμότητα.**

Η θερμότητα μετράται σε μονάδες ενέργειας (Joule). Για ιστορικούς λόγους, χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της θερμότητας και η μονάδα cal (calorie), που ορίζεται ως η ποσότητα θερμότητας που απαιτείται για να αυξήσει τη θερμοκρασία μιας μάζας νερού ίσης με 1 g κατά 1 °C (μεταξύ 14,5 °C και 15,5 °C) σε ατμοσφαιρική πίεση. Το 1 cal θερμότητας ισούται περίπου με 4,18 Joule.

Τη δεκαετία του 1840 ο Βρετανός φυσικός και ζυθοποιός James Prescott Joule (1818-1889) πραγματοποίησε μια σειρά από πολύ ακριβή πειράματα, με τα οποία έδειξε ότι για να αυξηθεί (μέσω τριβής) η θερμοκρασία μιας συγκεκριμένης ποσότητας νερού κατά ένα βαθμό Fahrenheit (μεταβολή θερμοκρασίας κατά 1 βαθμό Fahrenheit = μεταβολή κατά 1 βαθμό Κελσίου), απαιτούνταν **μια συγκεκριμένη ποσότητα μηχανικού έργου**. Το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξε ο Joule είναι το **μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας**. Το ισοδύναμο αυτό αποδεικνύει ότι το αίτιο που προκαλεί τη μεταβολή θερμοκρασίας του νερού, δηλαδή η θερμότητα, είναι μεταφερόμενη ενέργεια.



Εικόνα 4-8
Μία συσκευή, με την οποία ο Joule μέτρησε το μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας.

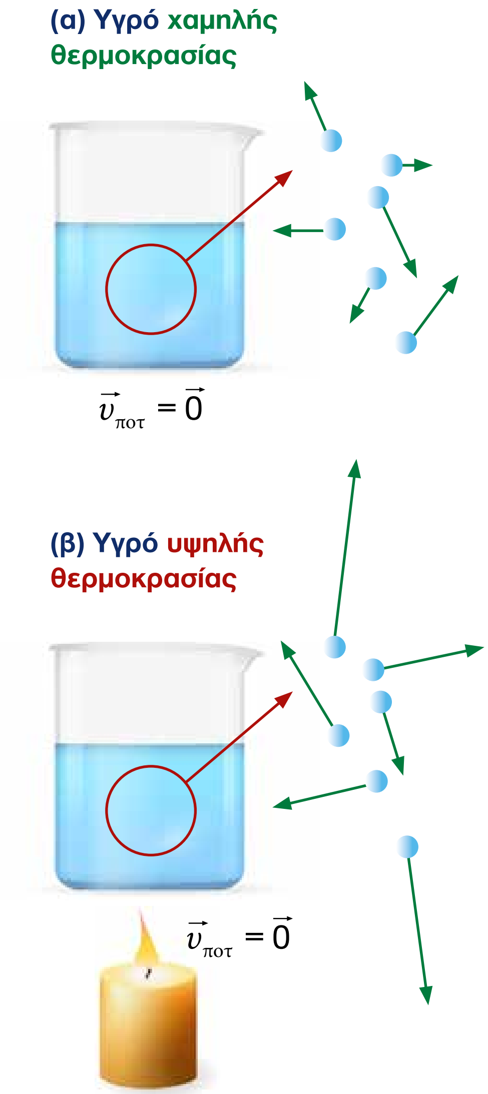
Στην Εικόνα 4-8 απεικονίζεται μία από τις συσκευές που χρησιμοποίησε ο Joule για να αποδείξει το μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας.

Ένα σώμα (δεξιό μέρος της εικόνας) είναι προσδεδεμένο μέσω τροχαλίας σε έναν αναδευτήρα, που μπορεί να περιστρέφεται στο εσωτερικό ενός δοχείου με νερό. Όταν το σώμα κατέρχεται, προκαλεί περιστροφή του αναδευτήρα μέσα στο νερό. Εξαιτίας της τριβής των πτερυγίων του αναδευτήρα με το νερό, το σύστημα νερού - δοχείου θερμαίνεται. Από το πείραμα μπορεί να προσδιορισθεί το έργο που πρέπει να παράξει το βάρος του σώματος, έτσι ώστε να αυξηθεί η θερμοκρασία μιας συγκεκριμένης ποσότητας νερού κατά 1 °C.

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια και τελικά σε εσωτερική ενέργεια του συστήματος δοχείου - νερού.

Μεταβολή της Εσωτερικής Ενέργειας ενός Σώματος με Αύξηση της Θερμοκρασίας

Όταν αυξάνεται η θερμοκρασία ενός σώματος, τα άτομα ή μόριά του συνεχίζουν να κινούνται προς όλες τις κατευθύνσεις με διάφορες, *μεγαλύτερες τιμές ταχύτητας*. Εάν θερμάνουμε μια ποσότητα νερού που περιέχεται σε ένα ακίνητο δοχείο, αυτή συνεχίζει να ηρεμεί (επειδή οι ταχύτητες των μορίων της έχουν οποιαδήποτε κατεύθυνση), αλλά τα μέτρα αυτών των ταχυτήτων μεγαλώνουν (Εικόνα 4-9).



Εικόνα 4-9
(α) Το νερό στο εσωτερικό του ποτηριού ηρεμεί (δεν μετακινείται ως προς το δωμάτιο). Τα μόρια του νερού κινούνται συνεχώς σε οποιαδήποτε κατεύθυνση με διαφορετικές ταχύτητες. Η συνολική κινητική ενέργεια των μορίων του υγρού είναι η εσωτερική κινητική ενέργεια του υγρού.
(β) Εάν αυξηθεί η θερμοκρασία του νερού, τα μέτρα των ταχυτήτων των μορίων μεγαλώνουν. Όταν αυξάνεται η θερμοκρασία ενός σώματος, αυξάνεται η εσωτερική κινητική ενέργεια των ατόμων ή μορίων που το αποτελούν.

Μπορούμε να διαπιστώσουμε πειραματικά ότι τα άτομα ή μόρια ενός θερμότερου σώματος κινούνται πιο γρήγορα: Εάν τοποθετήσουμε δύο παρόμοιες σταγόνες μελανιού στο εσωτερικό δύο δοχείων με κρύο και ζεστό νερό, θα παρατηρήσουμε ότι η σταγόνα μελανιού που βρίσκεται στο δοχείο με το ζεστό νερό διαχέεται πιο γρήγορα. Τα σωματίδια του ζεστού νερού κινούνται πιο γρήγορα από πριν και μεταδίδουν μεγαλύτερη ποσότητα κινητικής ενέργειας στα σωματίδια του μελανιού, καθώς συγκρούονται με αυτά. Τα σωματίδια του μελανιού κινούνται γρηγορότερα, συγκριτικά με το δοχείο του κρύου νερού.

Επειδή τα σωματίδια ενός θερμού σώματος κινούνται με μεγαλύτερες ταχύτητες, **αυξάνεται η εσωτερική κινητική ενέργεια του σώματος**. Επειδή έχουν μεγαλύτερες ταχύτητες, τα σωματίδια μπορούν να πλησιάζουν και να απομακρύνονται πιο εύκολα το ένα από το άλλο. Διαπιστώνουμε πειραματικά αυτή τη συμπεριφορά από το γεγονός ότι πολλά στερεά σώματα διαστέλλονται όταν θερμανθούν (αυξάνονται κατά μέσο όρο οι αποστάσεις μεταξύ των ατόμων ή των μορίων τους). Εξαιτίας αυτής της μεταβολής στις αποστάσεις μεταξύ ατόμων ή μορίων, αυξάνεται η **εσωτερική δυναμική ενέργεια** των σωμάτων.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι **όταν αυξάνεται η θερμοκρασία ενός σώματος, αυξάνεται η εσωτερική του ενέργεια.**

Έλεγχος Κατανόησης Εννοιών: Ερωτήσεις 4.22.1. - 4.22.2., σελ. 298.

4.23. Αρχή της Διατήρησης της Ενέργειας

Πειραματικά διαπιστώνεται ότι ισχύει η εξής **Γενική Αρχή της Διατήρησης της Ενέργειας**:

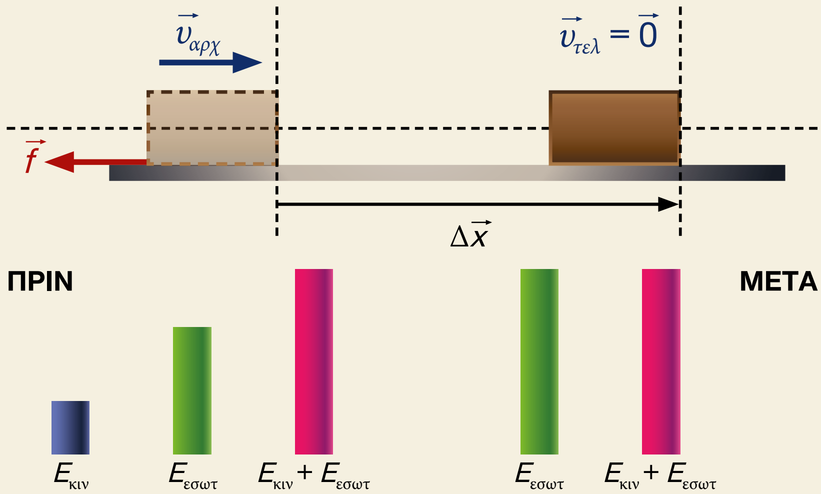
Αρχή της Διατήρησης της Ενέργειας

Κατά την αλληλεπίδραση μεταξύ δύο ή περισσοτέρων σωμάτων πραγματοποιούνται μετατροπές μεταξύ διαφόρων μορφών ενέργειας ή/και μεταφορά ενέργειας μεταξύ των σωμάτων ή και του περιβάλλοντός τους, αλλά δεν δημιουργείται ούτε χάνεται ενέργεια.

4.24. Παραδείγματα Μετατροπών μεταξύ Μορφών Ενέργειας

Παράδειγμα 1
Μετατροπή Κινητικής Ενέργειας σε Εσωτερική Ενέργεια Μέσω Τριβής
Στο πιο κάτω σχήμα απεικονίζεται ένα σώμα μάζας M, το οποίο κινείται σε ένα τραχύ οριζόντιο δάπεδο. Στο σώμα ασκείται μια σταθερή δύναμη κινητικής τριβής $\vec{f}$, η οποία ελαττώνει και τελικά μηδενίζει την ταχύτητα του σώματος. Το έργο της τριβής είναι αρνητικό, $W_{\vec{f}} = f\Delta x < 0$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας, προκύπτει:

$$\Delta E_{κιν} = W_{\vec{f}} = f\Delta x < 0$$



Η κινητική ενέργεια του σώματος ελαττώνεται εξαιτίας της τριβής. Διαπιστώνουμε ότι η επιφάνεια του σώματος και του δαπέδου *θερμαίνονται*, δηλαδή η εσωτερική ενέργειά τους αυξάνεται. Προσεκτικές μετρήσεις αποδεικνύουν ότι η *αύξηση στη συνολική εσωτερική ενέργεια του σώματος και του δαπέδου ισούται ακριβώς με το μέγεθος* $-f\Delta x > 0$.

$$\Delta E_{εσωτ} = -f\Delta x \Rightarrow \Delta E_{εσωτ} = -\Delta E_{κιν}$$

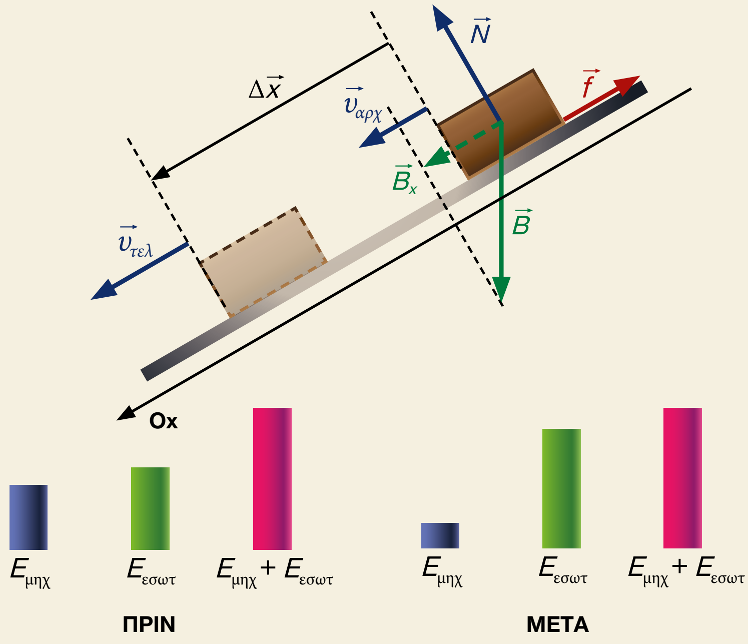
Συνεπώς, **η κινητική ενέργεια του σώματος (λόγω της συνολικής του κίνησης) μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια του σώματος και του δαπέδου.** Ένα τμήμα της κινητικής ενέργειας του σώματος μετατρέπεται σε εσωτερική κινητική και δυναμική ενέργεια των μορίων του σώματος και του δαπέδου. Εάν η τριβή προκαλεί παραμορφώσεις στο σώμα ή στο δάπεδο, κάποιο τμήμα της κινητικής ενέργειας του σώματος αποθηκεύεται ως ενέργεια χημικών δεσμών. Τελικά, η κινητική ενέργεια του σώματος μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια του σώματος και του δαπέδου.

Παράδειγμα 2

Μετατροπή Μηχανικής Ενέργειας σε Εσωτερική Ενέργεια Μέσω Τριβής

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται ένα σώμα που κατεβαίνει σε ένα τραχύ, ακίνητο κεκλιμένο επίπεδο δάπεδο. Στο σώμα ασκείται το βάρος του $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το δάπεδο και η δύναμη κινητικής τριβής $\vec{f}$ από το δάπεδο, η οποία είναι αντίρροπη προς τη μετατόπιση. Η δύναμη $\vec{N}$ δεν παράγει έργο επειδή είναι κάθετη στη μετατόπιση του σώματος. Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας στο σώμα, προκύπτει:

$$W_{\vec{B}} + W_{\vec{f}} = \Delta E_{κιν} \Rightarrow -\Delta U_{βαρ} + f\Delta x = \Delta E_{κιν} \Rightarrow \Delta E_{μηχ} = f\Delta x < 0$$



Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης ελαττώνεται. Όπως και πριν, παρατηρούμε ότι οι επιφάνειες του σώματος και του δαπέδου θερμαίνονται, και συνεπώς η εσωτερική τους ενέργεια αυξάνεται. Αποδεικνύεται πειραματικά ότι η αύξηση στην εσωτερική ενέργεια του σώματος και του δαπέδου ισούται με το γινόμενο $-f\Delta x$. Έτσι:

$$\Delta E_{εσωτ} = -f\Delta x \Rightarrow \Delta E_{εσωτ} = -\Delta E_{μηχ}$$

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος - Γης μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια του σώματος και του δαπέδου.

Παράδειγμα 3

Μετατροπή Κιντικής Ενέργειας σε Εσωτερική Ενέργεια

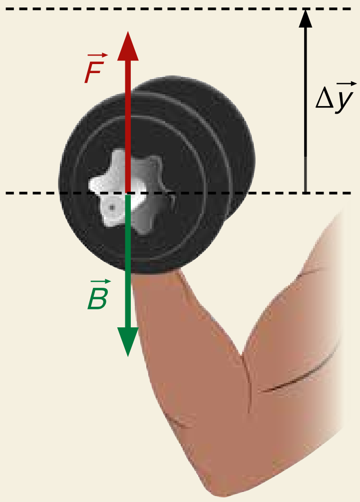
Προηγουμένως, συζητήσαμε τη σημασία των τμημάτων προστασίας (crumble zones) στα αυτοκίνητα. Στο διπλανό σχήμα, ένα αυτοκίνητο συγκρούεται με έναν τοίχο και ακινητοποιείται. Κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης, το αυτοκίνητο και ο τοίχος παραμορφώνονται και θερμαίνονται. Ένα τμήμα της κινητικής ενέργειας του αυτοκινήτου μετατρέπεται σε εσωτερική κινητική ενέργεια των δομικών λίθων (ατόμων και μορίων) του αυτοκινήτου και του τοίχου. Επιπρόσθετα, εξαιτίας της παραμόρφωσης του αυτοκινήτου και του τοίχου, ένα τμήμα της κινητικής ενέργειας του αυτοκινήτου μετατρέπεται σε εσωτερική δυναμική ενέργεια και ενέργεια χημικών δεσμών των δομικών λίθων του αυτοκινήτου και του τοίχου.

Η κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια του αυτοκίνητου και του τοίχου:

$$\Delta E_{\kappa\iota\nu} = -\Delta E_{\varepsilon\sigma\omega\tau}$$

Παράδειγμα 4

Μετατροπή Χημικής Ενέργειας σε Εσωτερική και Μηχανική Ενέργεια



Ο αθλητής του διπλανού σχήματος σηκώνει ένα βαράκι βάρους $\vec{B}$, ασκώντας τη δύναμη $\vec{F}$. Εφαρμογή του θεωρήματος έργου - κινητικής ενέργειας στο βαράκι δίνει:

$$W_{\vec{B}} + W_{\vec{F}} = \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow -\Delta U_{\beta\alpha\rho} + F\Delta y = \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow \Delta E_{\mu\eta\chi} = F\Delta y > 0$$

Άρα, η μηχανική ενέργεια του συστήματος βαράκι - Γη αυξάνεται επειδή το έργο της $\vec{F}$ είναι θετικό. Ταυτόχρονα, η εσωτερική ενέργεια του σώματος του αθλητή αυξάνεται, επειδή το σώμα του θερμαίνεται: $\Delta E_{\varepsilon\sigma\omega\tau} > 0$.

Η συνολική αύξηση της μηχανικής και της εσωτερικής ενέργειας του αθλητή προέρχεται από χημική ενέργεια μορίων στο σώμα του αθλητή, την οποία χρησιμοποιούν οι μύες του χεριού του αθλητή για να μπορέσουν να ασκήσουν τη δύναμη $\vec{F}$. Η χημική ενέργεια του σώματος ελαττώνεται ($\Delta E_{\chi\eta\mu} < 0$) έτσι ώστε να ισχύει:

$$-\Delta E_{\chi\eta\mu} = \Delta E_{\mu\eta\chi} + \Delta E_{\varepsilon\sigma\omega\tau}$$

Δηλαδή, η χημική ενέργεια μετατρέπεται σε μηχανική ενέργεια του συστήματος βαράκι - Γη και εσωτερική ενέργεια του σώματος του αθλητή.

Εάν ο αθλητής κρατά ακίνητο το βαράκι, οι μύες του χρειάζεται πάλι να εξασκούν δύναμη, που εξισορροπεί το βάρος του: χημική ενέργεια μετατρέπεται σε εσωτερική, ενώ η μηχανική ενέργεια του συστήματος βαράκι - Γη δεν μεταβάλλεται. Η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$-\Delta E_{\chi\eta\mu} = \Delta E_{\varepsilon\sigma\omega\tau}$$

Παρατηρείστε ότι σε αυτή την περίπτωση **πραγματοποιούνται μετατροπές μεταξύ μορφών ενέργειας, ακόμη κι εάν καμία δύναμη δεν παράγει έργο**.

Ασκήσεις

1 Μια μπάλα μάζας 500 g αφήνεται να πέσει από ύψος 1 m. Μετά την αναπήδησή της, η μπάλα επιστρέφει σε μέγιστο ύψος 75 cm. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας της μπάλας μεταξύ της θέσης της στο νέο μέγιστο ύψος και της αρχικής της θέσης. Δεδομένου ότι η συνολική ενέργεια της μπάλας και του περιβάλλοντος διατηρείται, να συζητήσετε σε ποιες μορφές ενέργειας ενδεχομένως μετατράπηκε η χαμένη μηχανική ενέργεια της μπάλας. Να λάβετε υπ΄ όψη σας την αλληλεπίδραση της μπάλας με τον αέρα και το πάτωμα.

2 Ένα αυγό αφήνεται να πέσει από κάποιο ύψος. Κατά τη σύγκρουσή του με το δάπεδο, το αυγό σπάει και ακινητοποιείται. Να συζητήσετε σε ποιες μορφές ενέργειας ενδεχομένως μετατράπηκε η κινητική ενέργεια που είχε το αυγό αμέσως πριν την πρόσκρουσή του στο δάπεδο.

3 Ένας αλεξιπτωτιστής συνολικής μάζας m πέφτει με ανοικτό αλεξίπτωτο. Σε κάποια στιγμή η επιτάχυνση του αλεξιπτωτιστή μηδενίζεται, οπότε πέφτει με σταθερή ορική ταχύτητα μέτρου υ.

A. Να συζητήσετε σε ποιες μορφές ενέργειας μετατρέπεται η βαρυτική δυναμική ενέργεια του αλεξιπτωτιστή, πριν και μετά την απόκτηση ορικής ταχύτητας.

B. Να υπολογίσετε το ρυθμό με τον οποίο ελαττώνεται η βαρυτική δυναμική ενέργεια.

4 Ένας αρσιβαρίστας κρατάει μια μπάρα με βάρη ακίνητη πάνω από το κεφάλι του.

A. Να συζητήσετε εάν η δύναμη, που ασκεί ο αρσιβαρίστας στη μπάρα, παράγει ή καταναλώνει έργο.

B. Η δύναμη, που ασκεί ο αρσιβαρίστας, οφείλεται στη δράση των μυών του, η οποία απαιτεί την κατανάλωση ενέργειας. Τι μορφής πιστεύετε ότι είναι αυτή η ενέργεια, και σε τι μορφές μετατρέπεται, έτσι ώστε η συνολική ενέργεια να παραμένει σταθερή;

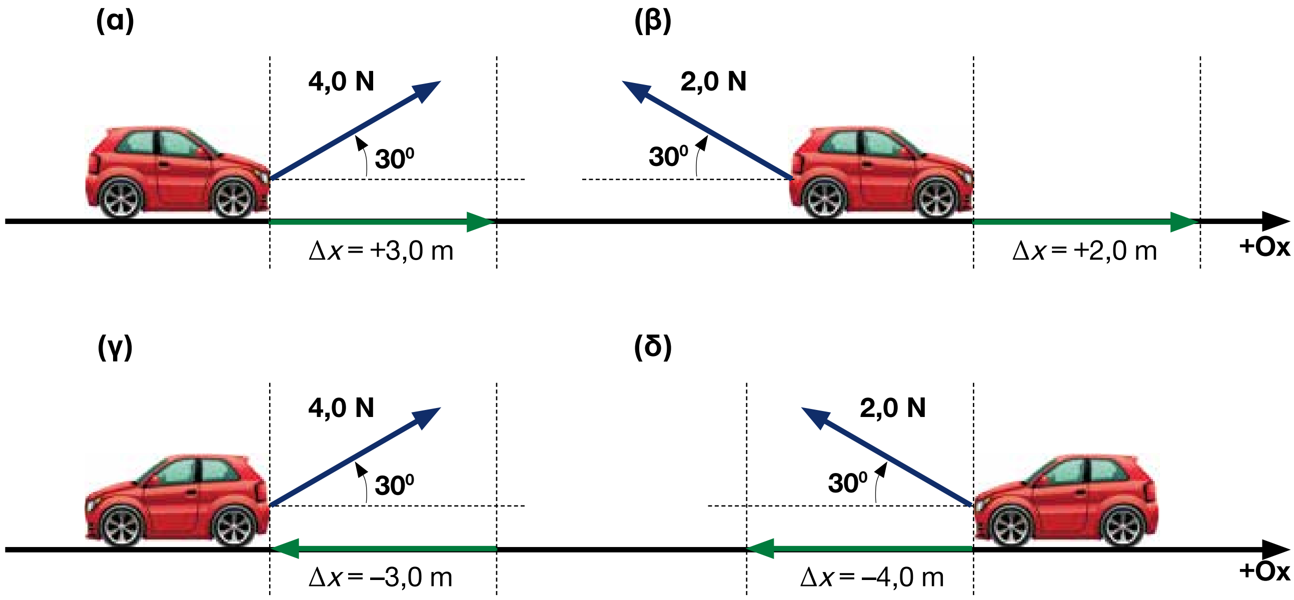
5 Για να κάνει επιτόπιο κατακόρυφο άλμα (χωρίς φόρα) ένας αθλητής, λυγίζει τα πόδια του και κατόπιν σπρώχνει το έδαφος δυνατά με τα πόδια του.

Α. Από που προέρχεται η αρχική κινητική ενέργεια, με την οποία ο αθλητής εγκαταλείπει το έδαφος;

Β. Ο αθλητής αποφασίζει να χρησιμοποιήσει ειδικά παπούτσια, οι σόλες των οποίων περιέχουν θήκες με στρώμα αέρα, που συμπιέζονται ελαστικά. Γιατί αυξάνεται το τελικό ύψος στο οποίο θα φθάσει;

Ερωτήσεις Ελέγχου Κατανόησης Εννοιών

4.2.1. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης που ασκείται στο αυτοκινητάκι στα επόμενα σχήματα **(α)** - **(δ)**.



4.4.1. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια ενός αυτοκινήτου μάζας $m = 785{,}0$ kg που κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 30{,}00$ m/s.

4.4.2. Πώς θα μεταβληθεί η κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου της ερώτησης **4.4.1.**, εάν:

(α) διπλασιασθεί η μάζα του.

(β) διπλασιασθεί η ταχύτητά του.

4.4.3. Δύο αυτοκίνητα κινούνται στον αυτοκινητόδρομο και σε κάποια χρονική στιγμή έχουν την ίδια κινητική ενέργεια. Είναι σωστό να συμπεράνουμε ότι εκείνη τη χρονική στιγμή τα αυτοκίνητα έχουν ταχύτητες ίσου μέτρου;

4.4.4. Είναι δυνατόν μία σφαίρα να έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια από ένα τρένο;

4.5.1. Μία σταθερή δύναμη $\vec{F}$ ασκείται σε ένα τρενάκι που μετακινείται κατά 0,20 m πάνω σε μία ευθύγραμμη οριζόντια σιδηροτροχιά. Εάν το έργο της δύναμης ισούται με -4,0 J, να υπολογίσετε τη συνιστώσα F_x της δύναμης κατά μήκος της ευθείας κίνησης. Η διανυσματική συνιστώσα $\vec{F}_x$ έχει την ίδια ή αντίθετη φορά με την μετατόπιση του τρένου;

4.5.2. Ένας αθλητής μάζας $m = 85{,}0$ kg διανύει απόσταση 2,0 km πάνω σε έναν οριζόντιο δρόμο. Ποιο είναι το έργο του βάρους του ανθρώπου και της κάθετης δύναμης από τον δρόμο στον αθλητή;

4.7.1. Δύο άνθρωποι κουβαλούν σακούλες με ψώνια από το σούπερ-μάρκετ. Οι άνθρωποι κινούνται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα, και μεταφέρουν τις σακούλες σε οριζόντια διεύθυνση.

(α) Ποιό είναι το έργο των δυνάμεων, που ασκούν οι άνθρωποι στις σακούλες;

(β) Οι δύο σακούλες έχουν μάζες 5,35 kg και 12,25 kg. Ποιος από τους δύο ανθρώπους κουράζεται περισσότερο κατά τη γνώμη σας; Στην απάντησή σας λάβατε υπ΄ όψη την απάντηση που δώσατε στο ερώτημα **(α)**;

4.8.1. Ένα αυτοκίνητο μάζας m και ένα φορτηγό μάζας $M >> m$ ξεκινούν από την ηρεμία και κινούνται σε έναν ευθύγραμμο οριζόντιο δρόμο υπό την επίδραση της ίδιας σταθερής συνισταμένης δύναμης. Έστω ότι η συνισταμένη δύναμη είναι οριζόντια με αλγεβρική τιμή F. Τα αυτοκίνητα μετατοπίζονται κατά Δx. Στο τέλος της μετατόπισης, ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό;

(α) Το φορτηγό έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια, επειδή έχει μεγαλύτερη μάζα.

(β) Το φορτηγό έχει μικρότερη κινητική ενέργεια, επειδή έχει μικρότερη ταχύτητα.

(γ) Και τα δύο οχήματα έχουν την ίδια κινητική ενέργεια, επειδή οι δυνάμεις που τα κινούν παράγουν το ίδιο έργο.

4.8.2. Ποιο από τα δύο οχήματα της ερώτησης **4.8.1.** καλύπτει τη μετατόπιση Δx στο μικρότερο χρονικό διάστημα;

4.8.3. Ένας ελαφρύς ξύλινος βόλος και ένας βαρύτερος μεταλλικός βόλος κινούνται σε έναν λείο και οριζόντιο διάδρομο, και έχουν την ίδια κινητική ενέργεια. Σε κάποια στιγμή αρχίζουν να δρούν σταθερές δυνάμεις ίσου μέτρου και στους δύο βόλους, με κατεύθυνση αντίθετη προς την ταχύτητά τους. Από εκείνη τη στιγμή και μετά, ποιος από τους δύο βόλους χρειάζεται να διαγράψει μεγαλύτερη μετατόπιση μέχρι να ακινητοποιηθεί;

4.12.1. Ένας άνθρωπος μάζας 85,0 kg ανεβαίνει σε έναν ουρανοξύστη χρησιμοποιώντας τον ανελκυστήρα. Εάν η κατακόρυφη μετατόπιση του ανθρώπου είναι 165,0 m, να υπολογίσετε το έργο βάρους του ανθρώπου.

4.12.2. Εάν ο ίδιος άνθρωπος ανέβει χρησιμοποιώντας τις σκάλες, το έργο του βάρους του θα είναι μεγαλύτερο, μικρότερο, ή θα παραμείνει το ίδιο με προηγουμένως;

4.12.3. Ένας άνθρωπος διασκεδάζει στον περιστρεφόμενο, κατακόρυφο τροχό ενός Λούνα-παρκ. Να υπολογίσετε το έργο του βάρους του ανθρώπου, εάν ο τροχός διαγράψει έναν πλήρη κύκλο.

4.13.1. Ένα ιστιοφόρο κινείται υπό την επίδραση του ανέμου. Το ιστιοφόρο διαγράφει τη διαδρομή από το λιμάνι Α στο Β, και όταν ο άνεμος αλλάξει κατεύθυνση επιστρέφει από το Β στο Α. Είναι το συνολικό έργο της δύναμης του αέρα ίσο με μηδέν, κατά τη διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow A$;

4.13.2. Ένα παιδί τραβά ένα αυτοκινητάκι-παιχνίδι με τη βοήθεια ενός σχοινιού. Είναι η τάση του σχοινιού διατηρητική δύναμη;

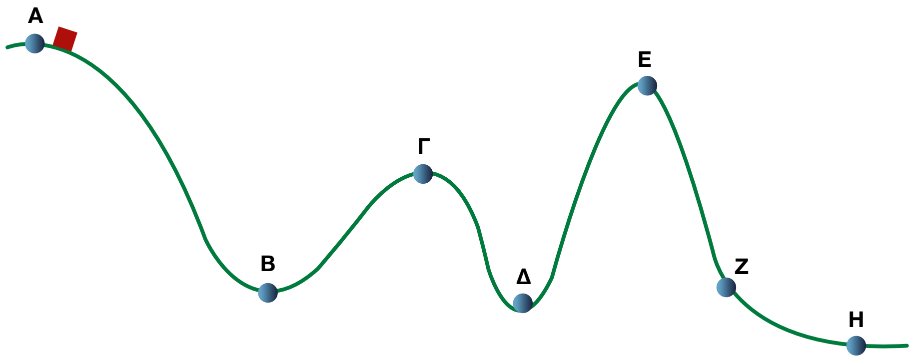
4.14.1. Να υπολογίσετε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος αερόστατου - Γης, για ένα αερόστατο συνολικής μάζας 375,0 kg που βρίσκεται σε απόσταση 465,0 m από την επιφάνεια της Γης.

4.14.2. Ένας ορειβάτης συνολικής μάζας $m = 85{,}0$ kg ξεκινά από την επιφάνεια της θάλασσας και ανεβαίνει στην υψηλότερη κορυφή της οροσειράς Έβερεστ ($h = 8848$ m).

Α. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του ορειβάτη, εάν θέσετε τη δυναμική ενέργεια ίση με μηδέν: **(α)** στην επιφάνεια της θάλασσας (Θ), **(β)** στην κορυφή του Έβερεστ (Ε).

Β. Να υπολογίσετε το έργο του βάρους του ορειβάτη.

4.15.1. Ένας μικρός κύβος γλιστρά πάνω στη λεία επιφάνεια του σχήματος, από το σημείο Α μέχρι το σημείο Η. Να εξηγήσετε σε ποια τμήματα της διαδρομής η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος κύβου - Γης μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του κύβου, και αντιστρόφως.



4.16.1. Ένα κιβώτιο που κρέμεται από έναν γερανό με ένα σχοινί κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα.

(α) Να καθορίσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο.

(β) Να συγκρίνετε το έργο των δυνάμεων αυτών.

(γ) Διατηρείται η μηχανική ενέργεια του συστήματος κιβωτίου - Γης;

4.17.1. Ένα σώμα είναι αναρτημένο από οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 2$ N/cm. Όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0$. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης ελατηρίου, εάν το σώμα μετακινηθεί:

Α. Από τη θέση $x = +5$ cm στη θέση $x = -5$ cm

Β. Από τη θέση $x = +5$ cm στη θέση $x = 0$ cm

4.18.1. Για το σώμα της ερώτησης **4.17.1.**, να υπολογίσετε τη μεταβολή στη δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος - ελατηρίου, όταν το σώμα μετακινείται από:

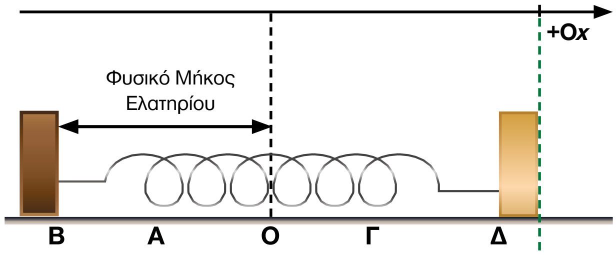
Α. Τη θέση $x = +5$ cm στη θέση $x = -5$ cm

Β. Τη θέση $x = +5$ cm στη θέση $x = 0$ cm

4.19.1. Το σώμα του επόμενου σχήματος είναι συνδεδεμένο με ελατήριο και κινείται σε οριζόντια λεία επιφάνεια.

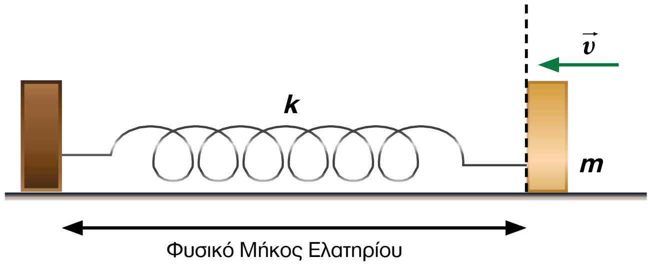
A. Να προσδιορίσετε εάν η δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος – ελατηρίου αυξάνεται, ελαττώνεται ή παραμένει σταθερή κατά τις μετακινήσεις:

(i) Ο → Α,
(ii) Ο → Β,
(iii) Β → Ο,
(iv) Ο → Δ,
(v) Δ → Γ,
(vi) Γ → Ο → Γ,
(vii) Β → Δ → Β.



B. Να προσδιορίσετε εάν η κινητική ενέργεια του σώματος αυξάνεται, ελαττώνεται ή παραμένει σταθερή κατά τις ίδιες μετακινήσεις.

4.20.1. Το σώμα μάζας m του πιο κάτω σχήματος έρχεται σε επαφή με το οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k_{ελ}$ με ταχύτητα μέτρου υ, και σταματά αφού προκαλέσει στο ελατήριο μέγιστη συσπείρωση $x_{μεγ}$.



Η συσπείρωση θα ήταν διπλάσια εάν:

(α) Η μπάλα είχε μάζα $4m$.
(β) Η μπάλα είχε μάζα $m/4$.
(γ) Το ελατήριο είχε σταθερά ελατηρίου $k_{ελ}/4$.
(δ) Το ελατήριο είχε σταθερά ελατηρίου $4k_{ελ}$.
(ε) Η μπάλα είχε ταχύτητα μέτρου 4υ τη στιγμή επαφής της με το ελατήριο.

4.20.2. Τα αυτοκίνητα παλαιότερης τεχνολογίας υφίσταντο μικρότερες παραμορφώσεις σε μία μετωπική σύγκρουση. Αυτό ίσχυε επειδή τα αυτοκίνητα αυτά:

(α) Κινούνταν με μικρότερη ταχύτητα από τα αυτοκίνητα σύγχρονης τεχνολογίας.
(β) Είχαν μικρότερη μάζα.
(γ) Ήταν κατασκευασμένα από πιο σκληρά υλικά.

4.21.1. Ένα σώμα συνδέεται με ελατήριο και κινείται σε μία τραχιά οριζόντια επιφάνεια. Ποιό από τα επόμενα είναι σωστό;

(α) Η δύναμη ελατηρίου παύει να είναι διατηρητική, επειδή υπάρχει τριβή.
(β) Η δύναμη ελατηρίου είναι διατηρητική, αλλά η δυναμική ενέργεια του συστήματος ελατηρίου - σώματος δεν έχει τη μορφή $U_{ελ}=\frac{1}{2}kx^2$.

(γ) Η δυναμική ενέργεια του συστήματος ελατηρίου - σώματος έχει τη μορφή $U_{ελ} = \frac{1}{2}kx^2$, αλλά, το έργο της δύναμης ελατηρίου δεν ικανοποιεί τη σχέση $W_{\vec{F}_{ελ}} = -\Delta U_{ελ}$.

(δ) Η μηχανική ενέργεια του συστήματος ελατηρίου – σώματος δεν διατηρείται.

4.22.1. Εάν κλωτσήσουμε μία ακίνητη μπάλα, είναι σωστό να πούμε ότι η θερμοκρασία της μπάλας αυξάνεται, επειδή μεγαλώνει η κινητική της ενέργεια;

4.22.2. Εάν ζεστάνουμε ένα σώμα, πιο από τα παρακάτω είναι σωστό:

(α) Αυξάνεται μόνο η εσωτερική κινητική ενέργεια των ατόμων ή μορίων του.

(β) Αυξάνεται μόνο η εσωτερική δυναμική ενέργεια των ατόμων ή μορίων του.

(γ) Αυξάνεται η συνολική εσωτερική ενέργεια των ατόμων ή μορίων του (το άθροισμα της εσωτερικής κινητικής και εσωτερικής δυναμικής ενέργειας).

Απαντήσεις Ερωτήσεων Ελέγχου Κατανόησης Εννοιών

Κεφάλαιο 1

1.2.1. (α) Το τραπέζι έχει 2,5 φορές μεγαλύτερο μήκος από ένα χαρακτηριστικό μήκος που ορίζουμε ως "μέτρο" (m).

(β) Το αυτοκίνητο έχει μάζα 675 φορές μεγαλύτερη από μία χαρακτηριστική μάζα που ορίζουμε ως "κιλό" (kg).

(γ) Η διάρκεια του σήματος είναι 15 φορές μεγαλύτερη από μία χαρακτηριστική χρονική διάρκεια, που ορίζουμε ως "δευτερόλεπτο" (s).

1.5.1. Όχι. Για παράδειγμα, η θερμοκρασία είναι μονόμετρο μέγεθος, αλλά μπορεί να παίρνει αρνητικές τιμές στην κλίμακα Κελσίου.

1.5.2. Η πρόταση ορίζει το μέτρο της ταχύτητας του αυτοκινήτου. Επειδή η ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος, για να καθορισθεί πλήρως χρειάζεται να ορίσουμε εκτός από το μέτρο και την κατεύθυνσή της.

1.8.1. Στις προτάσεις Α και Δ.

1.8.2. Οι **(β)** και **(δ)**.

1.9.1. Σωστή απάντηση είναι η **(β)**.

1.9.2. Η αύξηση της θερμοκρασίας είναι 36,62 °C – 36,60 °C = 0,02 °C. Πρέπει να εκφρασθεί με την ίδια ακρίβεια που έχουν οι τιμές θερμοκρασίας (εκατοστό του 1 °C), αλλά έχει ένα σημαντικό ψηφίο, ενώ οι τιμές θερμοκρασίας είναι γνωστές με τέσσερα σημαντικά ψηφία.

1.9.3. (α) Το αβέβαιο ψηφίο της μάζας είναι το 1 (δέκατο του g). Άρα, η ζυγαριά πρέπει να είχε μικρότερη υποδιαίρεση σε γραμμάρια. Το αβέβαιο ψηφίο του όγκου είναι το 5 (δέκατο του cm^3). Άρα, ο ογκομετρικός σωλήνας πρέπει να είχε μικρότερη υποδιαίρεση σε cm^3.

(β) Η πυκνότητα ρ προκύπτει από διαίρεση των τιμών της μάζας και όγκου. Άρα, πρέπει να εκφρασθεί με δύο σημαντικά ψηφία: $\rho = (25{,}1\ g)/(6{,}5\ cm^3) = 3{,}9\ g/cm^3$

(γ) Από το πιο πάνω αποτέλεσμα προκύπτει ότι η πυκνότητα εκφράζεται με ακρίβεια δεκάτου του g/cm^3.

2.1.1. Σωστή απάντηση είναι η **(α)**.

2.1.2. Σωστή απάντηση είναι η **(α)**, επειδή ο Μαραθώνιος δρόμος δεν γίνεται σε ευθύγραμμη τροχιά και προς την ίδια κατεύθυνση.

2.3.1. Το **(γ):** Η αριθμητική ταχύτητα (απόσταση/χρονικό διάστημα) έχει θετική τιμή.

2.3.2. Το **(α)**.

2.5.1. Το **(β)**. Για κανένα από τα υπόλοιπα συμπεράσματα δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι.

2.5.2. Το **(β)**.

2.5.3. Το **(β)**.

2.6.1. Η στιγμιαία ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος, και η αλγεβρική της τιμή μπορεί να είναι αρνητική, εάν το αυτοκίνητο κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα των θέσεων.

2.6.2. Το **(γ)**.

2.6.3. Το **(δ)**.

2.8.1. Άξονας είναι η ευθεία κίνησης του αυτοκινήτου, σημείο αναφοράς είναι ο πομπός, θετική κατεύθυνση είναι προς τα αριστερά (η κατεύθυνση κίνησης). Με αυτό τον ορισμό, η απόσταση του αυτοκινήτου από τον πομπό συμπίπτει με τη θέση του αυτοκινήτου, και η μέση διανυσματική ταχύτητα έχει θετική αλγεβρική τιμή, σε συμφωνία με τη μέτρηση του αισθητήρα.

2.12.1. Η μέση διανυσματική ταχύτητα είναι μηδενική.

2.14.1. $\alpha_\mu = \big((-17\ \text{m/s}) - (-15\ \text{m/s})\big)/(2{,}0\ \text{s} - 0{,}0\ \text{s}) = (-2\ \text{m/s})/(2{,}0\ \text{s}) = -1\ \text{m/s}^2$

2.19.1. **(α)** $\upsilon = (2 \text{ m/s}) + (4{,}0 \text{ m/s}^2)t$ και $x = -2 \text{ m} + (2 \text{ m/s})t + \frac{1}{2}(4{,}0 \text{ m/s}^2)t^2$

(β) $\upsilon = (-6 \text{ m/s}) + (-8{,}0 \text{ m/s}^2)t$ και $x = +3 \text{ m} + (-6 \text{ m/s})t + \frac{1}{2}(-8{,}0 \text{ m/s}^2)t^2$

2.21.1. **Σχήμα (α)**

Σύμβαση 1:

$y = (+18 \text{ m}) + (-4 \text{ m/s})t + \frac{1}{2}(-9{,}81 \text{ m/s}^2)t^2$

$\upsilon = (-4 \text{ m/s}) + (-9{,}81 \text{ m/s}^2)t$

Σύμβαση 2:

$y = (+4 \text{ m/s})t + \frac{1}{2}(+9{,}81 \text{ m/s}^2)t^2$

$\upsilon = (+4 \text{ m/s}) + (+9{,}81 \text{ m/s}^2)t$

Σχήμα (β)

Σύμβαση 1:

$y = (+12 \text{ m}) + (+2{,}4 \text{ m/s})t + \frac{1}{2}(-9{,}81 \text{ m/s}^2)t^2$

$\upsilon = (+2{,}4 \text{ m/s}) + (-9{,}81 \text{ m/s}^2)t$

Σύμβαση 2:

$y = (-2{,}4 \text{ m/s})t + \frac{1}{2}(+9{,}81 \text{ m/s}^2)t^2$

$\upsilon = (-2{,}4 \text{ m/s}) + (+9{,}81 \text{ m/s}^2)t$

Κεφάλαιο 3

3.11.1. Όχι, γιατί ο συμμαθητής σας δεν λαμβάνει υπ΄ όψη του τη στατική τριβή. Η συνισταμένη δύναμη στο σώμα είναι μηδέν, όσο παραμένει ακίνητο, επειδή η στατική τριβή είναι αντίθετη από τη δύναμη που ασκεί ο μαθητής στο σώμα.

3.11.2. Η συμμαθήτριά σας δεν λαμβάνει υπ΄ όψη της την κινητική τριβή. Η συνισταμένη δύναμη στο σώμα είναι μηδέν, επειδή η κινητική τριβή είναι αντίθετη από τη δύναμη που ασκεί η μαθήτρια στο σώμα.

3.11.3. Σωστό είναι το **(β)**.

3.13.1. Όχι, διότι δεν γνωρίζουμε εάν ο άνθρωπος ασκεί **δυνάμεις ίσου μέτρου** στις δύο μπάλες.

3.13.2. Όχι, διότι δεν γνωρίζουμε εάν το αυτοκίνητο του φίλου σας έχει την ίδια μάζα με το δικό σας.

3.15.1. Η γνώμη αυτή δεν είναι σωστή. Η αδράνεια ενός σώματος εξαρτάται από τη μάζα του και όχι από το βάρος. Ακόμη και σε συνθήκες έλλειψης βαρύτητας ένα σώμα μεγάλης μάζας έχει μεγάλη αδράνεια και επιταχύνεται δύσκολα.

3.16.1. Σωστή απάντηση είναι η **(γ)**.

3.19.1. Ο κολυμβητής ασκεί δύναμη στο νερό, με αντίθετη κατεύθυνση από αυτή, προς την οποία θέλει να κινηθεί. Το νερό ασκεί αντίθετη δύναμη στον κολυμβητή, προς την κατεύθυνση της κίνησής του.

3.19.2. Όχι. Η αντίδραση στο βάρος του αστροναύτη είναι μία αντίθετη δύναμη, με την οποία ο αστροναύτης έλκει τη Γη. Στην επιφάνεια της Γης ο αστροναύτης τείνει να κινηθεί προς το κέντρο της Γης, λόγω του βάρους του. Έτσι, ο αστροναύτης πιέζει το πάτωμα, και το παραμορφώνει εξασκώντας του μία δύναμη $\vec{F}$. Το πάτωμα εξασκεί στον αστροναύτη μία αντίθετη δύναμη $\vec{N} = -\vec{F}$ η οποία είναι ζεύγος δράσης-αντίδρασης με τη δύναμη $\vec{F}$ από τον αστροναύτη στο πάτωμα.

3.19.3. Οι δυνάμεις που συνιστούν ζεύγος δράσης - αντίδρασης δρουν σε διαφορετικά σώματα.

Κεφάλαιο 4

4.2.1. **(α)** $W = F_x \Delta x = (4{,}0 \text{ x } \sigma\upsilon\nu 30^0 \text{ N}) \text{ x } (3{,}0 \text{ m}) = 10{,}4 \text{ J}$

(β) $W = F_x \Delta x = (-2{,}0 \text{ x } \sigma\upsilon\nu 30^0 \text{ N}) \text{ x } (2{,}0 \text{ m}) = -3{,}5 \text{ J}$

(γ) $W = F_x \Delta x = (4{,}0 \text{ x } \sigma\upsilon\nu 30^0 \text{ N}) \text{ x } (-3{,}0 \text{ m}) = -10{,}4 \text{ J}$

(δ) $W = F_x \Delta x = (-2{,}0 \text{ x } \sigma\upsilon\nu 30^0 \text{ N}) \text{ x } (-4{,}0 \text{ m}) = +6{,}9 \text{ J}$

4.4.1. $E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}(785{,}0 \text{ kg}) \text{ x } (30{,}00 \text{ m/s})^2 = 353250 \text{ J}$

4.4.2. **(α)** Θα διπλασιασθεί η κινητική ενέργεια.

(β) Θα τετραπλασιασθεί η κινητική ενέργεια.

4.4.3. Όχι, διότι δεν γνωρίζουμε εάν έχουν ίσες μάζες.

4.4.4. Ναι, εάν κινείται πολύ γρήγορα και το τρένο κινείται πολύ αργά (ή είναι ακίνητο).

4.5.1. Θεωρούμε ως θετική τη φορά κίνησης του τρένου, οπότε η μετατόπιση του τρένου είναι $\Delta x = +0{,}20$ m. Άρα: $F_x = W/\Delta x = (-4{,}0 \text{ J})/(0{,}20 \text{ m}) = -20$ N. Αφού η συνιστώσα F_x είναι αρνητική, η αντίστοιχη διανυσματική συνιστώσα $\vec{F}_x$ έχει αντίθετη φορά από τη μετατόπιση.

4.5.2. Τα έργα και των δύο δυνάμεων είναι ίσα με μηδέν.

4.7.1. **(α)** Το έργο των δυνάμεων είναι μηδέν (κάθετες στη μετατόπιση).

(β) Ο άνθρωπος που κουβαλά τη βαρύτερη σακούλα κουράζεται περισσότερο. Η κούραση δεν είναι αντιπροσωπευτική ένδειξη του έργου της δύναμης, που ασκεί ένας άνθρωπος.

4.8.1. Σωστή απάντηση είναι η **(γ)**.

4.8.2. Επειδή το αυτοκίνητο έχει μικρότερη μάζα, κινείται με μεγαλύτερη επιτάχυνση και αποκτά μεγαλύτερη ταχύτητα. Άρα, χρειάζεται μικρότερο χρονικό διάστημα για να καλύψει τη μετατόπιση.

4.8.3. Από τη στιγμή που αρχίζει να δρα η δύναμη μέχρι να ακινητοποιηθούν οι βόλοι, η μεταβολή στην κινητική ενέργεια των δύο βόλων είναι η ίδια: $\Delta E_{\kappa\iota\nu} = 0 - E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi} = -E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi}$. Άρα, απαιτείται το ίδιο έργο δύναμης, $F\Delta x = -E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi}$ για να σταματήσουν οι βόλοι. Αφού στους βόλους δρα η ίδια δύναμη, θα έχουν την ίδια μετατόπιση: $\Delta x = -E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi}/F$.

4.12.1. $W = -(85{,}0 \text{ kg}) \times (9{,}81 \text{ m/s}^2) \times (165{,}0 \text{ m}) = -137600 \text{ J}$

4.12.2. Αφού η κατακόρυφη μετατόπιση είναι η ίδια, το έργο του βάρους θα παραμείνει το ίδιο.

4.12.3. Επειδή ο άνθρωπος ξεκινά και καταλήγει στο ίδιο σημείο, το συνολικό έργο του βάρους του είναι ίσο με μηδέν.

4.13.1. Όχι, διότι η δύναμη του αέρα δεν είναι διατηρητική. Τόσο κατά τη διαδρομή Α → Β, όσο και κατά τη διαδρομή Β → Α, η δύναμη του αέρα πρέπει να έχει θετικό έργο για να κινεί το πλοίο.

4.13.2. Όχι. Εάν για παράδειγμα το παιδί κινηθεί σε κύκλο και τραβά συνεχώς το αυτοκινητάκι για να τον ακολουθεί, το έργο της δύναμης του σχοινιού θα είναι συνεχώς θετικό.

4.14.1. $U_{\beta\alpha\rho} = mgy = (375{,}0 \text{ kg}) \times (9{,}81 \text{ m/s}^2) \times (465{,}0 \text{ m}) = 1711000 \text{ J}$

4.14.2. A. (α) $U_{\beta\alpha\rho}(\Theta) = 0$, $U_{\beta\alpha\rho}(\text{E}) = (85{,}0 \text{ kg}) \times (9{,}81 \text{ m/s}^2) \times (8\,848{,}0 \text{ m}) = 7\,380\,00 \text{ J}$,
$\Delta U_{\beta\alpha\rho} = 7\,380\,00 \text{ J}$

(β) $U_{\beta\alpha\rho}(\text{E}) = 0$, $U_{\beta\alpha\rho}(\Theta) = (85{,}0 \text{ kg}) \times (9{,}81 \text{ m/s}^2) \times (-8\,848{,}0 \text{ m}) = -7\,380\,00 \text{ J}$,
$\Delta U_{\beta\alpha\rho} = 7\,380\,00 \text{ J}$

B. $W_{\vec{B}} = -\Delta U_{\beta\alpha\rho} = -7\,380\,00 \text{ J}$

4.15.1. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική στα τμήματα ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ και ΖΗ. Στα υπόλοιπα τμήματα η κινητική ενέργεια του κύβου μετατρέπεται σε βαρυτική δυναμική.

4.16.1. **(α)** Στο κιβώτιο ασκείται το βάρος του $\vec{B}$ και η δύναμη $\vec{T}$ από το σχοινί. Οι δυνάμεις αυτές είναι αντίθετες, επειδή το κιβώτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα.

(β) Καθώς το κιβώτιο κατεβαίνει, το βάρος του παράγει θετικό έργο. Η δύναμη $\vec{T}$ παράγει αρνητικό έργο, αντίθετο του έργου του βάρους.

(γ) Η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται. Η μεταβολή στη μηχανική ενέργεια ισούται με το έργο της δύναμης $\vec{T}$: $W_{\vec{T}} + W_{\vec{B}} = \Delta E_{κιν} \Rightarrow W_{\vec{T}} - \Delta U_{βαρ} = \Delta E_{κιν} \Rightarrow W_{\vec{T}} = \Delta U_{βαρ} + \Delta E_{κιν} = \Delta E_{μηχ}$

4.17.1. **Α.** $W = -\frac{1}{2}$ (2 N/cm) x $\left[(-5 \text{ cm})^2 - (5 \text{ cm})^2\right]$ = 0 J

Β. $W = -\frac{1}{2}$ (2 N/cm) x $\left[(0 \text{ cm})^2 - (5 \text{ cm})^2\right]$ = – (–25 Ncm) = 0,25 J

4.18.1. **Α.** **(i)** $x = 5$ cm: $U = \frac{1}{2}$ (2 N/cm) x $(5 \text{ cm})^2$ = 25 Ncm = 0,25 J

(ii) $x = -5$ cm: $U = \frac{1}{2}$ (2 N/cm) x $(-5 \text{ cm})^2$ = 25 Ncm = 0,25 J

Άρα, $\Delta U = 0$ J.

Β. $\Delta U = U(x = 0 \text{ cm}) - U(x = 5 \text{ cm})$ = 0 J – 0,25 J = –0,25 J

4.19.1. **Α.** Η δυναμική ενέργεια:
(i) Αυξάνεται, (ii) Αυξάνεται, (iii) Ελαττώνεται, (iv) Αυξάνεται, (v) Ελαττώνεται, (vi) Σταθερή, (vii) Σταθερή.

Β. Η κινητική ενέργεια:
(i) Ελαττώνεται, (ii) Ελαττώνεται, (iii) Αυξάνεται, (iv) Ελαττώνεται, (v) Αυξάνεται, (vi) Σταθερή, (vii) Σταθερή.

4.20.1. Απάντηση: Τα **(α)** και **(γ)** είναι σωστά.

4.20.2. Σωστή απάντηση: το **(γ)**.

4.21.1. Σωστή απάντηση: Το **(δ)**.

4.22.1. Όχι. Η κινητική ενέργεια που αποκτά η μπάλα συνδέεται με την κίνησή της, καθώς την παρατηρούμε να κινείται σαν σύνολο. Η θερμοκρασία της μπάλας θα αλλάξει εάν αυξηθεί η εσωτερική κινητική ενέργεια των ατόμων ή μορίων της.

Σημειώσεις