

ΣΕΜΙΝΑΡΙΑ ΕΜΕ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2026

ΛΑΘΗ ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΗΨΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΥΠΑΝ)

Σάββας Τιμοθέου (ΕΜΕ, Μαθηματικών)

ΣΕΜΙΝΑΡΙΑ ΕΜΕ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2026

- **Ευχαριστίες:**

- Να ευχαριστήσουμε όλους τους/τις συναδέλφους/σες για τις σχετικές παρατηρήσεις και ανατροφοδότηση που μας παρείχαν ώστε να επισημάνουμε και να βελτιώσουμε το διδακτικό υλικό μας.
- Κάθε λάθος ή παρερμηνεία διδακτικής φύσεως πρέπει να αξιοποιείται γενικά ως εργαλείο μάθησης.
- Παρακαλείσθε για τυχόν σχόλια, παρατηρήσεις και εισηγήσεις σχετικά με τα εγχειρίδια των Μαθηματικών, όπως αποστέλλονται στη διεύθυνση : dme-mathimatika@schools.ac.cy

Α' Γυμνασίου

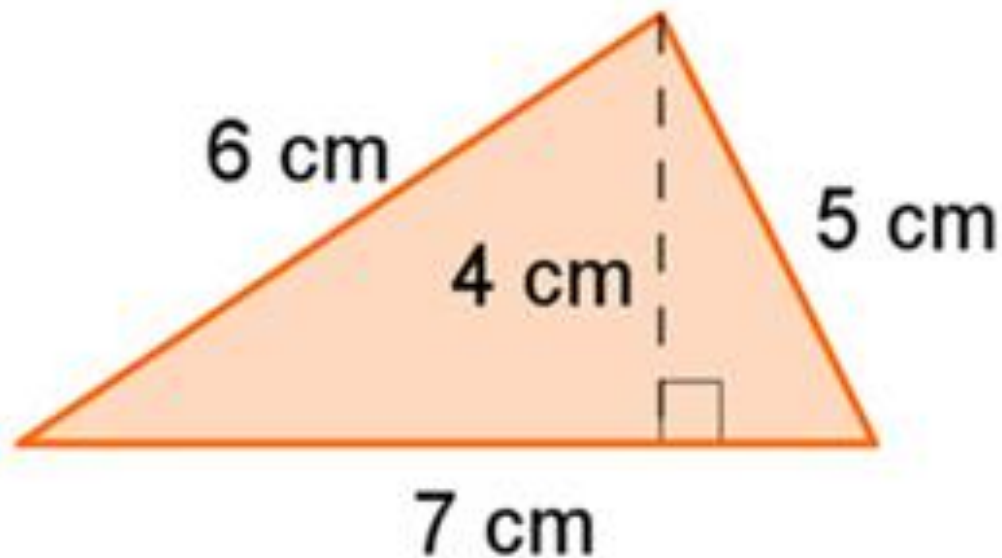
4. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

- | | |
|--|---------------|
| (α) Ο προηγούμενος φυσικός αριθμός ενός περιττού αριθμού είναι περιττός. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (β) Ο επόμενος φυσικός αριθμός ενός άρτιου αριθμού είναι περιττός. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (γ) Το άθροισμα δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι πάντα περιττός αριθμός. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (δ) Το γινόμενο δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι πάντα περιττός αριθμός. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ε) Η διαφορά δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι πάντα 1. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |

Οι αριθμοί 1,2,3,... ονομάζονται **φυσικοί** αριθμοί.
Οι φυσικοί αριθμοί προέκυψαν από την ανάγκη του ανθρώπου να απαριθμήσει αντικείμενα στη φύση.

- Σελίδα 11 στο 4 ε) η διαφορά δύο διαδοχικών ακέραιων είναι $+1$ ή και -1 .

Α΄ Γυμνασίου



- Σελίδα 21 στην άσκηση 1 στο 4^ο σχήμα η μία πλευρά δεν μπορεί να είναι 6 cm (το ορθό είναι $4\sqrt{2}$) .

2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω ισότητες, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α) $3(\beta + 4) = 3\beta + 4$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(β) $4(\omega - 2) = 4\omega - 8$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(γ) $7(\omega + 1) - \omega = 7$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(δ) $3(\beta + 1) + 3\beta = 6\beta + 3$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

• Σελίδα 62 στο 2(γ) :

$$7(\omega + 1) - \omega = 7$$

• Στην απάντηση λέει ΛΑΘΟΣ:
είναι ΛΑΘΟΣ, όταν υπάρχει ο
περιορισμός $\omega \neq 0$

Α' Γυμνασίου

- Σελίδα 104 στο 3 (β) να φύγει από την απάντηση το 4 (για να μην διαιρείται ο αριθμός 83_ με το 3.
- (Οι αριθμοί που διαιρούνται με το 3 είναι: 831,834,837, επομένως για να μην διαιρείται ο συγκεκριμένος αριθμός με το 3 θα μπορούσαμε να συμπληρώσουμε τα ψηφία : 2,3,5,6,8 και 9 (όχι το 4 της απάντησης)

3. Να συμπληρώσετε τα κενά τετράγωνα με τα κατάλληλα ψηφία, ώστε ο αριθμός:

(α) 43 να μη διαιρείται με το 5

(β) 83 να μη διαιρείται με το 3

(γ) 9 3 να μη διαιρείται με το 9

(δ) 837 να διαιρείται με το 5 και το 9

(ε) 38 7 να διαιρείται με το 9 και το 25

8. Ο κύριος Θανάσης αρρώστησε με ίωση και ο γιατρός τού συνέστησε να παίρνει 3 φάρμακα για μία εβδομάδα. Το πρώτο φάρμακο το παίρνει κάθε 6 ώρες, το δεύτερο κάθε 8 ώρες και το τρίτο κάθε 12 ώρες.
- (α) Να υπολογίσετε κάθε πόσες ώρες θα παίρνει και τα τρία φάρμακα μαζί.
- (β) Πόσες φορές σε ένα εικοσιτετράωρο θα πάρει δύο φάρμακα μαζί;

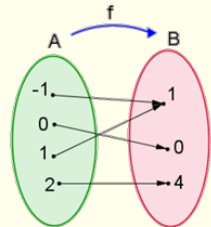
- **Συνάρτηση** ονομάζουμε την ειδική περίπτωση αντιστοιχίας από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B , όπου **κάθε** στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται (απεικονίζεται) με **μόνο ένα** στοιχείο του συνόλου B .

- Το σύνολο A ονομάζεται **Πεδίο Ορισμού**.
- Το σύνολο των στοιχείων του B που αντιστοιχίζονται με στοιχεία του A , θα το λέμε **Πεδίο Τιμών** της συνάρτησης.

Παράδειγμα:

Δίνονται τα σύνολα $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ και $B = \{1, 0, 4\}$. Η συνάρτηση f που συνδέει κάθε στοιχείο του συνόλου A με μόνο ένα στοιχείο του συνόλου B , μπορεί να δοθεί ως εξής:

- με **βελοειδές διάγραμμα**:



Πεδίο Ορισμού: $\{-1, 0, 1, 2\}$

Πεδίο Τιμών: $\{0, 1, 4\}$

Για τον πλήρη καθορισμό μιας συνάρτησης πρέπει να γνωρίζουμε:

- Το Πεδίο ορισμού της.
- Τη διαδικασία αντιστοίχισης κάθε στοιχείου του Πεδίου ορισμού με το στοιχείο του Πεδίου τιμών.

- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της f και το σύνολο B **πεδίο τιμών** της f . Το σύνολο όλων των δυνατών τιμών $f(x)$ ($x \in A$) λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$.

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

- Σελίδα 45: Αντί Π.Τ να λέγεται Σύνολο Τιμών.
- Να γίνει διάκριση μεταξύ Π.Τ και Σ.Τ.
Ως εκ τούτου αλλάζει σε κάθε άλλη σελίδα εμφανίζεται το Π.Τ και εννοείται ότι είναι για το Σ.Τ που αναφέρεται.

Μαθαίνω

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $y = \alpha x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, είναι μια ευθεία γραμμή.
- Μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta$ ή $y = \alpha x + \beta$, $x \in A$ με $A \subseteq \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ονομάζεται **γραμμική συνάρτηση**.

Όταν δεν αναφέρεται το Πεδίο Ορισμού μιας γραμμικής συνάρτησης, θα εννοούμε ότι θα είναι το σύνολο των Πραγματικών Αριθμών ($\mathbb{R}$).

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

- Σελίδα 51.

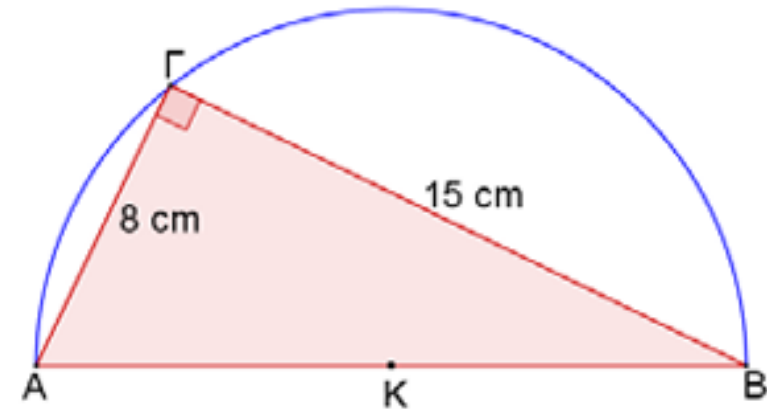
Γραμμική συνάρτηση:

Αν $f(x) = \alpha x + \beta$, $\beta \neq 0$, η f δεν είναι γραμμική! (με την έννοια της γραμμικής ιδιότητας μιας συνάρτησης όπου πρέπει να ισχύει:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$ και $f(\lambda x) = \lambda f(x)$
- Κάτι που δεν ισχύει στη συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, $\beta \neq 0$
- Αλλά ισχύει φυσικά, για την $f(x) = \alpha x$

20. Αν οι κορυφές ενός τριγώνου βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου τότε το τρίγωνο ονομάζεται εγγεγραμμένο. Όλα τα τρίγωνα που είναι εγγεγραμμένα πάνω σε ημικύκλια είναι ορθογώνια τρίγωνα.

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο. Αν $A\Gamma = 8\text{ cm}$ και $B\Gamma = 15\text{ cm}$, να βρείτε το μήκος του AB .



Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

- Σελίδα 65 άσκηση 20: « Όλα τα τρίγωνα που είναι εγγεγραμμένα πάνω σε ημικύκλιο είναι ορθογώνια τρίγωνα (...εδώ θα πρέπει να συμπληρωθεί και το ότι η μία του πλευρά είναι διάμετρος του κύκλου).

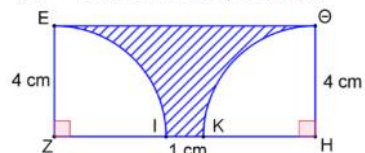
Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Α΄ Τεύχος, Ενότητα 3: Γεωμετρία, Σελίδα 150, Άσκηση 12 (ε) :

Στο σχήμα δεν μπορεί το $AE = 4 \text{ cm}$ και $AD = 6 \text{ cm}$ με $\Delta = 60^\circ$

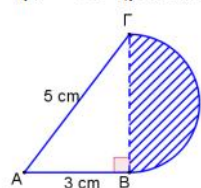
Μια πιθανή διόρθωση θα ήταν να δώσουμε το ύψος $AE = (3\sqrt{3}) \text{ cm}$, διατηρώντας τη γωνία $\Delta = 60^\circ$.

12. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα:

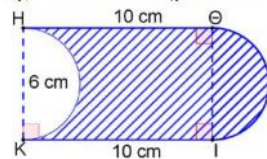
(α) $\widehat{EI}$ και $\widehat{\Theta K}$ τεταρτοκύκλια



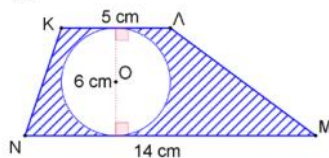
(β) $\widehat{B\Gamma}$ ημικύκλιο



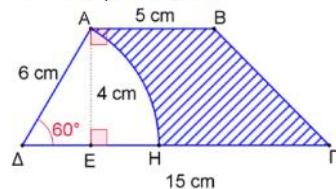
(γ) $\widehat{\Theta I}$ και $\widehat{HK}$ ημικύκλια



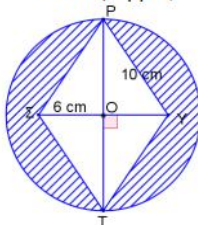
(δ)



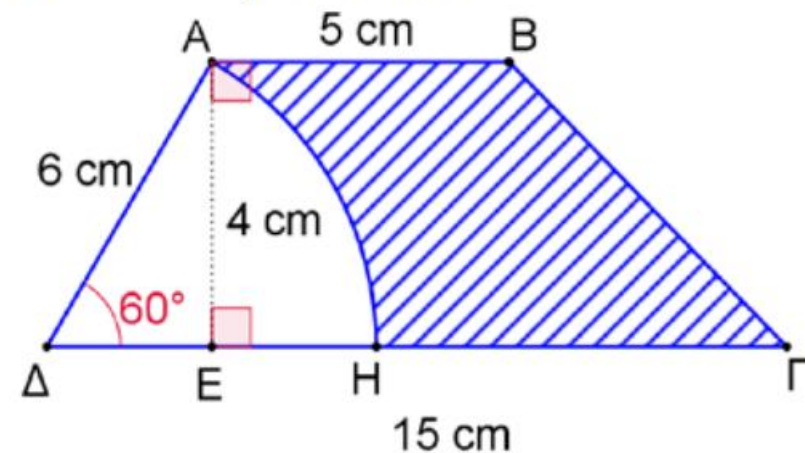
(ε) $\widehat{AH}$ με κέντρο Δ



(στ) Κύκλος $K(O, OP)$
 $PSTY$ ρόμβος



(ε) $\widehat{AH}$ με κέντρο Δ



Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

- Σελίδα 62 άσκηση 6:
- αντί $5\alpha > 6\beta$ έπρεπε να γράφει $5\alpha > 3\beta$ (αν μας δήλωνε ότι τα $\alpha, \beta > 0$ δεν θα είχε πρόβλημα!
-
- Η πλευρά του τετραγώνου είναι: $5\alpha - 3\beta$ η οποία θα είναι θετική για κάθε τιμή των α, β .
- ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
-
- Αν από $5\alpha > 6\beta$ επιλέξουμε $\alpha = -1 = \beta$, (για το οποίο ισχύει $5\alpha > 6\beta$) τότε το $5\alpha - 3\beta$ θα
- είναι αρνητικό και επομένως και η Περίμετρος του τετραγώνου επίσης αρνητική. (ΑΤΟΠΟ).
-

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

- Σελίδα 65

για τη λύση: $x_2 = -\frac{1}{2}$
και όχι $+\frac{1}{2}$

Παράδειγμα:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = -1$$

Η εξίσωση έχει λύσεις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$
$$= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2}$$
$$= \frac{+1 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$x_1 = \frac{+1+3}{4}$$

$$= \frac{4}{4}$$

$$= 1$$

$$x_2 = \frac{+1-3}{4}$$

$$= \frac{-2}{4}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Σελίδα 68 στο (β):

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 10}}{2 \cdot 4},$$

**το υπόριζο είναι -144
και όχι -24**

$$(\beta) \quad 4x^2 + 4x + 10 = 0$$

A' τρόπος:

$$4x^2 + 4x + 10 = 0$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$\alpha = 4, \quad \beta = 4, \quad \gamma = 10$$

Η εξίσωση έχει ρίζες:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 10}}{2 \cdot 4} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{-24}}{4} \end{aligned}$$

Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες, αφού η $\sqrt{-24}$ δεν ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

Γ' Γυμνασίου

A' τεύχος

- Σελίδα 71 στην άσκηση 10 (α και β) οι μονάδες μέτρησης δίνονται σε m (μέτρα) και έτσι και οι απαντήσεις πίσω πρέπει να είναι σε μέτρα **και όχι σε εκατοστόμετρα (cm)**.
- Στην άσκηση 11, η απάντηση να είναι cm. (**δεν δίνεται μονάδα μέτρησης**)

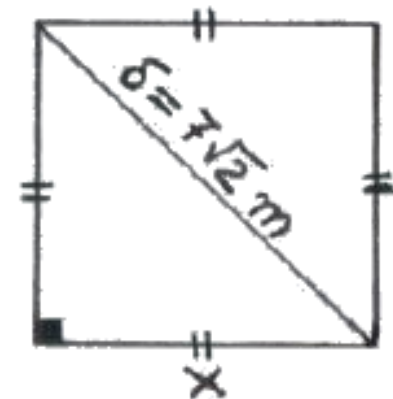
10. Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

(α)



$$(\pi \cong 3,14)$$

(β)

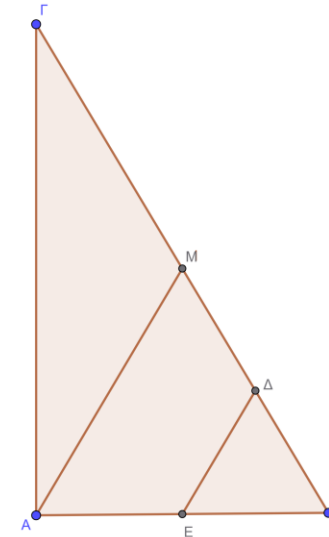


Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Β' τεύχος: Σελίδα 175 άσκηση 6 •

- Η επιλογή των ΔE και AM είναι λάθος γιατί το $AM = 2\Delta E$ και ως εκ τούτου η εξίσωση: $4x + 17 = 2(2x - 3)$ δεν έχει λύση για καμία τιμή του x .
- Αν χρησιμοποιηθεί η σχέση ότι η διάμεσος είναι το ημίθροισμα των δύο παραλλήλων πλευρών, τότε προκύπτει ότι τα μήκη των παράλληλων πλευρών του τραπεζίου είναι $7cm$, $37cm$ και η αντίστοιχη διάμεσος ίση με $22cm$.
- Άρα, $B\Gamma = 28cm$ άτοπο γιατί:
 $28 = B\Gamma > AM = 37$

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ με M μέσο της $B\Gamma$, Δ μέσο της BM και E μέσο της AB .
- (α) Να δείξετε ότι το $M\Delta EA$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- (β) Αν η διάμεσος του τραπεζίου $AE\Delta M$ ισούται με $(x^2 - 3)cm$, η $\Delta E = (2x - 3)cm$ και η $AM = (4x + 17)cm$, να υπολογίσετε τα μήκη των βάσεων του τραπεζίου.
- (γ) Να υπολογίσετε το μήκος της $B\Gamma$.



Α' ΛΥΚΕΙΟΥ- Α' ΤΕΥΧΟΣ

- Σελίδα 93, Άσκηση 8:
Στις απαντήσεις δεν αναγράφεται ότι η τιμή του $\kappa^2 + \lambda^2$, ως 1 αφού το σημείο $A(\kappa, \lambda)$ ανήκει στον τριγωνομετρικό κύκλο.
- Επομένως οι απαντήσεις μπορεί να είναι εναλλακτικά για τα (α) και (β) ως:
(α) $\lambda - \kappa$,
(β) $\frac{1}{\kappa\lambda}$

8. Η τελική πλευρά μιας γωνίας ω που είναι σε κανονική θέση τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο A με συντεταγμένες (κ, λ) . Να εκφράσετε συναρτήσει των κ και λ τις παραστάσεις:

$$(α) \quad \eta\mu\omega - \sigma\upsilon\upsilon\omega \qquad (β) \quad \epsilon\varphi\omega + \sigma\varphi\omega \qquad (γ) \quad \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} - \frac{1}{\sigma\varphi^2\omega}$$

$$\begin{array}{ll} 8. & (α) \quad \frac{\lambda - \kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \\ & (β) \quad \frac{\lambda^2 + \kappa^2}{\kappa\lambda} \\ & (γ) \quad 1 \end{array}$$

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ- Α' ΤΕΥΧΟΣ

- Σελίδα 125, Άσκηση 10 (α):
Στην απάντηση δίνεται ότι η συνάρτηση είναι περιοδική, ενώ δεν είναι, γιατί με βάση τον ορισμό σε μια συνάρτηση με περίοδο T πρέπει τα $x + T$ και $x - T$ να ανήκουν στο Π.Ο= $[-5\pi, 3\pi]$, για κάθε $x \in [-5\pi, 3\pi]$
- Όμως $T = 2\pi$ και για $x = 2\pi$, έχουμε
Ότι $x + T = 4\pi \notin [-5\pi, 3\pi]$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in [-5\pi, 3\pi]$ και το σημείο $A\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
(α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι περιοδική.

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ- Β' ΤΕΥΧΟΣ

8. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $(\lambda - 5)x^2 - (\lambda - 5)x + 2 = 0$ δεν έχει πραγματικές λύσεις;

Σελίδα 144, Άσκηση 8 :

Στην απάντηση δίνεται ότι :

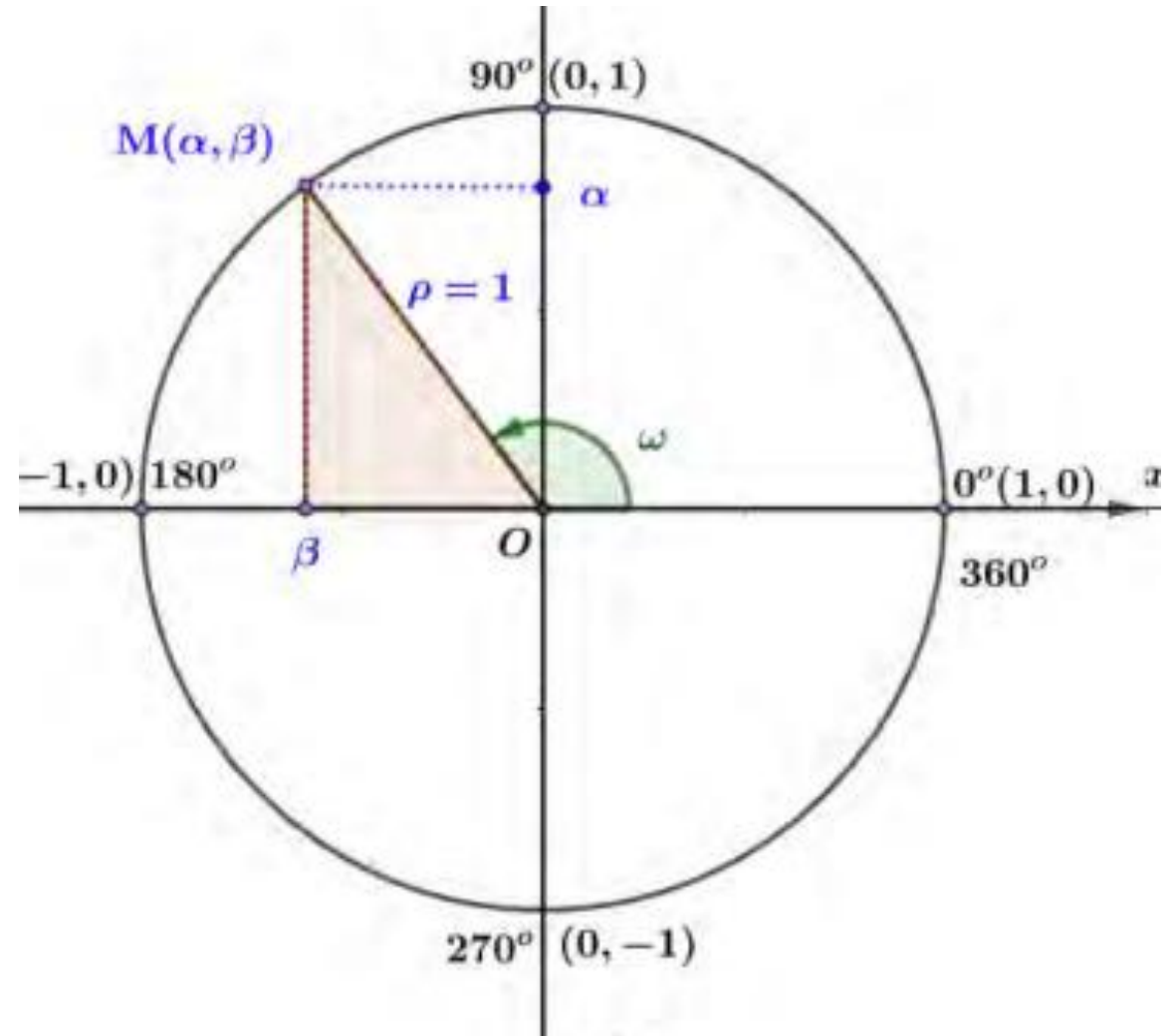
$5 < \lambda < 13$ **αντί για** $5 \leq \lambda < 13$ που είναι το ορθό γιατί για $\lambda = 5$ η εξίσωση είναι: $0x = -2$ η οποία δεν έχει επίσης πραγματικές λύσεις.

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

- Σελ. 111:

Είναι λάθος σημειωμένες οι συντεταγμένες του σημείου M στους άξονες.



Β' Λυκείου (κκ)

• σελ. 18

Θεώρημα

Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με το ημιγινόμενο δύο των μηκών των πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχόμενης σε αυτές γωνίας.

Δηλαδή, σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$E = \frac{\beta\gamma\eta\mu A}{2}, \quad E = \frac{\alpha\gamma\eta\mu B}{2}, \quad E = \frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2}$$

των δύο

Β' Λυκείου

(κκ)

Σελίδα 18

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς γ τριγώνου $AB\Gamma$ με $E = 4$ cm, $\beta = 2$ cm και $\hat{A} = 30^\circ$.

cm²

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ – Β' ΤΕΥΧΟΣ

Σελίδα 34, στην
τελευταία γραμμή,
λείπει το =

Παράδειγμα 6

Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x^2 - 3x - 12}{x - 5} \right)$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 3x - 12}{x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5^-} \left((x^2 - 3x - 12) \cdot \frac{1}{x - 5} \right) \\ &= (-2)(-\infty) + \infty \end{aligned}$$

$$x - 5 < 0, \text{ όταν } x \rightarrow 5^-$$

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ – Β' ΤΕΥΧΟΣ

Σελίδα 54

- Στον Ορισμό είναι απαραίτητο να αναφερθεί ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του Π.Ο της f , ώστε να έχει νόημα το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

και να γίνεται διάκριση για μεμονωμένα σημεία του Π.Ο στα οποία σίγουρα μια συνάρτηση θεωρείται συνεχής λόγω του $\varepsilon - \delta$ ορισμού.

5.8.1 Ορισμός συνέχειας σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης

Ορισμός

Έστω f συνάρτηση και x_0 είναι ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Η συνάρτηση f λέγεται **συνεχής στο x_0** , όταν ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ – Β' ΤΕΥΧΟΣ

Σελίδα 56

Στη λύση του παραδείγματος δίνεται συνάρτηση g και όχι f .

Παράδειγμα 4

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση g με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & x > -3 \\ x - 4, & x \leq -3 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x_0 = -3$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^-} (x - 4) = -3 - 4 = -7 \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^+} (x + 1) = -3 + 1 = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$$

Συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x_0 = -3$.

5. Να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - a}{|x - 2|}$$

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ – Β' ΤΕΥΧΟΣ

Σελίδα 77

Στις απαντήσεις δίνεται ότι δεν υπάρχει τιμή του a ώστε να υπάρχει το όριο. (εννοώντας δεν υπάρχει το όριο με τιμή πραγματικό αριθμό).

Για τις διάφορες τιμές του a :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - a}{|x - 2|} = \begin{cases} +\infty, a < 4 \\ -\infty, a > 4 \\ \text{δεν υπάρχει για } a = 4 \end{cases}$$

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ – Β' ΤΕΥΧΟΣ

Σελίδα 172

Ισχύει ότι $(f \circ f^{-1})(x) = x, \forall x \in \mathbb{R},$
αντί $\forall x \in (0, +\infty)$

Ιδιότητες

(α) $\log_a a^x = x, \forall x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$

(β) $a^{\log_a x} = x, x > 0, a > 0, a \neq 1$

Απόδειξη

Αν $a > 0, a \neq 1$, τότε ορίζουμε συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \log_a x$.

Επομένως, έχουμε ότι $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με τύπο $f^{-1}(x) = a^x$. Τότε:

(α) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(a^x) = \log_a a^x = x, \forall x \in (0, +\infty)$

Σελίδα 80,
Υπολογίζουμε τα όρια πηλίκου

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

αντί

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

- Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια του πηλίκου $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, καθώς το x τείνει στο 1.
Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Στο 2^ο όριο το $x \rightarrow 1^+$ αντί για $x \rightarrow 1^-$

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ Γ' ΤΕΥΧΟΣ

Σελίδα 108, Παράδειγμα 5

Στο 2^ο όριο :

$$x = -(\sqrt{-x})^2 \text{ για } x < 0 .$$

Επομένως η τιμή του ορίου
είναι $-\infty$ και όχι $+\infty$

Παράδειγμα 5

Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f (αν αυτή ορίζεται) στο σημείο της $A(0, 0)$.

Λύση

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f (αν ορίζεται) στο σημείο της $A(0, 0)$, πρέπει να υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια του πηλίκου

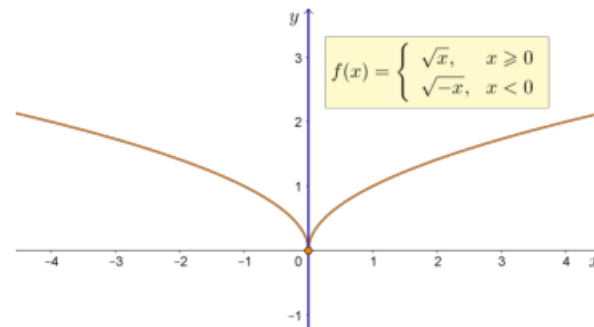
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

καθώς το $x \rightarrow 0$. Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{(\sqrt{-x})^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{-x}} = +\infty$$

Επομένως, η εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, 0)$ είναι η κατακόρυφη ευθεία $x = 0$.



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ Γ' ΤΕΥΧΟΣ

6. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x^2 + x + 1) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$$

- Σελ. 145, Άσκηση 6
- Από τη συναρτησιακή σχέση που δίνεται δεν συνάγεται ότι η f είναι συνάρτηση γιατί,
- Για $x = 0$ και $x = -1$ έχουμε συγχρόνως: $f(0) = 0$ και $f(0) = 1$
- Ή ακόμη για $x = 1$, $x = -2$ έχουμε συγχρόνως:
$$f(3) = 1 \text{ και } f(3) = -8$$

Προτεινόμενη Διόρθωση: Αλλαγή στο Π.Ο της f σε $\mathbb{R}^+$ αντί $\mathbb{R}$.

Γ' Κατ Τεύχος Α'

- Σελ. 63

Σελ. 63

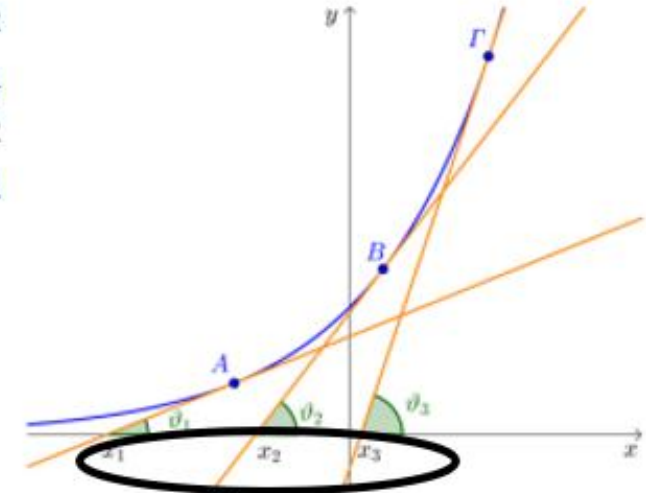
Παρατήρηση

Παίρνοντας μία κυρτή συνάρτηση σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, παρατηρούμε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, ότι σε διαδοχικά σημεία του Δ με $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$, ισχύει ότι $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \dots < \frac{\pi}{2}$.

Αυτό μας οδηγεί στην παρατήρηση ότι $\varepsilon\varphi\theta_1 < \varepsilon\varphi\theta_2 < \varepsilon\varphi\theta_3 < \dots$ ή ότι

$$f'(x_1) < f'(x_2) < f'(x_3) < \dots$$

Δηλαδή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .



Στο σχήμα, τα x_1, x_2, x_3 έπρεπε να ήταν οι τετμημένες των σημείων A, B και Γ

Γ' Λυκείου Κατ. Α' Τεύχος

- Σελ. 68
- Στην 5^η γραμμή αναφέρεται: «Επομένως η f' παρουσιάζει μέγιστο για $x = \xi \dots$ », ενώ έπρεπε να αναφέρεται ότι παρουσιάζει ελάχιστο.
- Σελ. 69 : Λύση Παραδείγματος 5

Τότε, η f' είναι φθίνουσα ($f''(x) \leq 0$) στο διάστημα $\xi - \delta < x < \xi$ και αύξουσα ($f''(x) \geq 0$) στο διάστημα $\xi < x < \xi + \delta$.

Επομένως, η f' παρουσιάζει μέγιστο για $x = \xi$, λαμβάνοντας υπόψη ότι η f' είναι συνεχής στο $x = \xi$ (αφού η f' είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό).

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{-4x(x^2 + 1)^2 - (2 - 2x^2) \cdot 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} \\ &= \frac{-4x(x^2 + 1) \cdot [(x^2 + 1) \ominus (2 - 2x^2)]}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-4x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

↓

+ |

Γ' Λυκείου

Κατ. Α' τεύχος

• Σελ. 115

Ορισμός

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ με πεδίο ορισμού το $[0, \pi]$ και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$.
Τότε η f έχει αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ που συμβολίζεται με $\text{τοξ}\sin x$.

Η τιμή της συνάρτησης $f^{-1}(x) = \text{τοξ}\sin x$ είναι ένα τόξο που ανήκει στο διάστημα $[0, \pi]$ και συγκεκριμένα εκείνο το τόξο που έχει συνημίτονο ίσο με $x \in [0, 1]$.

$[-1, 1]$

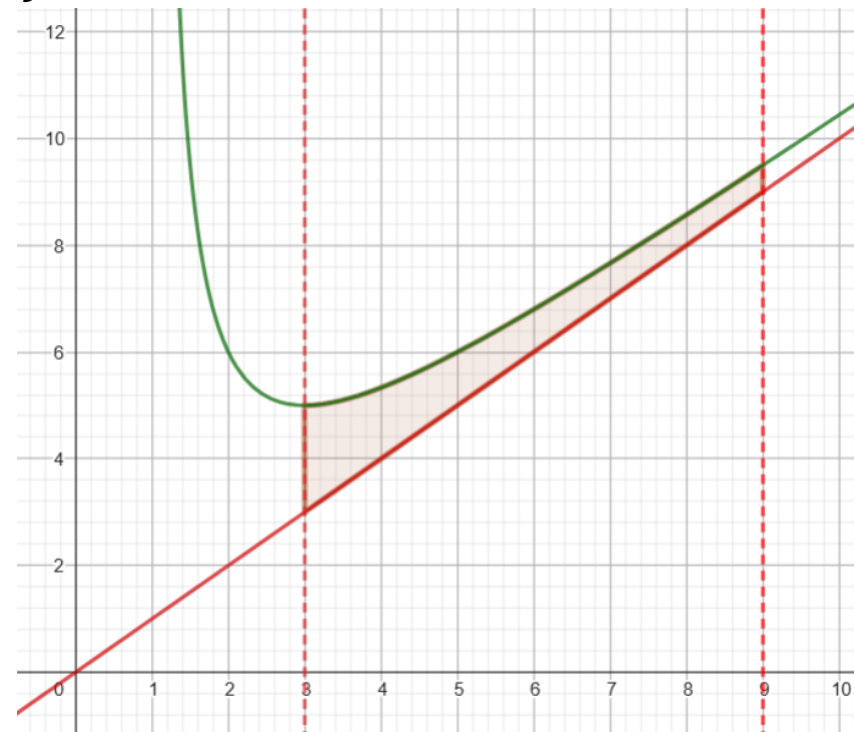
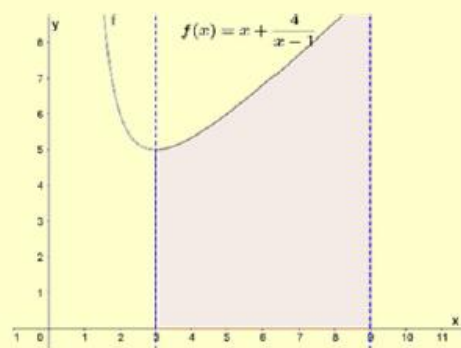
Γ' Λυκείου Κατ. Β' Τεύχος

- Σελίδα 123 άσκηση 12: Το σκιασμένο χωρίο στο σχήμα πρέπει να είναι μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των f και της ευθείας $y = x$ που είναι η πλάγια ασύμπτωτη της f .

12. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x + \frac{4}{x-1}$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την πλάγια ασύμπτωτή της και τις ευθείες $x = 3$, $x = 9$.



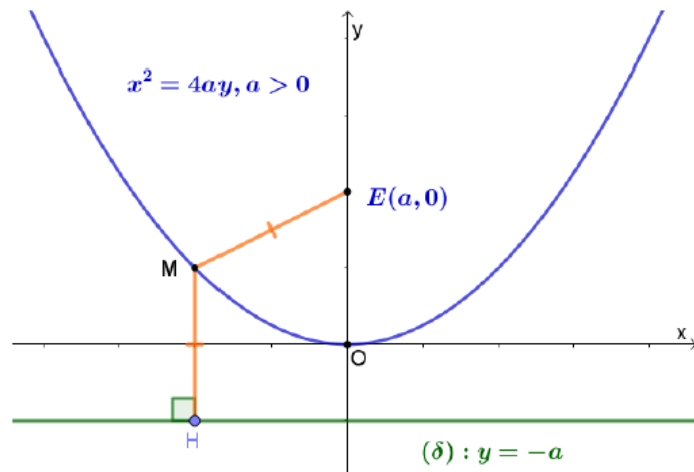
Γ' Λυκείου Κατ. Γ' Τεύχος

Σελ. 78 στο σχήμα η Εστία της συγκεκριμένης παραβολής είναι $E(0, a)$ και όχι $E(a, 0)$.

διευθετούσας της. Αν $M(x, y)$ είναι τυχαίο σημείο της παραβολής, ισχύει $(ME) = (MH)$, όπου H η προβολή του M πάνω στην (ϵ) .

Από την (1), έχουμε:

$$\begin{aligned}(ME)^2 &= (MH)^2 \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - a)^2 = (y + a)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 + 2ay + a^2 \Leftrightarrow x^2 = 4ay\end{aligned}\quad (3)$$



Γ' Λυκείου Κατ. Γ' Τεύχος

Σελ. 90 στο παράδειγμα 3

Άρα, οι συντεταγμένες του σημείου N , έτσι ώστε το σχήμα $ΛΟΜΝ$ να είναι ορθογώνιο, είναι $(-at^2, at)$.

Για να βρούμε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου N , όταν το A κινείται πάνω στην παραβολή, απαλείφουμε την παράμετρο t από τις παραμετρικές εξισώσεις του σημείου N . Δηλαδή:

$$\left. \begin{array}{l} x = at^2 \\ y = 2at \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = at^2 \\ t = \frac{y}{2a} \end{array} \right\} \Rightarrow x = a \left(\frac{y^2}{4a^2} \right) \Rightarrow x = \frac{y^2}{4a} \Rightarrow y^2 = 4ax$$

- Το σημείο N έχει συντεταγμένες $N(-at^2, at)$ και έτσι οι παραμετρικές εξισώσεις

θα είναι:

$$x = -at^2, y = at$$

Επομένως η αντίστοιχη εξίσωση του Γ.Τ του σημείου N θα είναι $y^2 = -ax$ και όχι $y^2 = 4ax$

Γ' Λυκείου Κατ. Γ' Τεύχος

Σελίδα 87, άσκηση 2 (β)

Στις απαντήσεις είναι λάθος η σκίαση (για το 2β).

2. Να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

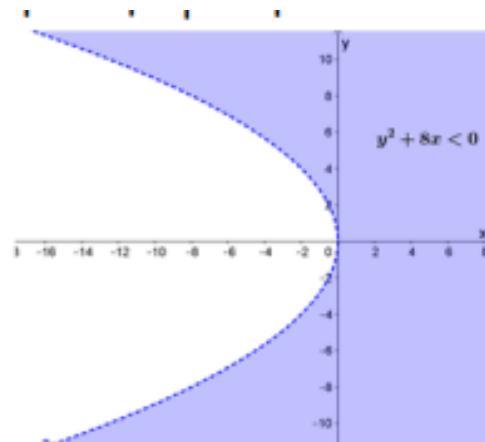
(α) $y^2 \leq 12x$

(β) $y^2 + 8x < 0$

(γ) $x^2 \geq 2y$

(δ) $2x^2 - 9y \leq 0$

(β)



Γ' Λυκείου – Β' τεύχος

Στη σελ.59 δίνεται η εξής άσκηση:

11. Να βρείτε τη συνάρτηση f , η οποία έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $A(4, 4)$ και ισχύει ότι:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3}, \quad x \neq 3$$

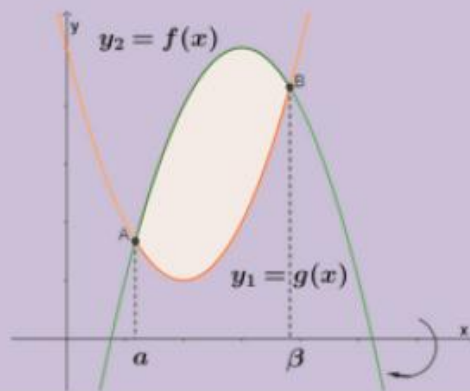
Το αόριστο ολοκλήρωμα ορίζεται σε διάστημα, οπότε για την εύρεση της συνάρτησης f στην εκφώνηση έπρεπε να δοθεί $x > 3$, αφού η τετμημένη του σημείου A ανήκει στο διάστημα $(3, +\infty)$. Αντιθέτως, ο περιορισμός $x \neq 3$ δεν συνάδει με τον ορισμό του αόριστου ολοκληρώματος, αφού παραπέμπει σε ένωση διαστημάτων και δημιουργεί παρανοήσεις.

Γ' Λυκείου – Β' τεύχος

Στη σελ.126 δίνεται το εξής αποτέλεσμα:

Ο όγκος του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων ενός επίπεδου χωρίου, το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση δύο συναρτήσεων f και g με $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, \beta]$ δίνεται από τη σχέση:

$$V = \pi \int_a^{\beta} (y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_a^{\beta} (f^2(x) - g^2(x)) dx$$



Ο πιο πάνω τύπος ισχύει όταν $f(x) \geq g(x) \geq 0, \forall x \in [a, \beta]$, αφού στην περίπτωση που ισχύει $g(x) \leq f(x) \leq 0, \forall x \in [a, \beta]$, τότε για τον όγκο που δημιουργείται από την πλήρη περιστροφή του εν λόγω χωρίου ισχύει ο τύπος:

$$V = \pi \int_a^{\beta} (g^2(x) - f^2(x)) dx$$

Στον Δ.Ε Α8.7 (8.1) η ολοκληρωσιμότητα μιας συνάρτησης f πρέπει να αναφέρεται σε κλειστό διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$ και όχι σε οποιοδήποτε άλλο διάστημα Δ ή ακόμη και στο $\mathbb{R}$.

- Στα παραδείγματα θα μπορούσε να ζητηθεί να εξεταστεί η ολοκληρωσιμότητα στο διάστημα $[0,2]$ ή και σε άλλο κλειστό διάστημα.

Παραδείγματα:

Ολοκληρωσιμότητα συνάρτησης

- Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} e^{f(x)} - e^x, & x \neq 1 \\ e, & x = 1 \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$.

- Να εξετάσετε κατά πόσο η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{N} \\ x + 1, & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$.

ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων

Επεξηγώ τη σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 2x, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Κάποιος ισχυρίζεται ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$.

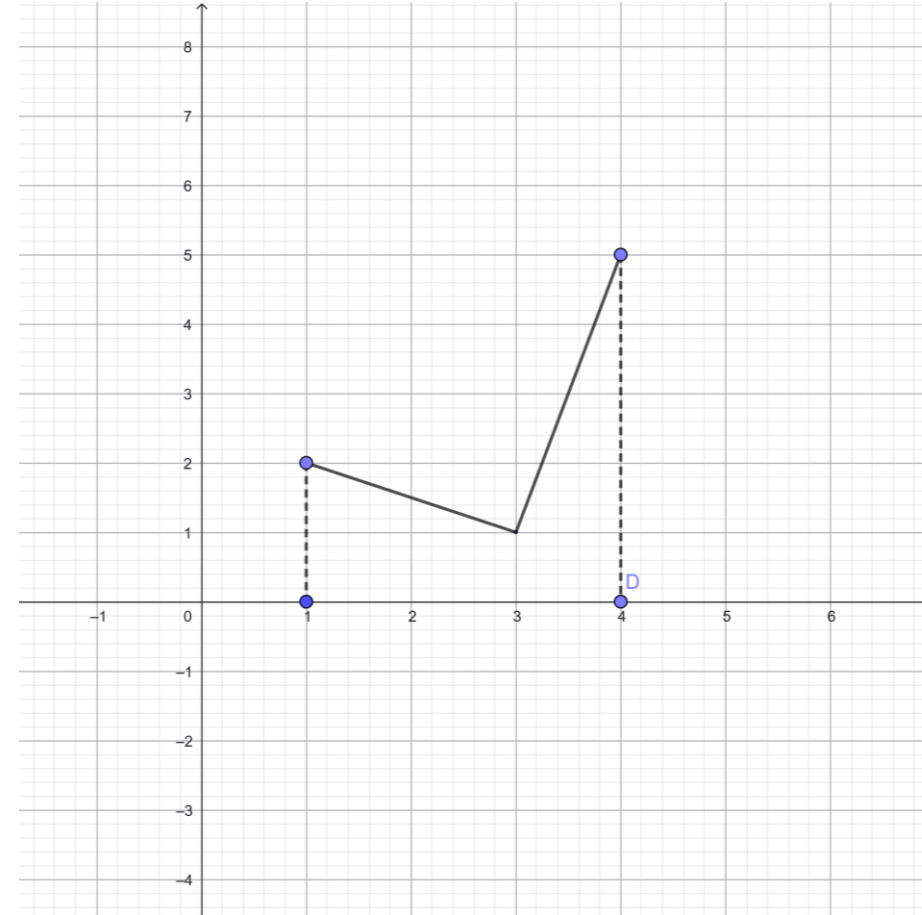
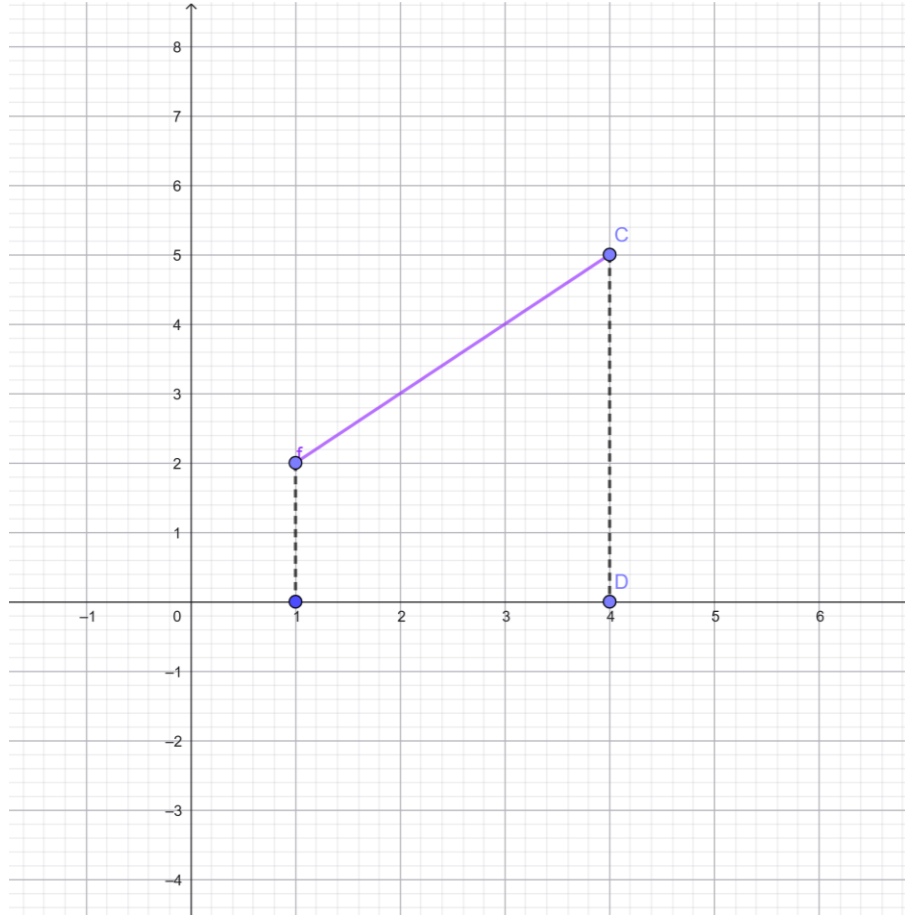
Να αποφασίσετε για την ορθότητα του ισχυρισμού του. Αν διαφωνείτε, να

Σχόλια στην έννοια της ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε διάστημα.

- Μια **φραγμένη** συνάρτηση είναι **ολοκληρώσιμη στο $[α,β]$** όταν υπάρχει διαμέριση P του $[α, β]$ για την οποία η διαφορά των κάτω και άνω αθροισμάτων γίνεται όσο θέλουμε μικρή, δηλαδή:
 $\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει διαμέριση P του $[α, β]$, ώστε $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.
- Κάποιες **προτάσεις (κλάσεις συναρτήσεων)** που μας διευκολύνουν να αποφασίσουμε αν μία συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη είναι:
 1. Κάθε **συνεχής** συνάρτηση στο $[α, β]$ είναι ολοκληρώσιμη.
 2. Κάθε συνάρτηση **με πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνέχειας** είναι επίσης ολοκληρώσιμη (αν το πλήθος των σημείων ασυνέχειας είναι άπειρο αλλά **αριθμήσιμο**, τότε και πάλι η f ολοκληρώσιμη στο $[α, β]$).
 3. Κάθε **μονότονη** συνάρτηση στο $[α, β]$ είναι ολοκληρώσιμη.

Οι πιο πάνω προτάσεις αποτελούν ΙΚΑΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ αλλά ΌΧΙ ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ για την ολοκληρωσιμότητα μιας συνάρτησης.

Κάθε συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$ είναι ολοκληρώσιμη.



Επίσης, η συνάρτηση $f: [0, 2.5] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 2, & x \in [1, 2.5] \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη.

Η f έχει μόνο ένα σημείο ασυνέχειας, συνεπώς είναι ολοκληρώσιμη.



Κάθε συνάρτηση με πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνέχειας είναι επίσης ολοκληρώσιμη.

(Ικανή, αλλά όχι αναγκαία συνθήκη).

Να εξετάσετε κατά πόσο η συνάρτηση $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

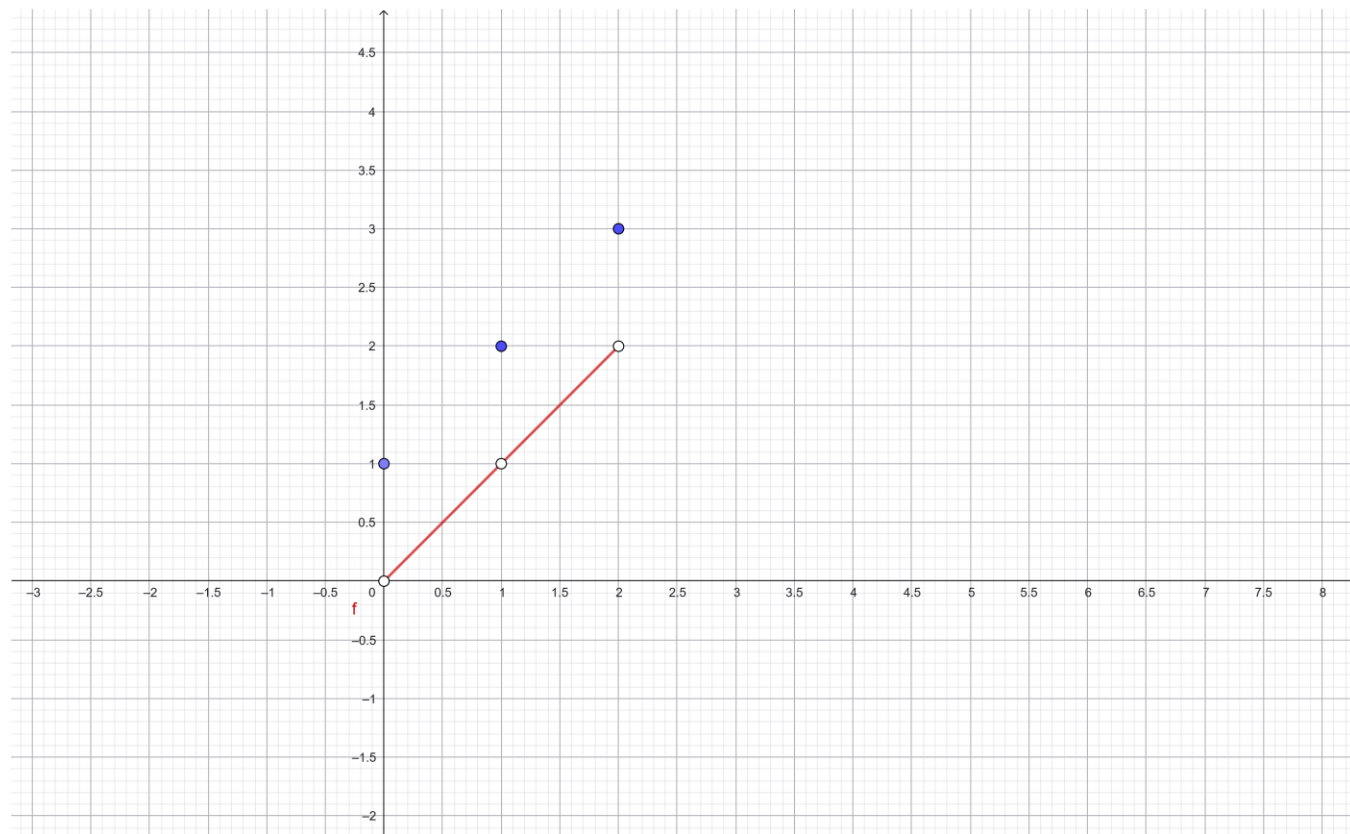
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{N} \\ x + 1, & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη.

Παρατηρούμε ότι: $f(0) = 1, f(1) = 3, f(2) = 3$, ενώ σε κάθε $x \in [0,2] - \{0,1,2\}$ η συνάρτηση είναι $f(x) = x$.

Αποδεικνύεται ότι η f είναι ασυνεχής μόνο στα σημεία $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$.

Συνεπώς είναι ολοκληρώσιμη.



Αν το πλήθος των σημείων ασυνέχειας μιας συνάρτησης, είναι άπειρο αλλά αριθμήσιμο, τότε και πάλι η f ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \text{ αλλού.} \end{cases}$$

.

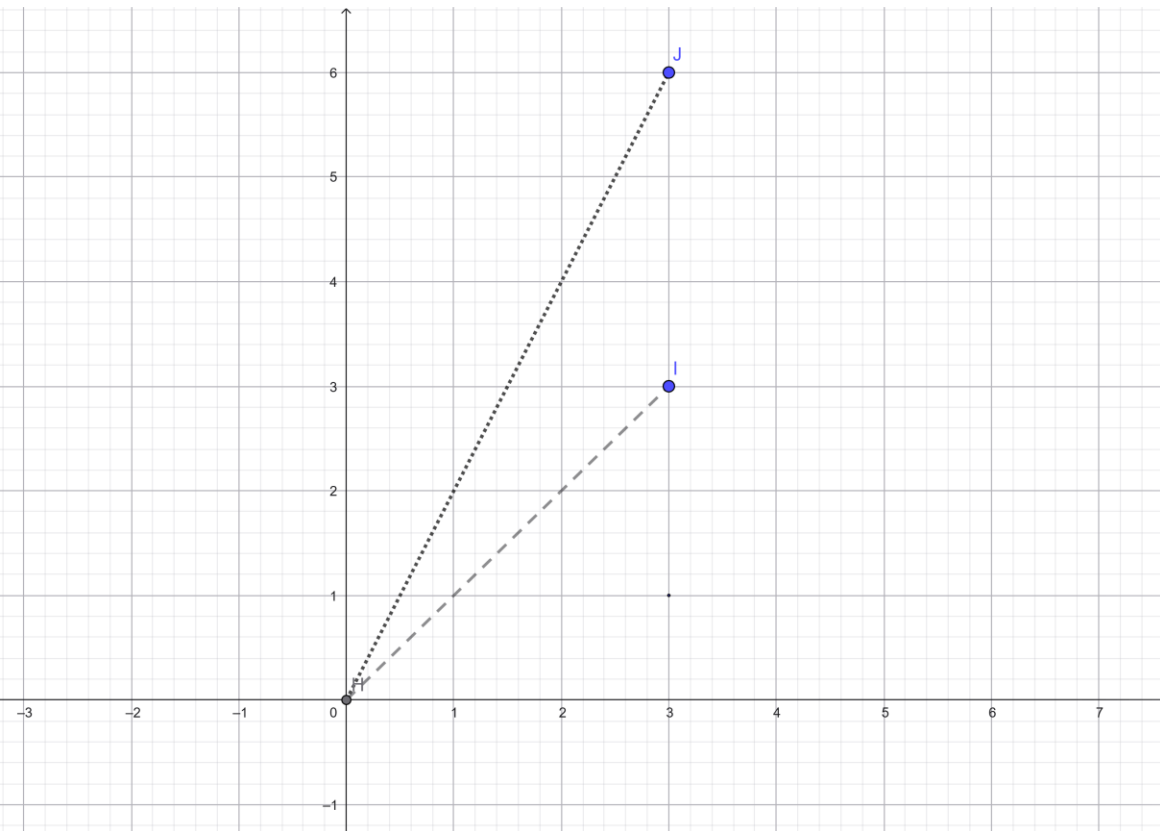
Στα σημεία $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \cup \{0\}$ η f **δεν είναι συνεχής**. Ως εκ τούτου το σύνολο των σημείων ασυνέχειας είναι αριθμήσιμο.

Επομένως η f είναι ολοκληρώσιμη.

.

Παράδειγμα συνάρτησης στο $[0,1]$ με άπειρο, μη-αριθμήσιμο το πλήθος σημείων ασυνέχειας στο οποίο η συνάρτηση δεν είναι ολοκληρώσιμη :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$



- **Παράδειγμα:** Δίνεται η συνάρτηση $f: [0,3] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:
- $$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 2x, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$
- Η f δεν είναι συνεχής στο $\Delta = (0,3]$.
- **Ως επέκταση** εδώ δεν θα αναφέραμε ότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη γιατί το σύνολο των σημείων ασυνέχειας δεν έχει ΜΕΤΡΟ ΜΗΔΕΝ. Συγκεκριμένα είναι : $m(\Delta) = 3 \neq 0$.

Σας ευχαριστούμε

Καλή δύναμη στο έργο μας!