

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

**ΜΕΣΗ ΤΕΧΝΙΚΗ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑ: ΠΡΑΚΤΙΚΗ**

Συγγραφή:

Δρ Χρυσούλα Χατζηχρίστου, *Επιθεωρήτρια Μαθηματικών Μέσης Εκπαίδευσης*
Δρ Κωνσταντία Χατζηδημητρίου, *Μαθηματικός*
Ιφιγένεια Σωφρονίου, *Μαθηματικός*
Παντελίτσα Αναστασία Χατζηγιάννη, *Μαθηματικός*
Χάρης Θεοδότου, *Μαθηματικός*

Αναθεωρημένη έκδοση

Δρ Χρυσούλα Χατζηχρίστου, *Επιθεωρήτρια Μαθηματικών Μέσης Εκπαίδευσης*
Δρ Χριστίνα Τσαούση, *Σύμβουλος Μαθηματικών*
Αλεξία Πηλακούρη, *Σύμβουλος Μαθηματικών*
Νίκη Μηναιΐδου, *Σύμβουλος Μαθηματικών*

Εποπτεία:

Δρ Χρυσούλα Χατζηχρίστου, *Επιθεωρήτρια Μαθηματικών Μέσης Εκπαίδευσης*

Γλωσσική επιμέλεια:

Ευαγγελία Χαραλάμπους, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Σχεδιασμός εξωφύλλου:

Έλενα Ηλιάδου, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης:

Πέτρος Γεωργιάδης, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Έκδοση 2026

Εκτύπωση: COMPASS PRINTING IKE

Σημείωση:

Η παρούσα έκδοση συνιστά αναθεωρημένη, επικαιροποιημένη και εμπλουτισμένη έκδοση των διδακτικών εγχειριδίων της Επαγγελματικής Κατεύθυνσης των Τεχνικών Σχολών (έκδοση 2020), τα οποία αρχικά εκπονήθηκαν, υπό την επιστημονική εποπτεία και καθοδήγηση της Δρος Χρυσούλας Χατζηχρίστου, για τον Κεντρικό Κορμό Μαθητείας.

© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ISBN: 978-9963-0-5469-5

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΕΛΙΔΑ

1. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ Α' ΒΑΘΜΟΥ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1.1 Συστήματα εξισώσεων α' βαθμού δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους	4
1.2 Επίλυση συστήματος εξισώσεων α' βαθμού	5
1.3 Λύση προβλημάτων με τη βοήθεια συστημάτων	9

2. ΕΞΙΣΩΣΗ Β' ΒΑΘΜΟΥ

2.1 Εξίσωση β' βαθμού	11
2.2 Λύση εξίσωσης β' βαθμού	11
2.3 Είδος των λύσεων της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$	16
2.4 Άθροισμα και γινόμενο των λύσεων της εξίσωσης β' βαθμού	18
2.5 Τριώνυμο	21
2.6 Ανάλυση τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ σε γινόμενο παραγόντων	21

3. ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

3.1 Μονάδες μέτρησης στο μετρικό σύστημα (SI)	23
3.2 Μονάδες μέτρησης μήκους, επιφάνειας και όγκου	23
3.3 Μονάδες μέτρησης τόξων, γωνιών, μάζας και βάρους	27
3.4 Μετατροπές μονάδων	29

4. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

4.1 Εμβαδόν τριγώνου	32
----------------------	----

5. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΗ – ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

5.1 Υπενθύμιση βασικών όρων, εννοιών και θεωρημάτων της Γεωμετρίας	34
5.2 Αναλογίες – Κλίμακα χάρτη	34
5.3 Θεώρημα του Θαλή	40
5.4 Όμοια σχήματα	45
5.5 Όμοια τρίγωνα	48

6. ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

6.1 Τρίγωνο	54
6.2 Παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο	55
6.3 Ρόμβος, τετράγωνο	58
6.4 Τραπεζίο	62

7. ΚΥΚΛΟΣ

7.1 Μήκος κύκλου, μήκος τόξου	67
7.2 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου, κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος	73
7.3 Εμβαδά μεικτόγραμμων σχημάτων	80

1. Συστήματα εξισώσεων α' βαθμού – Προβλήματα

1.1 Συστήματα εξισώσεων α' βαθμού δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

- Έστω ότι έχουμε την εξίσωση $2x - y = 3$. Λύση της εξίσωσης είναι κάθε ζεύγος τιμών x και y που την επαληθεύουν.

Έτσι τα ζεύγη:

$$x = 2, y = 1$$

$$x = 5, y = 7$$

$$x = 0, y = -3$$

$$x = -3, y = -9$$

είναι μερικές από τις λύσεις της εξίσωσης $2x - y = 3$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση $2x - y = 3$ έχει άπειρες λύσεις.

- Μία άλλη εξίσωση αυτής της μορφής, π.χ. $x + 3y = 5$, έχει άπειρες λύσεις.

Μερικές από αυτές είναι:

$$x = 1, y = \frac{4}{3}$$

$$x = 2, y = 1$$

$$x = -4, y = 3$$

- Όταν θέλουμε να βρούμε τις κοινές λύσεις, αν υπάρχουν, των εξισώσεων

$$2x - y = 3$$

$$x + 3y = 5$$

λέμε ότι οι εξισώσεις αυτές αποτελούν ένα **σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους**.

Η κοινή λύση των δύο εξισώσεων λέγεται λύση του συστήματος.

Έτσι, για το σύστημα $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ θα έχουμε λύση το ζεύγος $(x, y) = (2, 1)$.

- Αν δεν υπάρχει κοινή λύση, τότε το σύστημα λέγεται **αδύνατο**.
- Αν όλες οι άπειρες λύσεις είναι κοινές, το σύστημα λέγεται **αόριστο**.

1.2 Επίλυση συστήματος εξισώσεων α' βαθμού

Για την **αλγεβρική επίλυση** ενός γραμμικού συστήματος με δύο μεταβλητές (x, y) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη **μέθοδο της αντικατάστασης**, τη **μέθοδο σύγκρισης** ή τη **μέθοδο αντίθετων συντελεστών**.

Μέθοδος αντικατάστασης

Παράδειγμα

Για να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} y - 2x = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Επιλύουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος ως προς τη μία μεταβλητή

Λύνουμε την $y - 2x = 1$ ως προς y :
 $y = 2x + 1$

Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος

Αντικαθιστούμε το $2x + 1$ στη θέση του y στην εξίσωση $x + y = 7$ και έχουμε: $x + (2x + 1) = 7$

$$x + 2x + 1 = 7 \Rightarrow 3x + 1 = 7$$

$$\Rightarrow 3x = 7 - 1$$

Επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει

$$\Rightarrow 3x = 6$$

$$\Rightarrow x = 2$$

Αντικαθιστούμε την τιμή της μεταβλητής που βρήκαμε σε μία από τις δύο αρχικές εξισώσεις ή σε μία ισοδύναμή τους και βρίσκουμε την τιμή της άλλης μεταβλητής

Αντικαθιστούμε το $x = 2$ στην εξίσωση $y = 2x + 1$ και έχουμε:
 $y = 2 \cdot 2 + 1 \Rightarrow y = 5$

Η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (x, y) που βρήκαμε

Άρα, η λύση του συστήματος είναι:
 $x = 2$ και $y = 5$
Δηλαδή, το ζεύγος: $(x, y) = (2, 5)$

Μέθοδος σύγκρισης

Παράδειγμα

Για να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$, εργαζόμαστε ως εξής:

Επιλύουμε και τις δύο εξισώσεις ως προς τον ίδιο άγνωστο, εδώ ως προς x

Λύνουμε την $2x - y = 3$ ως προς x

$$2x = y + 3 \Rightarrow x = \frac{y + 3}{2}$$

Λύνουμε την $x + 3y = 5$ ως προς x

$$x = 5 - 3y$$

Συγκρίνουμε τις δύο εξισώσεις. Εξισώνουμε τα δεύτερα μέλη τους

$$\frac{y+3}{2} = 5 - 3y$$

$$y + 3 = 10 - 6y$$

Επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει

$$\Rightarrow y + 6y = 10 - 3$$

$$\Rightarrow 7y = 7$$

$$\Rightarrow y = 1$$

Αντικαθιστούμε την τιμή της μεταβλητής που βρήκαμε σε μία από τις δύο αρχικές εξισώσεις ή σε μία ισοδύναμή τους και βρίσκουμε την τιμή της άλλης μεταβλητής

Αντικαθιστούμε το $y = 1$ στην εξίσωση $x = 5 - 3y$ και έχουμε:

$$x = 5 - 3 \cdot 1 \Rightarrow x = 2$$

Η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (x, y) που βρήκαμε

Άρα, η λύση του συστήματος είναι: $x = 2$ και $y = 1$

Δηλαδή, το ζεύγος:

$$(x, y) = (2, 1)$$

Μέθοδος αντίθετων συντελεστών

Παράδειγμα

Για να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - 5y = 16 \end{cases}$, εργαζόμαστε ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί 2 και τη δεύτερη επί -3 , για να προκύψει **ισοδύναμο σύστημα** με τους συντελεστές του x στις δύο εξισώσεις να είναι αντίθετοι

$$\begin{array}{r|l} 3x + 2y = 5 & 2 \\ 2x - 5y = 16 & -3 \end{array}$$

Άρα, προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, προκύπτει μία νέα εξίσωση με άγνωστο μόνο το y . Έτσι βρίσκουμε εύκολα την τιμή του y

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow & \begin{array}{l} \textcolor{red}{6x} + 4y = 10 \\ \textcolor{red}{-6x} + 15y = -48 \end{array} & + \\ \hline & 19y = -38 & \Rightarrow y = -2 \end{array}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή της μεταβλητής που βρήκαμε σε μία από τις δύο αρχικές εξισώσεις και βρίσκουμε την τιμή της άλλης μεταβλητής

Αντικαθιστούμε το $y = -2$ στην εξίσωση $3x + 2y = 5$ και έχουμε:

$$3x - 4 = 5 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

Η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (x, y) που βρήκαμε

Άρα, η λύση του συστήματος είναι: $x = 3$ και $y = -2$
Δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (3, -2)$.

Δραστηριότητες

1) Να βρείτε τη λύση του πιο κάτω συστήματος:

$$y = x - 1$$

$$y = 4x + 2$$

2) Να βρείτε τη λύση (αν υπάρχει) των πιο κάτω συστημάτων:

$$\begin{array}{l} \text{(α)} \quad x = 7y \\ 2x + 4y = 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(β)} \quad y = 3 + x \\ x + 2y = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(γ)} \quad 5x - 3y = 10 \\ y = x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(δ)} \quad y = 3x + 5 \\ 3x - y = -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(ε)} \quad 8x - 7y = 37 \\ 4x + 7y = -13 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(στ)} \quad 2x - 3y = 10 \\ x + 3y = 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(ζ)} \quad y - 2x = 0 \\ 2x + y = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(η)} \quad 2x - 4y = -8 \\ 4x + 8y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(θ)} \quad y - 2x = 0 \\ 4x + 8y = 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(ι)} \quad 3x + 2y = 5 \\ x - 3y = 9 \end{array}$$

1.3 Λύση προβλημάτων με τη βοήθεια συστημάτων

Δραστηριότητες

1) Η κυρία Ελένη έκοψε και έβαψε τα μαλλιά της στο κομμωτήριο και πλήρωσε €58. Γνωρίζουμε ότι για το βάψιμο πλήρωσε €4 περισσότερα από το διπλάσιο της τιμής του κοψίματος. Ποιο από τα πιο κάτω συστήματα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθούν οι δύο τιμές;

(α)
$$\begin{cases} x + y = 58 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

(β)
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ y = 2x - 58 \end{cases}$$

(γ)
$$\begin{cases} x + y = 58 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

(δ)
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ y = 2x + 58 \end{cases}$$

2) Ένα αερόστατο A βρίσκεται σε ύψος 10 μέτρων πάνω από τη Γη και ανεβαίνει προς τα πάνω 15 μέτρα το λεπτό. Ένα αερόστατο B βρίσκεται σε ύψος 110 μέτρων πάνω από τη Γη και κατεβαίνει 10 μέτρα το λεπτό.

(α) Σε πόσα λεπτά τα αερόστατα θα βρίσκονται στο ίδιο ύψος;



(β) Σε ποιο ύψος θα βρίσκονται τα δύο αερόστατα τη στιγμή αυτή;

3) Ένας πατέρας μοίρασε €26 στα παιδιά του. Έδωσε €4 σε κάθε αγόρι και €3 σε κάθε κορίτσι. Αν έδινε €3 σε κάθε αγόρι και €5 σε κάθε κορίτσι, θα του περισσεύε €1. Πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει;

4) Πριν 3 χρόνια η ηλικία του Ανδρέα ήταν διπλάσια από την ηλικία του Βασίλη. Μετά από 7 χρόνια το άθροισμα των ηλικιών τους θα είναι 56 χρόνια. Ποιες είναι οι σημερινές τους ηλικίες;

5) Σε 12 άτομα, μαθητές και μαθήτριες, μοιράστηκαν 72 τετράδια. Αν κάθε μαθητής πήρε 8 τετράδια και κάθε μαθήτρια 5, πόσοι ήταν οι μαθητές και πόσες οι μαθήτριες;

6) Να βρείτε την τιμή καθενός από τα πιο κάτω προϊόντα:

Κύριος Άλκης		€9,60
Κυρία Μαρίνα		€15

2. Εξίσωση β' βαθμού

2.1 Εξίσωση β' βαθμού

- Εξίσωση β' (δεύτερου/2^{ου}) βαθμού

Εξίσωση δεύτερου βαθμού ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$$

- Αν $a, \beta, \gamma \neq 0$ τότε η εξίσωση ονομάζεται **πλήρης εξίσωση 2^{ου} βαθμού**.
- Αν ένα τουλάχιστον από τα β και γ είναι ίσο με το μηδέν, τότε η εξίσωση ονομάζεται **ελλιπής εξίσωση 2^{ου} βαθμού**. Έτσι, ελλιπείς είναι οι εξισώσεις των μορφών:
 $ax^2 + \beta x = 0$, $ax^2 + \gamma = 0$ και $ax^2 = 0$.

- Λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$

Αν $\beta^2 - 4a\gamma \geq 0$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$ είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a}$$

- **Ορισμός:** Διακρίνουσα της εξίσωσης **2^{ου} βαθμού** $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$ ονομάζεται η παράσταση $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$

2.2 Λύση εξίσωσης β' βαθμού

Παραδείγματα

1) Να λύσετε την εξίσωση $3x^2 - 5x = 0$.

Κοινός παράγοντας το x

Αν $A \cdot B = 0$ τότε $A = 0$ ή $B = 0$

Λύσεις

$$x(3x - 5) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad 3x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$x = 0, x = \frac{5}{3}$$

2) Να λύσετε την εξίσωση $3x^2 - 48 = 0$.

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

Διαιρούμε με τον συντελεστή του
αγνώστου

Βρίσκουμε τη λύση

(αν $x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}, a \geq 0$)

$$3x^2 = 48$$

$$x^2 = \frac{48}{3} \Rightarrow x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow x = \pm 4$$

3) Να λύσετε την εξίσωση $(x - 3)(2x + 1) = 0$.

$$\begin{array}{ll} \text{Αν } A \cdot B = 0 \text{ τότε } A = 0 \text{ ή } B = 0 & x - 3 = 0 \text{ ή } 2x + 1 = 0 \\ \text{Λύσεις} & x = 3, x = -\frac{1}{2} \end{array}$$

4) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

$$\begin{array}{ll} \text{Γράφουμε τους συντελεστές } a, \beta, \gamma & a = 2, \beta = -5, \gamma = 2 \\ \text{Χρησιμοποιούμε τον τύπο:} & x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \\ x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a} & \\ \text{Λύσεις} & x_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2, \quad x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{array}$$

5) Η βάση ενός τριγώνου είναι $2m$ μεγαλύτερη από το αντίστοιχο ύψος. Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι $12m^2$, να υπολογίσετε τη βάση και το ύψος του.

$$\begin{array}{ll} \text{Έστω βάση} = \beta = x + 2 \text{ και} & \\ \upsilon = \text{ύψος} = x & \\ \text{Χρησιμοποιούμε τον τύπο:} & \\ E_{\text{τριγώνου}} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} & \frac{x \cdot (x + 2)}{2} = 12 \\ & \\ \text{Κάνουμε ομώνυμα και επιλύουμε} & x \cdot (x + 2) = 24 \Rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \\ \text{την εξίσωση που προκύπτει} & \Rightarrow (x + 6)(x - 4) = 0 \\ & x = -6 \text{ (απορ. αφού } x > 0) \\ & \text{ή} \\ & x = 4 \text{ δεκτή} \\ & \\ \text{Υπολογίζουμε τη βάση και το ύψος} & \text{βάση} = x + 2 = 4 + 2 = 6 \text{ m} \\ \text{του τριγώνου} & \text{ύψος} = x = 4 \text{ m} \end{array}$$

Δραστηριότητες

1) Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^2 - 25 = 0$

(β) $4x^2 - 49 = 0$

(γ) $4x^2 - x = 0$

(δ) $x^2 = x$

(ε) $x^2 - 6x = 0$

(στ) $(3x + 1)(x - 5) = 0$

2) Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $2x^2 - x - 6 = 0$

(β) $5x^2 + 9x - 2 = 0$

(γ) $16x^2 - 8x + 1 = 0$

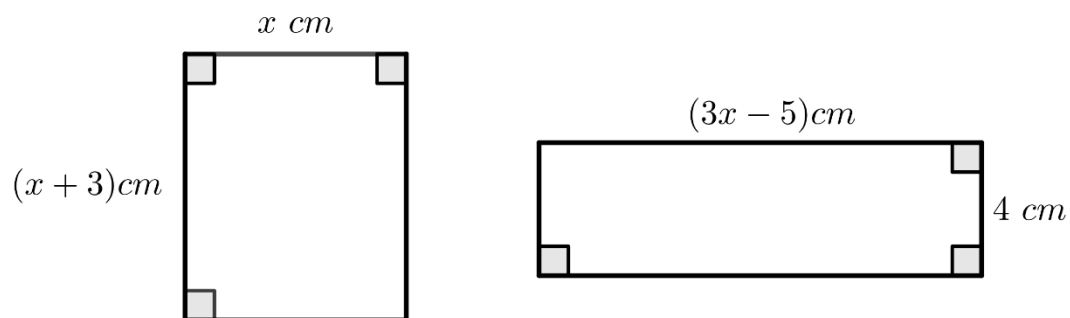
(δ) $x^2 - 2x + 4 = 0$

(ε) $5x^2 - 4x - 1 = 0$

(στ) $-9x^2 + 6x - 1 = 0$

(ζ) $x^2 + x + 2 = 0$

3) Τα πιο κάτω ορθογώνια έχουν το ίδιο εμβαδόν αλλά δεν είναι ίσα. Να υπολογίσετε την τιμή του x .



2.3 Είδος των λύσεων της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$

Η διακρίνουσα καθορίζει το είδος των λύσεων της πιο πάνω εξίσωσης, ως εξής:

- Αν $\Delta > 0$, η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες, τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Αν $\Delta = 0$, η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και ίσες (μία διπλή λύση), τις $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2a}$
- Αν $\Delta < 0$, η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε τις τιμές του $\kappa, \kappa \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η εξίσωση:

$$x^2 + (\kappa + 1)x + 1 = 0$$

(α) έχει λύση το -2

(β) έχει δύο πραγματικές και ίσες λύσεις.

Λύση

(α)

Λύση το -2

$$x = -2$$

Επομένως, αντικαθιστούμε στην εξίσωση $(-2)^2 + (\kappa + 1)(-2) + 1 = 0$

όπου x το -2

Υπολογίζουμε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$

$$4 - 2\kappa - 2 + 1 = 0 \Rightarrow -2\kappa = -3 \Rightarrow \kappa = \frac{3}{2}$$

(β)

Η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και ίσες $(\kappa + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

λύσεις, όταν $\Delta = 0 \Rightarrow \beta^2 - 4a\gamma = 0$

Υπολογίζουμε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$

$$(\kappa + 1)^2 = 4 \Rightarrow \kappa + 1 = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \kappa + 1 = \pm 2 \\ \kappa = 1, \kappa = -3$$

Δραστηριότητες

1) Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

(α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσά της και να αναφέρετε το είδος των λύσεών της.

(β) Να υπολογίσετε τις λύσεις της, εάν αυτές υπάρχουν.

2) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + κx + κ + 3 = 0, κ \in \mathbb{R}$.

(α) Να υπολογίσετε την τιμή του $κ$, ώστε η πιο πάνω εξίσωση να έχει λύση το -3 .

(β) Να υπολογίσετε τις τιμές του $κ$, ώστε η πιο πάνω εξίσωση να έχει δύο πραγματικές και ίσες λύσεις.

2.4 Άθροισμα και γινόμενο των λύσεων της εξίσωσης β' βαθμού

Τύποι του Vieta

Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$, τότε συμβολίζουμε με S το άθροισμα και με P το γινόμενο τους. Ισχύουν:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$$

Σημείωση:

Οι πιο πάνω τύποι για το άθροισμα και το γινόμενο ισχύουν και στην περίπτωση όπου $\Delta < 0$.

Παραδείγματα

1) Δίνεται η εξίσωση $3x^2 - x - 6 = 0$. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης, να υπολογίσετε το άθροισμα και το γινόμενο των λύσεων της, χωρίς να τη λύσετε.

Λύση

Γράφουμε τους συντελεστές a, β, γ

Εφαρμόζουμε τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P

$$a = 3, \quad \beta = -1, \quad \gamma = -6$$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a} = \frac{-6}{3} = -2$$

2) Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $2x^2 - 4x - 3 = 0$, χωρίς να τη λύσετε, να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $x_1 + x_2$

(β) $x_1 \cdot x_2$

(γ) $(x_1 + 2)(x_2 + 2)$

(δ) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

Λύση

Γράφουμε τους συντελεστές a, β, γ

Εφαρμόζουμε τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P

$$a = 2, \quad \beta = -4, \quad \gamma = -3$$

$$S = -\frac{\beta}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

$$P = \frac{\gamma}{a} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

(α) $x_1 + x_2 = S = 2$

(β) $x_1 \cdot x_2 = P = -\frac{3}{2}$

(γ) $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4 = x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4$
 $= P + 2 \cdot S + 4 = -\frac{3}{2} + 2 \cdot 2 + 4 = \frac{13}{2}$

(δ) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{P} = \frac{2}{-\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}$

3) Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + (\lambda - 1)x + 2\lambda - 8 = 0$, η οποία έχει λύσεις x_1, x_2 . Να υπολογίσετε τις τιμές του $\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει:

(α) δύο αντίθετες λύσεις

(β) δύο αντίστροφες λύσεις.

Λύση

(α)

Γράφουμε τους συντελεστές a, β, γ

$$a = 2, \quad \beta = \lambda - 1, \quad \gamma = 2\lambda - 8$$

Δύο λύσεις αντίθετες σημαίνει $x_2 = -x_1$

$$\text{Άρα } S = x_1 + x_2 = x_1 + (-x_1) = x_1 - x_1 = 0$$

$$\begin{aligned} S = 0 &\Rightarrow -\frac{\beta}{a} = 0 \Rightarrow -\frac{\lambda - 1}{2} = 0 \\ &\Rightarrow -\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \end{aligned}$$

(β)

Δύο λύσεις αντίστροφες σημαίνει $x_2 = \frac{1}{x_1}$

$$\text{Άρα } P = x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot \frac{1}{x_1} = 1$$

$$P = 1 \Rightarrow \frac{\gamma}{a} = 1 \Rightarrow \frac{2\lambda - 8}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 2\lambda - 8 = 2 \Rightarrow 2\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = 5$$

Δραστηριότητες

1) Δίνεται εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις τις $x_1 = 5$ και $x_2 = 4$. Να υπολογίσετε το άθροισμα S και το γινόμενο P των δύο λύσεων.

2) Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 5x + 2 = 0$. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης, χωρίς να τη λύσετε, να υπολογίσετε το άθροισμα και το γινόμενο των λύσεών της.

3) Αν η εξίσωση $x^2 - 7x + 3 = 0$ έχει λύσεις τις x_1, x_2 , χωρίς να τη λύσετε, να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $x_1 + x_2$

(β) $x_1 \cdot x_2$

(γ) $3x_1 + 2x_1x_2 + 3x_2$

(δ) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

4) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 2)x + 2\lambda - 8 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να έχει:

(α) λύση τον αριθμό -2

(β) λύσεις αντίθετες

(γ) λύσεις αντίστροφες

(δ) λύσεις με άθροισμα 10.

2.5 Τριώνυμο

Τριώνυμο δεύτερου βαθμού ονομάζεται κάθε πολυώνυμο της μορφής $ax^2 + bx + \gamma$, όπου $a \neq 0$.

2.6 Ανάλυση τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$ σε γινόμενο παραγόντων

Κάθε τριώνυμο $P(x) = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$ με δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2 μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στη μορφή:

$$P(x) = ax^2 + bx + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Παράδειγμα

Να μετατρέψετε σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων το τριώνυμο: $2x^2 - x - 21$

Λύση

Βρίσκουμε τις ρίζες του τριωνύμου
 $2x^2 - x - 21$ επιλύοντας την εξίσωση
 $2x^2 - x - 21 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-21)}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 168}}{4} = \frac{1 \pm 13}{4} \\ \Rightarrow x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = -3$$

Αντικαθιστούμε στον τύπο
 $ax^2 + bx + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$2x^2 - x - 21 = 2\left(x - \frac{7}{2}\right)(x + 3) \\ = (2x - 7)(x + 3)$$

Δραστηριότητες

1) Να μετατρέψετε σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων τα πιο κάτω τριώνυμα:

(α) $\omega^2 - 15\omega - 16$

(β) $4x^2 - 12x + 9$

2) Να απλοποιήσετε τα πιο κάτω κλάσματα:

(α) $\frac{y^2+8y-9}{y^2+9y}$

(β) $\frac{2x^2-3x-2}{x^2-4x+4}$

3. Μονάδες μέτρησης

3.1 Μονάδες μέτρησης στο μετρικό σύστημα (SI)

Βασικές Μονάδες Μέτρησης στο S.I. (Διεθνές Σύστημα Μονάδων).

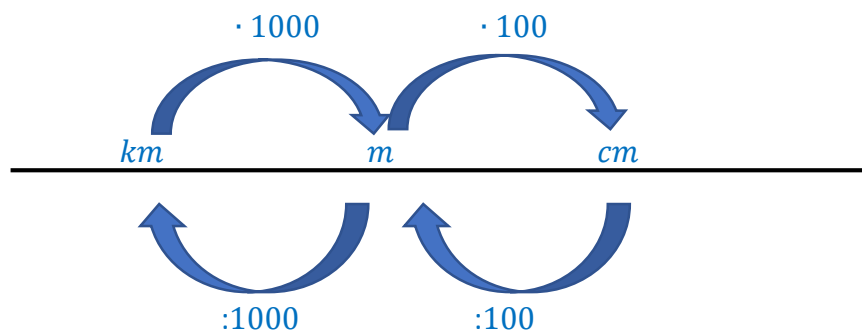
Θεμελιώδης Μέγεθος	Θεμελιώδης Μονάδα
Μήκος	m (μέτρα)
Μάζα	Kg (κιλά)
Χρόνος	s (δευτερόλεπτα)

3.2 Μονάδες μέτρησης μήκους, επιφάνειας και όγκου

Μέτρηση Μήκους

Η βασική μονάδα μέτρησης μήκους στο σύστημα S.I. είναι το μέτρο (m).

Επίσης, ως μονάδες μέτρησης χρησιμοποιούμε τις υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσια του μέτρου, ανάλογα με το πόσο μικρό ή μεγάλο είναι το μήκος που θέλουμε να μετρήσουμε. Για μετατροπές από μία μονάδα μέτρησης σε άλλη μονάδα, μπορεί να μας βοηθήσει το πιο κάτω σχήμα:



Δραστηριότητες

1) Να μετρήσετε το μήκος (α) του τετραδίου σας, (β) του θρανίου σας και (γ) της αίθουσάς σας χρησιμοποιώντας έναν χάρακα ή μία μετροταινία. Να δώσετε την απάντησή σας σε εκατοστόμετρα (cm), μέτρα (m) και χιλιόμετρα (km).

	Εκατοστόμετρα (cm)	Μέτρα (m)	Χιλιόμετρα (km)
Μήκος τετραδίου			
Μήκος θρανίου			
Μήκος αίθουσας			

(α) Ποια μονάδα μέτρησης είναι καταλληλότερη για να εκφράσουμε το μήκος αντικειμένων με μικρές διαστάσεις, όπως το μήκος του τετραδίου ή το μήκος του μολυβιού σας;

(β) Ποια μονάδα μέτρησης είναι καταλληλότερη για να εκφράσουμε το μήκος ενός δωματίου;

(γ) Ποια μονάδα μέτρησης είναι καταλληλότερη για να εκφράσουμε την απόσταση μεταξύ δύο πόλεων;

2) Να βρείτε αντικείμενα της αίθουσάς σας που να έχουν μήκος:

(α) μικρότερο του 1 m

(β) μεγαλύτερο του 1 m

3) Να συμπληρώσετε τα κενά:

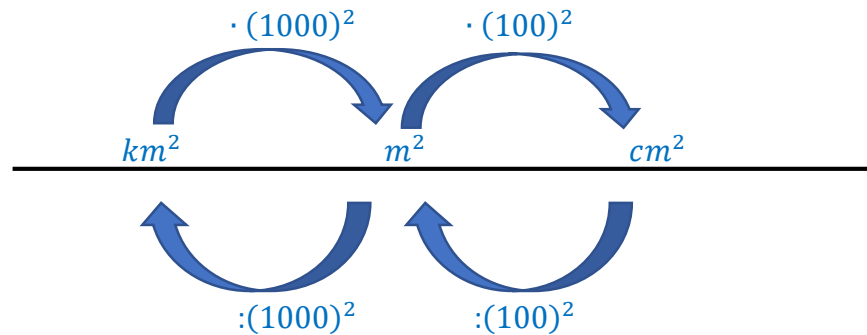
$$2,3\text{ m} = \text{_____}cm$$

$$327\text{ cm} = \text{_____}m$$

$$3,2\text{ km} = \text{_____}m$$

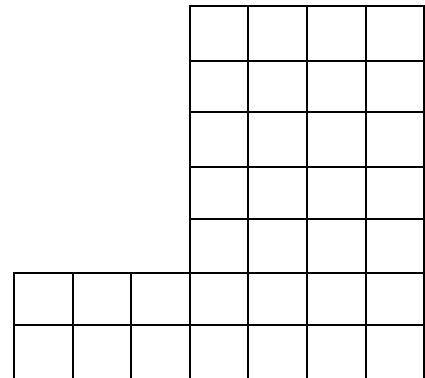
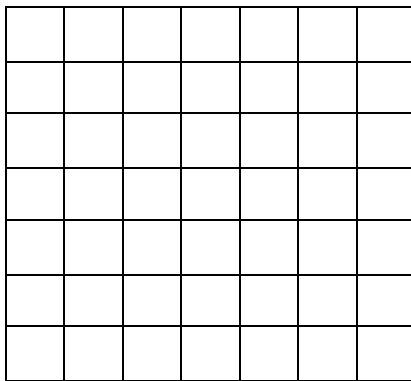
Μέτρηση επιφάνειας

Η βασική μονάδα μέτρησης επιφάνειας στο σύστημα S.I. είναι το τετραγωνικό μέτρο (m^2), το οποίο είναι η επιφάνεια που καλύπτει ένα τετράγωνο με πλευρά 1 m .



Δραστηριότητες

- 1) Να βρείτε το εμβαδόν των πιο κάτω σχημάτων σε cm^2 (κάθε τετραγωνάκι έχει εμβαδόν $1 cm^2$).



- 2) Να συμπληρώσετε τα κενά:

$$4,42 m^2 = \text{_____} cm^2$$

$$8352 cm^2 = \text{_____} m^2$$

$$0,00562 km^2 = \text{_____} m^2$$

Μέτρηση όγκου

Η βασική μονάδα μέτρησης όγκου στο σύστημα S.I. είναι το κυβικό μέτρο (m^3), το οποίο ισούται με τον όγκο που καταλαμβάνει ένας κύβος με πλευρά 1 m .

Θυμίζουμε ότι 1 cm^3 νερού είναι ισοδύναμο με 1 ml νερού άρα ένα κυβικό μέτρο νερού είναι ισοδύναμο με 1000 λίτρα.

Δραστηριότητες

1) Ο κύβος του Rubik αποτελείται από μικρότερους κύβους, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να βρείτε από πόσους μικρούς κύβους αποτελείται η κατασκευή αυτή. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



2) Όταν πρόκειται να βάψουμε μαλλιά, πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί/ές στη δοσολογία του μείγματος που προκύπτει από την ανάμειξη της κρέμας βαφής με το οξυζενέ.

(α) Αν γνωρίζουμε ότι η ποσότητα του οξυζενέ πρέπει να είναι διπλάσια από την ποσότητα της κρέμας βαφής, τι ποσότητα οξυζενέ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, αν χρειαζόμαστε 38 ml κρέμα βαφής;



(β) Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τις δοσολογίες, εάν στο κομμωτήριο δεν έχουμε όργανο μέτρησης ml , αλλά cm^3 ;

3.3 Μονάδες μέτρησης τόξων, γωνιών, μάζας και βάρους

Μέτρηση τόξων και γωνιών

Η μέτρηση των γωνιών γίνεται με το μοιρογνωμόνιο (γεωμετρικό όργανο).

Ο αριθμός που προκύπτει από τη μέτρηση ονομάζεται μέτρο γωνίας.

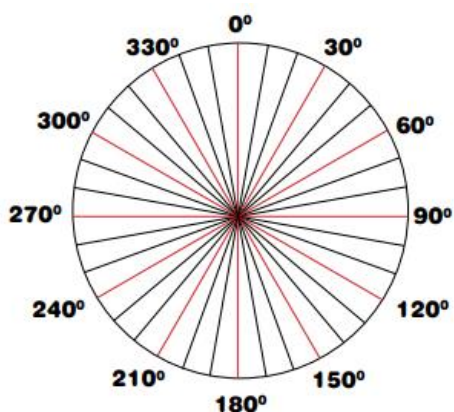
Αν χωρίσουμε έναν κύκλο σε 360 ίσα τόξα, τότε το κάθε ένα από αυτά λέγεται **τόξο μίας μοίρας** (1°) και είναι η μονάδα μέτρησης των τόξων. Μία μοίρα χωρίζεται σε **60 πρώτα λεπτά** ($60'$) και κάθε πρώτο λεπτό σε **60 δεύτερα λεπτά** ($60''$). Δηλαδή:

$$1^\circ = 60'$$

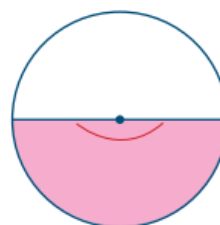
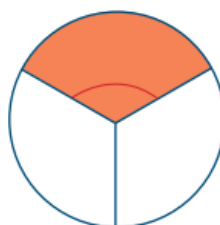
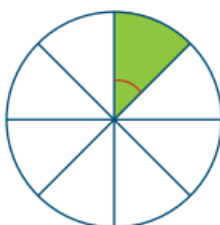
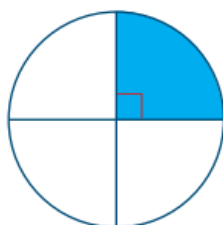
$$1' = 60''$$

Δραστηριότητες

1) Οι Αρχαίοι Βαβυλώνιοι χώρισαν τον κυκλικό δίσκο σε 360 ίσους κυκλικούς τομείς. Ονόμασαν τον κάθε κυκλικό τομέα **μοίρα**.



Να γράψετε με πόσες μοίρες ισούται καθεμία από τις πιο κάτω γωνίες:



2) Να βρείτε το μέτρο της κάθε γωνίας:

$$\hat{BA\theta} = \underline{\hspace{2cm}}$$

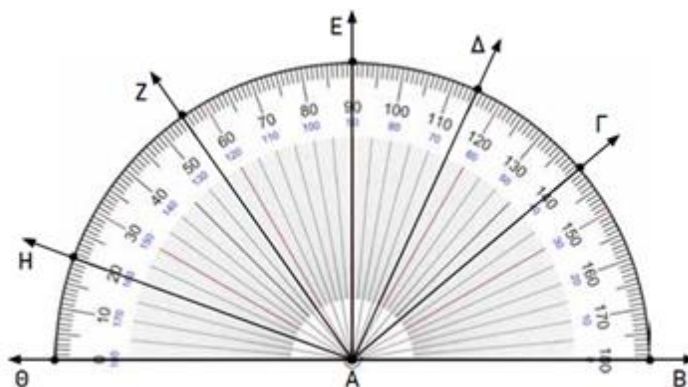
$$\hat{BAZ} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\hat{HAZ} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\hat{\theta A\Delta} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\hat{EA\Delta} = \underline{\hspace{2cm}}$$

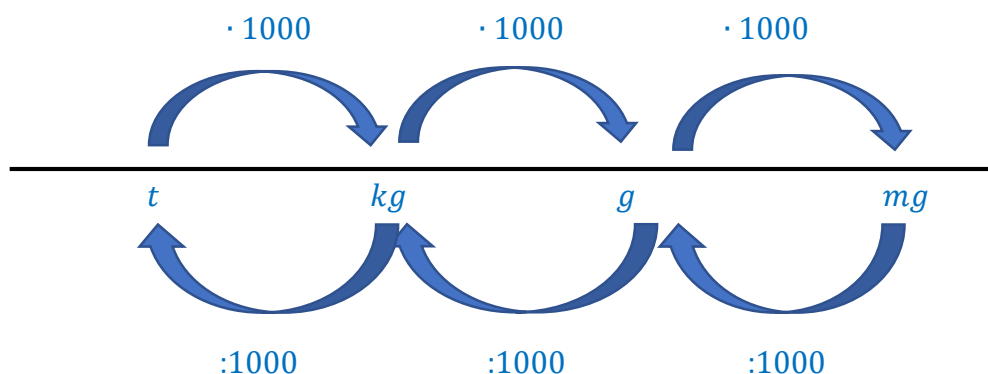
$$\hat{\Gamma AH} = \underline{\hspace{2cm}}$$



Μέτρησης μάζας και βάρους

Ως μονάδα μέτρησης μάζας χρησιμοποιείται το **γραμμαρίο** (g). Τα κυριότερα πολλαπλάσια του γραμμαρίου είναι το **χιλιόγραμμα** ή **κιλό** (kg) και ο **τόνος** (t).

Η κυριότερη υποδιαίρεση του γραμμαρίου είναι το **χιλιοστόγραμμα** (mg).



Η μονάδα μέτρησης του βάρους είναι το Newton (N). Έτσι, όταν λέμε ότι ένα αντικείμενο έχει βάρος 3 κιλά, στην πραγματικότητα η μάζα του αντικειμένου είναι $3kg$, ενώ το πραγματικό του βάρος είναι: $B = m \cdot g = 3kg \cdot 10 \frac{m}{s} = 30N$

Δραστηριότητες

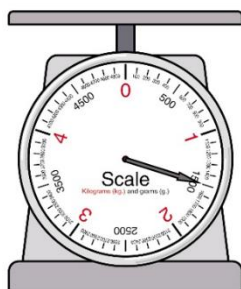
1) Να εκτιμήσετε τη μάζα (σε g και kg) των αντικειμένων που αναφέρονται στον πιο κάτω πίνακα:

Αντικείμενο	Μάζα (g)	Μάζα (kg)
Ένα πολυμίξερ		
Ένα πακέτο αλεύρι		
Ένα κουταλάκι κανέλλα		

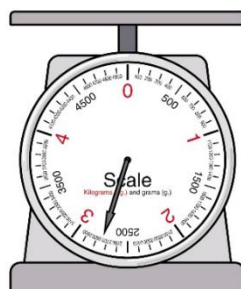
2) Από τα πιο κάτω αντικείμενα να βάλετε σε κύκλο εκείνα που ζυγίζουν περισσότερο από ένα κιλό:



3) Να γράψετε την ένδειξη κάθε ζυγαριάς που φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα, σε κιλά (kg) και σε γραμμάρια (gr):



_____ kg
 _____ g



_____ kg
 _____ g

4) Να συμπληρώσετε τα κενά:

$$3,2 \text{ kg} = \text{_____ } g$$

$$2725 \text{ mg} = \text{_____ } g$$

$$0,41 \text{ g} = \text{_____ } mg$$

$$1,67 \text{ t} = \text{_____ } kg$$

3.4 Μετατροπές μονάδων

1) Αν η απόσταση από τη Λεμεσό στην Πάφο είναι 68000 m , να τη μετατρέψετε σε km .

2) Ο κύριος Άγγελος έχει μία ζυγαριά ακριβείας στο ζαχαροπλαστείο του. Η ζυγαριά χάλασε και δείχνει τις μετρήσεις μόνο σε κιλά, ενώ οι συνταγές του είναι σε γραμμάρια. Να μετατρέψετε τις ποσότητες των πιο κάτω υλικών από γραμμάρια σε κιλά, ώστε να μπορέσει να φτιάξει τη συνταγή:

(α) 1200 γραμμάρια αλεύρι



(β) 200 γραμμάρια ζάχαρη

(γ) 90 γραμμάρια σταφίδες

3) Η δοσολογία για τη χορήγηση ενός φαρμάκου δίνεται σε *ml*. Στο νοσοκομείο διαθέτουν και όργανο μέτρησης σε κυβικά εκατοστά. Να μετατρέψετε τις ακόλουθες ποσότητες από cm^3 σε *ml*:

(α) 5 cm^3

(β) $20,5\text{ cm}^3$

4) Μία αμαξοστοιχία διανύει την απόσταση Αθήνας - Πύργου σε 4 ώρες και 43 λεπτά. Αν η αμαξοστοιχία ξεκινά από την Αθήνα στις 9:20 π.μ., ποια ώρα θα φτάσει στον Πύργο;



5) Ένας οινοπαραγωγός έχει αποθηκεύσει το κρασί του σε τρεις ίσες δεξαμενές σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, με διαστάσεις 3 m , 2 m και 5 m . Αν πουλήσει το κρασί του προς €4 το λίτρο, πόσα χρήματα θα εισπράξει;

6) Η κυρία Μάρω, καθώς έφτιαχνε ένα κέικ, ξέχασε να ζυγίσει το αλεύρι και το έριξε κατευθείαν στο δοχείο ανάμειξης. Το δοχείο είχε ήδη μέσα 300 γραμμάρια ζάχαρη. Το δοχείο με το αλεύρι και τη ζάχαρη ζυγίζει 1 κιλό και 40 γραμμάρια. Η κυρία Μάρω γνωρίζει ότι το δοχείο ζυγίζει 120 γραμμάρια. Μπορείτε να υπολογίσετε πόσο ζυγίζει το αλεύρι;



4. Τριγωνομετρία

4.1. Εμβαδόν τριγώνου

Θεώρημα: Το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με το ημιγινόμενο των μηκών δύο πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχόμενης γωνίας του. Δηλαδή, σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$E = \frac{\beta\gamma\eta\mu A}{2}, \quad E = \frac{\alpha\gamma\eta\mu B}{2}, \quad E = \frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2}$$

Σημείωση: Οι πιο πάνω τύποι μπορούν να γραφτούν και στη μορφή:

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A, \quad E = \frac{1}{2}\alpha\gamma\eta\mu B, \quad E = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$$

Παράδειγμα

Να βρείτε το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ στο οποίο $\beta = 10 \text{ cm}$, $\gamma = 7 \text{ cm}$ και $\hat{A} = 30^\circ$.

Λύση:

$$E = \frac{\beta\gamma\eta\mu A}{2} = \frac{10 \cdot 7 \cdot \eta\mu 30^\circ}{2} = 17,5 \text{ cm}^2$$

Δραστηριότητες

1) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με $\alpha = 5 \text{ cm}$, $\beta = 4 \text{ cm}$ και $\hat{\Gamma} = 45^\circ$.

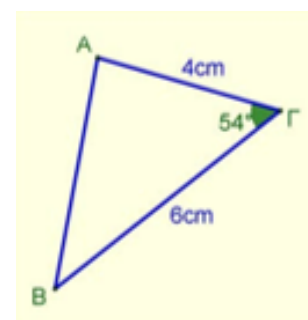
2) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με $\alpha = 4 \text{ cm}$, $\gamma = 3 \text{ cm}$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

3) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς γ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με $E = 4 \text{ cm}^2$, $\beta = 2 \text{ cm}$ και $\hat{A} = 30^\circ$.

4) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς β ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με $E = 3\sqrt{2} \text{ cm}^2$, $\gamma = 3 \text{ cm}$ και $\hat{A} = 45^\circ$.

5) Να υπολογίσετε το ημίτονο της γωνίας Γ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με $E = 5 \text{ cm}^2$, $\alpha = 4 \text{ cm}$ και $\beta = 10 \text{ cm}$.

6) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πιο κάτω τριγώνου.



5. Θεώρημα του Θαλή – Ομοιότητα

5.1 Υπενθύμιση βασικών όρων, εννοιών και θεωρημάτων της Γεωμετρίας

Εχουμε μάθει να:

- αναγνωρίζουμε σχέσεις μεταξύ δύο γωνιών (συμπληρωματικές, παραπληρωματικές, εφεξής, κατά κορυφήν γωνίες)
- ορίζουμε τις παράλληλες ευθείες
- αναφέρουμε ότι δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες
- αναγνωρίζουμε ζεύγη ίσων ή παραπληρωματικών γωνιών που δημιουργούνται όταν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μία τρίτη, ονομάζουμε τα ζεύγη αυτά και τα χρησιμοποιούμε κατάλληλα ως κριτήρια παραλληλίας δύο ευθειών.

5.2 Αναλογίες – Κλίμακα χάρτη

Λόγος

Δραστηριότητες

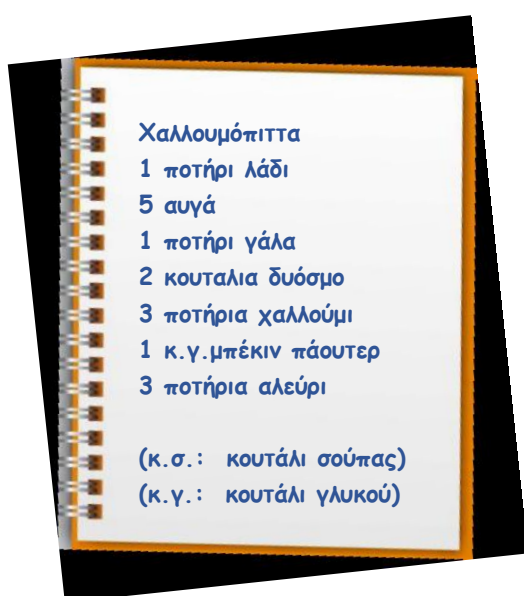
1) Για την πιο κάτω συνταγή χαλλουμόπιττας, να γράψετε και να ερμηνεύσετε:

(α) τον λόγο της ποσότητας του λαδιού προς την ποσότητα του γάλακτος,

(β) τον λόγο της ποσότητας του γάλακτος προς την ποσότητα του χαλλουμιού,

(γ) τον λόγο της ποσότητας του χαλλουμιού προς την ποσότητα του γάλακτος,

(δ) τον λόγο της ποσότητας του αλευριού προς την ποσότητα του γάλακτος.



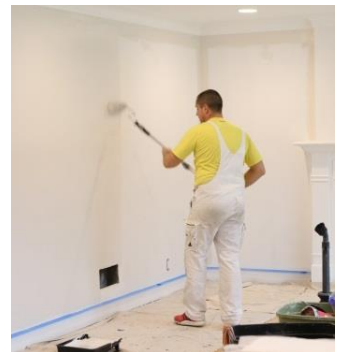
2) Όταν πρόκειται να βάψουμε μαλλιά, πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί/ές στη δοσολογία του μείγματος που προκύπτει από την ανάμειξη της κρέμας βαφής με το οξυζενέ.

(α) Αν αναμείξουμε κρέμα βαφής με οξυζενέ σε αναλογία 1: 2, τι ποσότητα οξυζενέ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, αν χρειαζόμαστε 38 *ml* κρέμα βαφής;

(β) Αν έχουμε μόνο 60 *ml* οξυζενέ, τι ποσότητα βαφής πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;

(γ) Αν ο λόγος της κρέμας βαφής προς οξυζενέ είναι 1: 1,5 , τι ποσότητα οξυζενέ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, αν χρειαζόμαστε 50 *ml* κρέμα βαφής;

3) Ο Ανδρέας αποφάσισε να βάψει το δωμάτιό του, έκανε μόνος του την ανάμειξη των χρωμάτων ώστε να φτιάξει μία συγκεκριμένη απόχρωση του γαλάζιου. Ανάμειξε 6 λίτρα μπλε μπογιά με 9 λίτρα άσπρη μπογιά. Η μπογιά που έφτιαξε δεν ήταν αρκετή και έφτιαξε νέο μείγμα, στο οποίο ανάμειξε 4 λίτρα μπλε μπογιά με 7 λίτρα άσπρη μπογιά. Να εξετάσετε αν ο Ανδρέας πέτυχε τη δεύτερη φορά να φτιάξει την ίδια απόχρωση του γαλάζιου με την αρχική.



4) Ένα ζαχαροπλαστείο κατασκευάζει ένα συγκεκριμένο είδος τούρτας με βάση τετράγωνο, όπως φαίνεται πιο κάτω. Η μικρή τούρτα (A) έχει πλευρά 20 cm και η μεγάλη τούρτα (B) έχει πλευρά 40 cm .



(α) Να βρείτε τον λόγο της πλευράς της βάσης της τούρτας (A) προς την πλευρά της βάσης της τούρτας (B).

(β) Αν γύρω από κάθε τούρτα τοποθετείται διακοσμητική κορδέλα, ποιος είναι ο λόγος του μήκους της κορδέλας της τούρτας (A) προς το μήκος της κορδέλας της τούρτας (B);

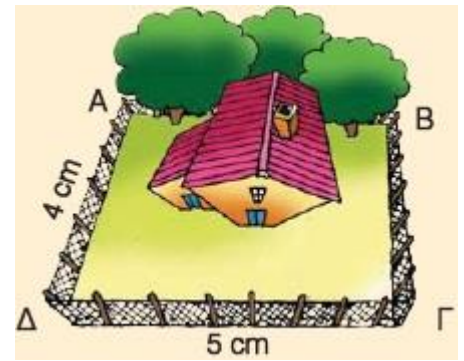
(γ) Να βρείτε τον λόγο του εμβαδού της βάσης της τούρτας (A) προς το εμβαδόν της βάσης της τούρτας (B).

5) Για το πιο κάτω σχέδιο, να χρησιμοποιήσετε την κλίμακα που δίνεται για να υπολογίσετε τις πραγματικές διαστάσεις του υπνοδωματίου και του σαλονιού. Η Βαρβάρα ισχυρίζεται ότι το εμβαδόν του σαλονιού είναι 6 m^2 , ενώ το εμβαδόν του υπνοδωματίου είναι 10 m^2 . Είναι ορθός ο ισχυρισμός της; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



κλίμακα 1: 100

6) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η αεροφωτογραφία ενός αγροκτήματος που έχει σχήμα ορθογώνιο και έχει περιφραχτεί με συρματοπλέγμα μήκους 270 m . Να βρείτε τις πραγματικές διαστάσεις του αγροκτήματος αφού βρείτε την κλίμακα της αεροφωτογραφίας.



Διερεύνηση – Ιδιότητες Αναλογιών

Δίνονται οι αριθμοί 1, 3, 4 και 12. Να γράψετε διαφορετικές αναλογίες με τους πιο πάνω αριθμούς στην 1η στήλη του πίνακα. Να υπολογίσετε και να συγκρίνετε το γινόμενο των άκρων και το γινόμενο των μέσων όρων κάθε αναλογίας. Να δημιουργήσετε έναν νέο λόγο προσθέτοντας τους ηγούμενους όρους μεταξύ τους και τους επόμενους όρους μεταξύ τους και να τον συγκρίνετε με τους αρχικούς λόγους κάθε αναλογίας.

ΑΝΑΛΟΓΙΑ		Γινόμενο άκρων όρων	Γινόμενο μέσων όρων	Να προσθέσετε του ηγούμενους όρους μεταξύ τους και τους επόμενους όρους μεταξύ τους
$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$		$\alpha \cdot \delta$	$\beta \cdot \gamma$	$\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$
A	_____ = _____			
B	_____ = _____			
Γ	_____ = _____			
Δ	_____ = _____			

Να γράψετε μία άλλη αναλογία και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματά σας.

Δραστηριότητες

1) Στις πιο κάτω αναλογίες, να υπολογίσετε τα x , y και ω :

(α) $\frac{x}{3} = \frac{2}{21}$

(β) $\frac{y+1}{4} = \frac{3}{8}$

(γ) $\frac{\omega-4}{2} = \frac{\omega+5}{3}$

2) Στην αναλογία $\frac{x}{2} = \frac{y}{9} = \frac{\omega}{4}$ να βρείτε τις τιμές των x , y και ω , όταν $x + y + \omega = 75$

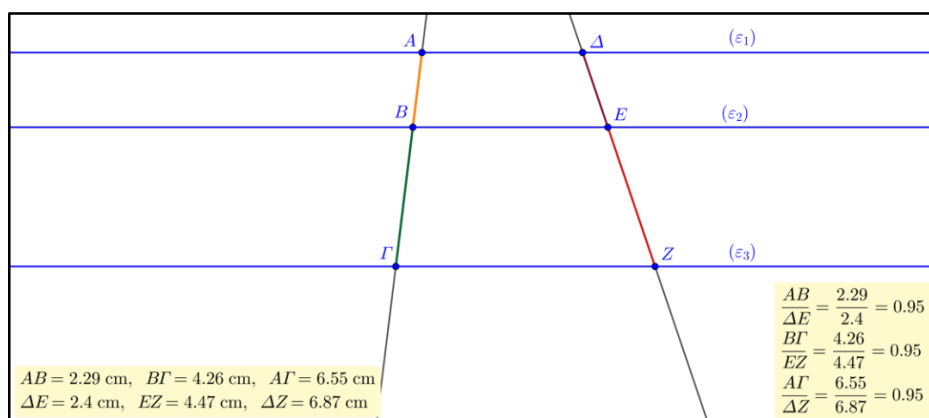
5.3 Θεώρημα του Θαλή

Διερεύνηση 1

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «[ALyk_En06_TheorimaThali.ggb](#)».

Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{AB}{\Delta E}$, $\frac{B\Gamma}{EZ}$, $\frac{A\Gamma}{\Delta Z}$.

(α) Ποια σχέση συνδέει τους πιο πάνω λόγους;

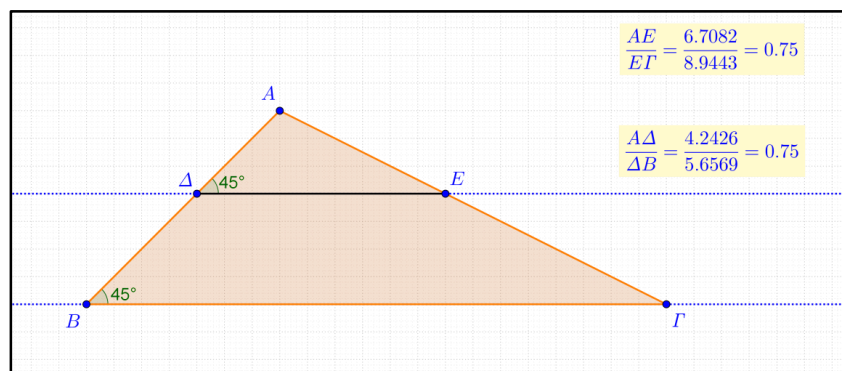


(β) Να μετατοπίσετε παράλληλα κάποια / κάποιες από τις ευθείες (ε_1) , (ε_2) , (ε_3) και να εξετάσετε κατά πόσον η σχέση που βρήκατε στο πρώτο ερώτημα συνεχίζει να ισχύει.

(γ) Να μετακινήσετε κάποιο / κάποια από τα σημεία A , Γ , Δ , Z και να εξετάσετε κατά πόσο η σχέση που βρήκατε στο πρώτο ερώτημα συνεχίζει να ισχύει.

Διερεύνηση 2

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «ALyk_En06_ThalisTrigono.ggb».

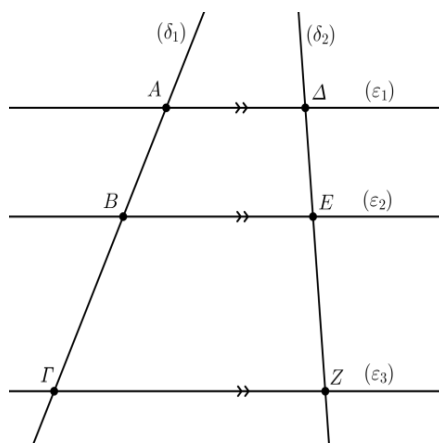


- Να μετακινήσετε τα σημεία Δ και E σε διάφορες θέσεις. Τι παρατηρείτε όταν $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{EG}$;
- Να εξετάσετε κατά πόσο η παρατήρησή σας ισχύει και σε άλλα τρίγωνα.

Θεώρημα του Θαλή

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη μία ευθεία είναι ανάλογα με τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται πάνω στην άλλη ευθεία.

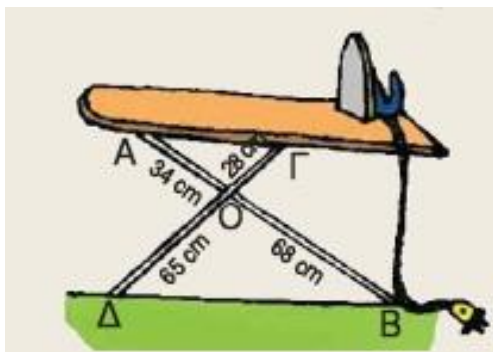
Έστω $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$. Τότε $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$.



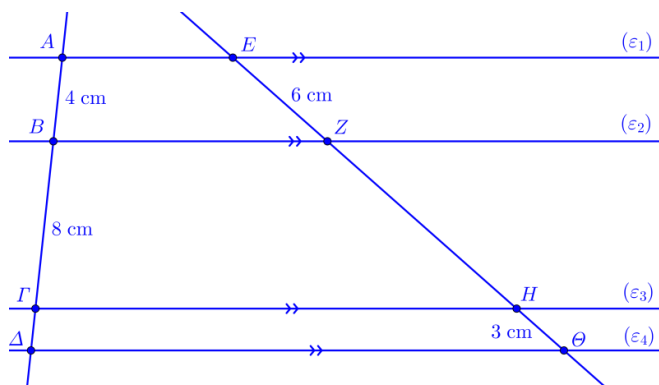
Ισχύει και το **αντίστροφο** του Θεωρήματος του Θαλή.

Δραστηριότητες

1) Κάποιος συναρμολόγησε μία πτυσσόμενη σιδερώστρα, όπως φαίνεται στο σχήμα, και διαπίστωσε ότι η σανίδα δεν ήταν οριζόντια. Πού έγινε το λάθος κατά τη συναρμολόγηση;

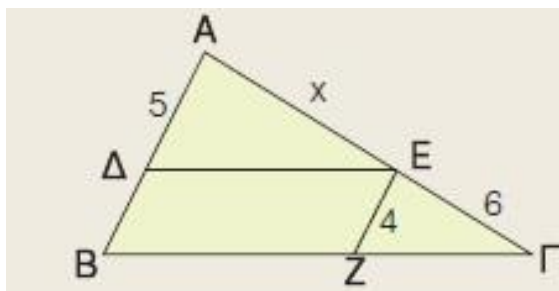


2) Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται ότι $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3) \parallel (\varepsilon_4)$, $AB = 4 \text{ cm}$, $B\Gamma = 8 \text{ cm}$, $EZ = 6 \text{ cm}$ και $H\theta = 3 \text{ cm}$.

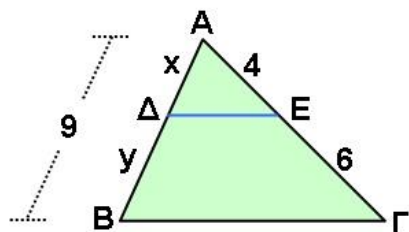


Να υπολογίσετε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων ZH και $\Gamma\Delta$.

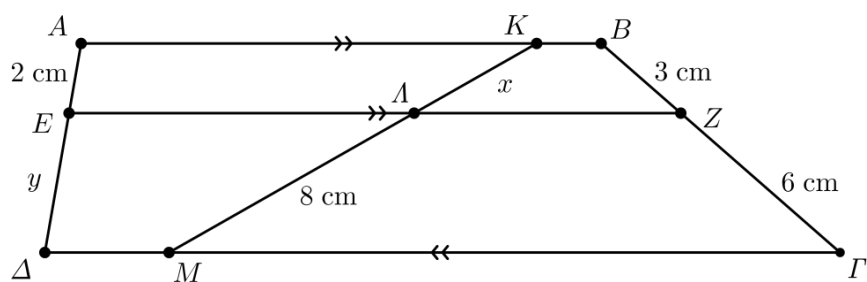
3) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$, $EZ \parallel AB$. Να υπολογίσετε το μήκος x .



4) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 9\text{ cm}$, $AE = 4\text{ cm}$ και $E\Gamma = 6\text{ cm}$. Αν $\Delta E \parallel B\Gamma$ να υπολογίσετε τα x και y .



5) Να υπολογίσετε τα μήκη x και y στο πιο κάτω σχήμα.



6) Μπορείτε να παρακολουθήσετε ένα βίντεο με πρακτικές εφαρμογές του Θεωρήματος του Θαλή στο: https://youtu.be/VJngC0_6iws

5.4 Όμοια σχήματα

Διερεύνηση 1

Ένας φωτογράφος χρησιμοποιεί μία συγκεκριμένη κλίμακα για τη δημιουργία φωτογραφιών, όπως φαίνεται στις πιο κάτω φωτογραφίες (η μικρότερη φωτογραφία έχει μήκος 6 cm και πλάτος 4 cm).



$6\text{ cm} \times 4\text{ cm}$ $9\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ $12\text{ cm} \times 8\text{ cm}$ $18\text{ cm} \times 12\text{ cm}$

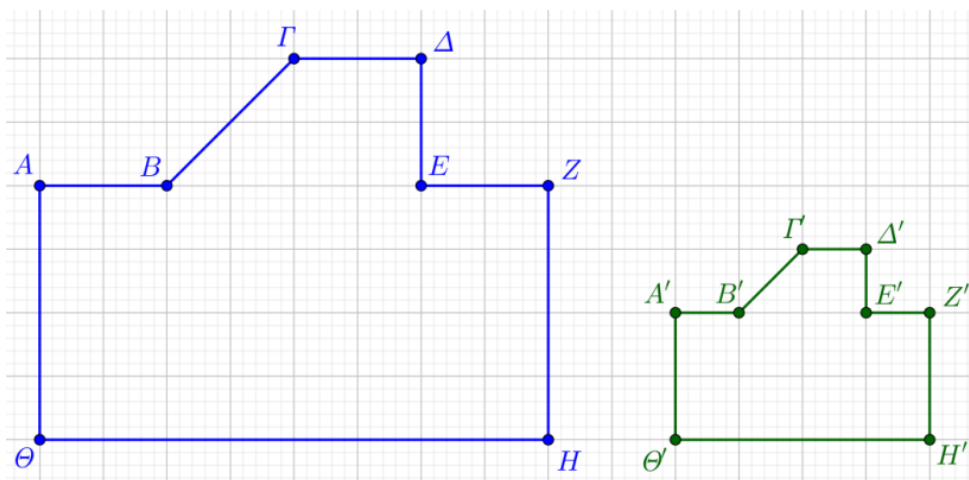
(α) Αν το μήκος μίας φωτογραφίας είναι 24 cm , πόσο θα είναι το αντίστοιχο πλάτος της;

(β) i. Αν το πλάτος μίας φωτογραφίας είναι 10 cm , πόσο θα είναι το μήκος της;

ii. Αν διπλασιάσουμε το μήκος, αλλά αφήσουμε το πλάτος σταθερό, να υπολογίσετε τον λόγο του μήκους προς το πλάτος. Τι παρατηρείτε;

Διερεύνηση 2

Στο πιο κάτω σχήμα φαίνονται δύο πολύγωνα.



- Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

Μπλε Πολύγωνο	Πράσινο Πολύγωνο	$\frac{\text{Μπλε Πολύγωνο}}{\text{Πράσινο Πολύγωνο}}$
$A\Theta =$	$A'\Theta' =$	$\frac{A\Theta}{A'\Theta'} =$
$AB =$	$A'B' =$	$\frac{AB}{A'B'} =$
$\Theta H =$	$\Theta'H' =$	$\frac{\Theta H}{\Theta'H'} =$
$B\Gamma =$	$B'\Gamma' =$	$\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} =$
$\theta \hat{A} B =$	$\theta' \hat{A}' B' =$	
$A \hat{B} \Gamma =$	$A' \hat{B}' \Gamma' =$	
$B \hat{\Gamma} \Delta =$	$B' \hat{\Gamma}' \Delta' =$	
$E \hat{Z} H =$	$E' \hat{Z}' H' =$	

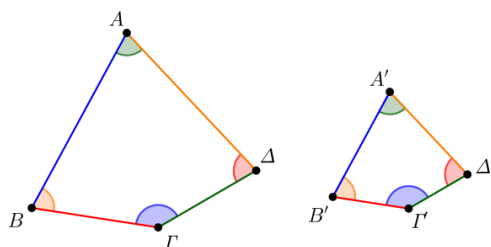
- Να κάνετε μία εικασία για τη σχέση που συνδέει το μέτρο των αντίστοιχων γωνιών σε πολύγωνα όπως τα πιο πάνω.
- Να κάνετε μία εικασία για τη σχέση που συνδέει τα μήκη των αντίστοιχων πλευρών σε πολύγωνα όπως τα πιο πάνω.

Ορισμός: Δύο πολύγωνα λέγονται **όμοια**, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Συμβολίζουμε τη σχέση ομοιότητας δύο πολυγώνων με το σύμβολο ομοιότητας $\approx$.

- **Ομόλογες πλευρές** δύο πολυγώνων λέγονται οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες.
- Οι κορυφές των ίσων γωνιών δύο όμοιων πολυγώνων λέγονται **αντίστοιχες κορυφές**.

Για παράδειγμα, τα πιο κάτω πολύγωνα $AB\Gamma\Delta$ και $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι όμοια.



Δηλαδή, $AB\Gamma\Delta \approx A'B'\Gamma'\Delta'$ και ισχύει:

- $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{A\Delta}{A'\Delta'}$
- $\hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma'}, \hat{\Delta} = \hat{\Delta}'$

Λόγος ομοιότητας δύο όμοιων πολυγώνων είναι ο λόγος δύο ομόλογων πλευρών τους.

Ο λόγος ομοιότητας συμβολίζεται με λ .

5.5 Όμοια τρίγωνα

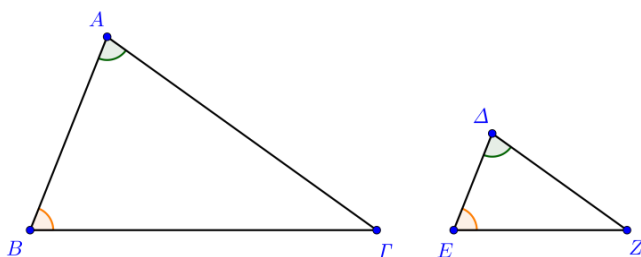
Ορισμός: Δύο τρίγωνα λέγονται **όμοια**, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από τις ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια, αν ισχύει ένα από τα πιο κάτω κριτήρια:

1^ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

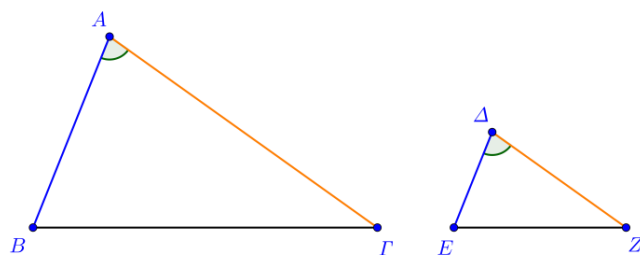
Για παράδειγμα, αν για τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ ισχύει ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$ και $\hat{B} = \hat{E}$, τότε $\triangle AB\Gamma \approx \triangle \Delta EZ$.



2^ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.

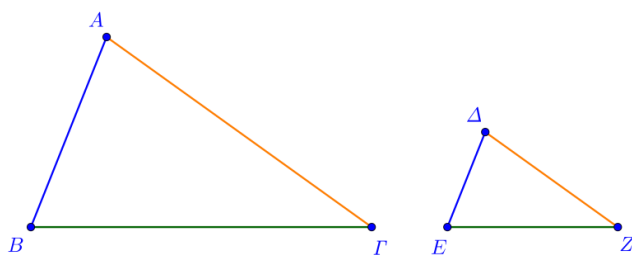
Για παράδειγμα, αν για τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ ισχύει ότι $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$, τότε $\triangle AB\Gamma \approx \triangle \Delta EZ$.



3^ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια.

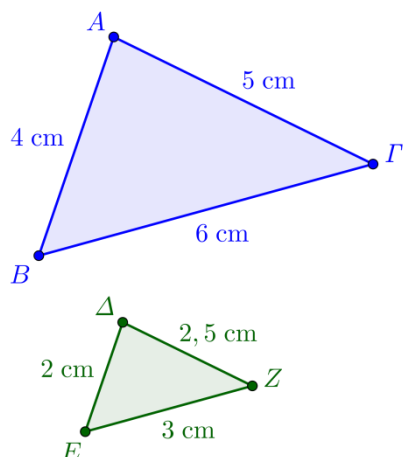
Για παράδειγμα, αν για τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ ισχύει ότι $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}$, τότε $\triangle AB\Gamma \approx \triangle \Delta EZ$.



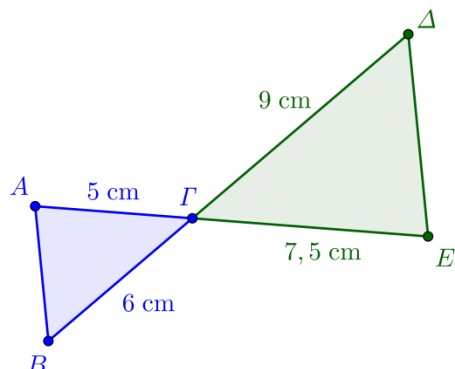
Δραστηριότητες

1) Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα σε κάθε ζεύγος πιο κάτω, είναι όμοια, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

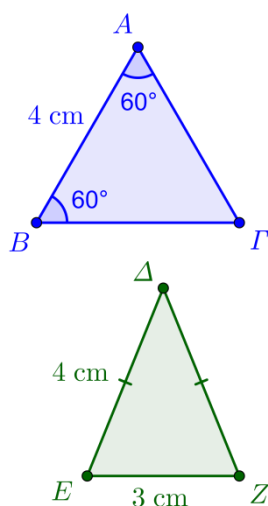
(α)



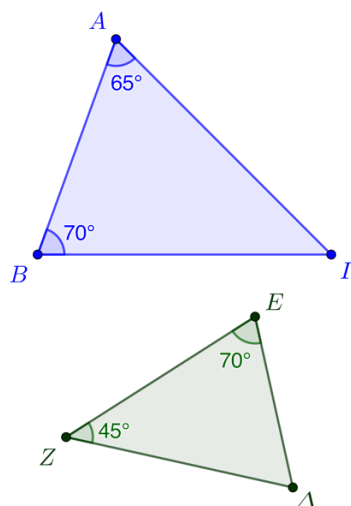
(β)



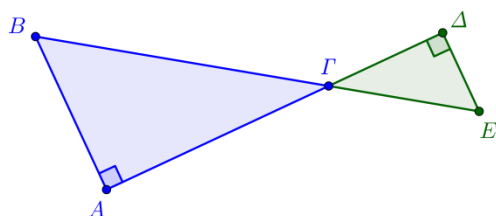
(γ)



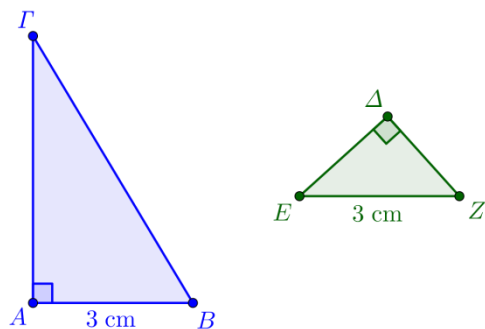
(δ)



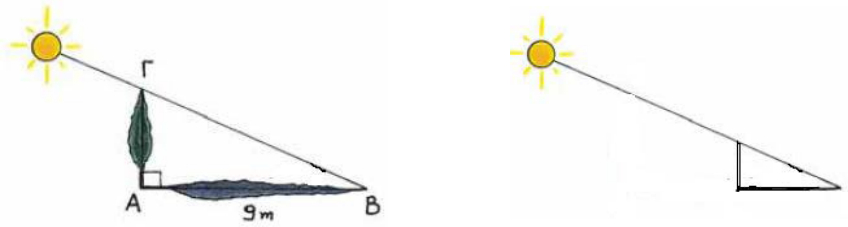
(ε)



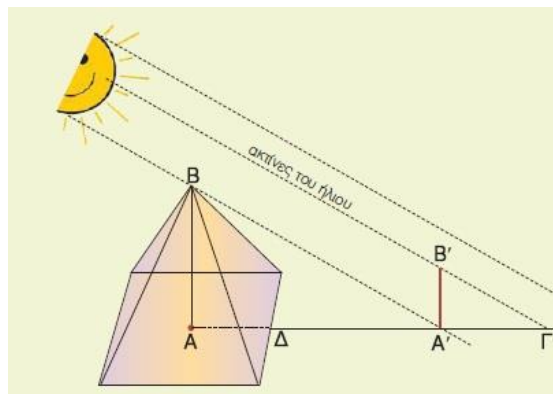
(στ)



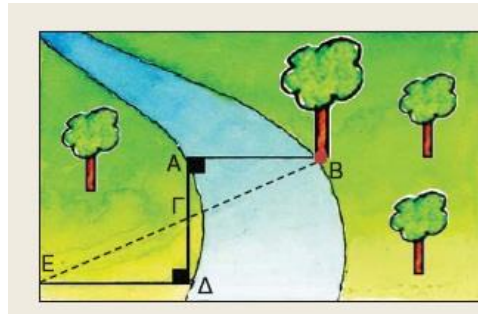
2) Ένας εργάτης του δήμου, για να υπολογίσει το ύψος ενός κυπαρισσιού, τοποθέτησε ένα κοντάρι μήκους 1 m στο έδαφος και μέτρησε τη σκιά του, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Αν τη συγκεκριμένη στιγμή, το μήκος της σκιάς του κονταριού ήταν $1,5\text{ m}$ και το μήκος της σκιάς του δέντρου ήταν 9 m , ποιο ήταν το ύψος του κυπαρισσιού;



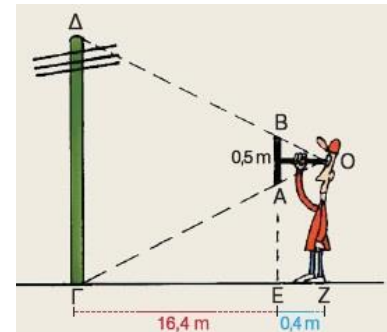
3) Με βάση το πιο κάτω σχήμα, πώς θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το ύψος της πυραμίδας αν γνωρίζουμε ότι η απόσταση $A'A$ είναι 100 m , το μήκος του ραβδιού $A'B'$ είναι 1 m και η σκιά του ραβδιού $A'Γ'$ είναι $1,5\text{ m}$;



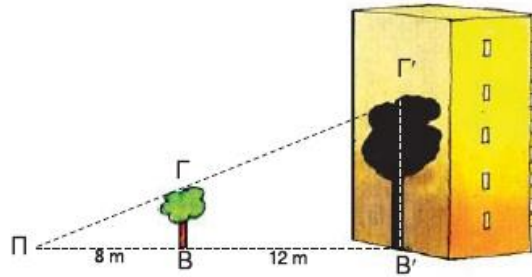
- 4) Να υπολογίσετε το πλάτος AB ενός ποταμού αν $AG = 12\text{ m}$, $GD = 15\text{ m}$, $ED = 60\text{ m}$ και $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, όπως φαίνεται στην πιο κάτω εικόνα.



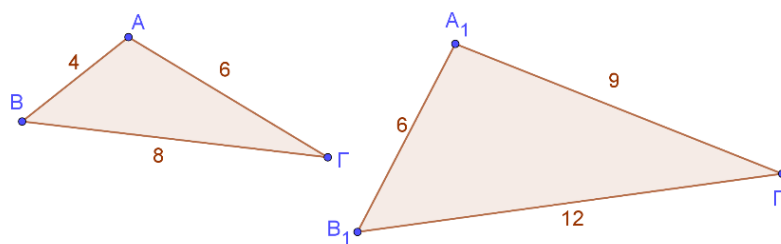
- 5) Μπροστά στο μάτι μας και σε απόσταση $0,4\text{ m}$ κρατάμε κατακόρυφα ένα ραβδί $AB = 0,5\text{ m}$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Αν μετακινηθούμε και σταθούμε σε ένα σημείο Z τέτοιο, ώστε οι ευθείες OA, OB να καταλήγουν στη βάση και στην κορυφή της κεραίας ενός ραδιοφωνικού σταθμού, διαπιστώνουμε ότι η απόστασή μας από την κεραία είναι $GZ = 16,8\text{ m}$. Να υπολογίσετε το ύψος της κεραίας;



6) Ένας προβολέας Π βρίσκεται στο έδαφος και φωτίζει ένα δέντρο $B\Gamma$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Η σκιά του δέντρου στο απέναντι κτίριο φτάνει μέχρι την οροφή του 4^{ου} ορόφου. Αν το ισόγειο και κάθε όροφος έχουν ύψος 3 m και η απόσταση του δέντρου από τον προβολέα είναι 8 m , ενώ από το κτίριο είναι 12 m , να υπολογίσετε το ύψος του δέντρου.

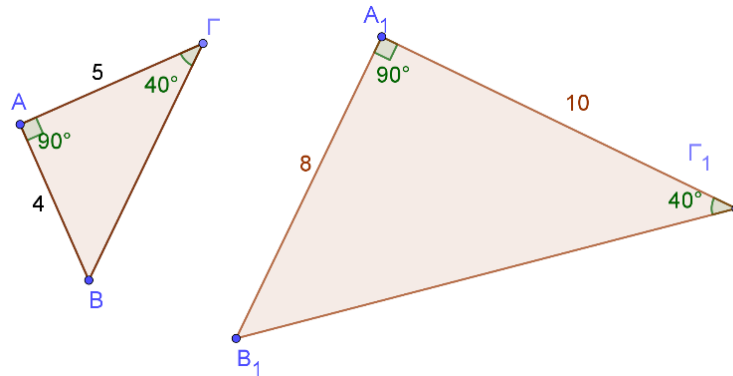


7) Να εξετάσετε αν τα πιο κάτω τρίγωνα είναι όμοια. Ακολουθώντας, να βρείτε τον λόγο ομοιότητας τους.



Ποιος είναι ο λόγος των περιμέτρων τους; Τι συμπεραίνετε;

8) Να εξετάσετε αν τα πιο κάτω τρίγωνα είναι όμοια. Ακολουθώς, να βρείτε τον λόγο ομοιότητάς τους.



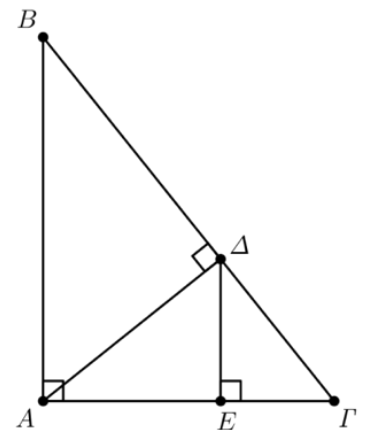
Ποιος είναι ο λόγος των εμβαδών τους; Τι συμπεραίνετε;

9) Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), $A\Delta$ ύψος και $\Delta E \perp A\Gamma$ (E σημείο στην $A\Gamma$).

Να δείξετε ότι:

(α) τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta E$ είναι όμοια

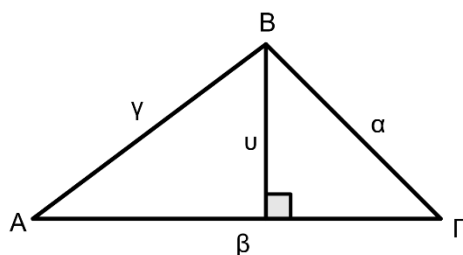
(β) $(A\Delta)^2 = (AB)(\Delta E)$.



6. Εμβαδόν και περίμετρος επίπεδων σχημάτων

6.1 Τρίγωνο

Υπενθυμίζουμε τους τύπους που δίνουν την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου, καθώς και το Πυθαγόρειο Θεώρημα που ισχύει στα ορθογώνια τρίγωνα.

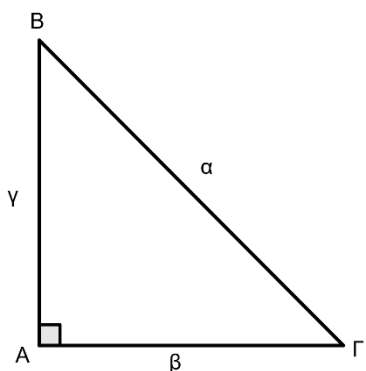


$$\Pi_{\text{τριγώνου}} = \alpha + \beta + \gamma$$

$$E_{\text{τριγώνου}} = \frac{\beta \cdot u}{2}$$

Πυθαγόρειο Θεώρημα (Π.Θ.)

Σε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του μήκους της υποτείνουσας πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των δύο κάθετων πλευρών του.



$$\text{Πυθαγόρειο Θεώρημα: } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Δραστηριότητα

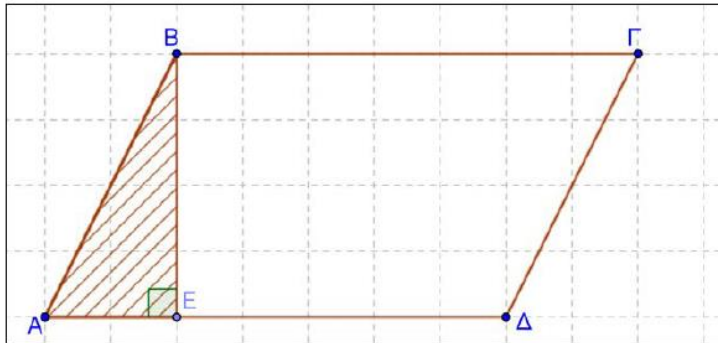
Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν ενός ορθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$), με $AB = 6\text{cm}$ και $B\Gamma = 10\text{cm}$.

6.2 Παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Παραλληλόγραμμο

Διερεύνηση

Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$.



(α) Να μετακινήσετε το τρίγωνο ABE με τον κατάλληλο τρόπο ώστε να σχηματίσετε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

(β) Να συγκρίνετε το εμβαδόν των δύο σχημάτων.

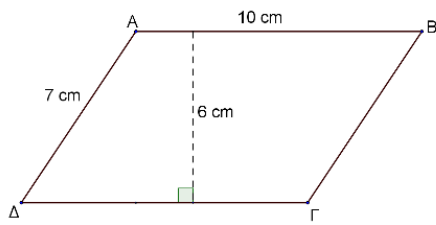
(Υπενθυμίζουμε ότι δύο επίπεδα σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν λέγονται **ισοδύναμα** ή **ισεμβαδικά**).

(γ) Να βρείτε έναν τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού του παραλληλογράμμου.

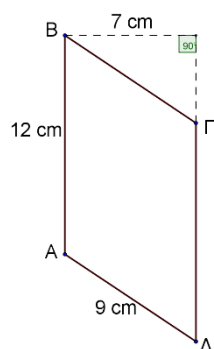
Δραστηριότητα

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρό τους.

(α)

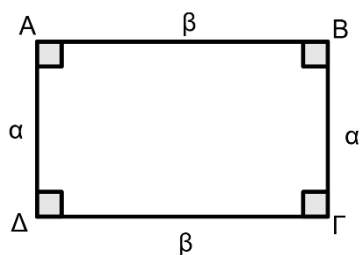


(β)



Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο

Υπενθυμίζουμε τους τύπους που δίνουν την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου.



$$Π_{ορθογωνίου} = 2α + 2β = 2(α + β)$$

$$Ε_{ορθογωνίου} = α \cdot β$$

Δραστηριότητα

Ένα γήπεδο ποδοσφαίρου έχει μήκος 110 m και πλάτος 70 m.

Ένας ποδοσφαιριστής έτρεξε 5 φορές γύρω από το γήπεδο για προθέρμανση. Να υπολογίσετε τη συνολική απόσταση που διένυσε.



Εφαρμογές στην εργασία

Οι οικοδόμοι θέλουν να επιβεβαιώσουν ότι μία κατασκευή σχήματος τετραπλεύρου είναι ορθογώνια.



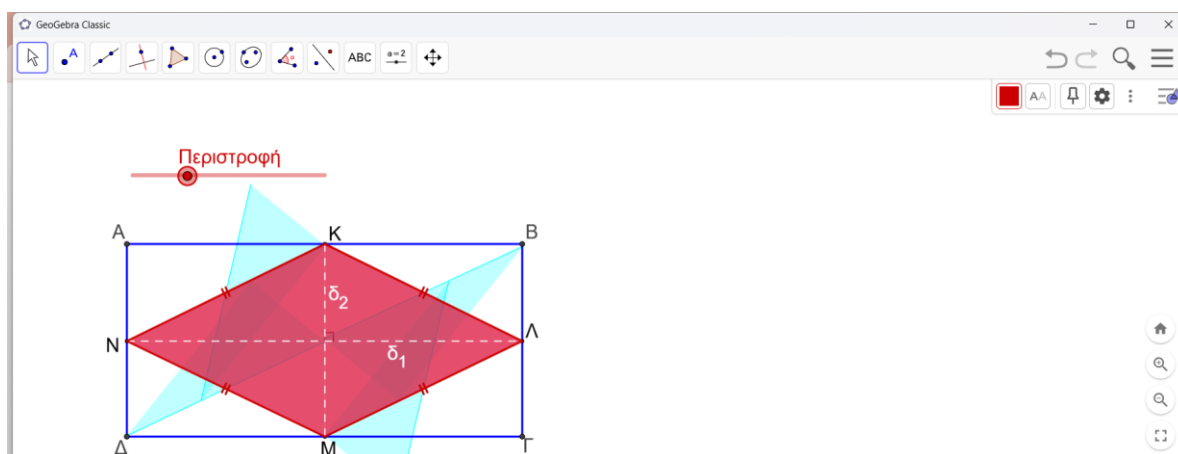
Ποιες σχέσεις νομίζετε ότι πρέπει να εξετάσουν για να επιβεβαιώσουν ότι η κατασκευή έχει σχήμα ορθογώνιο;

6.3 Ρόμβος, τετράγωνο

Ρόμβος ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες. Κάθε ρόμβος είναι και παραλληλόγραμμο.

Υπολογισμός Εμβαδού του Ρόμβου

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «[B_En3_EmvadoRomvou.ggb](#)».



Να μετακινήσετε τις κορυφές του ρόμβου και να βρείτε έναν τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού του, χρησιμοποιώντας τις διαγωνίους του.

Πρέπει να γνωρίζετε ότι:

- Το **εμβαδόν του ρόμβου** με διαγωνίους δ_1 και δ_2 είναι ίσο με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.

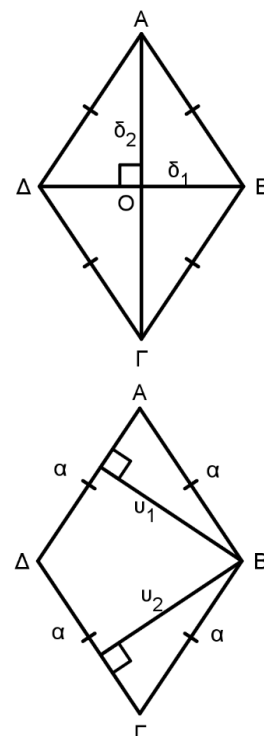
$$E_{\rho\acute{o}\mu\beta\omicron\upsilon} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$

Το εμβαδόν του ρόμβου μπορεί να υπολογιστεί και ως εμβαδόν παραλληλογράμμου.

$$E_{\rho\omicron\mu\beta\omicron\upsilon} = \alpha \cdot \upsilon \quad (\upsilon = \upsilon_1 = \upsilon_2)$$

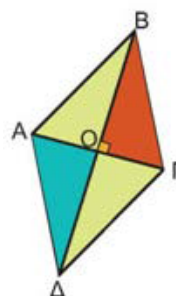
- Η **περίμετρος του ρόμβου** πλευράς α είναι ίση με το τετραπλάσιο της πλευράς του.

$$\Pi_{\rho\acute{o}\mu\beta\omicron\upsilon} = 4 \cdot \alpha$$



Δραστηριότητες

1) Ένας χαρταετός έχει σχήμα ρόμβου με μήκος διαγωνίων 12 cm και 16 cm . Να υπολογίσετε την περίμετρο του χαρταετού και το εμβαδόν της επιφάνειάς του.

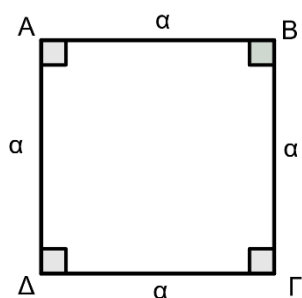


2) Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο ρόμβου με διαγώνιους 24 m και 10 m .

3) Μία αυλή έχει σχήμα ρόμβου με εμβαδόν 24 m^2 και μία διαγώνιο ίση με 8 m . Θέλουμε να αγοράσουμε διαχωριστικό για να χωρίσουμε την αυλή σε δύο ίσα μέρη τριγωνικού σχήματος. Να υπολογίσετε την άλλη διαγώνιο της αυλής και στη συνέχεια να αποφασίσετε με ποιον τρόπο θα τη χωρίσετε ώστε να στοιχίσει λιγότερο. Η επίλυση να γίνει γραφικά και αλγεβρικά.

Τετράγωνο

Τετράγωνο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει τις **πλευρές του ίσες και τις γωνίες του ορθές**. Κάθε τετράγωνο είναι **παράλληλόγραμμο, ορθογώνιο και ρόμβος**.

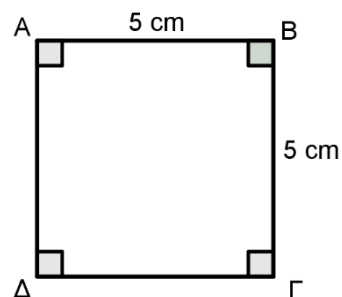


$$\Pi_{\text{τετραγώνου}} = 4\alpha$$

$$E_{\text{τετραγώνου}} = \alpha^2$$

Δραστηριότητες

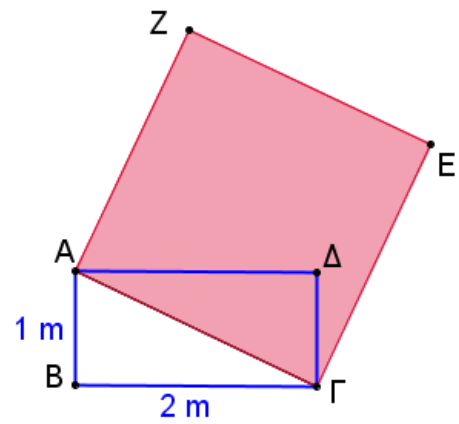
1) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς 5cm.



2) Τετράγωνο έχει περίμετρο 40 cm. Να υπολογίσετε την πλευρά και το εμβαδόν του.

3) Τετράγωνο έχει εμβαδόν 36 cm². Να υπολογίσετε την πλευρά και την περίμετρό του.

4) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πιο κάτω σκιασμένου τετραγώνου $AZΕΓ$, αν η πλευρά του είναι ίση με τη διαγώνιο του ορθογωνίου $ABΓΔ$.



6.4 Τραπεζίο

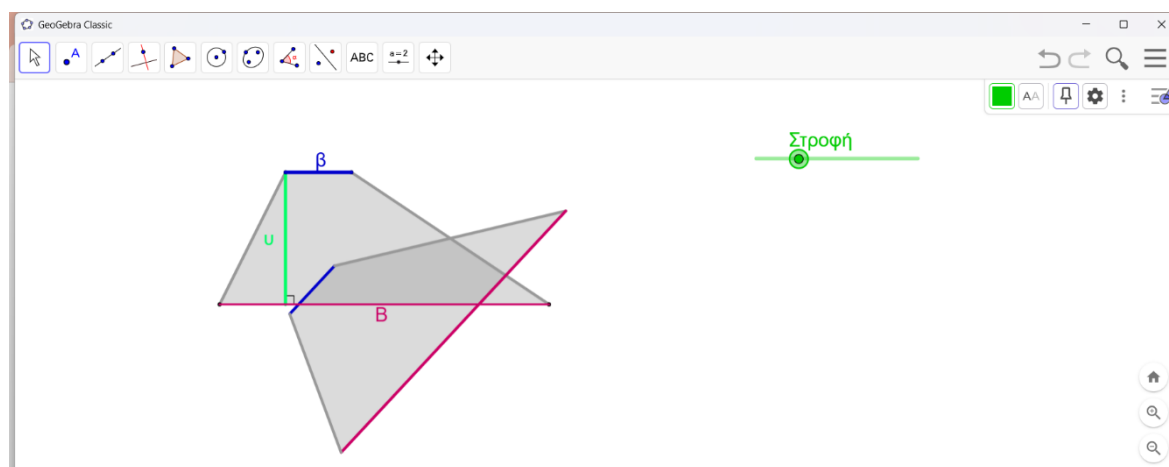
Τραπεζίο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει **μόνο τις δύο πλευρές του παράλληλες**.

- Το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες ονομάζεται **ισοσκελές τραπέζιο**.
- Το τραπέζιο που έχει μία ορθή γωνία ονομάζεται **ορθογώνιο τραπέζιο**.

Υπολογισμός Εμβαδού του τραπεζίου

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο [«B_En3_EmvasdoTrapeziou.ggb»](#).

Να μετακινήσετε τις κορυφές του τραπεζίου και να βρείτε έναν τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού του, χρησιμοποιώντας τα μήκη των βάσεων του και του ύψους του.



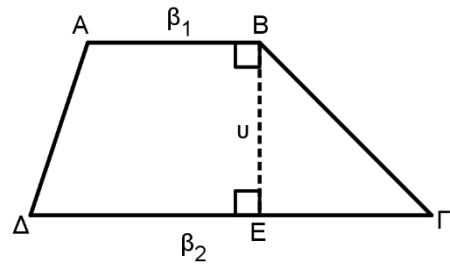
Πρέπει χρησιμοποιώντας δύο ίσα τραπέζια να προσπαθήσετε να ανακαλύψετε τον τύπο του εμβαδού του τραπεζίου. Να σκεφτείτε δηλαδή, να σχηματίσετε ένα καινούργιο σχήμα του οποίου γνωρίζετε το εμβαδόν (το παραλληλόγραμμο), να υπολογίσετε το εμβαδόν του καινούργιου σχήματος και κατ' επέκταση το εμβαδόν του τραπεζίου, διαιρώντας το εμβαδόν του παραλληλογράμμου διά δύο.

- Το **εμβαδόν του τραpezίου** είναι ίσο με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.

$$E_{\text{τραpezίου}} = \frac{(\beta_1 + \beta_2) \cdot \upsilon}{2}$$

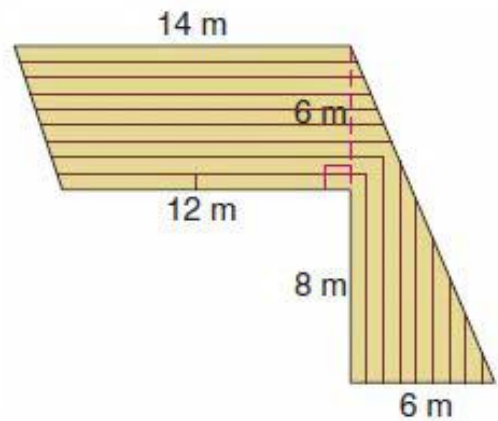
- Η **περίμετρος του τραpezίου** είναι ίση με το άθροισμα των τεσσάρων πλευρών του.

$$\Pi_{\text{τραpezίου}} = \beta_1 + \beta_2 + (A\Delta) + (B\Gamma)$$



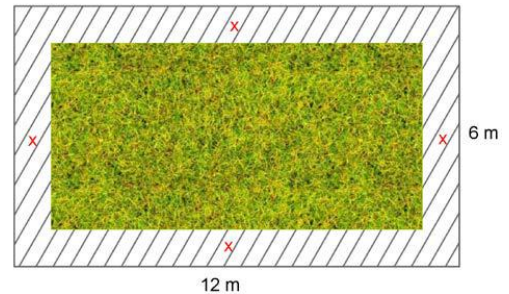
Δραστηριότητες

- 1) Ο ιδιοκτήτης ενός καταστήματος παράγγειλε τον πάγκο εργασίας που φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το συνολικό εμβαδόν της επιφάνειας του πάγκου.



2) Ο κύριος Ιάκωβος θέλει να ανακατασκευάσει τον κήπο του σπιτιού του, που έχει σχήμα ορθογώνιο με διαστάσεις $6m$ και $12m$. Θα τοποθετήσει χλοοτάπητα και περιμετρικά του χλοοτάπητα θέλει να κατασκευάσει διάδρομο από μπετόν, πλάτους (x).

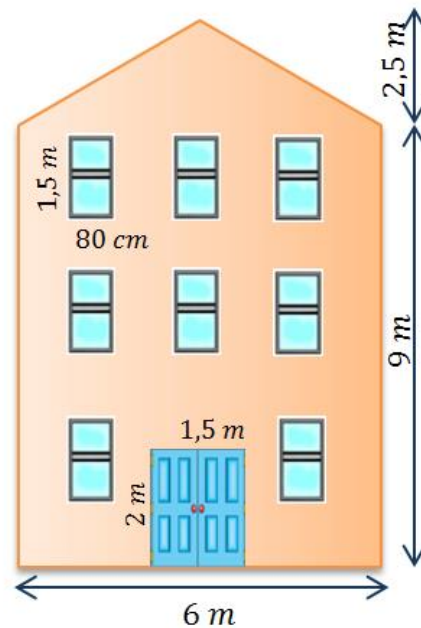
(α) Να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει το εμβαδόν του διαδρόμου.



(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής που θα καλυφθεί με χλοοτάπητα.

(γ) Να υπολογίσετε το κόστος της ανακαίνισης, αν ο διάδρομος από μπετόν στοιχίζει €20 το τετραγωνικό μέτρο, ενώ ο χλοοτάπητας στοιχίζει €35 το τετραγωνικό μέτρο.

3) Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται η πρόσοψη μίας πολυκατοικίας. Οι ένοικοι ζήτησαν από έναν ελαιοχρωματιστή να βάψει τον τοίχο της πρόσοψης της πολυκατοικίας. Πόσο θα κοστίσει, αν ο ελαιοχρωματιστής χρεώνει €12 το τετραγωνικό μέτρο, συμπεριλαμβανομένου και του κόστους της μπογιάς;



4) Το οικόπεδο στο οποίο είναι κτισμένο ένα σπίτι, έχει σχήμα τετράγωνο με μήκος ίσο με 16 m, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της αυλής. Πόσα τετραγωνικά μέτρα τεχνητό γρασίδι πρέπει να παραγγείλει ο ιδιοκτήτης για την κάλυψη της αυλής του;



5) Ο κύριος Γιάννης είναι ιδιοκτήτης του οικοπέδου που φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Θέλει να περιφράξει το οικόπεδό του με συρματοπλέγμα το οποίο στοιχίζει €1,20 το μέτρο. Ένας εργάτης χρεώνει για την τοποθέτηση €2,50 το μέτρο. Πόσα μέτρα σύρμα θα χρειαστεί και πόσο θα κοστίσει συνολικά η περίφραξη;



7. Κύκλος

7.1 Μήκος κύκλου, μήκος τόξου

Κύκλος ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση R (ακτίνα) από ένα σταθερό σημείο K (κέντρο) του επιπέδου.

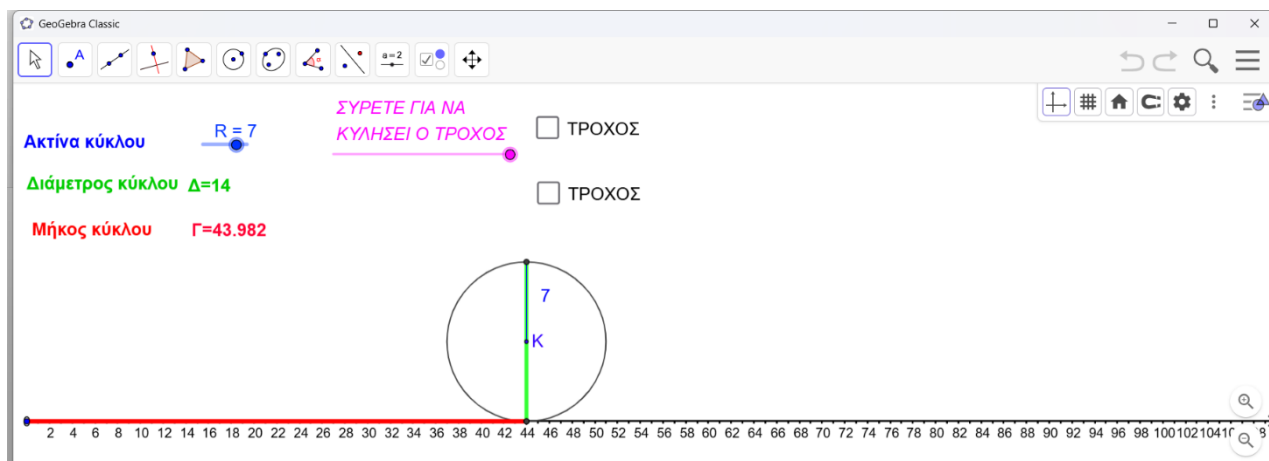
Γράφουμε για συντομία κύκλος (K, R) και εννοούμε τον κύκλο με κέντρο το K και ακτίνα R .

Διάμετρος κύκλου είναι η χορδή που περνά από το κέντρο του κύκλου.

Διερεύνηση 1

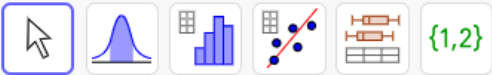
(α) Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «[B_En3_Mikoskyklou.ggb](#)».

(β) Να μετακινήσετε τον δρομέα « R » (ακτίνα κύκλου), έτσι ώστε η ακτίνα R να πάρει την τιμή 2. Να μετακινήσετε τον δρομέα «Σύρετε για να κυλήσει ο τροχός» μέχρι το τέρμα, για να επιβεβαιώσετε τις τιμές (R, Δ, Γ) που είναι καταχωρημένες στο υπολογιστικό φύλλο.



(γ) Να μετακινήσετε τον δρομέα « R » για να μεταβάλετε την ακτίνα του κύκλου και να καταγράψετε τις μετρήσεις σας για τις διάφορες τιμές του R στο υπολογιστικό φύλλο.

GeoGebra Classic



B *I*      

	A	B	C	D
1	ΑΚΤΙΝΑ (R)	ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ (Δ)	ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛ. (Γ)	ΠΗΛΙΚΟ Γ/Δ
2	2	4	12.566	3.142
3	2.5	5	15.708	3.142
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

(δ) Να εξετάσετε τις τιμές που παίρνει ο λόγος:

$$\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\text{Μήκος κύκλου}}{\text{Μήκος Διαμέτρου κύκλου}} =$$

Διερεύνηση 2

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «[B_En3_EmvKT_MT.ggb](#)».



(α) Να μετακινήσετε τον δρομέα « R » (ακτίνα του κύκλου) στην τιμή $R = 10 \text{ cm}$, να πατήσετε το κουμπί «Μήκος Κύκλου» και να καταγράψετε το μήκος του κύκλου.

(β) Να μετακινήσετε τον δρομέα « ω » (γωνία AKB) και να εκτιμήσετε το μήκος του τόξου AB . Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

Μήκος ακτίνας R	Μέτρο γωνίας ω	Μήκος κύκλου	Μήκος τόξου AB
10 cm	180°		
10 cm	90°		
10 cm	60°		
10 cm	30°		
10 cm	36°		

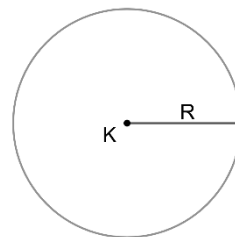
Τι παρατηρείτε;

- ✓ Να εμφανίσετε το μήκος τόξου AB και να συγκρίνετε την εκτίμησή σας με την πραγματική τιμή του μήκους τόξου AB . Ποια είναι η σχέση του μήκους τόξου AB με το μήκος του κύκλου;
- ✓ Να διατυπώσετε μία εικασία για να υπολογίζετε το μήκος τόξου κύκλου συναρτήσει του μήκους της ακτίνας R και του μέτρου της γωνίας μ .
- ✓ Να μεταβάλετε το μήκος της ακτίνας R και να εξετάσετε κατά πόσο η εικασία που διατυπώσατε ισχύει για κάθε μήκος ακτίνας.

Μήκος κύκλου και μήκος τόξου

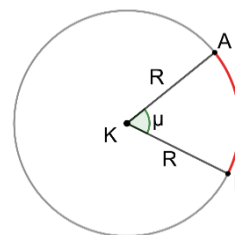
- Το μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου με ακτίνα R είναι:

$$\Gamma = \pi \cdot \text{Διάμετρος} = 2\pi R$$



- Το μήκος τόξου (γ) σε κύκλο με ακτίνα R και με αντίστοιχη επίκεντρη γωνία μ είναι:

$$\gamma = \frac{\mu}{360^\circ} \cdot 2\pi R = \frac{2\pi R\mu}{360^\circ} = \frac{\pi R\mu}{180^\circ}$$



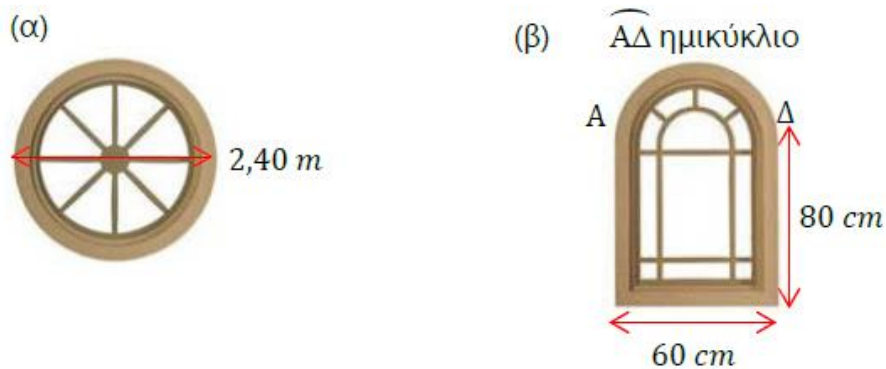
Σημείωση: Οι απαντήσεις δίνονται συναρτήσει του π , εκτός και εάν ζητείται ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων, οπότε $\pi \cong 3,14$.

Δραστηριότητες

- 1) Να υπολογίσετε το μήκος κύκλου που έχει ακτίνα 10 cm .
- 2) Να υπολογίσετε το μήκος κύκλου που έχει διάμετρο 8 m .
- 3) Να υπολογίσετε την περίμετρο ενός κυκλικού χαλιού που έχει διάμετρο 6 m .
- 4) Να βρείτε την ακτίνα ενός κύκλου που έχει μήκος:
(α) $25,12 \text{ cm}$
(β) $16\pi \text{ cm}$

5) Αν το μήκος ενός κύκλου είναι $16\pi \text{ m}$, να υπολογίσετε το μήκος τόξου γωνίας 45° .

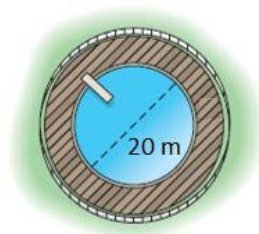
6) Για την καλύτερη μόνωση των παραθύρων εφαρμόζεται περιμετρικά μία ειδική πλαστική μονωτική ταινία. Να υπολογίσετε πόση ταινία χρειάζεται για τα παράθυρα στην πιο κάτω εικόνα.



7) Γύρω από τον κορμό ενός αιωνόβιου δέντρου τυλίγουμε ένα σκοινί. Μετράμε το σκοινί και βρίσκουμε ότι έχει μήκος $3,45 \text{ m}$. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κορμού (η απάντηση να δοθεί με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων).

8) Οι τροχοί ενός ποδηλάτου έχουν διάμετρο 40 cm . Να βρείτε πόσες στροφές πρέπει να κάνουν οι τροχοί, για να διανύσει ο ποδηλάτης απόσταση $1,256\text{ km}$.

9) Η πισίνα του πιο κάτω σχήματος, με διάμετρο 20 m , περιβάλλεται από ένα ξύλινο δάπεδο πλάτους $1,50\text{ m}$. Να βρείτε το μήκος της περίφραξης που θα χρειαστεί ο ιδιοκτήτης, για να περιφράξει τον χώρο της πισίνας και του δαπέδου. Αν η κατασκευή στοιχίζει $\text{€}12,75$ το μέτρο, να υπολογίσετε το συνολικό κόστος της κατασκευής.



10) Ένας ποδηλάτης που προετοιμάζεται για αγώνες προπονείται σε στίβο σχήματος κύκλου με ακτίνα $R = 50\text{ m}$. Πόσες φορές θα περάσει από το σημείο εκκίνησης σε 30 λεπτά προπόνησης, αν κινείται με ταχύτητα 20 km/h ;

7.2 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου, κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

Διερεύνηση

Ο κύριος Μιχάλης έχει αναλάβει τον σχεδιασμό και την τοποθέτηση φωτισμού σε έναν χώρο στάθμευσης, σχήματος τετραγώνου, με πλευρά 50 m. Έχει στη διάθεσή του έναν προβολέα, ο οποίος προβάλλει το φως του σε ακτίνα $R = 25\text{ m}$.

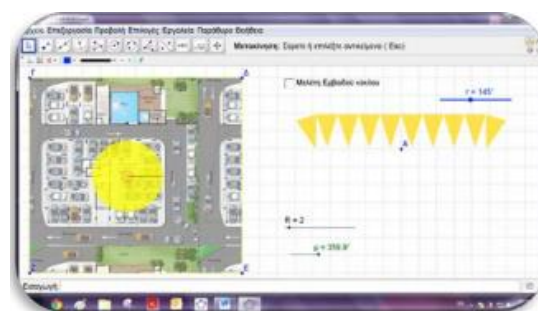
✓ Να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής που μπορεί να φωτίσει ο προβολέας.



Με τη βοήθεια του εφαρμογιδίου «B_En3_kyklos.ggb» να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο.

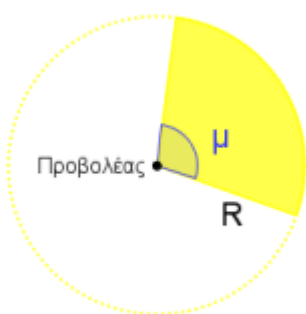


Να επιλέξετε τη βοήθεια, για να βρείτε έναν τύπο για τον υπολογισμό της επιφάνειας κάθε κυκλικού δίσκου συναρτήσει της ακτίνας R .



✓ Να εξετάσετε κατά πόσο είναι δυνατόν με έναν προβολέα να φωτίσει κάποιος ΟΛΟ τον χώρο. Αν όχι, να μελετήσετε τις προδιαγραφές του μηχανικού και να προτείνετε δύο διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους θα μπορούσαν να τοποθετηθούν οι προβολείς για να φωτίζεται ο χώρος. Πόσοι προβολείς θα χρειαστούν;

Ο κύριος Μιχάλης έχει στη διάθεσή του προβολείς, στους οποίους μπορεί να ρυθμίσει τόσο την ακτίνα ($0 - 25\text{ m}$) όσο και τη γωνία ($0 - 360^\circ$) στην οποία μπορούν να προβάλλουν το φως τους.



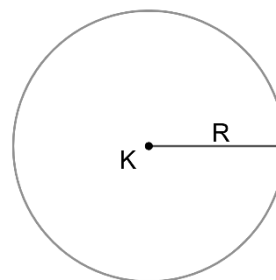
Προδιαγραφές φωτισμού:

- ΟΛΟΣ ο χώρος πρέπει να φωτίζεται.
- Το φως του προβολέα να περιορίζεται ΜΟΝΟ στον χώρο στάθμευσης, για να μην ενοχλούνται όσοι βρίσκονται στους διπλανούς χώρους.

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου, κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

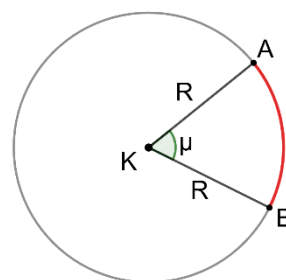
- Το εμβαδόν E ενός κυκλικού δίσκου (K, R) είναι:

$$E = \pi R^2$$



- Το σύνολο των κοινών σημείων της επίκεντρης γωνίας AKB μέτρου μ° και του κυκλικού δίσκου (K, R) λέγεται κυκλικός τομέας κέντρου O και ακτίνας R . Το εμβαδόν $E_{\text{τομ}}$ του κυκλικού τομέα KAB είναι:

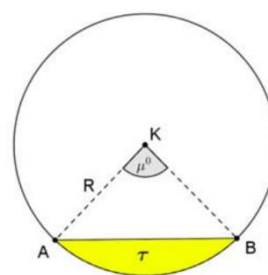
$$E_{\text{τομ}} = \frac{\pi R^2 \mu}{360^\circ}$$



- Το καθένα από τα δύο μέρη στα οποία χορδή AB χωρίζει έναν κυκλικό δίσκο (K, R) λέγεται κυκλικό τμήμα που περιέχεται στην επίκεντρη γωνία AKB .

Το εμβαδόν $E_{\kappa.\tau\mu}$ του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία AKB είναι:

$$E_{\kappa.\tau\mu} = E_{\text{τομ}(KAB)} - E_{\Delta KAB}$$



Δραστηριότητες

1) Δίνεται το μήκος τόξου $B\Gamma$ κύκλου με ακτίνα $R = 9 \text{ cm}$ είναι $3\pi \text{ cm}$. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του π :

(α) το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου

(β) το μήκος της περιφέρειας του κύκλου

(γ) το εμβαδόν του τομέα $KB\Gamma$ και του αντίστοιχου κυκλικού τμήματος.

2) Να βρείτε το εμβαδόν κύκλου:

(α) με ακτίνα 10 cm

(β) με διάμετρο 10 m

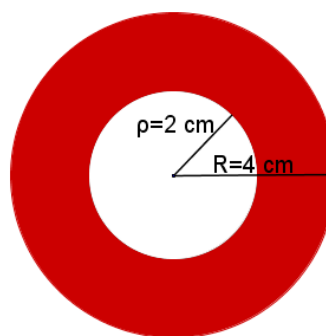
(γ) με μήκος $12,56\text{ cm}$

(δ) με μήκος $12\pi\text{ cm}$

3) Να βρείτε την ακτίνα κύκλου, αν το εμβαδόν του είναι ίσο με $36\pi\text{ m}^2$.

4) Ένας κυκλικός τομέας γωνίας 30° έχει εμβαδόν $3\pi\text{ m}^2$. Να υπολογίσετε το μήκος της περιφέρειας του κύκλου.

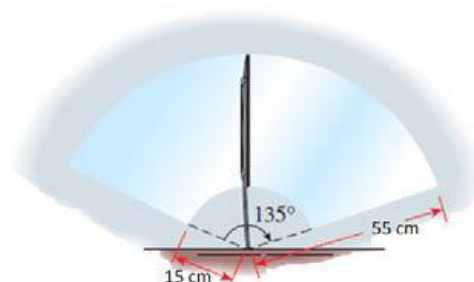
5) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους (κυκλικού δακτυλίου) του πιο κάτω σχήματος, αν $\rho = 2 \text{ cm}$ και $R = 4 \text{ cm}$.



6) Ένας κύκλος έχει εμβαδόν $144\pi \text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου του κύκλου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 60° .

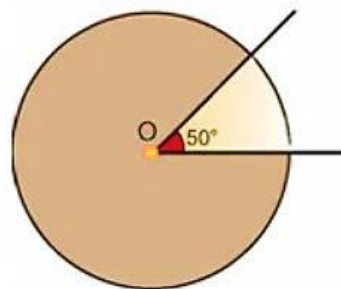
7) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κυκλικού τμήματος, που αντιστοιχεί σε τόξο 30° κύκλου ακτίνας 2 cm .

8) Ο υαλοκαθαριστήρας ενός αυτοκινήτου έχει μήκος 55 cm . Το σημείο περιστροφής απέχει από το λάστιχο καθαρισμού 15 cm . Αν ο υαλοκαθαριστήρας διαγράφει γωνία 135° , να υπολογίσετε την επιφάνεια που καθαρίζει.



9) Ο κύριος Παύλος διαθέτει 10 m σύρμα για να περιφράξει έναν χώρο για τον σκύλο του. Θέλει να επιλέξει το σχήμα με τη μεγαλύτερη επιφάνεια που μπορεί να περιφράξει. Τι σχήμα πρέπει να επιλέξει κύκλο ή τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

10) Μία κυκλική πλατεία έχει ακτίνα $R = 36\text{ m}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ένας προβολέας είναι τοποθετημένος στο κέντρο της πλατείας και εκπέμπει δέσμη φωτός που φωτίζει έναν κυκλικό τομέα γωνίας 50° .



(α) Να βρείτε το εμβαδόν της πλατείας.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν της πλατείας που δεν φωτίζεται.

(Η απάντησή σας μπορεί να δοθεί συναρτήσει του π)

11) Ο Νικόλας και οι φίλοι του θέλουν να παραγγείλουν πίτσα. Ο Νικόλας λέει ότι πρέπει να προτιμήσουν την πίτσα που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν, ενώ ο Μιχάλης υποστηρίζει ότι πρέπει να επιλέξουν αυτή με τη μεγαλύτερη περίμετρο. Εσείς ποια από τις δύο πιο κάτω προσφορές πιστεύετε ότι πρέπει να προτιμήσουν και γιατί;

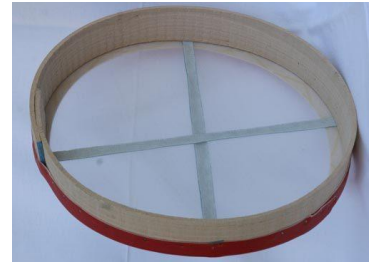
ΠΡΟΣΦΟΡΑ Α
Πίτσα τετράγωνη
με πλευρά 36cm
€20,50

ΠΡΟΣΦΟΡΑ Β
Πίτσα κυκλική με
διάμετρο 40cm
€20,50

12) Η πιο κάτω φωτογραφία δείχνει ένα τεράστιο κομμάτι πίτσας σε σχήμα κυκλικού τομέα, με κεντρική γωνία 36° και ακτίνα 6 m. Αν υποθέσουμε ότι κάθε κονσέρβα ντομάτας καλύπτει $0,25 \text{ m}^2$ πίτσας, πόσα κουτιά κονσέρβας θα χρειαστούν για να καλύψουν ολόκληρο το κομμάτι;



13) Ένας χορευτικός όμιλος θα χρειαστεί 2 τατσιές για να χορέψει τον κυπριακό παραδοσιακό χορό. Για να κατασκευάσουν τατσιές διαμέτρου 50 cm, χρειάζεται να παραγγείλουν ξύλο για να καλύψουν την περιφέρειά της και δίχτυ για τη βάση της.



(α) Πόσα μέτρα ξύλο θα χρειαστούν για να κατασκευάσουν τις δύο τατσιές;

(β) Πόσα τετραγωνικά μέτρα δίχτυ χρειάζονται για να καλύψουν τη βάση της κάθε τατσιάς;
(Οι απαντήσεις να δοθούν με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων).

7.3 Εμβαδά μεικτόγραμμων σχημάτων

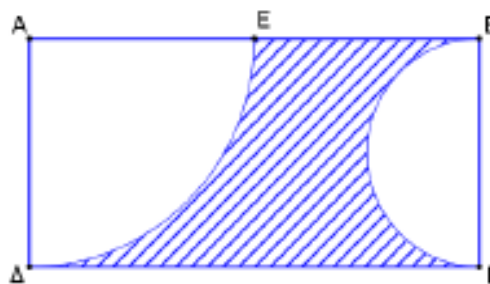
Δραστηριότητες

1) Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, το E είναι το μέσο της AB , $\Gamma\Delta = 16\text{cm}$, το $\widehat{B\Gamma}$ είναι ημικύκλιο και το $\widehat{E\Delta}$ τεταρτοκύκλιο. Να βρείτε:

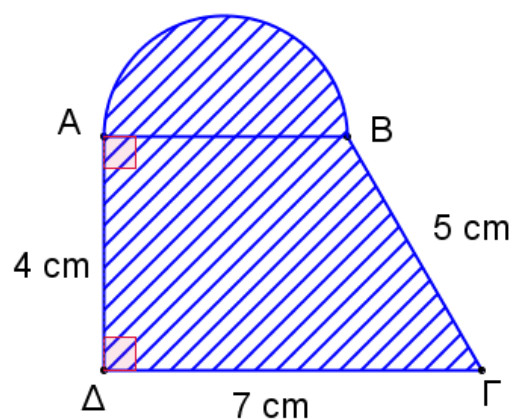
(α) το εμβαδόν και

(β) την περίμετρο της σκιασμένης επιφάνειας.

(Οι απαντήσεις να δοθούν κατά προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων)



2) Στο διπλανό σχήμα δίνεται $AB\Gamma\Delta$ τραπέζιο και AB ημικύκλιο. Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του σκιασμένου σχήματος.



3) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα:

