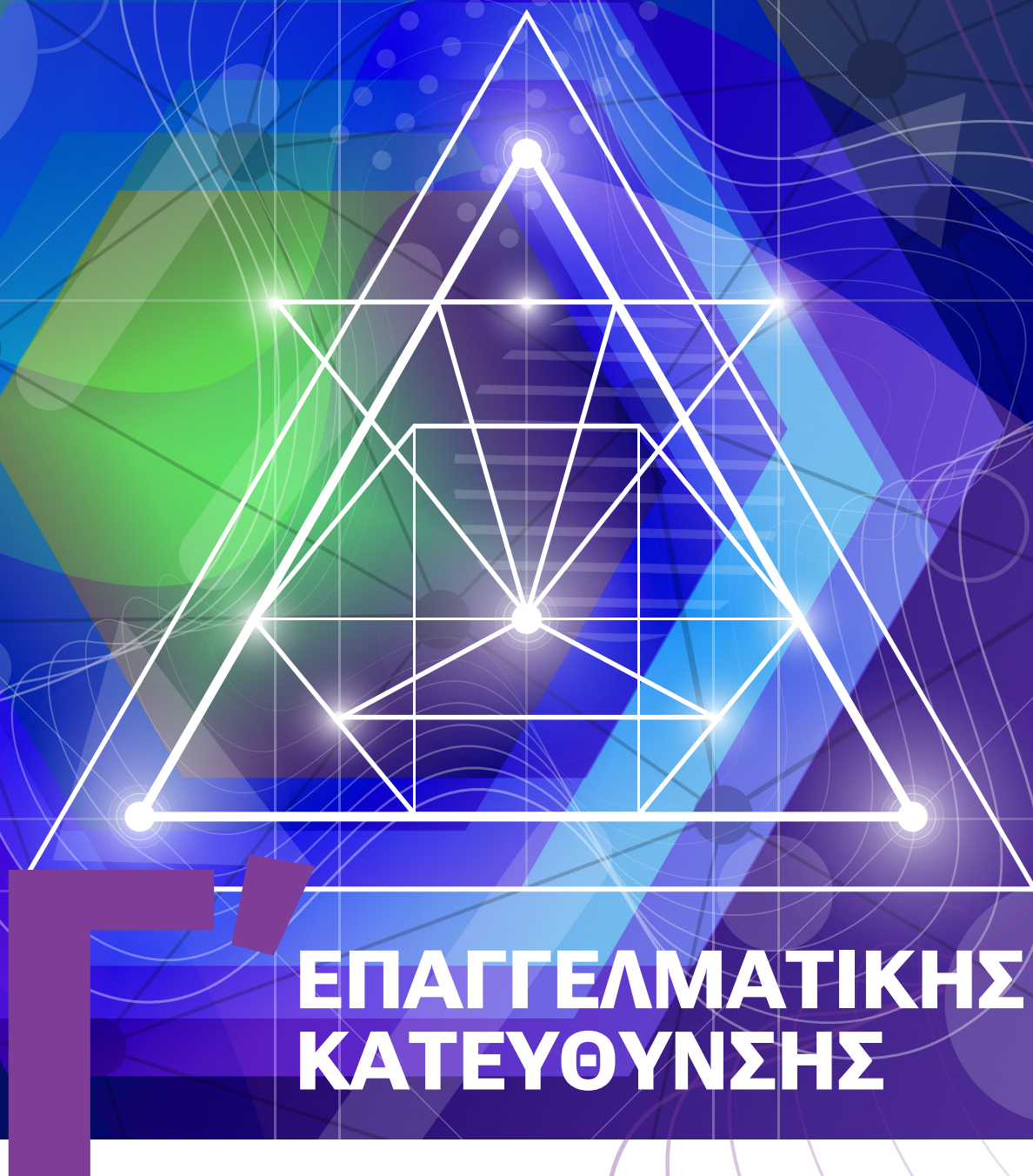


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

**ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ**

**ΜΕΣΗ ΤΕΧΝΙΚΗ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑ: ΠΡΑΚΤΙΚΗ

Συγγραφή:

Δρ Χρυσούλα Χατζηχρίστου, *Επιθεωρήτρια Μαθηματικών Μέσης Εκπαίδευσης*

Δρ Κωνσταντία Χατζηδημητρίου, *Μαθηματικός*

Ιφιγένεια Σωφρονίου, *Μαθηματικός*

Παντελίτσα Αναστασία Χατζηγιάννη, *Μαθηματικός*

Χάρης Θεοδότου, *Μαθηματικός*

Αναθεωρημένη έκδοση

Δρ Χρυσούλα Χατζηχρίστου, *Επιθεωρήτρια Μαθηματικών Μέσης Εκπαίδευσης*

Δρ Χριστίνα Τσαούση, *Σύμβουλος Μαθηματικών*

Αλεξία Πηλακούρη, *Σύμβουλος Μαθηματικών*

Νίκη Μηναιδου, *Σύμβουλος Μαθηματικών*

Εποπτεία:

Δρ Χρυσούλα Χατζηχρίστου, *Επιθεωρήτρια Μαθηματικών Μέσης Εκπαίδευσης*

Γλωσσική επιμέλεια:

Βέρα Ιωάννου, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Σχεδιασμός εξωφύλλου:

Έλενα Ηλιάδου, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης:

Πέτρος Γεωργιάδης, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Έκδοση 2026

Εκτύπωση: COMPASS PRINTING IKE

Σημείωση:

Η παρούσα έκδοση συνιστά αναθεωρημένη, επικαιροποιημένη και εμπλουτισμένη έκδοση των διδακτικών εγχειριδίων της Επαγγελματικής Κατεύθυνσης των Τεχνικών Σχολών (έκδοση 2020), τα οποία αρχικά εκπονήθηκαν, υπό την επιστημονική εποπτεία και καθοδήγηση της Δρος Χρυσούλας Χατζηχρίστου, για τον Κεντρικό Κορμό Μαθητείας.

© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ISBN: 978-9963-0-5467-1

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	ΣΕΛΙΔΑ
1. ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ	
1.1 Εξίσωση β' βαθμού	4
1.2 Τριγωνομετρία	5
1.3 Εμβαδά επίπεδων σχημάτων	7
1.4 Κύκλος	10
2. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ	
2.1 Βασικές έννοιες	13
2.2 Παρουσίαση στατιστικών στοιχείων, δεδομένων	15
2.3 Γραφικές παραστάσεις συχνοτήτων	19
2.4 Μέτρα θέσης (Μέση τιμή, διάμεσος τιμή, επικρατούσα τιμή)	27
2.5 Μέτρα διασποράς	29
3. ΠΟΛΥΕΔΡΑ	
3.1 Πρίσμα	32
3.2 Τετραγωνική Πυραμίδα	38
4. ΣΤΕΡΕΑ ΑΠΟ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ	
4.1 Κύλινδρος	42
4.2 Κώνος	45
4.3 Κόλουρος κώνος	50
4.4 Περιστροφή επίπεδου σχήματος γύρω από άξονα	51
5. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗ	
5.1 Ποσοστά	54
5.2 Προβλήματα με κέρδη, ζημιά, εκπτώσεις, προμήθεια	57
5.3 Κοστολόγηση	58

1. Επανάληψεις

1.1 Εξίσωση β' βαθμού

Υπενθυμίζουμε ότι:

- Εξίσωση δεύτερου βαθμού

Εξίσωση δεύτερου βαθμού ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$$

- Λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$

Αν $\beta^2 - 4a\gamma \geq 0$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$ είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a}$$

όπου $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$ είναι η **διακρίνουσα** της εξίσωσης β' βαθμού $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$.

Δραστηριότητα

Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x^2 - 36 = 0$

(β) $x^2 + 5x = 0$

(γ) $5x^2 - 20 = 0$

(δ) $x^2 - 6x + 9 = 0$

(ε) $x^2 - 3x + 2 = 0$

(στ) $x^2 - 4x - 5 = 0$

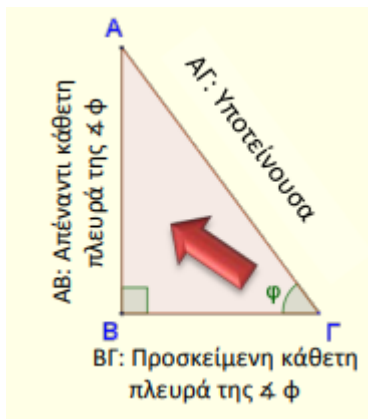
(ζ) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

(η) $4x^2 + 5x - 9 = 0$

1.2 Τριγωνομετρία

Υπενθυμίζουμε ότι:

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} = 90^\circ$) ισχύει:



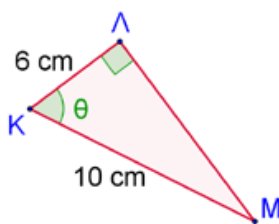
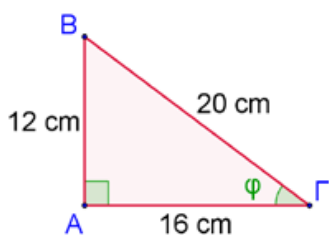
$$\eta\mu\varphi = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

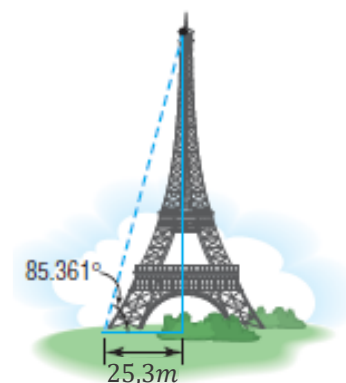
$$\epsilon\varphi\varphi = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}}$$

Δραστηριότητες

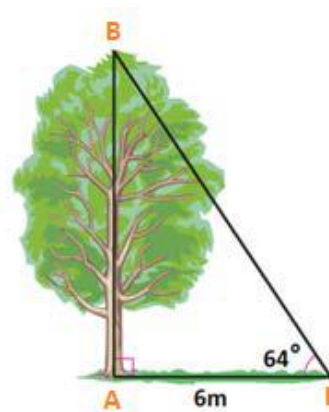
1) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών φ και θ .



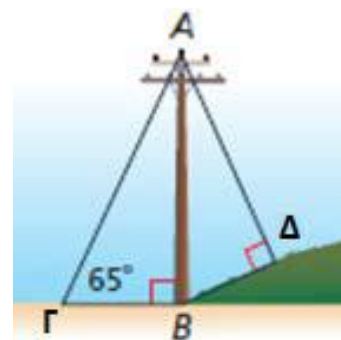
2) Να υπολογίσετε το ύψος του Πύργου του Άιφελ πριν από την τοποθέτηση της τηλεοπτικής κεραίας, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της πιο κάτω εικόνας.



3) Ο κύριος Αβραάμ θέλει να υπολογίσει το ύψος ενός δέντρου στον κήπο του. Τοποθέτησε τον εξάντα σε απόσταση 6 m από τον κορμό του δέντρου και μέτρησε γωνία 64° μεταξύ του οριζώντιου εδάφους και του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τον εξάντα με την κορυφή του δέντρου, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το ύψος του δέντρου και την απόσταση $B\Gamma$. (Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί να υπολογιστούν με προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων).



4) Ένας πάσσαλος της ηλεκτρικής, μήκους 8 m, είναι τοποθετημένος στη βάση ενός λόφου, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Αν η γωνία που σχηματίζει ο λόφος με το έδαφος είναι 20° , να υπολογίσετε το μήκος των δύο συρμάτων με τα οποία στερεώνεται ο πάσσαλος.

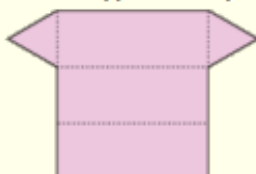


1.3 Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

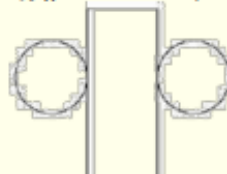
Να αναγνωρίζουμε τα αναπτύγματα στερεών σχημάτων όπως:



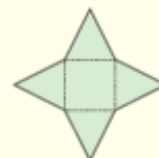
Κύβος



Πρίσμα



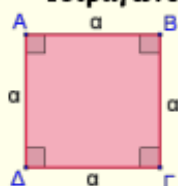
Κύλινδρος



Πυραμίδα

■ Να υπολογίζουμε την περίμετρο και το εμβαδόν επίπεδων σχημάτων όπως:

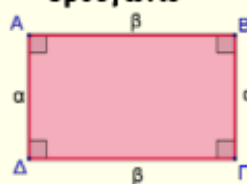
➤ **Τετράγωνο**



$$\Pi_{\text{τετραγώνου}} = 4 \cdot \alpha$$

$$E_{\text{τετραγώνου}} = \alpha^2$$

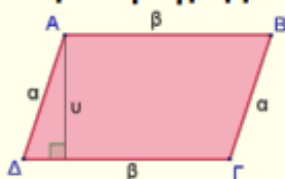
➤ **Ορθογώνιο**



$$\Pi_{\text{ορθογωνίου}} = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$$

$$E_{\text{ορθογωνίου}} = \alpha \cdot \beta$$

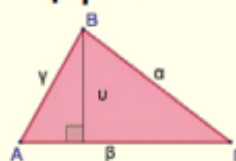
➤ **Παραλληλόγραμμο**



$$\Pi_{\text{παραλληλογράμμου}} = 2\alpha + 2\beta$$

$$E_{\text{παραλληλογράμμου}} = \beta \cdot \upsilon$$

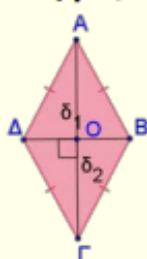
➤ **Τρίγωνο**



$$\Pi_{\text{τριγώνου}} = \alpha + \beta + \gamma$$

$$E_{\text{τριγώνου}} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$$

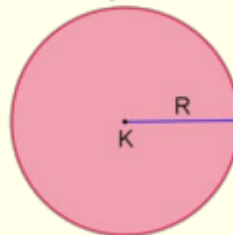
➤ **Ρόμβος**



$$\Pi_{\text{ρόμβου}} = 4 \cdot \alpha$$

$$E_{\text{ρόμβου}} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$

➤ **Κύκλος**



$$\Gamma = 2\pi R$$

$$E = \pi R^2$$

Δραστηριότητες

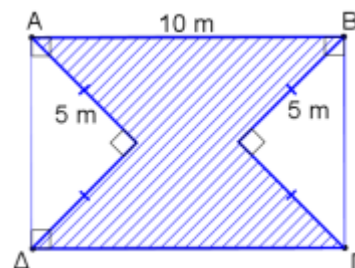
1) Να υπολογίσετε το εμβαδόν τετραγώνου που έχει περίμετρο 28 cm .

2) Ένα γήπεδο ποδοσφαίρου έχει διαστάσεις 120 m και 85 m . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

3) Ένα τετράγωνο είναι ισεμβαδικό με ορθογώνιο που έχει περίμετρο 30 cm και το μήκος του είναι διπλάσιο του πλάτους του. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου.

Δύο επίπεδα σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν λέγονται **ισοδύναμα** ή **ισεμβαδικά**

4) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου στο πιο κάτω σχήμα.



5) Ένα ορθογώνιο είναι ισοδύναμο με ένα τρίγωνο. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 24 cm και το μήκος του 8 cm . Η βάση του τριγώνου είναι τετραπλάσια από το ύψος του. Να υπολογίσετε τη βάση και το ύψος του τριγώνου.

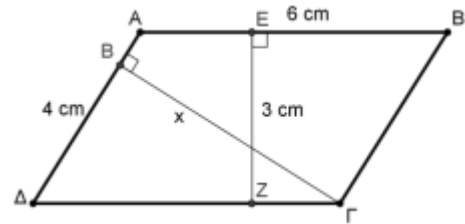
6) Ένα παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν 50 m^2 και η μία βάση του είναι διπλάσια από το αντίστοιχο ύψος. Να υπολογίσετε το ύψος του.

7) Στο διπλανό σχήμα, το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$

(β) το ύψος x που αντιστοιχεί στην πλευρά AD .



8) Αν το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι 40 cm^2 , να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς του που έχει αντίστοιχο ύψος 16 cm .

9) Το εμβαδόν ενός ρόμβου είναι 180 m^2 και η μία διαγώνιος του έχει μήκος 15 m . Να βρείτε την άλλη διαγώνιο του ρόμβου.

10) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ρόμβου που έχει περίμετρο 52 cm και μία διαγώνιο ίση με 24 cm .

11) Η μία διαγώνιος ενός ρόμβου είναι τετραπλάσια από την άλλη. Το εμβαδόν του ρόμβου είναι 128 cm^2 . Να υπολογίσετε το μήκος των διαγωνίων του.

1.4 Κύκλος

Δραστηριότητες

1) Να υπολογίσετε το μήκος της περιφέρειας και το εμβαδόν ενός κύκλου που έχει ακτίνα ίση με 10 cm .

2) Να υπολογίσετε την ακτίνα ενός κύκλου με μήκος περιφέρειας $25,12\text{ cm}$.

3) Το εμβαδόν ενός κύκλου είναι ίσο με $9\pi\text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε το μήκος της περιφέρειάς του.

4) Ένας κύκλος έχει εμβαδόν $144\pi \text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 60° .

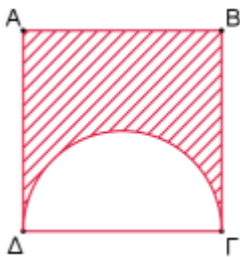
5) Ένας κυκλικός δίσκος έχει εμβαδόν $100\pi \text{ cm}^2$. Να βρείτε:

(α) την ακτίνα και την περίμετρο του κυκλικού δίσκου

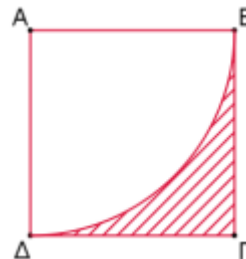
(β) το μήκος του τόξου και το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 60° .

6) Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο των σκιασμένων χωρίων στα πιο κάτω τετράγωνα πλευράς 10 cm . Τα τόξα στα σχήματα είναι τόξα ημικυκλίου ή τεταρτοκυκλίου.

(α)



(β)



2. Στατιστική

Στατιστική είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που ασχολείται με τη συλλογή, την οργάνωση, την ανάλυση, την ερμηνεία και την παρουσίαση δεδομένων.

Βασικός σκοπός της Στατιστικής είναι η εξαγωγή έγκυρης πληροφόρησης και η διατύπωση ασφαλών συμπερασμάτων για έναν ευρύτερο πληθυσμό, αξιοποιώντας τα εμπειρικά δεδομένα που συλλέγονται από την έρευνα.

Αποτελεί, συνεπώς, το εργαλείο που:

- παρέχει μία αντικειμενική βάση για τη λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων.
- εφαρμόζεται σε ένα ευρύ φάσμα τομέων, όπως η οικονομία, η ιατρική, οι φυσικές και οι κοινωνικές επιστήμες.

2.1 Βασικές έννοιες (πληθυσμός, στατιστικά δεδομένα, ποσοτικές και ποιοτικές μεταβλητές)

Διερεύνηση

Η Απογραφή Πληθυσμού του 2011 διενεργήθηκε στην Κύπρο από τη Στατιστική Υπηρεσία του Υπουργείου Οικονομικών. Η προηγούμενη απογραφή έγινε το 2001. Εκτός από την αριθμητική καταγραφή του πληθυσμού, η απογραφή περιλάμβανε και ερωτηματολόγια που σκοπό είχαν τη συλλογή πληροφοριών για τη δημογραφική και κοινωνική κατάσταση της χώρας, την οικονομική και οικογενειακή κατάσταση του πληθυσμού, το επίπεδο μόρφωσης και την ποιότητα ζωής.

Επαρχία	Απογραφή 2001			Απογραφή 2011		
	Αστική	Αγροτική	Σύνολο	Αστική	Αγροτική	Σύνολο
Λευκωσία	200 686	72 956	273 642	238 547	87 209	325 756
Αμμόχωστος		37 738	37 738		46 452	46 452
Λάρνακα	69 187	46 081	115 268	84 511	58 856	143 367
Λεμεσός	154 151	42 402	196 553	179 937	55 119	235 056
Πάφος	45 965	20 399	66 364	62 098	26 168	88 266
Σύνολο	469 989	219 576	689 565	565 093	273 804	838 897

- Να αναγνωρίσετε τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του πληθυσμού που καταγράφονται στον πιο πάνω πίνακα και τις τιμές που παίρνουν.
- Είναι αριθμητικές οι τιμές τους ή υπάρχουν χαρακτηριστικά που παίρνουν μη αριθμητικές τιμές;
- Ποια άλλα χαρακτηριστικά του πληθυσμού μπορεί να εξέτασε η Στατιστική Υπηρεσία για να πετύχει τον πιο πάνω σκοπό;
- Να υποδείξετε δύο χαρακτηριστικά που παίρνουν αριθμητικές τιμές και δύο άλλα που παίρνουν μη αριθμητικές τιμές.

Ορισμοί

- Το σύνολο των στοιχείων για τα οποία γίνεται μία έρευνα στη Στατιστική λέγεται **πληθυσμός**.
- Κάθε στοιχείο του συνόλου λέγεται **άτομο** και οι παρατηρήσεις ή οι μετρήσεις που προκύπτουν λέγονται **στατιστικά δεδομένα** ή **στατιστικά στοιχεία**.
- **Μεταβλητή** ονομάζεται το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο μελετάμε τα στοιχεία ενός συνόλου αναφοράς (πληθυσμός).

Οι μεταβλητές χωρίζονται σε **ποσοτικές** και **ποιοτικές**.

Δραστηριότητα

Να βρείτε τον πληθυσμό, τη μεταβλητή και το είδος της μεταβλητής σε καθεμιά από τις παρακάτω έρευνες:

(α) Έρευνα με θέμα: «Πόσες ώρες γυμνάζονται εβδομαδιαία οι υπάλληλοι ενός ξενοδοχείου;»



(β) Έρευνα με θέμα: «Ποια είναι η οικογενειακή κατάσταση των υπαλλήλων μίας εταιρείας;»

(γ) Έρευνα με θέμα: «Η επίδοση των μαθητών του τμήματος Α1 στα Μαθηματικά το Α' Τετράμηνο».

(δ) Έρευνα με θέμα: «Ο χαρακτηρισμός της διαγωγής των μαθητών ενός σχολείου στο τέλος της σχολικής χρονιάς».

(ε) Έρευνα με θέμα: «Το επάγγελμα των κατοίκων μίας πολυκατοικίας».

2.2 Παρουσίαση στατιστικών στοιχείων – δεδομένων

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι βαθμοί που πήραν 20 φοιτητές σε μία ενδιάμεση εξέταση τετραμήνου:

5, 8, 7, 2, 3, 9, 4, 4, 5, 8, 7, 4, 7, 5, 7, 3, 5, 8, 4, 9

Παρατηρούμε ότι ένας φοιτητής πήρε βαθμό 2, τέσσερις φοιτητές πήραν βαθμό 7 κ.τ.λ.

Το 1 είναι η συχνότητα του βαθμού 2, το 4 είναι η συχνότητα του βαθμού 7 κ.τ.λ.

Συχνότητα(f_i) μίας παρατήρησης ονομάζεται ο φυσικός αριθμός που εκφράζει πόσες φορές εμφανίζεται η παρατήρηση αυτή.

Τις πιο πάνω παρατηρήσεις τις συγκεντρώνουμε σε έναν πίνακα στον οποίο αντιστοιχίζουμε κάθε παρατήρηση με τη συχνότητά της. Ο πίνακας αυτός λέγεται **πίνακας κατανομής συχνοτήτων**.

Το **άθροισμα των συχνοτήτων** (συμβολισμός Σf_i) όλων των τιμών είναι ίσο με τον αριθμό των ατόμων του πληθυσμού.

Βαθμός	Διαλογή	Συχνότητα (f_i)	Αθροιστική Συχνότητα (Σf_i)
2	I	1	1
3	II	2	3
4	IIII	4	7
5	IIII	4	11
7	IIII	4	15
8	III	3	18
9	II	2	20

Δραστηριότητες

1) Σε έρανο που έγινε σε ένα τμήμα ενός σχολείου οι μαθητές έδωσαν τα πιο κάτω ποσά σε σεντ:

10, 20, 15, 12, 10, 12, 15, 16, 18, 10, 10, 15, 12, 10, 15, 16, 18, 12, 10, 15

(α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων.

(β) Να βρείτε πόσοι μαθητές έδωσαν λιγότερα από 15 σεντ.

2) Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τις ημερήσιες θερμοκρασίες του Απρίλη στη Λευκωσία.

Θερμοκρασία	Συχνότητα (f_i)	Αθροιστική Συχνότητα (Σf_i)
20	8	
21	5	
22	4	
23	6	
24	3	
25	4	

Να συμπληρώσετε τη στήλη της αθροιστικής συχνότητας και να βρείτε:

(α) Για πόσες μέρες μετρήθηκε η θερμοκρασία;

(β) Πόσες μέρες η θερμοκρασία ήταν μικρότερη από 22°C;

(γ) Πόσες μέρες η θερμοκρασία ήταν μεγαλύτερη από 23°C;

(δ) Ποιο ποσοστό (%) των ημερών είχε θερμοκρασία 21°C;

3) Μία βιβλιοθήκη έχει 1000 βιβλία. Από αυτά 320 είναι λογοτεχνικά, 150 εγκυκλοπαιδικά, 80 ιστορικά και τα υπόλοιπα επιστημονικά. Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων.

Ομαδοποίηση παρατηρήσεων

Σε περιπτώσεις κατά τις οποίες το πλήθος των τιμών των παρατηρήσεων είναι αρκετά μεγάλο ή οι παρατηρήσεις έχουν μεγάλο εύρος, προκύπτει η ανάγκη να τις ομαδοποιήσουμε. Δημιουργούμε διαστήματα με κλειστό το αριστερό άκρο και ανοικτό το δεξί άκρο, τα οποία ονομάζονται **κλάσεις ή ομάδες**. Το αριστερό άκρο κάθε επόμενου διαστήματος συμπίπτει με το δεξί άκρο του προηγούμενου διαστήματος.

Το **πλάτος** κάθε κλάσης ορίζεται ως η διαφορά του αριστερού άκρου του διαστήματος από το δεξί άκρο του διαστήματος. Συνήθως χρησιμοποιούμε κλάσεις ίσου πλάτους.

Παράδειγμα

Η συγκέντρωση όζοντος (O_3), σε $\mu\text{gr}/\text{m}^3$, στην ατμόσφαιρα στον Κυκλοφοριακό Σταθμό Λευκωσίας, κατά τον μήνα Φεβρουάριο του 2025 ήταν:

86	102	87	90	53	54	50
62	58	49	46	46	76	73
82	88	56	83	77	52	64
54	75	77	82	68	77	75

(α) Να ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις σε ομάδες με πλάτος 10 και να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων (συχνότητα, αθροιστική συχνότητα).

(β) Όταν η συγκέντρωση του όζοντος (O_3), σε $\mu\text{gr}/\text{m}^3$, στην ατμόσφαιρα είναι ίση ή μεγαλύτερη από $80 \mu\text{gr}/\text{m}^3$ εκδίδεται κίτρινη προειδοποίηση. Πόσες ημέρες τον Φεβρουάριο του 2025 εκδόθηκε κίτρινη προειδοποίηση;

(γ) Να βρείτε πόσες ημέρες τον Φεβρουάριο του 2025 η συγκέντρωση του όζοντος (O_3) ήταν μικρότερη από $70 \mu\text{gr}/\text{m}^3$.

Λύση

(α) Παρατηρούμε ότι η ελάχιστη παρατήρηση είναι $46 \mu\text{gr}/\text{m}^3$ ενώ η μέγιστη είναι $102 \mu\text{gr}/\text{m}^3$. Οι ομάδες που θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

$$[40, 50), [50, 60), [60, 70), \dots, [100, 110)$$

Κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα κατανομής συχνοτήτων:

Συγκέντρωση όζοντος (O_3)	Διαλογή	Συχνότητα (f_i)	Αθροιστική συχνότητα (Σf_i)
[40, 50)		3	3
[50, 60)		7	10
[60, 70)		3	13
[70, 80)		7	20
[80, 90)		6	26
[90, 100)		1	27
[100, 110)		1	28

(β) Παρατηρούμε ότι η συγκέντρωση όζοντος στην ατμόσφαιρα είναι ίση ή μεγαλύτερη από $80 \mu\text{gr}/\text{m}^3$, στα τρία τελευταία διαστήματα. Άρα, εκδόθηκε κίτρινη προειδοποίηση για 8 μέρες.

(γ) Παρατηρούμε ότι η συγκέντρωση όζοντος στην ατμόσφαιρα είναι μικρότερη από $70 \mu\text{gr}/\text{m}^3$ στα τρία πρώτα διαστήματα. Άρα, έχουμε $3 + 7 + 3 = 13$ ημέρες.

Δραστηριότητα

Σε μία εξέταση εκτίμησης του δείκτη ευφυΐας (IQ) σε μία ομάδα ατόμων προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Μέτρηση IQ	Συχνότητα (f_i)	Αθροιστική συχνότητα (Σf_i)
[50, 70)	24	
[70, 90)	228	
[90, 110)	490	
[110, 130)	232	
[130, 150)	26	

(α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα και να βρείτε τον συνολικό αριθμό των συμμετεχόντων.

(β) Να βρείτε τον αριθμό των συμμετεχόντων που είχαν δείκτη ευφυΐας (IQ) ίσο ή μεγαλύτερο από 110.

(γ) Να βρείτε τον αριθμό των συμμετεχόντων που είχαν δείκτη ευφυΐας (IQ) μικρότερο από 90.

Δραστηριότητες

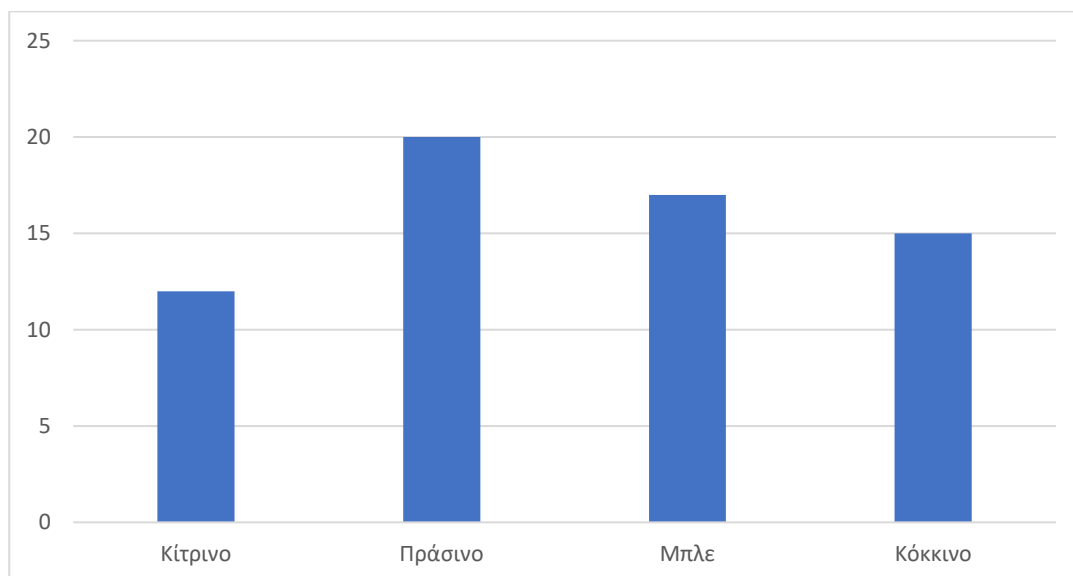
1) Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τις παραγγελίες που δέχτηκε ένα εστιατόριο για κάθε ημέρα της εβδομάδας.

Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο	Κυριακή
40	60	90	120	200	220	180

(α) Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

(β) Να υπολογίσετε πόσες παραγγελίες δέχτηκε συνολικά το Σαββατοκύριακο.

2) Το πιο κάτω ραβδόγραμμα δείχνει τις προτιμήσεις των μαθητών της Α' δημοτικού σε χρώματα.



Να βρείτε:

(α) πόσοι μαθητές προτιμούν το μπλε χρώμα,

(β) πόσοι είναι όλοι οι μαθητές.

(β) Κυκλικό διάγραμμα

Στο κυκλικό διάγραμμα θεωρούμε ότι ολόκληρος ο κύκλος αντιπροσωπεύει το σύνολο του πληθυσμού που μελετούμε, ο οποίος χωρίζεται σε κατηγορίες. Παριστάνουμε με κυκλικούς τομείς τις σχετικές συχνότητες των κατηγοριών.

Για κάθε κατηγορία, η γωνία του κυκλικού τομέα υπολογίζεται ως εξής:

$$\text{Γωνία κυκλικού τομέα} = \frac{\text{Συχνότητα}}{\text{Αθροιστική Συχνότητα}} \cdot 360^\circ$$

Δραστηριότητες

1) Στο πιο κάτω κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζονται τα μηνιαία έξοδα του Χαράλαμπου. Το συνολικό ποσό των μηνιαίων εξόδων του είναι €1200.

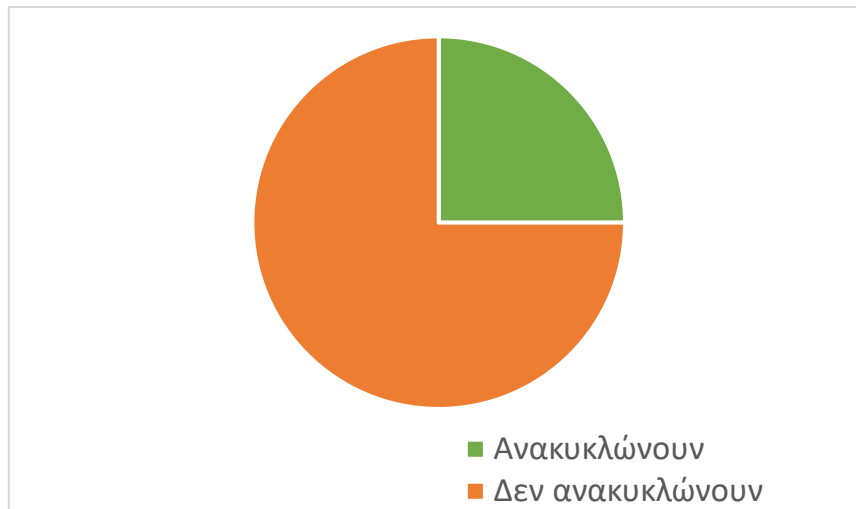


(α) Πόσα χρήματα ξοδεύει ο Χαράλαμπος για φαγητό τον μήνα;

(β) Σε ποιο ποσοστό (%) των συνολικών εξόδων αντιστοιχούν τα χρήματα που ξοδεύει ο Χαράλαμπος για φαγητό;

(γ) Ποιο είναι το μέτρο της γωνίας που αντιστοιχεί στον τομέα «Βιβλία», αν γνωρίζουμε ότι το μηνιαίο ποσό που ξοδεύει σε βιβλία ο Χαράλαμπος είναι €100;

- 2) Το πιο κάτω κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τα αποτελέσματα μίας έρευνας για τα νοικοκυριά ενός χωριού που ανακυκλώνουν.



Τι μέρος των νοικοκυριών ανακυκλώνουν και τι μέρος των νοικοκυριών δεν ανακυκλώνουν; Οι απαντήσεις να δοθούν σε μορφή ποσοστού.

- 3) Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει το μεταφορικό μέσο που χρησιμοποιούν οι 720 μαθητές ενός σχολείου, για να μεταβούν στο σχολείο τους. Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων.

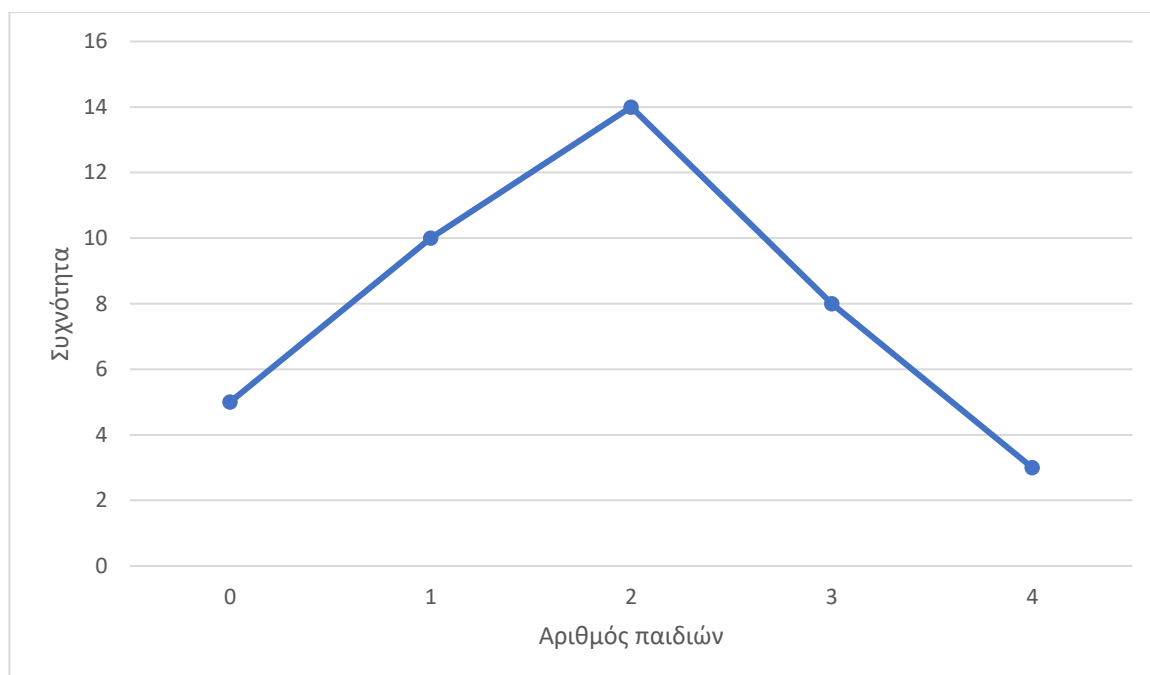
Ποδήλατο	Λεωφορείο	Πεζοί	Αυτοκίνητο
120	240	160	200

(γ) Διάγραμμα συχνοτήτων – Πολύγωνο συχνοτήτων – Πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων

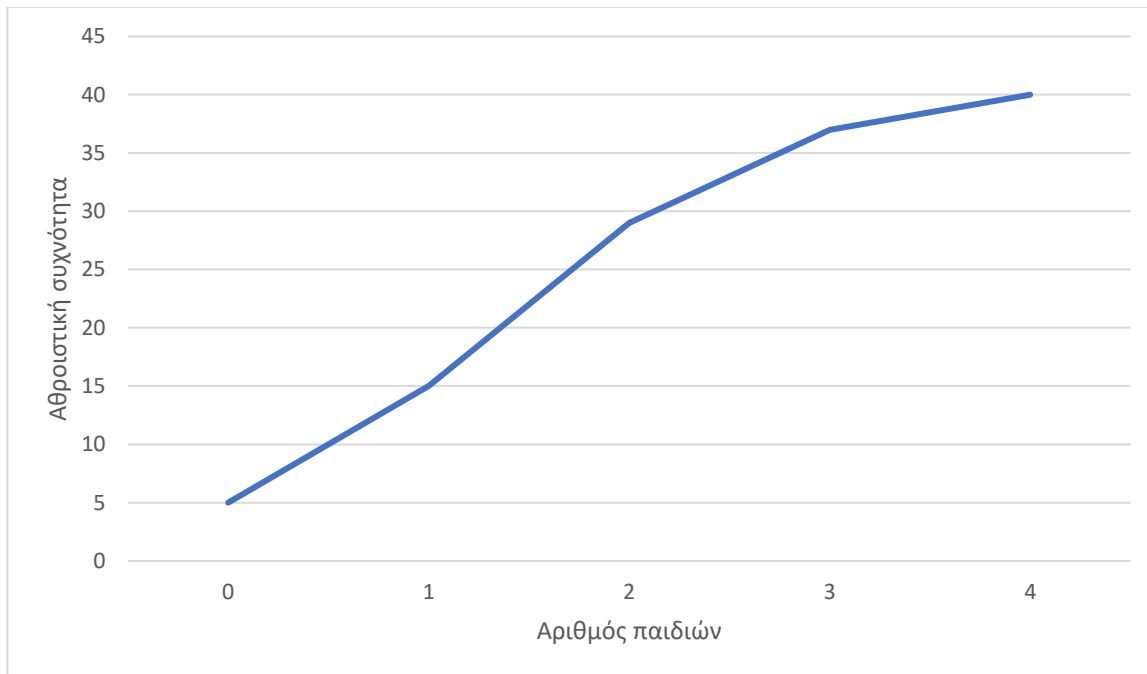
Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των παιδιών που έχει καθεμιά από τις οικογένειες μίας πολυκατοικίας.

Αριθμός παιδιών	Πλήθος οικογενειών (f_i)	Αθροιστική Συχνότητα (Σf_i)
0	5	5
1	10	15
2	14	29
3	8	37
4	3	40

Κατασκευάζουμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, στο οποίο ο οριζόντιος άξονας είναι ο άξονας της μεταβλητής (αριθμός παιδιών) και ο κατακόρυφος ο άξονας της συχνότητας (πλήθος οικογενειών). Τοποθετούμε τα σημεία που αντιστοιχούν στα ζεύγη (τιμή, συχνότητα). Αν φέρουμε κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα από τον οριζόντιο άξονα μέχρι τα σημεία αυτά, προκύπτει το **διάγραμμα συχνοτήτων**. Αν ενώσουμε τα σημεία μεταξύ τους με τεθλασμένη γραμμή, προκύπτει το **πολύγωνο συχνοτήτων**.



Κατασκευάζουμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, στο οποίο ο οριζόντιος άξονας είναι ο άξονας της μεταβλητής (αριθμός παιδιών) και ο κατακόρυφος ο άξονας της αθροιστικής συχνότητας. Τοποθετούμε τα σημεία που αντιστοιχούν στα ζεύγη (τιμή, αθροιστική συχνότητα). Αν ενώσουμε τα σημεία με τεθλασμένη γραμμή, προκύπτει το **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων**.



Ομαδοποιημένες παρατηρήσεις

Στην περίπτωση που έχουμε ομαδοποιημένες παρατηρήσεις:

- αντιστοιχίζουμε στο μέσο κάθε ομάδας την τιμή της συχνότητάς της και ενώνουμε τα σημεία για να ορίσουμε το **πολύγωνο συχνοτήτων**.
- αντιστοιχίζουμε στο δεξί άκρο κάθε ομάδας την τιμή της αθροιστικής συχνότητάς της για να ορίσουμε το **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων**.

Για να κατασκευάσουμε ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων κατασκευάζουμε ορθογώνια με βάση τις ομάδες και ύψος ίσο με την αντίστοιχη τιμή της αθροιστικής συχνότητας για κάθε ομάδα.

Δραστηριότητες

1) Οι εγγραφές των παιδιών σε ένα σχολείο εμφανίζονται στο πιο κάτω πολύγωνο συχνοτήτων.



(α) Σε ποια χρονιά το σχολείο είχε τις λιγότερες εγγραφές;

(β) Σε ποια χρονιά το σχολείο είχε τις περισσότερες εγγραφές;

(γ) Μεταξύ ποιων χρονιών φαίνεται να έχουμε την πιο μεγάλη αύξηση στον αριθμό των εγγραφών παιδιών;

2) Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τα χρήματα σε σεντς που ξοδεύουν καθημερινώς οι μαθητές ενός τμήματος στο σχολείο.

Χρήματα	Αριθμός μαθητών
0	4
20	14
40	8
60	3
80	1

Να κατασκευάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων.

3) Σε 24 πόλεις μετρήθηκαν τα επίπεδα διοξειδίου του θείου σε $\mu\text{gr}/\text{m}^3$. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

Επίπεδα διοξειδίου του θείου	Αριθμός πόλεων (f_i)	Αθροιστική Συχνότητα (Σf_i)
[10, 15)	6	
[15, 20)	4	
[20, 25)	3	
[25, 30)	5	
[30, 35)	2	
[35, 40)	1	
[40, 45)	2	
[45, 50)	1	

- (α) Να συμπληρώσετε τις τιμές στον πίνακα.
 (β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων.
 (γ) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.
 (δ) Από το σχήμα να βρείτε σε πόσες πόλεις η συγκέντρωση του διοξειδίου του θείου ήταν ίση ή μικρότερη από $28 \mu\text{gr}/\text{m}^3$.

2.4 Μέτρα θέσης (Μέση τιμή, διάμεσος τιμή, επικρατούσα τιμή)

• Μέση τιμή ή μέσος όρος ενός συνόλου παρατηρήσεων

Μέση τιμή ($\bar{x}$) ενός συνόλου παρατηρήσεων λέγεται το πηλίκο του αθροίσματος των τιμών των παρατηρήσεων διά του πλήθους των παρατηρήσεων.

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{\text{Άθροισμα τιμών παρατηρήσεων}}{\text{Πλήθος των παρατηρήσεων}}$$

Δηλαδή, αν $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ είναι οι n παρατηρήσεις μίας μεταβλητής X , τότε η μέση τιμή τους $\bar{x}$, δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

• Διάμεσος τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων

Διάμεσος τιμή (x_d) ενός συνόλου παρατηρήσεων διατεταγμένων σε αύξουσα σειρά είναι:

- Η μεσαία τιμή-παρατήρηση για περιττό αριθμό παρατηρήσεων
- Η μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων για άρτιο αριθμό παρατηρήσεων

• Επικρατούσα τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων

Επικρατούσα τιμή (x_e) ενός συνόλου παρατηρήσεων είναι η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα (εμφανίζεται τις περισσότερες φορές).

Δραστηριότητες

1) Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τις πωλήσεις ψωμιών ενός φούρνου από τη Δευτέρα μέχρι και το Σάββατο της περασμένης εβδομάδας.

ΗΜΕΡΑ	ΠΩΛΗΣΕΙΣ ΨΩΜΙΩΝ
Δευτέρα	112
Τρίτη	87
Τετάρτη	121
Πέμπτη	70
Παρασκευή	150
Σάββατο	198



(α) Ποια είναι η μέση τιμή των πωλήσεων των ψωμιών από τη Δευτέρα μέχρι το Σάββατο;

(β) Πώς θα μεταβληθεί η μέση τιμή αν οι πωλήσεις της Κυριακής ήταν 50 ψωμιά;

2) Τα ύψη (σε *cm*) επτά καλαθοσφαιριστών είναι: 210, 185, 191, 205, 201, 198, 215

Να υπολογίσετε:

(α) τη διάμεσο των υψών τους.

(β) τη μέση τιμή του ύψους τους.



3) Ο Κώστας καταγράφει τον αριθμό των πλαστικών σακουλιών που παίρνει από την υπεραγορά κατά το εβδομαδιαίο ψώνισμά του. Τα στοιχεία από το ψώνισμα 10 συνεχών εβδομάδων είναι τα πιο κάτω.

9, 8, 5, 9, 12, 8, 7, 6, 5, 9

(α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή των δεδομένων.

(β) Να εξηγήσετε γιατί η μέση τιμή δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τα δεδομένα στην έρευνα του Κώστα.

(γ) Ποια από τις τρεις τιμές θα ήταν περισσότερο χρήσιμη για μία ομάδα περιβαλλοντιστών που θεωρεί ότι οι υπεραγορές δίνουν πάρα πολλές πλαστικές σακούλες στους πελάτες τους;

(δ) Ποια τιμή θα χρησιμοποιούσε ένας καταναλωτής που πιστεύει ότι οι υπεραγορές δεν του δίνουν αρκετές σακούλες για τα ψώνια του;

2.5 Μέτρα διασποράς (διασπορά, τυπική απόκλιση)

Ορισμοί

- Η **διακύμανση** ή **διασπορά** ν παρατηρήσεων $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\nu$ ορίζεται ως ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή. Συμβολίζεται με s^2 και ισχύει:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_\nu - \bar{x})^2}{\nu}$$

- Η **τυπική απόκλιση** είναι η τετραγωνική ρίζα της διασποράς και συμβολίζεται με s . Η τυπική απόκλιση δίνεται από τον τύπο:

$$s = \sqrt{s^2} \quad \text{ή} \quad s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_\nu - \bar{x})^2}{\nu}}$$

Σχόλια

- Η τυπική απόκλιση πλεονεκτεί έναντι της διασποράς, γιατί εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης με την οποία εκφράζονται και οι παρατηρήσεις.
- Μία μικρή τυπική απόκλιση δηλώνει ότι οι τιμές μίας μεταβλητής είναι κοντά στη μέση τιμή, ενώ μία μεγάλη τυπική απόκλιση δηλώνει ότι οι τιμές μίας μεταβλητής είναι απομακρυσμένες από τη μέση τιμή.

Δραστηριότητες

1) Να διακρίνετε ποια από τα ακόλουθα είναι μέτρα θέσης ή μέτρα διασποράς:

- | | | |
|----------------------|---------------------|---------------|
| (α) Διάμεσος | (β) Διακύμανση | (γ) Μέση τιμή |
| (δ) Επικρατούσα τιμή | (ε) Τυπική απόκλιση | |

2) Τα χρήματα σε ευρώ που ξόδεψαν πέντε μαθητές ενός τμήματος Α' Λυκείου την προηγούμενη βδομάδα στην καντίνα του σχολείου ήταν:

2, 3, 4, 7, 9

Να υπολογίσετε:

- (α) τη διάμεσο,
- (β) τη μέση τιμή,
- (γ) την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

3) Σε μία πολυκατοικία διαμένουν δέκα οικογένειες. Ο αριθμός των παιδιών ανά οικογένεια είναι:

5, 2, 2, 0, 3, 2, 1, 0, 1, 4

Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των πιο πάνω παρατηρήσεων.

4) Να βρείτε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση των δεδομένων του πίνακα.

Αριθμός παιδιών (x_i)	Αριθμός οικογενειών (f_i)
0	5
1	10
2	7
3	4
4	3
5	2
6	1

5) Η βαθμολογία 16 μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν:

8, 15, 13, 20, 9, 13, 17, 19, 20, 11, 10, 10, 15, 13, 14, 17

(α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο τιμή και την επικρατούσα τιμή.

(β) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση.

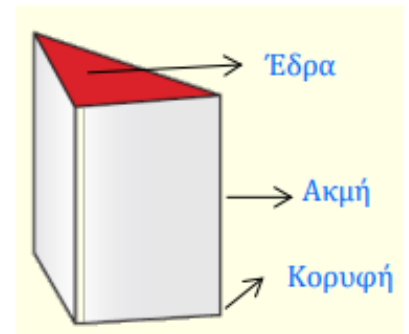
(γ) Αν κατά τη λύση της άσκησης ένα παιδί στη θέση των βαθμών 17 και 17 έγραψε τους βαθμούς 1 και 1, να εξετάσετε πώς θα μεταβληθούν οι απαντήσεις του στα πιο πάνω ερωτήματα.

3. Πολύεδρα

Ορισμοί:

Πολύεδρο είναι ένα στερεό που περικλείεται από επίπεδες επιφάνειες με κάθε επιφάνεια να ορίζεται από ευθύγραμμα τμήματα, δηλαδή πολύγωνα.

Καθεμία από τις επίπεδες επιφάνειες λέγεται **έδρα** και καθένα από τα ευθύγραμμα τμήματα των πολυγώνων λέγεται **ακμή**. Το σημείο τομής δύο ακμών λέγεται **κορυφή**.

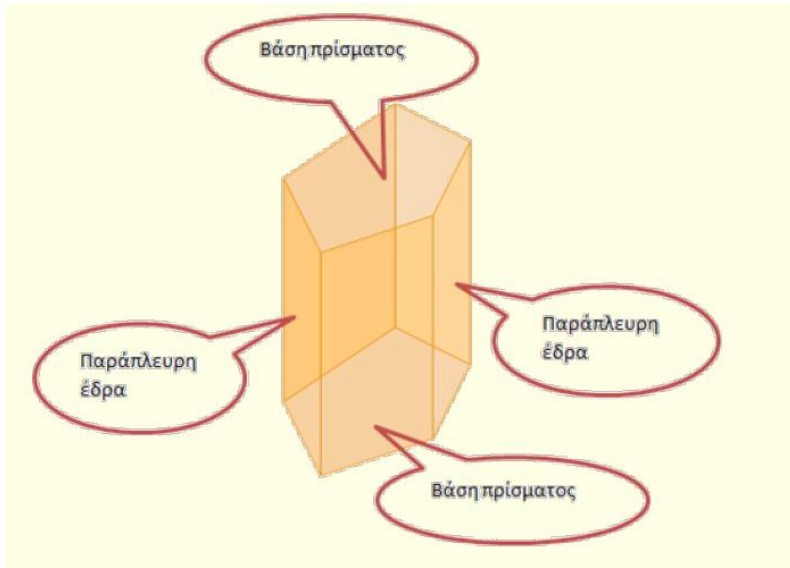


3.1 Πρίσμα (Στοιχεία, Υπολογισμός Επιφάνειας και Όγκου)

Πρίσμα είναι το στερεό του οποίου:

- οι δύο έδρες του είναι παράλληλα και ίσα πολύγωνα, και ονομάζονται **βάσεις** του πρίσματος
- οι άλλες έδρες είναι παραλληλόγραμμα και ονομάζονται **παράπλευρες έδρες**.

Ορθό πρίσμα είναι το πρίσμα που οι παράπλευρες ακμές του είναι κάθετες στα επίπεδα των βάσεων.



Οι παράπλευρες έδρες του ορθού πρίσματος είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

Το **εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας (E_{π})** ενός πρίσματος είναι το άθροισμα των εμβαδών των παράπλευρων εδρών του. Είναι ίσο με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης του (Π_{β}) επί το ύψος (v) του πρίσματος. Δηλαδή:

$$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot v$$

- Το **ολικό εμβαδόν** ενός πρίσματος ($E_{ολ}$) είναι το άθροισμα του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας και των εμβαδών των δύο βάσεων του (E_{β}). Δηλαδή:

$$E_{ολ} = E_{\pi} + 2E_{\beta}$$

- Ο **όγκος** (V) ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του (E_{β}) επί το ύψος ($υ$), δηλαδή:

$$V = E_{\beta} \cdot υ$$

Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ονομάζεται το πρίσμα του οποίου οι βάσεις είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

- **Διαστάσεις** (α, β, γ) ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου ονομάζονται τα μήκη των τριών ακμών που έχουν κοινό το ένα άκρο τους.
- **Διαγώνιος** (δ) του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο κορυφές που ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδά του.

Το τετράγωνο της διαγωνίου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των τριών διαστάσεων του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, δηλαδή

$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

- Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι:

$$E_{ολ} = 2(\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma)$$

- Ο όγκος ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι:

$$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$$

Κύβος

Κύβος είναι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του οποίου οι τρεις διαστάσεις είναι ίσες (α). Οι έδρες του είναι όλες τετράγωνα με πλευρά α .

- Η διαγώνιος δ ισούται με $\delta = \alpha\sqrt{3}$
- Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κύβου είναι:

$$E_{ολ} = 6\alpha^2$$

- Ο όγκος ενός κύβου είναι:

$$V = \alpha^3$$

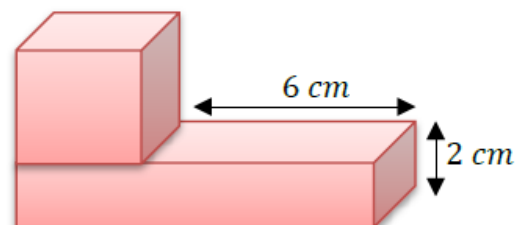
Δραστηριότητες

1) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο ορθού πρίσματος του οποίου το ύψος είναι 8 cm και οι βάσεις του είναι ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 3 cm και 4 cm , αντίστοιχα.

2) Ένα ενυδρείο έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Οι εσωτερικές διαστάσεις της βάσης του είναι 85 cm και 60 cm και το ύψος του είναι 45 cm . Να υπολογίσετε πόσα λίτρα νερό θα χρειαστούν, για να γεμίσει το ενυδρείο κατά τα $\frac{8}{9}$ του.



3) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα, αν ο όγκος του κύβου είναι 64 cm^3 .

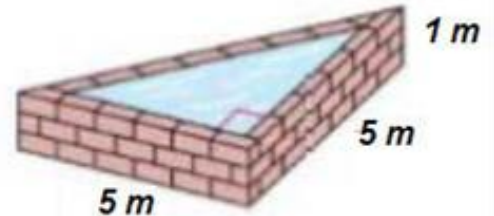


4) Το ύψος ενός τετραγωνικού πρίσματος είναι 15 cm και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του 540 cm^2 . Να υπολογίσετε τον όγκο του πρίσματος.

5) Μία δεξαμενή καυσίμων έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 2 m , 5 m και 6 m . Πόσες ώρες θα χρειαστούν για να γεμίσει, όταν η παροχή που διοχετεύει τα καύσιμα στη δεξαμενή έχει ροή 4 m^3 την ώρα;

6) Σε ένα οικόπεδο θα γίνει εκσκαφή σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 18 m , 10 m και $2,5\text{ m}$. Η μεταφορά των χωμάτων θα γίνει με φορτηγά χωρητικότητας 15 m^3 . Αν η εταιρεία χρεώνει €4,50 για το κάθε κυβικό μέτρο εκσκαφής, ενώ κάθε διαδρομή του φορτηγού στοιχίζει €48, να υπολογίσετε πόσο θα στοιχίσει συνολικά η εκσκαφή και η μεταφορά των χωμάτων.

7) Η εσωτερική επιφάνεια της λίμνης, που φαίνεται στην πιο κάτω εικόνα, πρέπει να στεγανοποιηθεί, ώστε να μην υπάρχει διαρροή νερού. Να υπολογίσετε το κόστος στεγανοποίησής της, αν γνωρίζετε ότι το υλικό πωλείται προς €30 ανά συσκευασία (κάθε συσκευασία καλύπτει 12 m^2) και ο τεχνίτης χρεώνει για την εφαρμογή €1,20 το τετραγωνικό μέτρο. (Να θεωρήσετε ότι οι διαστάσεις που φαίνονται στην εικόνα είναι οι εσωτερικές διαστάσεις της λίμνης).



8) Μία εταιρεία θέλει να κατασκευάσει ένα κουτί από φύλλο αλουμινίου. Το κουτί πρέπει να είναι σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, με βάση τετράγωνο και όγκο 16 dm^3 .

(α) Πόσα διαφορετικά κουτιά μπορεί να κατασκευάσει και ποιες είναι οι διαστάσεις τους, αν αυτές είναι φυσικοί αριθμοί;

(β) Ποιο από τα κουτιά έχει το μικρότερο κόστος ως προς την ποσότητα αλουμινίου που απαιτείται για την κατασκευή του;

9) Ένα εργοστάσιο που κατασκευάζει κεριά αγοράζει την πρώτη ύλη σε ράβδους από κερί που έχουν σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις $60\text{ cm}, 16\text{ cm}, 10\text{ cm}$. Θα χρησιμοποιήσει 10 ράβδους από κερί για να κατασκευάσει διακοσμητικά κεριά που θα έχουν σχήμα κύβου με ακμή 2 cm .

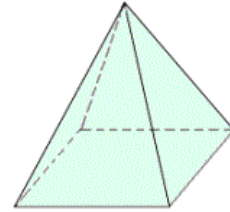
(α) Πόσα διακοσμητικά κεριά θα κατασκευάσει, αν δεν έχει απώλεια πρώτης ύλης;

(β) Αν η κάθε ράβδος στοιχίζει €50, πληρώνει €500 για εργατικά και €200 για έξοδα συσκευασίας, πόσο τοις εκατό (%) θα κερδίσει, αν πωλεί τα διακοσμητικά κεριά προς 15 σεντ το ένα;

3.2 Πυραμίδα (Ορισμός - Στοιχεία τετραγωνικής πυραμίδας - Υπολογισμός Επιφάνειας και Όγκου)

Πυραμίδα ονομάζεται το στερεό του οποίου μία έδρα είναι πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή.

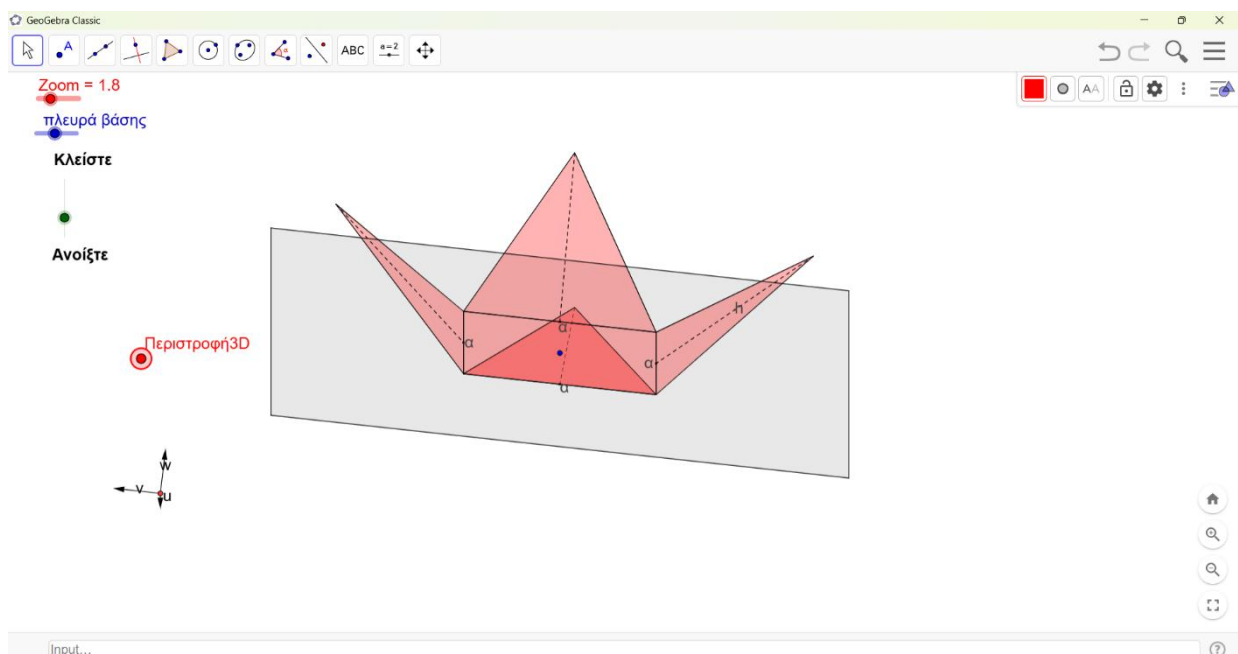
- Το πολύγωνο ονομάζεται **βάση** της πυραμίδας.
- Η κοινή κορυφή των τριγώνων ονομάζεται **κορυφή** της πυραμίδας.
- Οι τριγωνικές έδρες της πυραμίδας, που έχουν κοινή κορυφή, ονομάζονται **παράπλευρες έδρες** της πυραμίδας.
- Το ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από την κορυφή της πυραμίδας και είναι κάθετο στη βάση της ονομάζεται **ύψος (v)** της πυραμίδας.



Κανονική τετραγωνική πυραμίδα ονομάζεται το στερεό του οποίου μία έδρα (**βάση** της πυραμίδας) είναι τετράγωνο και οι άλλες έδρες είναι ισοσκελή τρίγωνα ίσα μεταξύ τους με κοινή κορυφή (**παράπλευρες έδρες**). Το ύψος μίας παράπλευρης έδρας της πυραμίδας ονομάζεται **παράπλευρο ύψος** ή **απόστημα (h)** της πυραμίδας.

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο «[C_En8_Pyramida.ggb](#)» για να μελετήσετε την πυραμίδα και το ανάπτυγμά της.



Να παρατηρήσετε τι σχήμα έχουν οι επιφάνειες μίας τετραγωνικής πυραμίδας.

Να βρείτε τον τύπο που υπολογίζει το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας αλλά και της ολικής της επιφάνειας.

- Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι:

$$E_{\pi} = \frac{\Pi_{\beta} \cdot h}{2}$$

- Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας είναι:

$$E_{ολ} = E_{\pi} + E_{\beta}$$

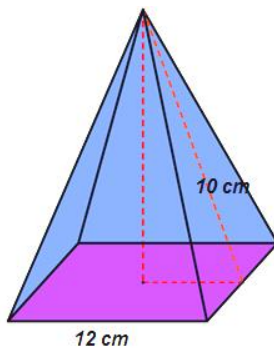
- Ο όγκος της πυραμίδας είναι:

$$V = \frac{E_{\beta} \cdot v}{3}$$

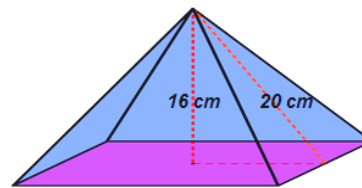
Δραστηριότητες

1) Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας των πιο κάτω τετραγωνικών πυραμίδων.

(α)

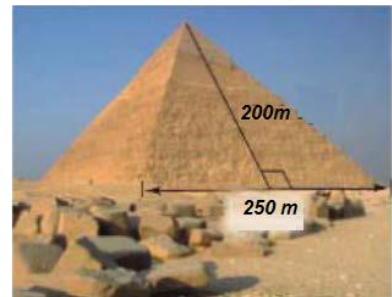


(β)

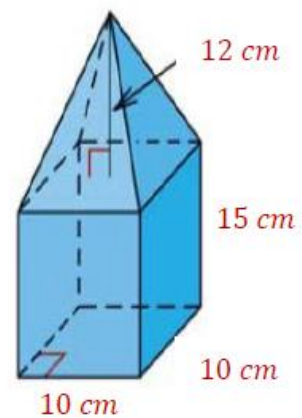


2) Μία κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης 64 cm^2 και παράπλευρο ύψος 12 cm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.

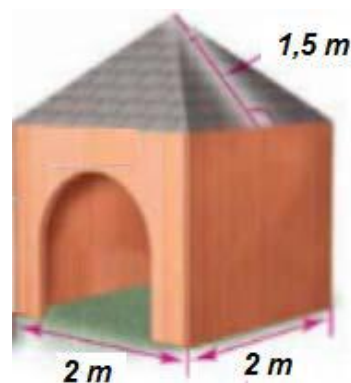
3) Μία τετραγωνική πυραμίδα στην Αίγυπτο έχει διαστάσεις όπως φαίνονται στη διπλανή φωτογραφία. Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.



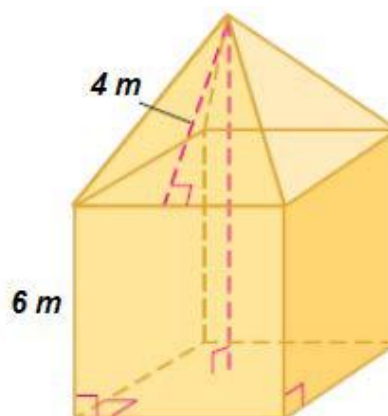
4) Το στερεό που φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι μία ξύλινη κατασκευή. Να υπολογίσετε τη συνολική επιφάνεια του στερεού.



5) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα σπιτάκι σκύλου, του οποίου η στέγη έχει σχήμα τετραγωνικής πυραμίδας. Για να μη στάζει η στέγη, πρέπει να στεγανοποιηθεί με υλικό που κοστίζει €2,20 ανά m^2 . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του υλικού που χρειάζεται για να καλυφθεί η στέγη και το κόστος αγοράς του.



6) Η ξύλινη κατασκευή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα αποτελείται από έναν κύβο και μία τετραγωνική πυραμίδα. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της εξωτερικής επιφάνειας της κατασκευής, αν ο κύβος έχει όγκο $216 m^3$.



4. Στερεά από περιστροφή

Ορισμός στερεών από περιστροφή

Η Στερεομετρία είναι ο κλάδος της Γεωμετρίας, ο οποίος μελετά τις ιδιότητες σχημάτων που εμφανίζονται στον γεωμετρικό χώρο. Ο γεωμετρικός χώρος έχει τρεις διαστάσεις, μήκος, πλάτος και ύψος. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε το σημείο, την ευθεία, το επίπεδο στον γεωμετρικό χώρο και σχήματα που παράγονται από την πλήρη περιστροφή επίπεδου σχήματος γύρω από έναν σταθερό άξονα. Η Γεωμετρία στον χώρο βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στην Αρχιτεκτονική, στη Βιολογία, στην Ιατρική, στη Χημεία και σε άλλες επιστήμες.

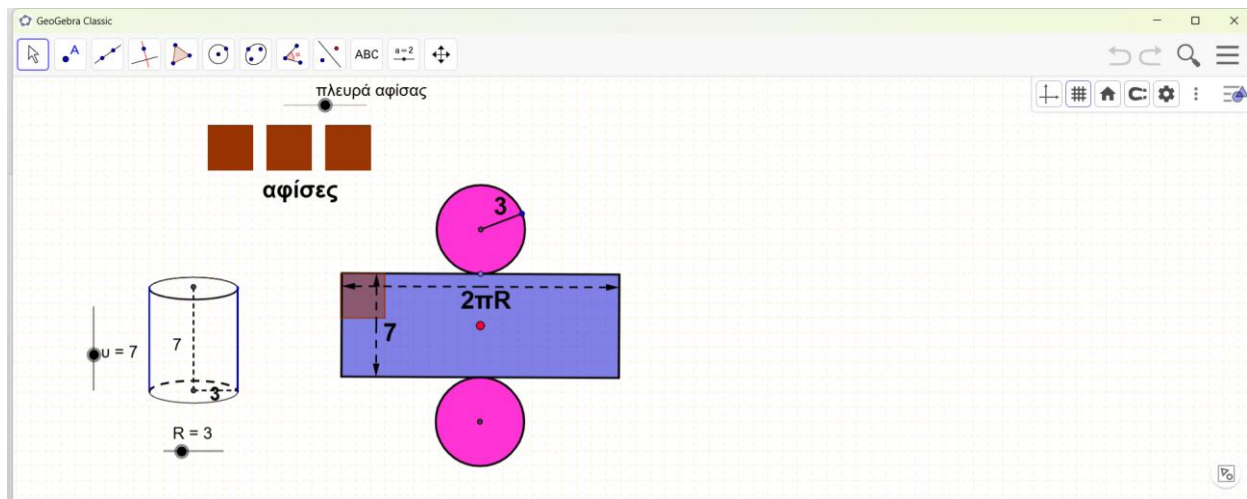
4.1 Κύλινδρος (Ορισμός, Στοιχεία, Υπολογισμός Επιφάνειας και Όγκου)

Διερεύνηση

Ένας δήμος τοποθέτησε στην κεντρική πλατεία μία κυλινδρική κολώνα, η οποία χρησιμοποιείται για την προβολή των εκδηλώσεων που πραγματοποιούνται εντός των ορίων του δήμου.

Η κολώνα έχει ύψος 7 m και ακτίνα 3 m . Στην κυρτή της επιφάνεια μπορούν να αναρτηθούν μεγάλες τετράγωνες αφίσες με πλευρά 3 m . Να βρείτε πόσες το πολύ αφίσες μπορούν να τοποθετηθούν στην κολώνα (χωρίς να καλύπτει η μία την άλλη).

- 1) Να ανοίξετε το αρχείο «[C_En8_EpifaneiaKylidrou.ggb](#)» για να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο.



- 2) Να μελετήσετε το ανάπτυγμα του κυλίνδρου και να περιγράψετε από ποιες επιφάνειες αποτελείται.

- 3) Να μετακινήσετε τους δρομείς, μεταβάλλοντας το ύψος και την ακτίνα του κυλίνδρου και να βρείτε τους τύπους που υπολογίζουν το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και το ολικό εμβαδόν του κυλίνδρου.

4) Επειδή τον τελευταίο καιρό υπάρχουν, όλο και περισσότερες εκδηλώσεις που χρειάζεται να προβληθούν, ο δήμος σχεδιάζει να τοποθετήσει ακόμη μία κολώνα η οποία να έχει τη διπλάσια παράπλευρη επιφάνεια από την πρώτη κολώνα. Ο επιστάτης του δήμου ισχυρίζεται ότι αν διπλασιαστεί το ύψος ή η διάμετρος της κολώνας θα διπλασιαστεί η παράπλευρη επιφάνειά της. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό του.

Στοιχεία ορθού κυλίνδρου

- Η πλευρά γύρω από την οποία περιστρέφεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο λέγεται **άξονας περιστροφής** και η πλευρά του ορθογωνίου που είναι παράλληλη με τον άξονα λέγεται **γενέτειρα** του κυλίνδρου.
- Η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή της γενέτειρας του κυλίνδρου λέγεται **κυρτή επιφάνεια** του κυλίνδρου.
- Οι κυκλικοί δίσκοι που δημιουργούνται από την περιστροφή των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που είναι κάθετες στον άξονα του κυλίνδρου λέγονται **βάσεις** του κυλίνδρου.
- Η ακτίνα των βάσεων του κυλίνδρου λέγεται **ακτίνα** του κυλίνδρου και συμβολίζεται με R .
- Η απόσταση των δύο βάσεων του κυλίνδρου λέγεται **ύψος** του κυλίνδρου και συμβολίζεται με $υ$.
- Το **εμβαδόν κυρτής επιφάνειας** κυλίνδρου είναι:

$$E_{\kappa} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon = 2\pi R \cdot \upsilon$$

και της **ολικής επιφάνειάς** είναι:

$$E_{ολ} = E_{\kappa} + 2E_{\beta} = 2\pi R \cdot \upsilon + 2\pi R^2$$

- Ο **όγκος** του κυλίνδρου είναι:

$$V = E_{\beta} \cdot \upsilon$$

Δραστηριότητες

- 1) Δίνεται κύλινδρος με ύψος $\upsilon = 6\text{cm}$ και ακτίνα $R = 5\text{cm}$. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.

2) Οι κονσέρβες μίας εταιρείας έχουν σχήμα κυλίνδρου με ύψος 12 cm και ακτίνα βάσης 5 cm . Παραγγέλθηκαν στο τυπογραφείο 1000 ετικέτες που θα καλύψουν την κυρτή επιφάνεια της κάθε κονσέρβας, όπως φαίνεται στην πιο κάτω εικόνα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χαρτιού που θα χρειαστεί για να τυπωθούν οι ετικέτες.



3) Δίνεται κύλινδρος με ύψος $u = 6\text{ cm}$ και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $E_k = 24\pi\text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε:

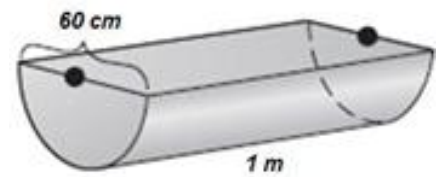
(α) το μήκος της ακτίνας του κυλίνδρου,

(β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.

4) Το κάλυμμα μίας λάμπας, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα, έχει σχήμα κυλίνδρου με ύψος 75 cm και διάμετρο 30 cm . Το κάλυμμα κατασκευάζεται από ειδικό ύφασμα που καλύπτει την κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου και κοστίζει $30\text{ σεντ}/\text{m}^2$. Να υπολογίσετε το κόστος κατασκευής 100 τέτοιων καλυμμάτων.



5) Το δοχείο σε σχήμα μισού κυλίνδρου, που φαίνεται στην διπλανή εικόνα, χρησιμοποιείται για να πίνουν νερό τα ζώα. Να υπολογίσετε τον όγκο του νερού (σε λίτρα) που χωρεί στο δοχείο. (Οι διαστάσεις που φαίνονται στην εικόνα είναι οι διαστάσεις του εσωτερικού χώρου που γεμίζει με νερό).



4.2 Κώνος

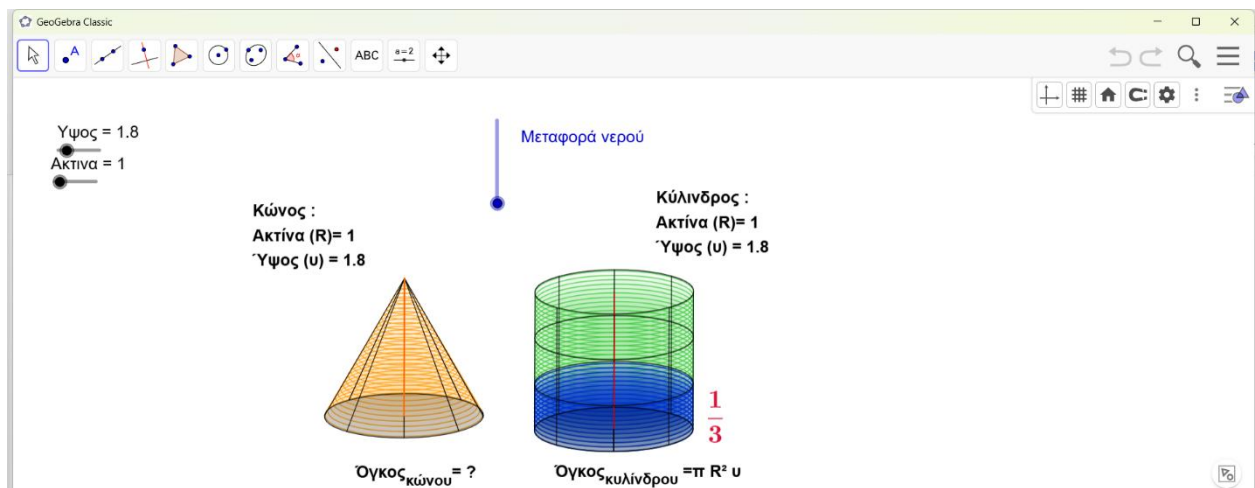
Διερεύνηση

Ο κύριος Νικόλας θέλει να χρησιμοποιήσει μία νέα συσκευασία για σερβίρισμα του καλαμποκιού. Θέλει να μελετήσει τη χωρητικότητα της νέας συσκευασίας, ώστε να αποφασίσει την τιμή πώλησής της.

Να εισηγηθείτε τρόπους με τους οποίους θα μπορούσε να υπολογίσει ή να εκτιμήσει τη χωρητικότητα ενός κωνικού κουτιού. Να εξετάσετε από ποιες μετρήσεις εξαρτάται η χωρητικότητα του κουτιού.

Να ανοίξετε το αρχείο «[C_En8_OgkosKonou.ggb](#)» για να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο.

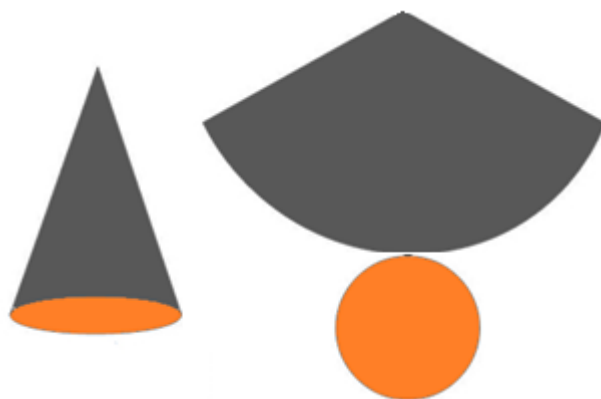
Ποια είναι η σχέση που συνδέει τον όγκο του κώνου με τον όγκο του κυλίνδρου;



Στοιχεία ορθού κώνου

- Η κάθετη πλευρά γύρω από την οποία περιστρέφεται το ορθογώνιο τρίγωνο λέγεται **άξονας περιστροφής** και η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου λέγεται **γενέτειρα** του κώνου και συμβολίζεται με λ .
- Η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή της γενέτειρας του κώνου λέγεται **κυρτή επιφάνεια** του κώνου.
- Ο κυκλικός δίσκος που δημιουργείται από την περιστροφή της πλευράς που είναι κάθετη στον άξονα περιστροφής λέγεται **βάση** του κώνου.
- Η ακτίνα της βάσης του κώνου λέγεται **ακτίνα** του κώνου και συμβολίζεται με R .
- Η απόσταση της κορυφής του κώνου από τη βάση του λέγεται **ύψος** του κώνου και συμβολίζεται με $υ$.

Ανάπτυγμα Κώνου



Κώνος

- Το **εμβαδόν κυρτής επιφάνειας** του κώνου είναι:

$$E_{\kappa} = \pi R \lambda$$

και της **ολικής επιφάνειας** είναι:

$$E_{ολ} = E_{\kappa} + E_{\beta} = \pi R \lambda + \pi R^2$$

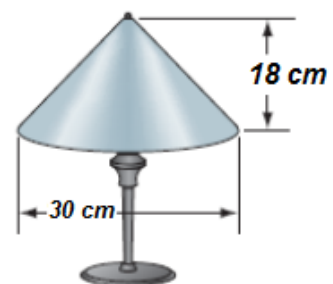
- Ο **όγκος του κώνου** είναι:

$$V = \frac{E_{\beta} \cdot υ}{3}$$

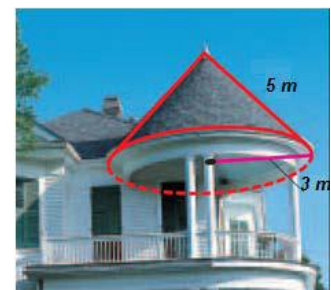
Δραστηριότητες

1) Δίνεται κώνος με ύψος $υ = 6\text{ cm}$ και ακτίνα $R = 5\text{ cm}$. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του κώνου.

2) Ένα επιτραπέζιο φωτιστικό έχει κάλυμμα σε σχήμα κώνου με ύψος 18 cm και διάμετρο βάσης 30 cm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του καλύμματος.



3) Στη διπλανή εικόνα φαίνεται η στέγη της βεράντας ενός σπιτιού, η οποία έχει σχήμα κώνου με γενέτειρα 5 m και ακτίνα βάσης 3 m . Η στέγη πρέπει να καλυφθεί με υλικό που κοστίζει $\text{€}20/\text{m}^2$. Να υπολογίσετε το κόστος κάλυψης της στέγης με το συγκεκριμένο υλικό.



4) Να υπολογίσετε τον όγκο κώνου με ακτίνα 4 cm και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $20\pi\text{ cm}^2$.

5) Στην πιο κάτω εικόνα παρουσιάζεται μία αυτόματη μηχανή για παροχή φαγητού σε ζώα. Η μηχανή αυτή αποτελείται από έναν ορθό κύλινδρο με ακτίνα βάσης 3 cm και ύψος 20 cm και έναν ορθό κώνο ίσης ακτίνας με τον κύλινδρο και ύψους 5 cm .

(α) Να υπολογίσετε τη μέγιστη ποσότητα τροφής (σε cm^3) που μπορεί να τοποθετηθεί στη μηχανή αυτή.



(β) Για πόσες μέρες θα έχει τροφή ένας γάτος, αν καταναλώνει 20 cm^3 τροφής ανά ημέρα (χωρίς να ξαναγεμίσει η μηχανή);

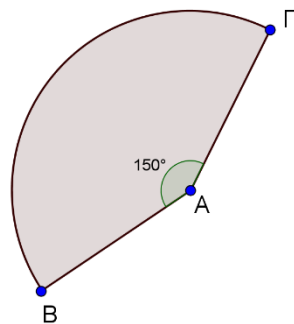
6) Δίνονται τα αναπτύγματα της κυρτής επιφάνειας δύο κώνων. Στο Σχήμα 1 η επίκεντρη γωνία είναι 150° και στο Σχήμα 2 είναι 240° , $AB = \Delta E = 12\text{cm}$.

(α) Τι κοινό έχουν οι δύο κυκλικοί τομείς ως προς τα στοιχεία της κυρτής επιφάνειας του κώνου;

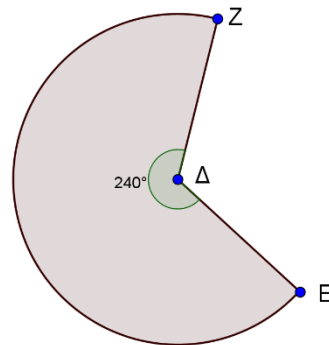
(β) Αν σχηματίσουμε τους δύο κώνους, ποιος από τους δύο θα έχει μεγαλύτερο ύψος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ) Αν η ακτίνα της βάσης του κώνου στο Σχήμα 1 είναι ίση με 5cm , να υπολογίσετε την κυρτή και την ολική επιφάνεια του.

(δ) Να υπολογίσετε το ύψος του κώνου στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1



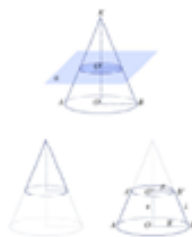
Σχήμα 2

4.3 Κόλουρος Κώνος

Διερεύνηση

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο «ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ26. Στερεά εκ περιστροφής-Κόλουρος κώνος».

Να επιλέξετε την «ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Κόλουρος Κώνος» και να ακολουθήσετε τις οδηγίες της παραγράφων 1.1 και 1.3.



Στοιχεία κόλουρου κώνου

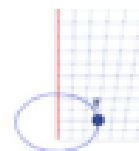
- Η πλευρά γύρω από την οποία περιστρέφεται το ορθογώνιο τραπέζιο λέγεται **άξονας περιστροφής** και η πλευρά που δεν είναι κάθετη στις βάσεις του λέγεται **γενέτειρα** του κόλουρου κώνου και συμβολίζεται με λ .
- Η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή της γενέτειρας του κόλουρου κώνου λέγεται **κυρτή επιφάνεια** του κόλουρου κώνου.
- Οι κυκλικοί δίσκοι που δημιουργούνται από την περιστροφή των δύο πλευρών που είναι κάθετες στον άξονα περιστροφής λέγονται **βάσεις** του κόλουρου κώνου.
- Η ακτίνα της μικρής και της μεγάλης βάσης του κόλουρου κώνου συμβολίζονται με R και ρ , αντίστοιχα.
- Η απόσταση των δύο βάσεων λέγεται **ύψος** του κόλουρου κώνου και συμβολίζεται με $υ$.

Δραστηριότητα

Το ύψος ενός κόλουρου κώνου είναι 9 cm , η ακτίνα της μικρής βάσης του 4 cm και η ακτίνα της μεγάλης βάσης του 12 cm . Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του κόλουρου κώνου.

4.4 Περιστροφή επίπεδων σχημάτων γύρω από άξονα

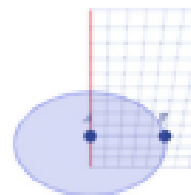
- Ένα σημείο, που δεν ανήκει στον άξονα περιστροφής, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής παράγει κύκλο.



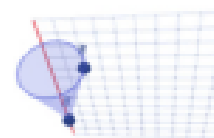
- Ένα ευθύγραμμο τμήμα, παράλληλο με τον άξονα περιστροφής, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής παράγει την κυρτή επιφάνεια κυλίνδρου.



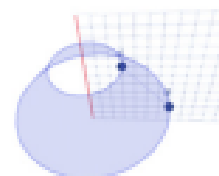
- Ένα ευθύγραμμο τμήμα, κάθετο στον άξονα περιστροφής, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής παράγει έναν κυκλικό δίσκο.



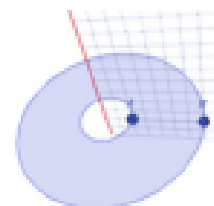
- Ένα ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο τέμνει κατά οξεία γωνία τον άξονα περιστροφής, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής παράγει την κυρτή επιφάνεια κώνου.



- Ένα ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο δεν τέμνει τον άξονα περιστροφής και σχηματίζει οξεία γωνία με αυτόν, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής παράγει την κυρτή επιφάνεια κολούρου κώνου.

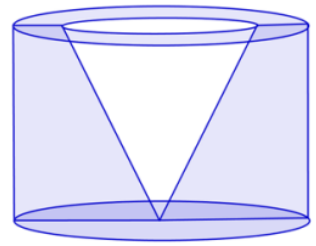


- Ένα ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο δεν τέμνει τον άξονα περιστροφής και σχηματίζει ορθή γωνία με αυτόν, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής παράγει δακτύλιο.

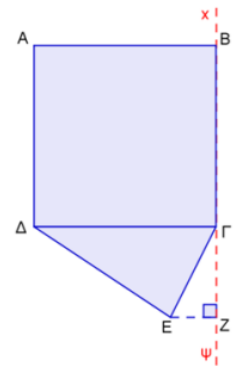


Δραστηριότητες

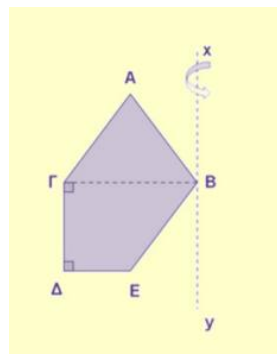
1) Το διπλανό στερεό είναι ένα κυλινδρικό καλούπι που χρησιμοποιείται για την κατασκευή κώνων. Η διάμετρος της βάσης του κυλίνδρου είναι 16cm και η διάμετρος της βάσης του κώνου 12cm . Το ύψος του κυλίνδρου είναι 8cm . Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.



2) Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο με πλευρά $AB = 21\text{cm}$ και το τρίγωνο ΓEZ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές $\Gamma Z = 8\text{cm}$ και $EZ = 6\text{cm}$. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σχήματος $AB\Gamma E\Delta A$ γύρω από τον άξονα $x\psi$.



3) Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $B\Gamma = 6\text{cm}$ και $AB = A\Gamma = 5\text{cm}$. Το $BE\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις $B\Gamma$ και ΔE , ύψος $\Gamma\Delta = 4\text{cm}$ και πλευρά $BE = 5\text{cm}$. Το σκιασμένο πολύγωνο $ABE\Delta\Gamma$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xBy που είναι κάθετος στη $B\Gamma$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο που παράγεται.



5. Προβλήματα Καταναλωτή

5.1 Ποσοστά

Δραστηριότητες

1) Το πιο κάτω πλαίσιο αποτελείται από 100 τετραγωνικές μονάδες.

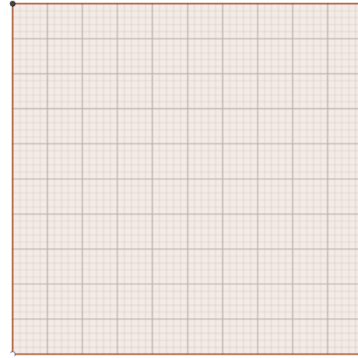
(α) Να το διακοσμήσετε, χρωματίζοντας:

30% μπλε

10% κόκκινο

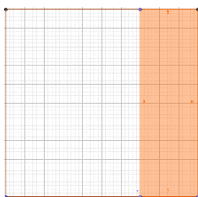
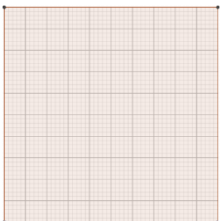
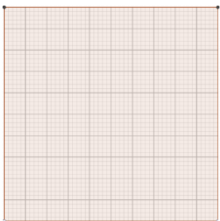
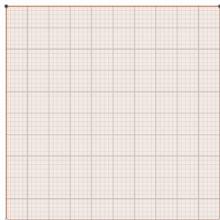
20% πράσινο

15% κίτρινο



(β) Να χρωματίσετε το υπόλοιπο μέρος με όποιο χρώμα θέλετε. Τι ποσοστό της διακόσμησης έχει το χρώμα της δικής σας επιλογής;

2) Να συμπληρώσετε τον πίνακα όπως το παράδειγμα:

Ποσοστό	Κλάσμα	Δεκαδικός	Διάγραμμα
30%	$\frac{30}{100}$	0,30	
85%			
	$\frac{25}{100}$		
	$\frac{3}{4}$		
		0,02	

3) Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει την ηλικιακή κατανομή των ατόμων που παρακολούθησαν την πρεμιέρα ενός μουσικού τηλεπαιχνιδιού.

Ηλικία	Ποσοστό
Παιδιά	13%
Έφηβοι	45%
Ενήλικες	34%
Συνταξιούχοι	8%

Να σημειώσετε αν η κάθε πρόταση είναι ορθή ή λανθασμένη:

(α) Περισσότερο από το 50% των ατόμων ήταν ενήλικες ή συνταξιούχοι.

(β) $\frac{58}{100}$ των ατόμων ήταν παιδιά ή έφηβοι.

(γ) Περισσότεροι από το $\frac{1}{4}$ των ατόμων ήταν ενήλικες.

(δ) Λιγότεροι από το μισό των ατόμων ήταν έφηβοι ή ενήλικες.

4) Η ποσότητα κρασιού που παράγεται από μία συγκεκριμένη ποικιλία σταφυλιών είναι το 60% της μάζας των σταφυλιών.

(α) Να γράψετε τη σχέση που συνδέει τη μάζα των σταφυλιών (x) με την ποσότητα του κρασιού (y), σε κιλά.



(β) Να υπολογίσετε πόσα κιλά κρασί θα πάρουμε από 1800 kg σταφύλια.

5.2 Προβλήματα με κέρδη, ζημιές, προμήθειες, εκπτώσεις, ΦΠΑ.

Δραστηριότητες

1) Ένας καταναλωτής αγοράζει είδη αξίας €450, για τα οποία ο συντελεστής ΦΠΑ είναι 19%. Να υπολογίσετε το συνολικό ποσό που θα πληρώσει.



2) Ένας καταστηματάρχης κερδίζει 12% πάνω στην αξία των εμπορευμάτων που πωλεί. Τον περασμένο μήνα πώλησε εμπορεύματα αξίας €13500. Ποιο ήταν το κέρδος του για τον μηνά αυτό;

3) Κατά τη διάρκεια των εκπτώσεων, μία τηλεόραση αξίας €450 πωλήθηκε €360. Ποιο ήταν το ποσοστό (%) της έκπτωσης;



5.3 Κοστολόγηση

Κοστολόγηση είναι ο υπολογισμός του συνολικού κόστους ενός αγαθού που προορίζεται για πώληση. Το αγαθό αυτό μπορεί να είναι οποιοδήποτε είδος εμπορεύματος, παροχή υπηρεσιών κ.λπ. Για να γίνει ορθά η κοστολόγηση, λαμβάνονται υπόψη διάφοροι παράγοντες:

(α) Αρχικά, στην τιμή αγοράς συνυπολογίζονται έξοδα μεταφοράς, έξοδα ασφαλίσεων και έξοδα εκτελωνισμού τα οποία είναι συνήθως προκαθορισμένα.

(β) Στο συνολικό ποσό που προκύπτει από τα πιο πάνω προστίθενται τα έξοδα της επιχείρησης, όπως τα έξοδα καταστήματος, μισθοί υπαλλήλων, έξοδα κυκλοφορίας, διαφημίσεις κ.λπ.

Η τελική τιμή πώλησης ενός προϊόντος καθορίζεται, αφού στο συνολικό κόστος του προστεθεί και ένα ποσό σαν κέρδος, καθώς και ο Φ.Π.Α.

Δραστηριότητες

1) Ένας εισαγωγέας αγόρασε 15 πλυντήρια για €6000. Πλήρωσε 2% για μεταφορικά, 1% για ασφάλιστρα και 7% για εκτελωνισμό. Αν τα έξοδα της επιχείρησής του είναι το 30% του κόστους αγοράς, σε ποια τιμή πρέπει να πωλεί κάθε πλυντήριο, ώστε να έχει κέρδος 40%;

2) Ένας εισαγωγέας αγόρασε 60 τηλεοράσεις για €36000. Πλήρωσε 3% για μεταφορικά, 2% για ασφάλιστρα και 22% για εισαγωγικούς δασμούς. Αν τα έξοδα της επιχείρησής του είναι το 18% του κόστους αγοράς, σε ποια τιμή πρέπει να πωλεί κάθε τηλεόραση, ώστε να έχει κέρδος 35%; Πόσο θα κοστίσει η κάθε τηλεόραση στον καταναλωτή, αν επιβαρυνθεί επιπλέον με 8% Φ.Π.Α.;

