

ΣΕΜΙΝΑΡΙΑ ΕΠΙΘΕΩΡΗΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

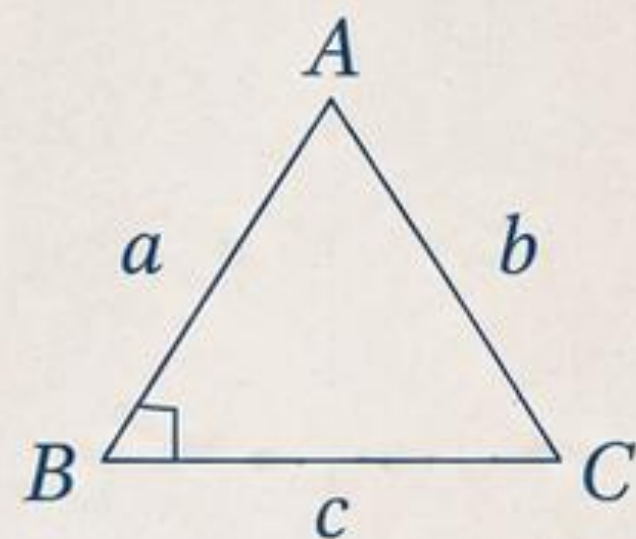
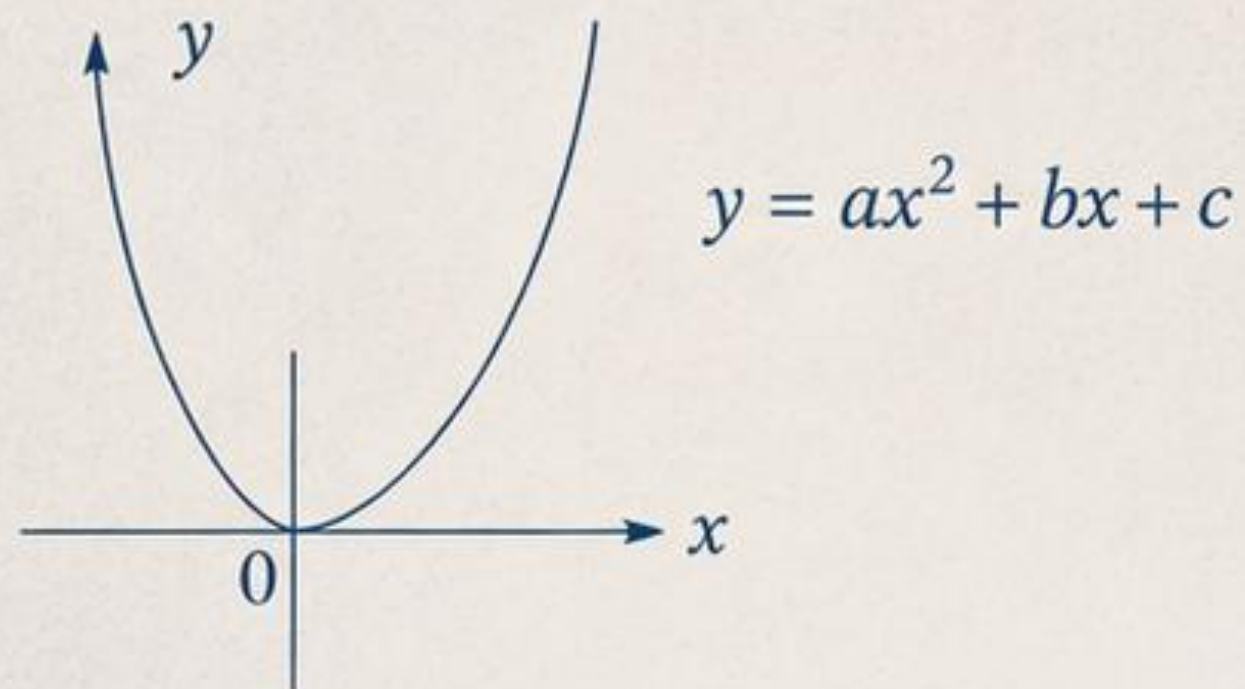
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2026

Δρ Κυριάκος Κυριακού, Μαθηματικός ΕΜΕ
kkyriakou3@schools.ac.cy

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

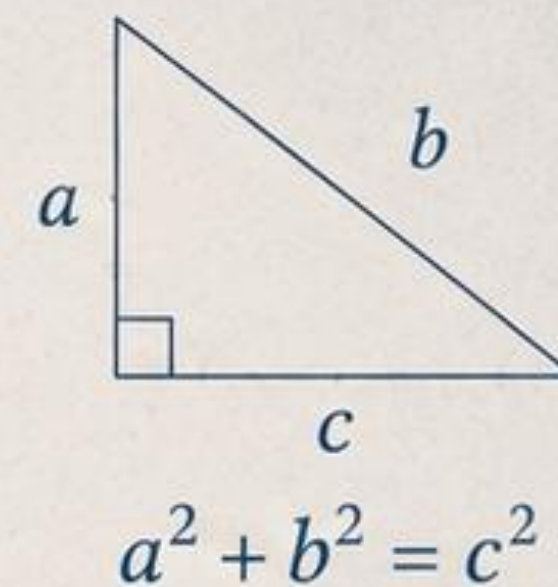
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ





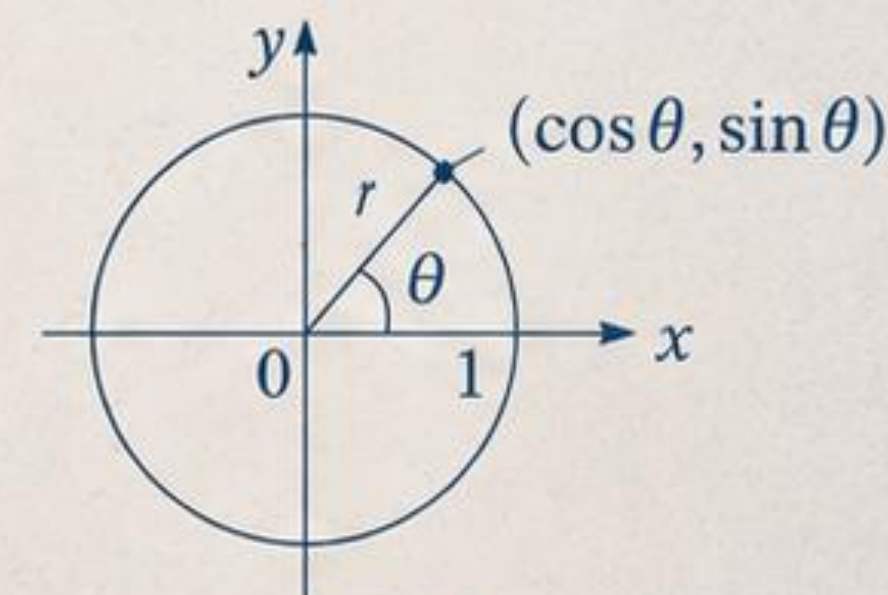
$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

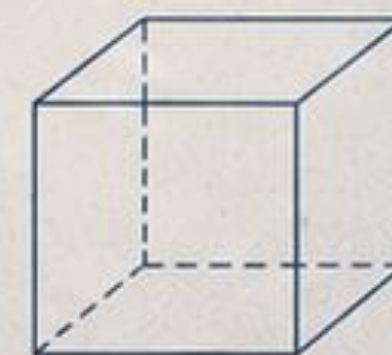


ΑΝΑΣΤΟΧΑΖΟΜΑΙ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΩ ΣΕ ΒΑΘΟΣ.

“ Η κατανόηση δεν έρχεται από την αποστήθιση, αλλά από την προσπάθεια να δεις το γιατί πίσω από το κάθε βήμα. ”



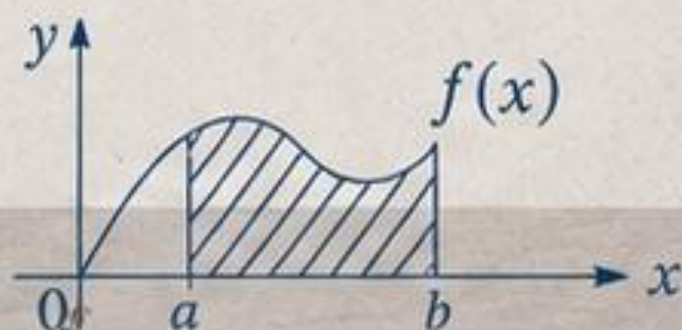
$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$



$$V = a^3$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x) dx$$



Διδασκαλία με χρήση αναστοχαστικών δραστηριοτήτων

Ορισμός

Αναστοχασμός:

- Είναι η συνειδητή και κριτική εξέταση της σκέψης και της διαδικασίας μίας μαθηματικής πρότασης.
- Στόχος η κατανόηση, η αυτοαξιολόγηση και η βελτίωση της μαθησιακής διαδικασίας.

Αναστοχασμός στα Μαθηματικά

Τι περιλαμβάνει:

- Επανεξέταση της λύσης ενός προβλήματος.
- Αιτιολόγηση των επιλογών και των βημάτων που ακολουθήθηκαν.
- Εντοπισμό λαθών ή παρανοήσεων.
- Σύνδεση νέων γνώσεων με προηγούμενες.
- Διατύπωση γενικεύσεων και συμπερασμάτων.
- Αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας μίας στρατηγικής.
- Αναζήτηση εναλλακτικών τρόπων επίλυσης.
- Μεταφορά της γνώσης σε νέες καταστάσεις.

Αναστοχασμός στα Μαθηματικά

Σκοποί του αναστοχασμού:

- Ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης.
- Καλλιέργεια μεταγνωστικών δεξιοτήτων.
- Αυτοαξιολόγηση της μάθησης.
- Βελτίωση της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων.
- Ανάπτυξη της διαδικασίας μάθησης.

Αναστοχασμός στα Μαθηματικά

Σκοποί του αναστοχασμού

- Τι έμαθα;
- Ποια ιδέα ήταν η σημαντικότερη;
- Ποιο σημείο με δυσκόλεψε και γιατί;
- Πώς μπορώ να ελέγξω ότι η λύση μου είναι σωστή;
- Υπάρχει άλλος τρόπος να λύσω το ίδιο πρόβλημα;
- Σε ποιο άλλο μαθηματικό θέμα μπορώ να χρησιμοποιήσω αυτή τη γνώση;

Αναστοχασμός στα Μαθηματικά

Συμπέρασμα

- Ο αναστοχασμός δεν είναι μία άσκηση ή επανάληψη της θεωρίας. Είναι μία μεταγνωστική διαδικασία που βοηθά τον μαθητή να κατανοήσει πώς μαθαίνει, πώς σκέφτεται και πώς μπορεί να βελτιώσει τη μαθηματική του σκέψη.

Α΄ Λυκείου κκ - Αναστοχασμοί

1.1.2 Ορισμός της νιοστής ρίζας

Σελίδα 19



Αναστοχασμός 1.1.2(α)

Να εξετάσετε αν $\sqrt{36} = -6$, εφόσον γνωρίζουμε ότι $(-6)^2 = 36$.

Ανάλυση Αναστοχασμού 1.1.2(α), σελίδα 19

Διδακτικός στόχος

- Να κατανοήσουν ότι το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας δηλώνει πάντοτε τη μοναδική μη αρνητική τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού.
- Να διακρίνουν δύο διαφορετικές έννοιες:
 - Την επίλυση της εξίσωσης $x^2 = 36$, η οποία έχει δύο λύσεις $x = \pm 6$.
 - Την αριθμητική τιμή της παράστασης $\sqrt{36}$, η οποία είναι μοναδική και ίση με 6.

Τι διερευνά

Διερευνά αν οι μαθητές μπορούν:

- Να ερμηνεύουν σωστά τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας.
- Να διακρίνουν την έννοια της ρίζας από τη λύση μίας εξίσωσης.
- Να αιτιολογούν γιατί η πρόταση $\sqrt{36} = -6$ είναι λανθασμένη, παρότι ισχύει ότι $(-6)^2 = 36$.
- Να χρησιμοποιούν σωστά τη μαθηματική ορολογία και τον συμβολισμό.

Πιθανές παρανοήσεις

Βοηθά τον εκπαιδευτικό να εντοπίσει αν οι μαθητές:

- Πιστεύουν ότι η τετραγωνική ρίζα έχει δύο τιμές.
- Συγχέουν το σύμβολο $\sqrt{x}$ με τις λύσεις της εξίσωσης $x^2 = a$.
- Θεωρούν ότι από τη στιγμή που $(-6)^2 = 36$, τότε υποχρεωτικά $\sqrt{36} = -6$.
- Εφαρμόζουν μηχανικά ιδιότητες χωρίς να γνωρίζουν τον ορισμό της ρίζας.

Αξιοποίηση στη διδασκαλία

- Ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει τη σχέση $\sqrt{36} = -6$ και ζητά από τους μαθητές να απαντήσουν αν είναι σωστή ή λανθασμένη, αιτιολογώντας την άποψή τους.
- Μπορεί οι διαφορετικές απαντήσεις να καταγράφονται στον πίνακα χωρίς να σχολιαστούν άμεσα. Έτσι αναδεικνύονται οι αρχικές αντιλήψεις των μαθητών.

Αξιοποίηση στη διδασκαλία

Ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί τους μαθητές ώστε να συγκρίνουν τις δύο προτάσεις:

- $(-6)^2 = 36$

- $\sqrt{36} = 6$

Ακολουθεί συζήτηση σχετικά με τη διαφορά ανάμεσα:

στην εύρεση όλων των αριθμών που έχουν τετράγωνο ίσο με 36, και τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας ως της μοναδικής μη αρνητικής ρίζας.

Αξιοποίηση στη διδασκαλία

- Οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν με δικά τους λόγια γιατί η τετραγωνική ρίζα έχει μία μόνο τιμή.
- Ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει παρόμοια παραδείγματα:
 $\sqrt{49}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{0}$
και να ζητήσει από τους μαθητές να διακρίνουν κάθε φορά την τιμή της ρίζας και τις λύσεις της αντίστοιχης εξίσωσης.
- Αξιοποιείται ως δραστηριότητα διαμορφωτικής αξιολόγησης, ώστε να διαπιστωθεί αν έχουν κατανοήσει τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας.

Αξιοποίηση στη διδασκαλία

Ενδεικτικές ερωτήσεις

- Γιατί η πρόταση $\sqrt{36} = -6$ είναι λανθασμένη;
- Ποια είναι η διαφορά ανάμεσα στην παράσταση $\sqrt{36}$ και στην εξίσωση $x^2 = 36$;
- Γιατί η εξίσωση έχει δύο λύσεις ενώ η τετραγωνική ρίζα μία μόνο τιμή;
- Τι θα απαντούσες σε έναν συμμαθητή σου που υποστηρίζει ότι η τετραγωνική ρίζα έχει δύο τιμές;

Διδακτική αξία

Αποτελεί δραστηριότητα εννοιολογικής αποσαφήνισης:

- Βοηθά στην αντιμετώπιση μίας από τις πιο επίμονες παρανοήσεις στην Άλγεβρα.
- Βοηθά στο να διαχωρίσουν την έννοια της τετραγωνικής ρίζας από την επίλυση μίας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.
- Βοηθά στο να χρησιμοποιούν σωστά τον μαθηματικό συμβολισμό και να αιτιολογούν τις απαντήσεις τους με βάση τον ορισμό και όχι μόνο τη διαίσθησή τους.
- Καλλιεργούνται η μαθηματική επιχειρηματολογία και η μεταγνωστική σκέψη.
- Αποτελεί αποτελεσματικό εργαλείο διαμορφωτικής αξιολόγησης.

Α΄ Λυκείου κκ - Αναστοχασμοί

1.1.3 Διερεύνηση της εξίσωσης $x^v = a$, $a \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}$

Σελίδα 24



Αναστοχασμός 1.1.3

Δίνεται τετράγωνο πλευράς 4 cm. Να υπολογίσετε πόσο πρέπει να αυξήσουμε το μήκος της πλευράς του, ώστε το εμβαδόν του να ισούται με $42,25 \text{ cm}^2$.

Ανάλυση Αναστοχασμού 1.1.3, σελίδα 24

Διδακτικός στόχος

Να διαπιστωθεί αν οι μαθητές:

- Κατανοούν τη σχέση μεταξύ πλευράς και εμβαδού τετραγώνου.
- Γνωρίζουν ότι το εμβαδόν τετραγώνου δίνεται από τον τύπο $E = \alpha^2$.
- Μπορούν να υπολογίζουν την πλευρά ενός τετραγώνου από το εμβαδόν του, χρησιμοποιώντας την τετραγωνική ρίζα.
- Διακρίνουν τη διαφορά ανάμεσα στη νέα τιμή και στη μεταβολή (αύξηση) μίας ποσότητας.

Τι διερευνά

Διερευνά αν οι μαθητές μπορούν να:

- Εφαρμόζουν σωστά τον τύπο του εμβαδού του τετραγώνου.
- Χρησιμοποιούν την τετραγωνική ρίζα για να βρουν το μήκος της πλευράς.
- Κατανοούν ότι το ζητούμενο είναι η αύξηση της πλευράς και όχι η νέα πλευρά.
- Ερμηνεύουν σωστά τα δεδομένα ενός προβλήματος.

Πιθανές παρανοήσεις

Βοηθά τον εκπαιδευτικό να εντοπίσει αν οι μαθητές:

- Υπολογίζουν ως απάντηση τη νέα πλευρά 6,5 cm αντί για την αύξηση 2,5 cm.
- Θεωρούν ότι το εμβαδόν αυξάνεται ανάλογα με την πλευρά.
- Ξεχνούν να αφαιρέσουν την αρχική πλευρά από τη νέα.
- Εφαρμόζουν μηχανικά τον τύπο χωρίς να ερμηνεύουν το ζητούμενο της άσκησης.

Αξιοποίηση στη διδασκαλία

- Ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει το πρόβλημα χωρίς να υποδείξει τη διαδικασία επίλυσης και ζητά να εκτιμήσουν αν η ζητούμενη αύξηση της πλευράς είναι ίση με τη νέα πλευρά.
- Καταγράφει τις διαφορετικές απαντήσεις και αξιοποιούνται για την ανάδειξη πιθανών παρανοήσεων σχετικά με τη διαφορά μεταξύ νέας τιμής και μεταβολής μίας ποσότητας.
- Συζήτηση για τη διαφορά ανάμεσα στη νέα τιμή μίας ποσότητας και στη μεταβολή της, με αιτιολόγηση των υπολογισμών.
- Αναστοχασμός των μαθητών για τη στρατηγική που ακολούθησαν, τα πιθανά λάθη τους και την ερμηνεία του ζητούμενου.

Αξιοποίηση στη διδασκαλία

Ενδεικτικές ερωτήσεις

- Πώς βρήκες τη νέα πλευρά του τετραγώνου;
- Γιατί χρησιμοποίησες την τετραγωνική ρίζα;
- Γιατί δεν είναι σωστή απάντηση το 6,5 cm;
- Ποια είναι η διαφορά ανάμεσα στη νέα πλευρά και στην αύξηση της πλευράς;
- Ποιο λάθος είναι πιθανό να κάνει κάποιος σε αυτή την άσκηση;

Διδακτική αξία

Ο αναστοχασμός αναδεικνύει:

- Την κατανόηση της σχέσης μεταξύ γεωμετρικών μεγεθών.
- Τη σωστή χρήση της τετραγωνικής ρίζας σε γεωμετρικά προβλήματα.
- Την ικανότητα ερμηνείας του ζητούμενου και αιτιολόγησης της λύσης.
- Τη μεταγνωστική σκέψη και την αυτοαξιολόγηση των μαθητών.



Αναστοχασμός 1.1(α)

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R , αν αυξήσουμε το μήκος μιας πλευράς του, πώς επηρεάζεται το ημίτονο της απέναντι γωνίας;

Ανάλυση Αναστοχασμού 1.1(α)

Διδακτικός στόχος

- Αποσκοπεί στην κατανόηση της σχέσης μεταξύ του μήκους μίας πλευράς και του ημιτόνου της απέναντι γωνίας, όπως αυτή εκφράζεται από τον Νόμο των Ημιτόνων.
- Οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν πώς μεταβάλλεται το ημίτονο μίας γωνίας όταν μεταβάλλεται το μήκος της απέναντι πλευράς, διατηρώντας σταθερή την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.
- Να κατανοήσουν ότι, όταν η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου παραμένει σταθερή, το μήκος μιας πλευράς είναι ευθέως ανάλογο προς το ημίτονο της απέναντι γωνίας.

Τι διερευνά

Διερευνά αν οι μαθητές μπορούν:

- Να εφαρμόζουν τον Νόμο των Ημιτόνων σε ένα γεωμετρικό πλαίσιο.
- Να αντιλαμβάνονται τη λειτουργική σχέση μεταξύ πλευράς και απέναντι γωνίας.
- Να συνδέουν την αύξηση μίας πλευράς με την αύξηση του ημιτόνου της απέναντι γωνίας όταν η ακτίνα R παραμένει σταθερή.
- Να ερμηνεύουν τη σχέση και όχι μόνο να την εφαρμόζουν υπολογιστικά.

Πιθανές παρανοήσεις

Βοηθά τον εκπαιδευτικό να εντοπίσει αν οι μαθητές:

- Θεωρούν ότι μεταβάλλεται μόνο η πλευρά και όχι η απέναντι γωνία.
- Συγχέουν τη μεταβολή της γωνίας με τη μεταβολή του ημιτόνου της.
- Πιστεύουν ότι το ημίτονο μεταβάλλεται ανεξάρτητα από το μήκος της απέναντι πλευράς.
- Δυσκολεύονται να αντιληφθούν ότι η σχέση του Νόμου των Ημιτόνων εκφράζει αναλογία μεταξύ των αντίστοιχων μεγεθών.

Αξιοποίηση στη διδασκαλία

- Ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει το ερώτημα χωρίς να υπενθυμίσει τον Νόμο των Ημιτόνων και ζητά από τους μαθητές να διατυπώσουν και να αιτιολογήσουν τις σκέψεις τους.
- Οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν διαισθητικά τη σχέση μεταξύ του μήκους μίας πλευράς, της απέναντι γωνίας και του ημιτόνου της και να αιτιολογήσουν τις σκέψεις τους.

Αξιοποίηση στη διδασκαλία

- Ο εκπαιδευτικός υπενθυμίζει τον Νόμο των Ημιτόνων.
- Οι μαθητές μετασχηματίζουν τη σχέση: $\eta\mu A = \frac{\alpha}{2R}$.
- Εφόσον η ακτίνα R παραμένει σταθερή, συμπεραίνουν ότι όσο αυξάνεται το μήκος της πλευράς α , τόσο αυξάνεται και το $\eta\mu A$.
- Με χρήση δυναμικού λογισμικού (π.χ. GeoGebra) ή κατάλληλου σχήματος, παρατηρούν πειραματικά τη μεταβολή της πλευράς και της τιμής του ημιτόνου της.

Αξιοποίηση στη διδασκαλία

- Οι μαθητές εφαρμόζουν την ίδια συλλογιστική και στις άλλες πλευρές του τριγώνου.
- Συζητούν γιατί η σχέση ισχύει μόνο όταν η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου παραμένει σταθερή.
- Ο αναστοχασμός χρησιμοποιείται ως δραστηριότητα διαμορφωτικής αξιολόγησης, ώστε να διαπιστωθεί αν οι μαθητές κατανοούν τη σημασία του Νόμου των Ημιτόνων ως σχέσης μεταβολής και όχι μόνο ως τύπου υπολογισμού.

Αξιοποίηση στη διδασκαλία

Ενδεικτικές ερωτήσεις

- Ποια σχέση συνδέει το μήκος μίας πλευράς με το ημίτονο της απέναντι γωνίας;
- Γιατί είναι απαραίτητο να παραμένει σταθερή η ακτίνα R ;
- Αν διπλασιαζόταν θεωρητικά το μήκος της πλευράς, τι θα συνέβαινε στο ημίτονο της απέναντι γωνίας; Είναι αυτό πάντοτε δυνατό;
- Ποια είναι η διαφορά ανάμεσα στη μεταβολή της γωνίας και στη μεταβολή του ημιτόνου της;
- Πώς ερμηνεύεται γεωμετρικά ο Νόμος των Ημιτόνων; Δηλαδή ότι ο λόγος «πλευρά προς ημίτονο της απέναντι γωνίας» είναι ο ίδιος για όλες τις πλευρές του τριγώνου και ισούται με τη διάμετρο του περιγεγραμμένου κύκλου.

Αξιοποίηση στη διδασκαλία

Διδακτική ερμηνεία

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να αξιοποιήσει αυτή τη γεωμετρική ερμηνεία για να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν ότι:

- Όταν η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου παραμένει σταθερή, από τη σχέση $a = 2R \cdot \eta\mu A$ προκύπτει ότι το μήκος της πλευράς a είναι ανάλογο με το $\eta\mu A$. Επομένως, αύξηση της πλευράς a αντιστοιχεί σε αύξηση της τιμής του $\eta\mu A$.
- Η μεταβολή του ημιτόνου μίας γωνίας δεν πρέπει να συγχέεται με τη μεταβολή της ίδιας της γωνίας. Η διάκριση αυτή είναι ουσιώδης για τη σωστή ερμηνεία του Νόμου των Ημιτόνων.
- Ο Νόμος των Ημιτόνων δεν αποτελεί απλώς έναν τύπο υπολογισμού, αλλά περιγράφει σχέση αναλογίας μεταξύ κάθε πλευράς και του ημιτόνου της απέναντι γωνίας, με κοινό συντελεστή $2R$.
- Έτσι, οι μαθητές μεταβαίνουν από τη μηχανική εφαρμογή του τύπου στην εννοιολογική κατανόηση της σχέσης μεταξύ πλευρών, γωνιών και περιγεγραμμένου κύκλου.

Διδακτική αξία

Ο αναστοχασμός:

- Ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση του Νόμου των Ημιτόνων, καθώς οι μαθητές δεν περιορίζονται στην εφαρμογή ενός τύπου, αλλά διερευνούν τις σχέσεις μεταβολής μεταξύ πλευρών και γωνιών ενός τριγώνου.
- Καλλιεργείται η μαθηματική επιχειρηματολογία, η ικανότητα ερμηνείας συναρτησιακών σχέσεων και η σύνδεση της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία.
- Αποτελεί αποτελεσματικό εργαλείο διαμορφωτικής αξιολόγησης, επειδή αναδεικνύει αν οι μαθητές κατανοούν τη βαθύτερη σημασία του Νόμου των Ημιτόνων και μπορούν να τον χρησιμοποιούν για να ερμηνεύουν γεωμετρικές μεταβολές, πέρα από απλούς αριθμητικούς υπολογισμούς.

Γ' Λυκείου κκ - Αναστοχασμοί

1.1 Μονοτονία - Ακρότατα συνάρτησης (ορισμοί)

Σελίδα 13



Αναστοχασμός 1.1.1

Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f είναι ευθεία, με ποιο τρόπο η κλίση της μας βοηθά να συμπεράνουμε τη μονοτονία της;

Ανάλυση Αναστοχασμού 1.1.1, σελίδα 13

Διδακτικός στόχος

Αποσκοπεί στην κατανόηση της σχέσης μεταξύ της κλίσης μίας ευθείας και της μονοτονίας της συνάρτησης. Οι μαθητές καλούνται να συνδέσουν την αλγεβρική μορφή της συνάρτησης με τη γεωμετρική της αναπαράσταση και να αιτιολογήσουν τα συμπεράσματά τους, αντί να εφαρμόζουν μηχανικά έναν κανόνα.

Τι διερευνά

Ο αναστοχασμός διερευνά αν οι μαθητές μπορούν:

- Να αναγνωρίζουν τον ρόλο του συντελεστή διεύθυνσης.
- Να συμπεραίνουν τη μονοτονία από τη γραφική παράσταση ή τον τύπο της ευθείας.
- Να τεκμηριώνουν τη σκέψη τους με μαθηματικά επιχειρήματα.

Πιθανές παρανοήσεις

Ο αναστοχασμός βοηθά τον εκπαιδευτικό να εντοπίσει αν οι μαθητές:

- Θεωρούν ότι η σταθερά β επηρεάζει τη μονοτονία.
- Συγχέουν την κλίση με το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα y .
- Απομνημονεύουν τον κανόνα χωρίς να κατανοούν τη γεωμετρική του ερμηνεία.
- Συγχέουν το πρόσημο της κλίσης, που καθορίζει την κατεύθυνση της μονοτονίας, με το μέτρο της κλίσης, που εκφράζει πόσο απότομα μεταβάλλεται η ευθεία.

Αξιοποίηση στη διδασκαλία

- Χρησιμοποιείται ως διαγνωστική δραστηριότητα για να αναδειχθούν οι αρχικές αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την κλίση και τη μονοτονία.
- Οι μαθητές παρατηρούν διαφορετικές ευθείες, συζητούν σε ομάδες και αιτιολογούν πώς η κλίση επηρεάζει τη μονοτονία.
- Ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί τη συζήτηση ώστε οι μαθητές να οδηγηθούν μόνοι τους στη γενίκευση:
 - $\alpha > 0$: γνησίως αύξουσα,
 - $\alpha < 0$: γνησίως φθίνουσα,
 - $\alpha = 0$: σταθερή.
- Ο αναστοχασμός αξιοποιείται ως εργαλείο διαμορφωτικής αξιολόγησης και αυτοαξιολόγησης.

Οι μαθητές εξηγούν τι κατάλαβαν, ποια δυσκολία αντιμετώπισαν και πώς θα αιτιολογούσαν το συμπέρασμά τους σε έναν συμμαθητή τους.

Αξιοποίηση στη διδασκαλία

Ενδεικτικές ερωτήσεις

- Πώς επηρεάζει το πρόσημο της κλίσης τη μονοτονία της συνάρτησης;
- Γιατί η σταθερά β δεν επηρεάζει αν μία ευθεία είναι αύξουσα ή φθίνουσα;
- Πώς θα αιτιολογούσες το συμπέρασμά σου χωρίς να χρησιμοποιήσεις τον τύπο της συνάρτησης;
- Μπορεί δύο διαφορετικές ευθείες να έχουν την ίδια μονοτονία; Γιατί;

Αξιοποίηση στη διδασκαλία

Διδακτική ερμηνεία

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να αξιοποιήσει τη γραφική παράσταση διαφορετικών ευθειών, ώστε οι μαθητές να συνδέσουν το πρόσημο του συντελεστή διεύθυνσης a με τη μονοτονία της συνάρτησης, για τις τρεις περιπτώσεις $a > 0$ γνησίως αύξουσα, για $a < 0$ γνησίως φθίνουσα και για $a = 0$ σταθερή.

- Η σταθερά b μετατοπίζει κατακόρυφα τη γραφική παράσταση, χωρίς να επηρεάζει τη μονοτονία της.
- Οι μαθητές διακρίνουν το πρόσημο της κλίσης από το μέτρο της: το πρόσημο καθορίζει την κατεύθυνση της μονοτονίας, ενώ το μέτρο εκφράζει πόσο απότομα μεταβάλλεται η ευθεία. Έτσι, συνδέουν την αλγεβρική μορφή με τη γεωμετρική σημασία της κλίσης και μεταβαίνουν από την απομνημόνευση του κανόνα στην εννοιολογική κατανόησή του.

Διδακτική αξία

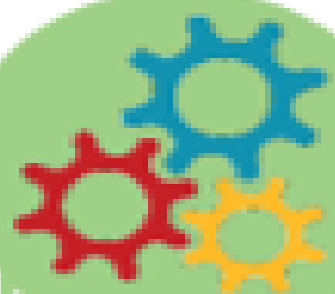
Ο αναστοχασμός:

- Ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση, τη μαθηματική επιχειρηματολογία και τη μεταγνωστική σκέψη.
- Προσφέρει στον εκπαιδευτικό ένα αποτελεσματικό εργαλείο διαμορφωτικής αξιολόγησης, καθώς αναδεικνύει τόσο τις γνώσεις όσο και τις παρανοήσεις των μαθητών, επιτρέποντας την προσαρμογή της διδασκαλίας στις ανάγκες της τάξης.

Γ' Λυκείου ΚΚ - Αναστοχασμοί

1.1 Μονοτονία - Ακρότατα συνάρτησης (ορισμοί)

Σελίδα 17



Αναστοχασμός 1.1.2

Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2$.

Να εξετάσετε αν η f έχει ολικά ακρότατα και να τα υπολογίσετε σε κάθε μια από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) $A = [-2, 2]$

(β) $A = (0, 2]$

(γ) $A = (-2, 2)$

Ανάλυση Αναστοχασμού 1.1.2, σελίδα 17

Διδακτικός στόχος

Ο αναστοχασμός αποσκοπεί στην κατανόηση ότι η ύπαρξη ολικού ελάχιστου ή μέγιστου δεν εξαρτάται μόνο από τον τύπο της συνάρτησης αλλά και από το πεδίο ορισμού της. Οι μαθητές καλούνται να συνδέσουν τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ με το σύνολο ορισμού και να αιτιολογήσουν πότε ένα ακρότατο υπάρχει ή δεν υπάρχει.

Τι διερευνά

Ο αναστοχασμός διερευνά αν οι μαθητές μπορούν:

- Να διακρίνουν το πεδίο ορισμού από τον τύπο της συνάρτησης.
- Να κατανοήσουν τη σημασία των κλειστών και ανοικτών διαστημάτων.
- Να αιτιολογούν την ύπαρξη ή μη ολικών ακροτάτων.
- Να χρησιμοποιούν τη γραφική παράσταση για να υποστηρίξουν τα συμπεράσματά τους.

Πιθανές παρανοήσεις

Ο αναστοχασμός βοηθά τον εκπαιδευτικό να εντοπίσει αν οι μαθητές:

- Θεωρούν ότι η x^2 έχει πάντα τα ίδια ολικά ακρότατα, ανεξάρτητα από το πεδίο ορισμού.
- Αγνοούν ότι τα άκρα ενός ανοικτού διαστήματος δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού.
- Συγχέουν τα τοπικά με τα ολικά ακρότατα.
- Εστιάζουν μόνο στον τύπο της συνάρτησης και όχι στο σύνολο A .

Αξιοποίηση στη διδασκαλία

- Ο αναστοχασμός αξιοποιείται ως εργαλείο διαμορφωτικής αξιολόγησης και αυτοαξιολόγησης. Οι μαθητές εξηγούν ποια περίπτωση τους δυσκόλεψε περισσότερο και αιτιολογούν τις απαντήσεις τους με χρήση της γραφικής παράστασης.
- Οι μαθητές σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της $y = x^2$ και εξετάζουν ξεχωριστά κάθε διάστημα.
- Συζητούν σε ομάδες γιατί αλλάζει ή δεν αλλάζει η ύπαρξη ολικού μεγίστου και ελαχίστου όταν αλλάζει το πεδίο ορισμού.
- Ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί τη συζήτηση ώστε να αναδειχθεί ότι η μελέτη ακροτάτων απαιτεί πάντοτε να λαμβάνεται υπόψη το σύνολο ορισμού.

Αξιοποίηση στη διδασκαλία

Ενδεικτικές ερωτήσεις

- Γιατί η ίδια συνάρτηση δίνει διαφορετικά συμπεράσματα όταν αλλάζει το πεδίο ορισμού;
- Ποιος είναι ο ρόλος των άκρων ενός διαστήματος στην ύπαρξη ολικών ακροτάτων;
- Πώς σε βοηθά η γραφική παράσταση να αποφασίσεις αν υπάρχει ολικό μέγιστο ή ελάχιστο;
- Τι αλλάζει όταν το διάστημα είναι ανοικτό αντί για κλειστό;

Διδακτική αξία

Ο αναστοχασμός:

- Οδηγεί τους μαθητές να αντιληφθούν ότι τα ολικά ακρότατα αποτελούν ιδιότητα της συνάρτησης σε συγκεκριμένο πεδίο ορισμού και όχι μόνο του τύπου της.
- Ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση, τη μαθηματική επιχειρηματολογία και τη σύνδεση της αλγεβρικής με τη γραφική αναπαράσταση.
- Για τον εκπαιδευτικό αποτελεί ένα αποτελεσματικό εργαλείο διαμορφωτικής αξιολόγησης, καθώς αναδεικνύει παρανοήσεις που σχετίζονται με τα διαστήματα ορισμού και την έννοια των ολικών ακροτάτων.

**Ευχαριστώ για την προσοχή σας!
Σας εύχομαι καλή δύναμη στο δύσκολο έργο σας για τη
νέα σχολική χρονιά 2026 - 2027!**



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

