

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



Α

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

**ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ**

ΜΕΣΗ ΤΕΧΝΙΚΗ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑ: ΠΡΑΚΤΙΚΗ

Συγγραφή:

Δρ Χρυσούλα Χατζηχρίστου, *Επιθεωρήτρια Μαθηματικών Μέσης Εκπαίδευσης*
Δρ Κωνσταντία Χατζηδημητρίου, *Μαθηματικός*
Ιφιγένεια Σωφρονίου, *Μαθηματικός*
Παντελίτσα Αναστασία Χατζηγιάννη, *Μαθηματικός*
Χάρης Θεοδότου, *Μαθηματικός*

Αναθεωρημένη έκδοση

Δρ Χρυσούλα Χατζηχρίστου, *Επιθεωρήτρια Μαθηματικών Μέσης Εκπαίδευσης*
Δρ Χριστίνα Τσαούση, *Σύμβουλος Μαθηματικών*
Αλεξία Πηλακούρη, *Σύμβουλος Μαθηματικών*
Νίκη Μηναΐδου, *Σύμβουλος Μαθηματικών*

Εποπτεία:

Δρ Χρυσούλα Χατζηχρίστου, *Επιθεωρήτρια Μαθηματικών Μέσης Εκπαίδευσης*

Γλωσσική επιμέλεια:

Βέρα Ιωάννου, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Σχεδιασμός εξωφύλλου:

Έλενα Ηλιάδου, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης:

Πέτρος Γεωργιάδης, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Έκδοση 2026

Εκτύπωση: COMPASS PRINTING IKE

Σημείωση:

Η παρούσα έκδοση συνιστά αναθεωρημένη, επικαιροποιημένη και εμπλουτισμένη έκδοση των διδακτικών εγχειριδίων της Επαγγελματικής Κατεύθυνσης των Τεχνικών Σχολών (έκδοση 2020), τα οποία αρχικά εκπονήθηκαν, υπό την επιστημονική εποπτεία και καθοδήγηση της Δρος Χρυσούλας Χατζηχρίστου, για τον Κεντρικό Κορμό Μαθητείας.

© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ISBN: 978-9963-0-5468-8

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	ΣΕΛΙΔΑ
1. ΚΛΑΣΜΑΤΑ – ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ	
1.1 Έννοιες, ορισμοί	5
1.2 Ιδιότητες κλασμάτων	9
1.3 Μετατροπή ετερόνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα	10
1.4 Πράξεις κλασμάτων	11
1.5 Σύνθετα κλάσματα	17
1.6 Αριθμητικές παραστάσεις	18
1.7 Δεκαδικά κλάσματα – Δεκαδικοί αριθμοί	20
1.8 Ιδιότητες δεκαδικών αριθμών	22
1.9 Πράξεις δεκαδικών αριθμών	23
1.10 Μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό	27
2. ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ	
2.1 Έννοιες, ορισμοί	29
2.2 Πράξεις ρητών αριθμών	30
2.3 Δυνάμεις ρητών αριθμών	35
2.4 Αριθμητικές παραστάσεις	37
2.5 Χρήση υπολογιστικής μηχανής	38
3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ	
3.1 Επίλυση εξισώσεων α΄ βαθμού	40
3.2 Μετασχηματισμός τύπου	43
3.3 Λύση προβλημάτων με τη βοήθεια εξισώσεων	45
4. ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ	
4.1 Αλγεβρική παράσταση	47
4.2 Μονώνυμα - Πράξεις μονωνύμων	48
4.3 Πολυώνυμα - Πράξεις πολυωνύμων	50
4.4 Ταυτότητες	53
4.5 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων	57
4.6 Απλοποίηση αλγεβρικού κλάσματος	59
4.7 Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π. ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων	61
4.8 Πράξεις αλγεβρικών κλασμάτων (απλές περιπτώσεις)	62

5. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

5.1	Δυνάμεις	66
5.2	Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού	68
5.3	Νιοστή ρίζα πραγματικού αριθμού	70

6. ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

6.1	Πυθαγόρειο Θεώρημα	72
-----	--------------------	----

7. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

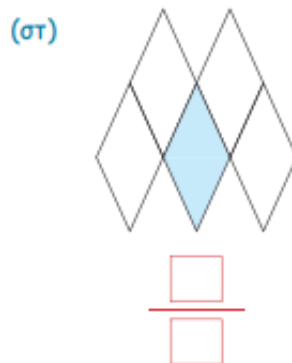
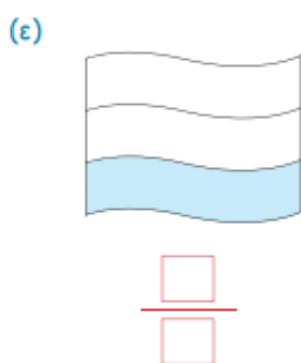
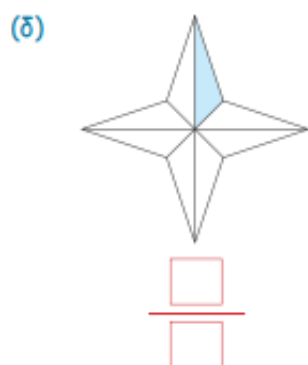
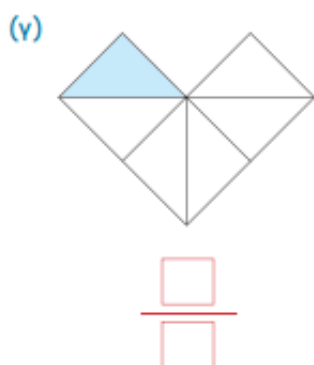
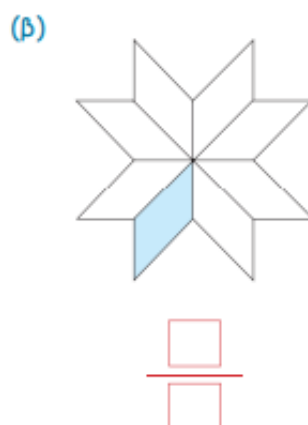
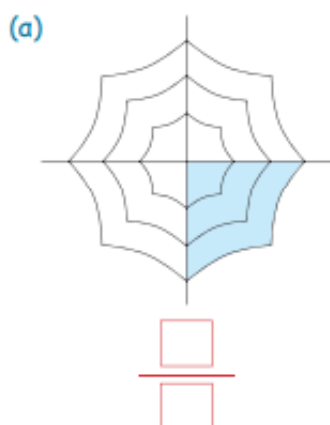
7.1	Εισαγωγή	75
7.2	Μονάδες μέτρησης γωνιών	76
7.3	Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας	77
7.4	Χρήση υπολογιστικής μηχανής	81
7.5	Τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60°	83
7.6	Εφαρμογές στη λύση προβλημάτων	85

1. Κλάσματα – Δεκαδικοί αριθμοί

1.1 Έννοιες, ορισμοί

Διερεύνηση

Να γράψετε ποιο μέρος του σχήματος είναι σκιασμένο.



Ορισμός

Κάθε παράσταση της μορφής $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου $\beta \neq 0$, λέγεται **κλάσμα**.

Το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εκφράζει τα α από τα β ίσα μέρη στα οποία έχει χωριστεί μια ποσότητα. Επειδή δεν μπορούμε να χωρίσουμε μια ποσότητα σε μηδέν ίσα μέρη, γι' αυτό ο αριθμός β δεν μπορεί να είναι ίσος με μηδέν.

- Οι αριθμοί α και β λέγονται **όροι** του κλάσματος.
- Ο αριθμός α που είναι πάνω από τη γραμμή του κλάσματος λέγεται **αριθμητής**.
- Ο αριθμός β που είναι κάτω από τη γραμμή του κλάσματος λέγεται **παρονομαστής**.
- Κάθε κλάσμα παριστάνει το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή διά τον παρονομαστή.

$$\text{Δηλαδή } \frac{\alpha}{\beta} = \alpha : \beta$$

- Δύο ή περισσότερα κλάσματα που έχουν όλα τον ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα**.
- Τα κλάσματα που δεν είναι ομώνυμα, λέγονται **ετερόνυμα**.
- Δύο κλάσματα είναι **ίσα** ή **ισοδύναμα**, όταν εκφράζουν το ίδιο μέρος ενός μεγέθους.

Παράδειγμα

Χωρίζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB σε 4 ίσα μέρη.



Το τμήμα AG είναι το 1 από τα 4 ίσα μέρη του AB , άρα το AG είναι το $\frac{1}{4}$ του AB .

Το τμήμα AE είναι τα 3 από τα 4 ίσα μέρη του AB , άρα το AE είναι τα $\frac{3}{4}$ του AB .

Δραστηριότητες

1) Να συμπληρώσετε τα κενά:

(α) Το $\frac{1}{2}$ του 10 είναι ίσο με _____

(β) Το $\frac{1}{3}$ του 60 είναι ίσο με _____

(γ) Το $\frac{1}{5}$ του 15 είναι ίσο με _____

(δ) Τα $\frac{3}{4}$ του 20 είναι ίσα με _____

2) (α) Να βρείτε πόσα γραμμάρια είναι το $\frac{1}{4}$ του κιλού.

(β) Να βρείτε πόσα λεπτά είναι τα $\frac{3}{4}$ της ώρας.

(γ) Να βρείτε ποιο μέρος του μέτρου είναι τα 20cm .

(δ) Να βρείτε ποιο μέρος της ορθής γωνίας είναι οι 60 μοίρες.

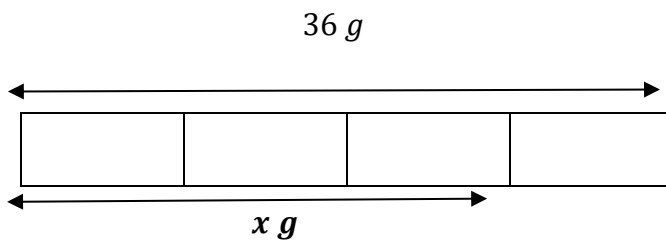
(ε) Να βρείτε ποιο μέρος του κιλού είναι τα 250 γραμμάρια.

3) Η καθαρότητα του χρυσού σε χρυσά κοσμήματα μετριέται με τα καράτια.

Σε ένα κόσμημα 18 καρατίων, τα $\frac{3}{4}$ της μάζας του είναι χρυσός και το $\frac{1}{4}$ είναι άλλα μέταλλα.



Να χρησιμοποιήσετε το πιο κάτω μοντέλο, για να υπολογίσετε τη μάζα του χρυσού σε ένα κόσμημα 18 καρατίων που έχει συνολική μάζα 36 g . Να επεξηγήσετε τον τρόπο σκέψης σας.



4) Σε ένα ξενοδοχείο χρησιμοποιείται ένα ψυγείο φρέσκου χυμού για το πρόγευμα. Όταν είναι γεμάτο, μπορούν να γεμίσουν 120 ποτήρια χυμού. Πόσα ποτήρια μπορούν να γεμίσουν όταν το ψυγείο περιέχει τα $\frac{2}{3}$ της χωρητικότητάς του;

5) Τα $\frac{5}{6}$ των μαθητών ενός τμήματος είναι αγόρια. Να βρείτε πόσοι είναι όλοι οι μαθητές του τμήματος, αν τα αγόρια είναι 25.

6) Σε μια υπεραγορά τα $\frac{3}{5}$ του κιλού ξηρών καρπών κοστίζουν 12 ευρώ. Πόσο κοστίζει το ένα κιλό ξηρών καρπών;

1.2 Ιδιότητες κλασμάτων

$$\blacksquare \frac{\alpha}{1} = \alpha \quad \blacksquare \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \quad \blacksquare \frac{0}{\alpha} = 0 \quad \blacksquare \frac{\alpha}{\beta} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta \quad \blacksquare \frac{\alpha}{\beta} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Δραστηριότητα

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\frac{x}{5} = 1$

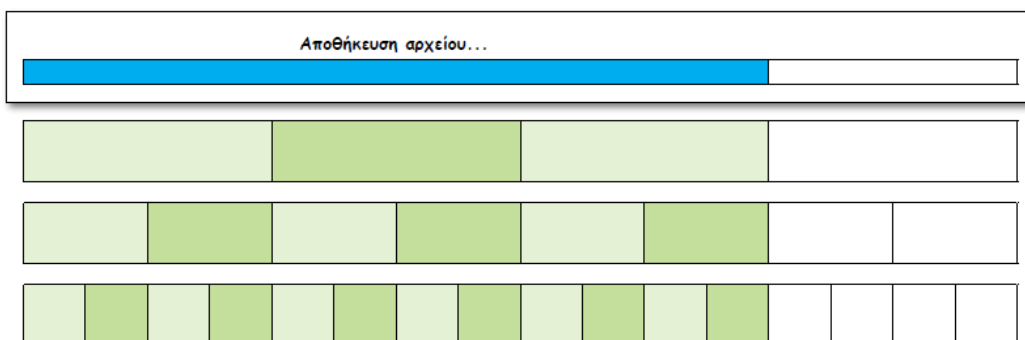
(β) $\frac{\kappa}{4} = 0$

(γ) $\frac{y}{1} = 7$

(δ) $\frac{8}{8} = \lambda$

Διερεύνηση

Το διάγραμμα παρουσιάζει την πρόοδο της αποθήκευσης ενός αρχείου στον ηλεκτρονικό υπολογιστή.



(α) Να εκφράσετε, σε κάθε περίπτωση, το μέρος του αρχείου που έχει αποθηκευτεί.

(β) Να συγκρίνετε τα κλάσματα μεταξύ τους.

(γ) Τι παρατηρείτε για τα κλάσματα που βρήκατε;

• Αν πολλαπλασιάσουμε και τους δύο όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό, προκύπτει ισοδύναμο κλάσμα.

• Αν διαιρέσουμε και τους δύο όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο μη μηδενικό κοινό διαιρέτη τους, προκύπτει ισοδύναμο κλάσμα.

Δραστηριότητες

1) Να συμπληρώσετε τα κενά στις πιο κάτω αναλογίες:

$$(\alpha) \frac{1}{2} = \frac{\quad}{8}$$

$$(\beta) \frac{5}{7} = \frac{15}{\quad}$$

$$(\gamma) \frac{2}{9} = \frac{\quad}{180}$$

$$(\delta) \frac{7}{8} = \frac{42}{\quad}$$

$$(\epsilon) \frac{6}{12} = \frac{\quad}{6}$$

$$(\sigma\tau) \frac{28}{42} = \frac{2}{\quad}$$

$$(\zeta) \frac{6}{15} = \frac{\quad}{5}$$

$$(\eta) \frac{40}{30} = \frac{\quad}{3}$$

2) Να απλοποιήσετε τα πιο κάτω κλάσματα:

$$(\alpha) \frac{12}{9}$$

$$(\beta) \frac{26}{38}$$

$$(\gamma) \frac{18}{27}$$

$$(\delta) \frac{25}{75}$$

1.3 Μετατροπή ετερόνυμων κλασμάτων σε ομόνυμα

Για να μετατρέψουμε ετερόνυμα κλάσματα σε ομόνυμα, βρίσκουμε ισοδύναμα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή. Ο κοινός αυτός παρονομαστής πρέπει να είναι κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των κλασμάτων που δίνονται. Συνήθως, παίρνουμε ως κοινό παρονομαστή το ελάχιστο από τα κοινά πολλαπλάσια (Ε.Κ.Π.) των παρονομαστών των αρχικών κλασμάτων, ώστε να προκύπτουν κλάσματα με όσο το δυνατόν μικρότερους όρους.

Δραστηριότητα

Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ομόνυμα:

$$(\alpha) \frac{5}{6} \text{ και } \frac{3}{8}$$

$$(\beta) \frac{3}{5} \text{ και } \frac{2}{3}$$

$$(\gamma) \frac{7}{18} \text{ και } \frac{1}{6}$$

$$(\delta) \frac{2}{4} \text{ και } \frac{1}{6}$$

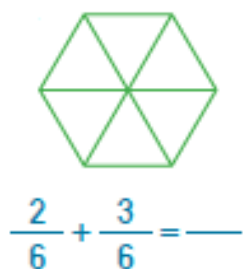
1.4 Πράξεις κλασμάτων

Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

Διερεύνηση

1) Να χρησιμοποιήσετε τα διαγράμματα για να βρείτε τα αποτελέσματα των πράξεων:

(α)



(β)



2) Να χρησιμοποιήσετε κλασματικούς κύκλους ή ράβδους κλασμάτων, για να υπολογίσετε τα πιο κάτω αθροίσματα και διαφορές:

(α) $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} =$

(β) $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} =$

(γ) $\frac{4}{9} - \frac{1}{3} =$

(δ) $\frac{5}{8} - \frac{1}{4} =$

✓ Πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων

Για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερα ομώνυμα κλάσματα, σχηματίζουμε ένα κλάσμα με τον ίδιο παρονομαστή και αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών τους.

✓ Πρόσθεση ετερόνυμων κλασμάτων

Για να προσθέσουμε ετερόνυμα κλάσματα, πρώτα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και στη συνέχεια τα προσθέτουμε.

✓ Αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων

Για να αφαιρέσουμε δύο ομώνυμα κλάσματα, σχηματίζουμε ένα κλάσμα με τον ίδιο παρονομαστή και αριθμητή τη διαφορά των αριθμητών τους.

✓ Αφαίρεση ετερόνυμων κλασμάτων

Για να αφαιρέσουμε ετερόνυμα κλάσματα, πρώτα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και στη συνέχεια τα αφαιρούμε.

Δραστηριότητες

1) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω αθροίσματα:

(α) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} =$

(β) $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{1}{9} =$

(γ) $\frac{7}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} =$

(δ) $\frac{7}{6} + \frac{2}{3} =$

2) Να μετατραπούν οι πιο κάτω μεικτοί αριθμοί σε απλά κλάσματα:

(α) $5\frac{2}{3} =$

(β) $2\frac{3}{5} =$

(γ) $7\frac{1}{8} =$

3) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω αθροίσματα:

(α) $5\frac{3}{11} + 2\frac{5}{11} =$

(β) $4\frac{6}{7} + \frac{3}{5} =$

(γ) $6\frac{2}{5} + 8\frac{3}{4} =$

4) Να υπολογίσετε τις πιο κάτω διαφορές:

(α) $\frac{5}{8} - \frac{2}{8} =$

(β) $\frac{3}{4} - \frac{1}{6} =$

(γ) $2\frac{3}{4} - \frac{7}{8} =$

(δ) $4\frac{2}{5} - 2\frac{3}{4} =$

5) Ο Μάριος χρησιμοποίησε $\frac{1}{4}$ kg αλεύρι για να ετοιμάσει ένα γλύκισμα και $\frac{1}{3}$ kg αλεύρι για να ετοιμάσει μπισκότα.

(α) Πόσα kg αλεύρι χρησιμοποίησε συνολικά;

(β) Αν είχε στη διάθεσή του ένα κουτί που περιείχε $\frac{5}{6}$ kg αλεύρι, πόσο αλεύρι του περίσσεψε;

Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

Διερεύνηση 1

Ένας μαθητής θα ετοιμάσει ένα κέικ μπανάνας για τους καλεσμένους του χρησιμοποιώντας την ακόλουθη συνταγή:

Κέικ μπανάνας

- 3 μπανάνες
- $\frac{1}{4}$ του ποτηριού βούτυρο
- $\frac{2}{3}$ του ποτηριού ζάχαρη
- 1 αυγό
- 1 κουταλάκι βανίλια
- $\frac{1}{2}$ κουταλάκι σόδα
- $1\frac{1}{2}$ ποτήρια αλεύρι

Η συνταγή είναι για 10 άτομα. Να υπολογίσετε τις ποσότητες των υλικών που πρέπει να χρησιμοποιήσει ο μαθητής:

(α) για 20 άτομα

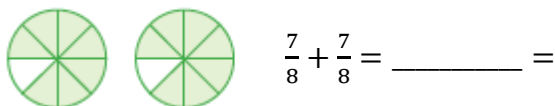
(β) για 15 άτομα

(γ) για x άτομα

Διερεύνηση 2

Αφού μετατρέψετε τα πιο κάτω αθροίσματα σε γινόμενα, να τα υπολογίσετε:

(α)



(β)



Διερεύνηση 3

Ένα πεζοδρόμιο αποτελείται από πλάκες. Τα $\frac{5}{9}$ από τις πλάκες είναι χρωματιστές και από αυτές τα $\frac{3}{4}$ είναι κίτρινες. Τι μέρος του πεζοδρομίου αποτελούν οι κίτρινες πλάκες;

Σχηματικά:

- ✓ Το γινόμενο δύο ή περισσότερων κλασμάτων είναι ένα νέο κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.

Δραστηριότητες

1) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω γινόμενα:

(α) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} =$

(β) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} =$

(γ) $\frac{4}{9} \cdot \frac{18}{31} =$

(δ) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7} =$

(ε) $\frac{4}{17} \cdot 5\frac{2}{3} =$

(στ) $3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4} =$

2) Σε ένα σχολείο με 650 μαθητές, τα $\frac{7}{13}$ των μαθητών είναι κορίτσια. Πόσα είναι τα κορίτσια;

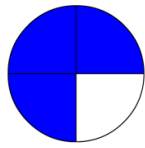
3) Ο κ. Νίκος αγόρασε $6\frac{1}{2}$ κιλά πατάτες προς 80 σεντ το κιλό. Πόσα πλήρωσε;

4) Ένα δοχείο χωρεί $\frac{3}{4}$ του λίτρου γάλα. Πόσα λίτρα γάλα θα χρειαστούν για να γεμίσουν $3\frac{1}{2}$ δοχεία;

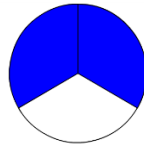
Διαίρεση κλασμάτων

Διερεύνηση

Οι καλεσμένοι σε ένα πάρτι θέλουν να μοιράσουν το υπόλοιπο μιας τάρτας φράουλας σε κομμάτια.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



(α) Αν έχουν απομείνει τα $\frac{3}{4}$ της τάρτας (Σχ. 1) και χωριστούν σε κομμάτια μεγέθους $\frac{1}{8}$ της ολόκληρης τάρτας, πόσα κομμάτια θα προκύψουν;

(β) Αν έχουν απομείνει τα $\frac{2}{3}$ της τάρτας (Σχ. 2) και χωριστούν σε κομμάτια μεγέθους $\frac{2}{6}$ της ολόκληρης τάρτας, πόσα κομμάτια θα προκύψουν;

(γ) Ποια μαθηματική πράξη μπορώ να γράψω σε καθεμία περίπτωση;

(δ) Πόσες φορές χωρεί το $\frac{1}{8}$ στα $\frac{3}{4}$;

(ε) Πόσες φορές χωρούν τα $\frac{2}{6}$ στα $\frac{2}{3}$;

- ✓ Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα, αρκεί να αντιστρέψουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος (διαιρέτη) και να πολλαπλασιάσουμε τα κλάσματα που προκύπτουν.

Δραστηριότητες

1) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω πηλίκα:

(α) $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} =$

(β) $\frac{3}{8} : \frac{5}{7} =$

(γ) $3\frac{2}{3} : \frac{3}{4} =$

(δ) $\frac{5}{8} : \frac{1}{4} =$

(ε) $1 : \frac{5}{8} =$

(στ) $\frac{2}{3} : 4 =$

2) Ένα μπουκάλι χωρεί $\frac{3}{4}$ λίτρα λάδι. Πόσα μπουκάλια θα γεμίσουμε με 273 λίτρα λάδι;

1.5 Σύνθετα κλάσματα

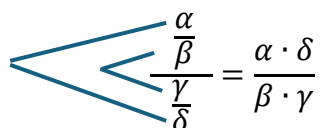
Κλάσματα των οποίων ο αριθμητής ή ο παρονομαστής ή και οι δύο όροι τους είναι άλλα κλάσματα λέγονται **σύνθετα κλάσματα**.

Για παράδειγμα τα κλάσματα $\frac{\frac{2}{5}}{3}$, $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{11}{11}}$, $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}$ είναι σύνθετα κλάσματα.

Για να μετατρέψουμε ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό, αρκεί να διαιρέσουμε τον αριθμητή του με τον παρονομαστή του.

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

Γενικά:


$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

Δραστηριότητα

Να μετατρέψετε τα πιο κάτω σύνθετα κλάσματα σε απλά:

(α) $\frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}} =$

(β) $\frac{\frac{8}{11}}{4} =$

(γ) $\frac{16}{\frac{4}{5}} =$

(δ) $\frac{\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}}{\frac{2}{3}} =$

(ε) $\frac{6}{2\frac{1}{3}} =$

1.6 Αριθμητικές Παραστάσεις

Όταν έχουμε να εκτελέσουμε πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση, ακολουθούμε την πιο κάτω σειρά:

- ✓ Κάνουμε τις πράξεις που είναι μέσα στις παρενθέσεις.
- ✓ Κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις από τα αριστερά προς τα δεξιά.
- ✓ Κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Δραστηριότητες

1) Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:

(α) $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2} =$

(β) $\frac{5}{8} - \left(\frac{11}{12} - \frac{5}{6}\right) =$

(γ) $\left(\frac{3}{4} - \frac{7}{10}\right) + \frac{2}{5} =$

(δ) $10\frac{1}{2} - \left(3 - 1\frac{2}{3}\right) =$

(ε) $\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right) \cdot \frac{8}{3} =$

(στ) $\left(4\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3}\right) : \left(2 + \frac{3}{4}\right) =$

(ζ) $\left(5\frac{2}{3} - 3\frac{1}{2}\right) : \left(4 - 2\frac{1}{5}\right) =$

(η) $\frac{\frac{9}{10}}{3\frac{1}{2}} =$

$$(θ) \frac{\frac{\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{7}{18} - \frac{2}{9}}}{\frac{2}{9}} =$$

$$(ι) \frac{\left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{8}}{1\frac{3}{20} : \frac{1}{20}} =$$

2) Τα $\frac{4}{9}$ ενός αριθμού είναι 32. Να βρείτε τον αριθμό.

3) Κρατούσα €420. Ξόδεψα τα $\frac{3}{7}$ των χρημάτων μου για επιδιόρθωση του αυτοκινήτου μου και τα $\frac{2}{3}$ των υπόλοιπων χρημάτων μου τα ξόδεψα για ψώνια. Πόσα χρήματα έδωσα στα ψώνια;

4) Ένας γεωργός είχε 400 κιλά πατάτες. Από αυτές, το $\frac{1}{16}$ καταστράφηκε. Στη συνέχεια, πούλησε τα $\frac{2}{5}$ των υπολοίπων προς 75 σεντ το κιλό και τις υπόλοιπες προς 60 σεντ το κιλό. Με τα χρήματα που πήρε αγόρασε $37\frac{1}{2}$ κιλά τυρί. Πόσο κόστιζε το ένα κιλό τυρί;

1.7 Δεκαδικά κλάσματα – Δεκαδικοί αριθμοί

Οι κλασματικές μονάδες έχουν ως παρονομαστή δυνάμεις του 10 και γράφονται στη μορφή:

$$\frac{1}{10} = 0,1 \quad \frac{1}{100} = 0,01 \quad \frac{1}{1000} = 0,001 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Δεκαδικό κλάσμα λέγεται το κλάσμα του οποίου ο παρονομαστής είναι 10, 100, 1000, ...

Για παράδειγμα τα κλάσματα $\frac{13}{10}$, $\frac{784}{100}$, $\frac{47}{1000}$, ... είναι δεκαδικά κλάσματα.

Αυτά τα κλάσματα μπορούν να γραφτούν και σε άλλη μορφή. Δηλαδή:

$$\frac{13}{10} = \frac{1 \cdot 10 + 3 \cdot 1}{10} = \frac{10}{10} + \frac{3}{10} = 1 + \frac{3}{10} = 1,3$$

$$\frac{784}{100} = \frac{7 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 4 \cdot 1}{100} = \frac{700 + 80 + 4}{100} = \frac{700}{100} + \frac{80}{100} + \frac{4}{100} = 7 + \frac{8}{10} + \frac{4}{100} = 7,84$$

- Τα δεκαδικά κλάσματα, όταν γραφτούν με τον νέο συμβολισμό, λέγονται **δεκαδικοί αριθμοί**. Για παράδειγμα οι αριθμοί **1,3** και **7,84** λέγονται δεκαδικοί αριθμοί.
- Το κόμμα (,) που χρησιμοποιούμε μετά το ακέραιο μέρος του αριθμού, λέγεται **υποδιαστολή**.
- Τα ψηφία του αριθμού που είναι δεξιά της υποδιαστολής λέγονται **δεκαδικά ψηφία**.

Για να μετατρέψουμε ένα δεκαδικό κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό:

- ✓ Γράφουμε μόνο τον αριθμητή και τοποθετούμε την υποδιαστολή, χωρίζοντας από τα δεξιά προς τα αριστερά τόσα ψηφία όσα μηδενικά έχει ο παρονομαστής.

Παράδειγμα: $\frac{253}{10} = 25,3$ και $\frac{327}{100} = 3,27$

- ✓ Αν ο αριθμητής δεν έχει αρκετά ψηφία, γράφουμε στα αριστερά του τόσα μηδενικά όσα χρειάζονται, ώστε να τοποθετηθεί η υποδιαστολή στη σωστή θέση.

Παράδειγμα: $\frac{14}{1000} = 0,014$

Για να μετατρέψουμε έναν δεκαδικό αριθμό σε δεκαδικό κλάσμα:

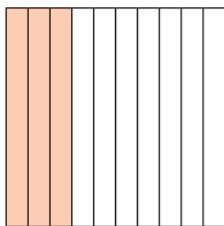
- ✓ Γράφουμε για αριθμητή τον αριθμό χωρίς υποδιαστολή και για παρονομαστή τη μονάδα με τόσα μηδενικά όσα είναι τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού.

Παράδειγμα: $5,63 = \frac{563}{100}$ και $17,021 = \frac{17021}{1000}$

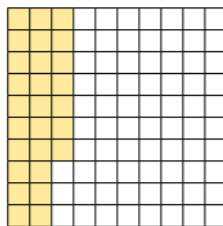
Δραστηριότητες

1) Να εκφράσετε με κλάσμα και δεκαδικό αριθμό το σκιασμένο μέρος της κάθε επιφάνειας.

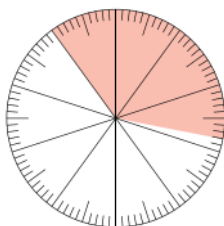
Α.



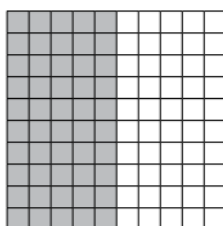
Β.



Γ.



Δ.



2) Να αναλύσετε τους πιο κάτω αριθμούς με δύο τρόπους, όπως το παράδειγμα:

$$23,51 = (2 \cdot 10) + (3 \cdot 1) + \left(5 \cdot \frac{1}{10}\right) + \left(1 \cdot \frac{1}{100}\right)$$

ή

$$23,51 = (2 \cdot 10) + (3 \cdot 1) + (5 \cdot 0,1) + (1 \cdot 0,01)$$

(α) 2,145

(β) 39,531

(γ) 125,24

3) Να γράψετε σε μορφή δεκαδικού τις πιο κάτω εκφράσεις:

(α) $(3 \cdot 10) + (5 \cdot 1) + \left(2 \cdot \frac{1}{10}\right) + \left(7 \cdot \frac{1}{100}\right) + \left(6 \cdot \frac{1}{1000}\right)$

(β) $(9 \cdot 100) + (2 \cdot 10) + (3 \cdot 0,1) + (7 \cdot 0,001)$

1.8 Ιδιότητες δεκαδικών αριθμών

- ✓ Για να πολλαπλασιάσουμε έναν δεκαδικό αριθμό με το **10, 100, 1000 κ.ο.κ** μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα δεξιά τόσες θέσεις όσα είναι τα μηδενικά του αριθμού με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε.
- ✓ Για να διαιρέσουμε έναν δεκαδικό αριθμό με το **10, 100, 1000 κ.ο.κ** μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα αριστερά τόσες θέσεις όσα είναι τα μηδενικά του αριθμού με τον οποίο διαιρούμε.

Δραστηριότητα

Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:

(α) $15,65 \cdot 10 =$

(β) $0,4 \cdot 100 =$

(γ) $1,8732 \cdot 1000 =$

(δ) $18 : 10 =$

(ε) $2,47 : 100 =$

(στ) $6,8 : 1000 =$

1.9 Πράξεις δεκαδικών αριθμών

Διερεύνηση

Η Μαρία και ο Κώστας επισκέφθηκαν ένα εστιατόριο με το ακόλουθο μενού.



Ορεκτικό	
Ελληνική σαλάτα	€5,90
Φτερούγες κοτόπουλο	€3,60
Σκορδόψωμο	€2,90
Κυρίως πιάτο	
Μπιφτέκι με σαλάτα	€4,80
Κοτόπουλο σουβλάκι	€7,40
Χοιρινή μπιριζόλα	€9,50
Σπαγγέτι με τυρί	€4,20
Επιδόρπιο	
Μηλόπιτα	€2,35
Τάρτα φρούτων	€3,25

(α) Να εισηγηθείτε διαφορετικούς συνδυασμούς πιάτων που μπορεί να παρήγγειλε ο Κώστας με τα €12,00 που διέθετε.

(β) Η Μαρία εκτίμησε ότι δεν μπορούσε να παραγγείλει ορεκτικό, κυρίως πιάτο και επιδόρπιο με τα €10,00 που διέθετε. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε; Να επεξηγήσετε την απάντησή σας.

(γ) Ο Κώστας παρήγγειλε ελληνική σαλάτα, σπαγγέτι και μηλόπιτα. Όταν ήρθε ο λογαριασμός, διαπίστωσε ότι τα χρήματά του δεν ήταν αρκετά. Πόσο λάθος έκανε στην εκτίμησή του;

Πρόσθεση και Αφαίρεση Δεκαδικών Αριθμών

Στην πρόσθεση και αφαίρεση δεκαδικών αριθμών, γράφουμε τους αριθμούς τον έναν κάτω από τον άλλο ώστε οι υποδιαστολές τους να είναι στην ίδια στήλη. Κάνουμε την πρόσθεση ή την αφαίρεση όπως στους φυσικούς αριθμούς και τοποθετούμε την υποδιαστολή στο αποτέλεσμα στην ίδια στήλη.

Δραστηριότητες

1) Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:

(α) $0,315 + 43,79$

(β) $44 - 0,063$

(γ) $645,34 - 387,693$

(δ) $143 - 76,2 + 0,026$

2) Το υπόλοιπο του τραπεζικού λογαριασμού του κύριου Παντελή ήταν σήμερα το πρωί €500,75. Να βρείτε το νέο υπόλοιπο στο τέλος της ημέρας, αν πληρώθηκαν από τον λογαριασμό δύο επιταγές αξίας €315,45 και €124,22.

3) Στον πίνακα φαίνεται μέρος της κατάστασης του τραπεζικού λογαριασμού του κύριου Φαίδωνα.

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ	ΑΝΑΛΗΨΕΙΣ	ΥΠΟΛΟΙΠΟ
08/03/2012	100		-378,68
09/03/2012		210,14	
10/04/2012	1000,55		
10/04/2012		125,2	
12/04/2012		50	
12/04/2012	500		
12/04/2012		467,32	
13/04/2012		1444,39	

Να υπολογίσετε το υπόλοιπο του λογαριασμού του στις 13/4/2012 (μετά την ανάληψη).

Πολλαπλασιασμός Δεκαδικών Αριθμών

Στον πολλαπλασιασμό δύο δεκαδικών αριθμών (παραγόντων), πολλαπλασιάζουμε σαν να είναι φυσικοί αριθμοί και στο αποτέλεσμα τοποθετούμε την υποδιαστολή, αφήνοντας δεξιά της τόσα δεκαδικά ψηφία όσα είναι συνολικά τα δεκαδικά ψηφία των δύο παραγόντων.

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε το γινόμενο $3,523 \cdot 0,24$

$$\begin{array}{r} 3,523 \\ \times 0,24 \\ \hline 14092 \\ 7046 \\ \hline 0,84552 \end{array}$$

Διαίρεση Δεκαδικών Αριθμών

✓ Διαίρεση δεκαδικού αριθμού με φυσικό αριθμό

Για να διαιρέσουμε δεκαδικό αριθμό με φυσικό αριθμό, διαιρούμε σαν να είναι και οι δύο φυσικοί αριθμοί, με τη διαφορά ότι πριν κατεβάσουμε το πρώτο δεκαδικό ψηφίο, τοποθετούμε υποδιαστολή στο πηλίκο.

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε το πηλίκο $36,25 : 5$

$$\begin{array}{r|l} 36,25 & 5 \\ 12 & 7,25 \\ 25 & \\ 0 & \end{array}$$

✓ Διαίρεση φυσικού αριθμού με φυσικό αριθμό, όταν η διαίρεση είναι ατελής

Για να διαιρέσουμε φυσικό αριθμό με φυσικό αριθμό, όταν η διαίρεση δεν είναι τέλεια, γράφουμε τον διαιρετέο ως δεκαδικό αριθμό και καταλήγουμε σε διαίρεση δεκαδικού αριθμού με φυσικό αριθμό.

Παράδειγμα: Να βρείτε το πηλίκο $85 : 8$

$$\begin{array}{r|l} 85,000 & 8 \\ 05 & 10,625 \\ 50 & \\ 20 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

✓ **Διαίρεση δεκαδικού αριθμού με δεκαδικό αριθμό**

Για να διαιρέσουμε δεκαδικό αριθμό με δεκαδικό αριθμό, πολλαπλασιάζουμε και τους δύο με κατάλληλη δύναμη του 10, ώστε ο διαιρέτης να γίνει φυσικός αριθμός, για να καταλήξουμε σε διαίρεση δεκαδικού αριθμού με φυσικό αριθμό.

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε το πηλίκο $5,616 : 1,8$

$$5,616 : 1,8 = 56,16 : 18$$

$$\begin{array}{r|l} 56,16 & 18 \\ 21 & 3,12 \\ 36 & \\ 0 & \end{array}$$

Δραστηριότητες

1) Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:

(α) $58,2 \cdot 0,6$

(β) $28,43 \cdot 0,13$

(γ) $2,6 \cdot 6,45$

(δ) $23,4 : 0,9$

(ε) $17,712 : 2,4$

(στ) $11,25 : 0,03$

2) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω πηλικά με προσέγγιση δεκάτου:

(α) $64,21 : 1,2$

(β) $250,4 : 3,1$

3) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω πηλικά με προσέγγιση εκατοστού:

(α) $17,49 : 12$

(β) $20,6 : 0,23$

1.10 Μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό

Για να μετατρέψουμε ένα κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό:

- ✓ διαιρούμε τον αριθμητή με τον παρονομαστή
- ✓ αν ο παρονομαστής μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε 10, 100, 1000, ... τότε γράφουμε το κλάσμα σε ισοδύναμο με παρονομαστή 10, 100, 1000, ...

Παράδειγμα: Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς.

(α) $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = 0,4$

(β) Γνωρίζουμε ότι $\frac{43}{12} = 43 : 12$

43,000	12
70	3,583
100	
40	
4	

Παρατηρούμε ότι όσο και αν συνεχίσουμε τη διαίρεση, δεν θα βρούμε υπόλοιπο μηδέν. Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε το πηλίκο κατά προσέγγιση, αφού σταματήσουμε τη διαίρεση σε κάποιο δεκαδικό ψηφίο.

Αν το πηλίκο το γράψουμε με προσέγγιση χιλιοστού τότε $\frac{43}{12} \approx 3,583$

Αν το πηλίκο το γράψουμε με προσέγγιση εκατοστού τότε $\frac{43}{12} \approx 3,58$

Αν το πηλίκο το γράψουμε με προσέγγιση δεκάτου τότε $\frac{43}{12} \approx 3,6$

2. Ρητοί αριθμοί

Διερεύνηση

Ο Γιάννης και η Μαρία οδηγούν τα ποδήλατά τους αναχωρώντας από το σπίτι του Ανδρέα. Ύστερα από λίγο ο Γιάννης βρίσκεται 4 km μακριά από το σπίτι του Ανδρέα, οδηγώντας το ποδήλατό του ανατολικά και η Μαρία βρίσκεται 4 km μακριά, οδηγώντας το ποδήλατό της δυτικά.



(α) Ποιο παιδί βρίσκεται πιο μακριά από το σπίτι του Ανδρέα;

(β) Αν το σπίτι του Ανδρέα βρίσκεται στη θέση μηδέν, να σημειώσετε τη θέση των δύο παιδιών στην αριθμητική γραμμή.

(γ) Να βρείτε ένα άλλο ζεύγος αριθμών που να απέχουν εξίσου από το μηδέν.

(δ) Πόσα τέτοια ζεύγη αριθμών υπάρχουν;

2.1 Έννοιες, ορισμοί

Οι **ρητοί αριθμοί** είναι όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν με τη μορφή κλάσματος, δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α και β είναι ακέραιοι αριθμοί με $\beta \neq 0$.

Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \dots, -4, \dots, -2, 3, \dots, -\frac{1}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{5}{4}, \dots, +4, \dots, +17, 3, \dots \right\}$$

Δύο ή περισσότεροι μη μηδενικοί αριθμοί που έχουν ίδιο πρόσημο λέγονται **ομόσημοι**.

Παράδειγμα

(α) Οι αριθμοί $+7, 6, +25$ είναι ομόσημοι.

(β) Οι αριθμοί $-3, -\frac{2}{3}, -0,5, -12$ είναι ομόσημοι.

Δύο μη μηδενικοί αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο λέγονται **ετερόσημοι**.

Παράδειγμα

(α) Οι αριθμοί $+7\frac{1}{3}, -3$ είναι ετερόσημοι.

(β) Οι αριθμοί $-11, 4$ είναι ετερόσημοι.

Απόλυτη τιμή

Η απόσταση ενός αριθμού α από το μηδέν πάνω στην ευθεία των αριθμών ονομάζεται **απόλυτη τιμή** του αριθμού α . Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού συμβολίζεται με $|\alpha|$.

Δηλαδή, είναι ο αριθμός χωρίς το πρόσημό του.

Παράδειγμα: $|-2| = 2$, $|+2| = 2$, $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$, $|0| = 0$

Δύο ετερόσημοι αριθμοί που έχουν την ίδια απόλυτη τιμή, λέγονται **αντίθετοι**.

Παράδειγμα

(α) Οι αριθμοί $+8, -8$ είναι αντίθετοι.

(β) Οι αριθμοί $+3,2, -3,2$ είναι αντίθετοι.

Δραστηριότητες

1) Από τους πιο κάτω αριθμούς να επιλέξετε δύο ομόσημους, δύο ετερόσημους και δύο αντίθετους αριθμούς:

$$2\frac{1}{3}, -3, +3, -4, -9, +\frac{1}{9}, 0$$

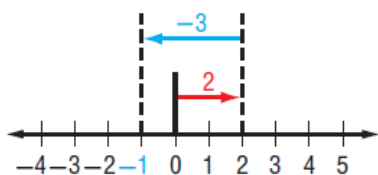
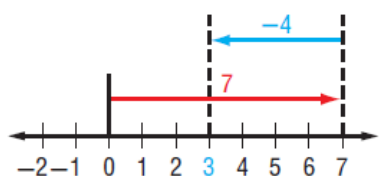
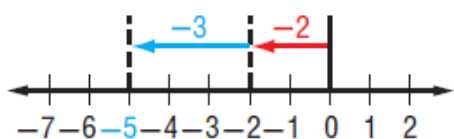
2) Να συμπληρώσετε τον πίνακα όπως το παράδειγμα της πρώτης στήλης.

Ρητός αριθμός	+4		-2,5			$-\frac{1}{10}$
Αντίθετος	-4	+7		$-\frac{3}{5}$	$-1\frac{2}{7}$	
Απόλυτη τιμή	4					

2.2 Πράξεις ρητών αριθμών

Διερεύνηση 1

Να γράψετε μια μαθηματική πρόταση με πρόσθεση που να περιγράφει καθεμιά από τις πιο κάτω αναπαραστάσεις:



Πρόσθεση ομόσημων ρητών αριθμών

Για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερους ομόσημους ρητούς αριθμούς προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμά τους βάζουμε το κοινό τους πρόσημο.

Παραδείγματα

$$(α) (+5) + (+12) = +(5 + 12) = +17 \text{ ή } 5 + 12 = 17$$

$$(β) (-2,3) + (-0,4) + (-3,3) = -(2,3 + 0,4 + 3,3) = -6 \text{ ή } -2,3 - 0,4 - 3,3 = -6$$

Πρόσθεση ετερόσημων ρητών αριθμών

Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή τη μικρότερη και βάζουμε στη διαφορά τους το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Παραδείγματα

$$(α) (-11) + (+5) = -(11 - 5) = -6 \text{ ή } -11 + 5 = -6$$

$$(β) (+8) + (-5) = +(8 - 5) = +3 \text{ ή } 8 - 5 = 3$$

$$(γ) (+6) + (-6) = 0 \text{ ή } 6 - 6 = 0$$

Σε ένα άθροισμα μπορούμε να παραλείψουμε τις παρενθέσεις και το σύμβολο της πρόσθεσης και να γράψουμε τους προσθετέους με το πρόσημό τους.

Παραδείγματα

$$(α) (-4) + (+9) + (-3) + (+8) + (-7) = -4 + 9 - 3 + 8 - 7 = +17 - 14 = +3$$

$$(β) (+3) + (+4) + (-8) + (-10) + (+1) = +3 + 4 - 8 - 10 + 1 = -18 + 8 = -10$$

Αφαίρεση ρητών αριθμών

Για να αφαιρέσουμε από τον ρητό αριθμό α τον ρητό αριθμό β , προσθέτουμε στον αριθμό α τον αντίθετο του β . Δηλαδή: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

Παραδείγματα

$$(\alpha) (-4) - (-6) = (-4) + (+6) = -4 + 6 = +2$$

$$(\beta) (-7) - (+3) = (-7) + (-3) = -7 - 3 = -10$$

$$(\gamma) (+9) - (-5) = (+9) + (+5) = +9 + 5 = +14$$

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = (-8) + (+6) - (-3) + (-2) - (+7)$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= (-8) + (+6) - (-3) + (-2) - (+7) \\ &= (-8) + (+6) + (+3) + (-2) + (-7) \\ &= (-17) + (+9) \\ &= -8 \end{aligned}$$

Δραστηριότητα

Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:

$$(\alpha) -7 - 6 =$$

$$(\beta) -3 + 14 =$$

$$(\gamma) -1 + 9 - 4 =$$

$$(\delta) (-8) + (+5) =$$

$$(\epsilon) (-17) - (-8) =$$

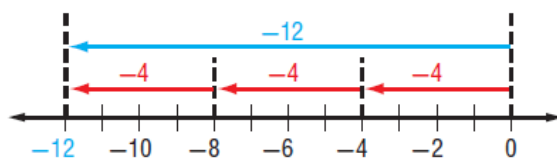
$$(\sigma\tau) (+2) + (-3) - (+6) =$$

$$(\zeta) (-7) - (-8 - 3 + 5) =$$

$$(\eta) (-2 - 5 + 4) - (+1) - (+3) =$$

Διερεύνηση 2

(α) Χρησιμοποιώντας την πιο κάτω αναπαράσταση να υπολογίσετε το γινόμενο $3 \cdot (-4)$



(β) Να σχηματίσετε με τον ίδιο τρόπο το γινόμενο $2 \cdot (-5)$

- ✓ Για να **πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς**, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «+».
- ✓ Για να **πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς**, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «-».
- ✓ Το πηλίκο και το γινόμενο ακολουθούν τους ίδιους κανόνες ως προς το πρόσημο, αφού η διαίρεση μπορεί να μετατραπεί σε πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφο αριθμό.

Δραστηριότητες

1) Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:

(α) $(+6)(+4) =$

(β) $(-3) \cdot 0 =$

(γ) $(-8)(+1) =$

(δ) $(-3)(-5) =$

(ε) $(-2) \left(-\frac{1}{2}\right) =$

(στ) $(-12) : (+3) =$

(ζ) $0 : (-3) =$

(η) $(-3) : \left(-\frac{3}{5}\right) =$

(θ) $\left(-\frac{4}{5}\right) : (+2) =$

2) Να βάλετε το κατάλληλο σύμβολο ($<$, $=$, $>$) μεταξύ των πιο κάτω αριθμών:

(α) $(-2)(-3) \dots \dots - 6$

(δ) $(-3) : \left(+\frac{3}{4}\right) \dots \dots 4$

(β) $\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) \dots \dots 1$

(ε) $(+8) : (-1) \dots \dots + 8$

(γ) $(+2)(-6) \dots \dots (+1)(-6)$

(στ) $(-3)(+4) \dots \dots - 10 - 2$

3) Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:

(α) $(-4 + 6)(-2) =$

(β) $(-17 + 2) : (-1 + 6) =$

(γ) $(-2)(-1)(-3) : (+6) =$

(δ) $(-8 + 20)(-3) : (-4 - 14) =$

(ε) $\frac{-15+3}{-4} =$

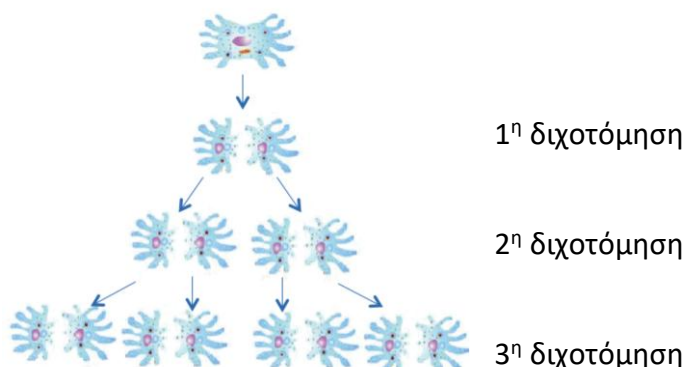
(στ) $\frac{(-12)+(-4)+(+1)}{(-3)(-2)} =$

2.3 Δυνάμεις ρητών αριθμών

Διερεύνηση

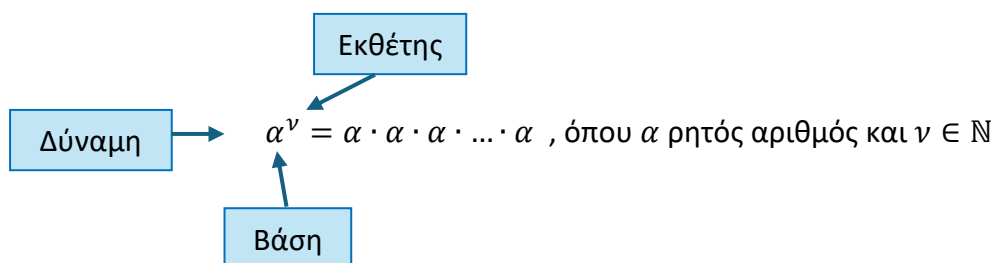
Ένας βιολόγος μελετά μια αμοιβάδα. Η αμοιβάδα είναι ένας μικροοργανισμός που πολλαπλασιάζεται μέσω μιας διαδικασίας διαδοχικών διχοτομήσεων. Κάθε αμοιβάδα διχοτομείται σε δύο άλλες πανομοιότυπες αμοιβάδες.

Η διαδικασία που ακολουθεί ο βιολόγος, για τον υπολογισμό του αριθμού των αμοιβάδων ύστερα από κάθε διχοτόμηση, παρουσιάζεται πιο κάτω.



Να υπολογίσετε τον αριθμό των αμοιβάδων που προκύπτουν μετά από την 5^η διχοτόμηση.

Ορισμός



Ιδιότητες δυνάμεων

- $a^\mu \cdot a^\nu = a^{\mu+\nu}$
- $a^\mu : a^\nu = a^{\mu-\nu}$, $a \neq 0$
- $(a^\mu)^\nu = a^{\mu \cdot \nu}$
- $(a \cdot b \cdot \gamma)^\nu = a^\nu \cdot b^\nu \cdot \gamma^\nu$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^\nu = \frac{a^\nu}{b^\nu}$, $b \neq 0$
- $a^0 = 1$, $a \neq 0$
- $a^{-\nu} = \frac{1}{a^\nu} = \left(\frac{1}{a}\right)^\nu$, $a \neq 0$

Δραστηριότητες

1) Να υπολογίσετε τις πιο κάτω δυνάμεις:

(α) 10^5

(β) $(-3)^3$

(γ) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2$

(δ) -1^4

(ε) 2^{-4}

(στ) $\left(-\frac{5}{8}\right)^{-2}$

2) Να γράψετε υπό μορφή μίας δύναμης τα πιο κάτω:

(α) $5^4 \cdot 5^{-2} =$

(β) $\alpha^2 \cdot \alpha^{-6} \cdot \alpha =$

(γ) $(-7)^{-4} : (-7)^4 =$

(δ) $(-9)^8 : (-9)^{-7} =$

(ε) $(4^3)^{-2} : (4^5 : 4^{-2}) =$

(στ) $9^2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{27} =$

(ζ) $\frac{5^2 \cdot 5^{-6}}{5^{-4}} =$

2.4 Αριθμητικές παραστάσεις

Προτεραιότητα πράξεων

Για να υπολογίσουμε την τιμή μιας αριθμητικής παράστασης, ακολουθούμε την εξής σειρά:

- ✓ Πράξεις στις παρενθέσεις
- ✓ Υπολογισμός δυνάμεων
- ✓ Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις από τα αριστερά προς τα δεξιά
- ✓ Προσθέσεις και αφαιρέσεις από τα αριστερά προς τα δεξιά

Δραστηριότητες

1) Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:

(α) $7^2 - (-3)^3 =$

(β) $-4^0 - (-2 + 5)^4 =$

(γ) $-1^7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - 10^3 =$

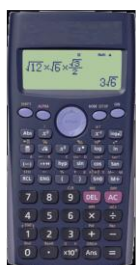
(δ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + (-2)^4 - (-7 + 6)^{-6} =$

2) Να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 2^{-2} - (-4)^{-1} + (-8)^0$

(β) $(-5 + 7 - 3)^5 - 2^3 \cdot (-12 + 2^5 : 2^2) - 25 \left(-\frac{5}{2}\right)^{-2}$

2.5 Χρήση υπολογιστικής μηχανής



- ✓ Οι υπολογιστικές μηχανές είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για τον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων.
- ✓ Μπορούν να υπολογίσουν δυνάμεις, ρίζες, παρενθέσεις κ.λπ. εφόσον τα δεδομένα καταχωρηθούν ορθά, όπως στο παράδειγμα:

$\sqrt{4}$	$\sqrt{\quad} \quad 4 \quad =$	$\sqrt{4}$ 2
5^2	$5 \quad X^2 \quad =$	5^2 25
$2 \cdot (7 - 3)$	$2 \quad x \quad (\quad 7 \quad - \quad 3 \quad) \quad =$	$2X(7 - 3)$ 8
$2 \cdot (7 - 3)$	$7 \quad - \quad 3 \quad = \quad 2 \quad x \quad Ans \quad =$	$2XAns$ 8
$2 - (-3)$	$2 \quad - \quad (\quad (-) \quad 3 \quad) \quad =$	$2 - (-3)$ 5

- ✓ Επίσης, χρησιμοποιώντας την επιλογή $S \leftrightarrow D$ μπορούμε να μετατρέπουμε έναν δεκαδικό αριθμό σε ρητό και αντίστροφα.

Δραστηριότητες

1) Να βρείτε την τετραγωνική ρίζα των πιο κάτω αριθμών, κατά προσέγγιση ακεραίου:

(α) 867

(β) 4328

2) Να βρείτε την τετραγωνική ρίζα των πιο κάτω αριθμών, κατά προσέγγιση δεκάτου:

(α) 1729

(β) 63548

3) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $\frac{0,8 - 0,6}{1,6 \cdot 0,2} =$

(β) $(0,26 + 0,4) \cdot (3,4 - 1,8) =$

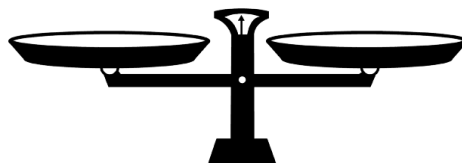
(γ) $\frac{(24,31 - 19,6) \cdot 3,4}{6,28 : 0,4} =$

3. Εξισώσεις α' βαθμού με έναν άγνωστο

Διερεύνηση

Να αναφέρετε διάφορους τρόπους τοποθέτησης των βαριδίων, που φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα, στα δύο μέλη της ζυγαριάς, ώστε αυτή να ισορροπεί κάθε φορά.

Μπορείτε να τοποθετήσετε οποιοδήποτε πλήθος βαριδίων: 4 βαρίδια, 7 βαρίδια ή και όλα τα βαρίδια.



Ορισμοί

Εξίσωση με έναν άγνωστο λέγεται η ισότητα της οποίας ένας αριθμός έχει αντικατασταθεί από ένα γράμμα. Το γράμμα αυτό λέγεται **άγνωστος** της εξίσωσης και είναι μια μεταβλητή. Η τιμή του αγνώστου που επαληθεύει την ισότητα λέγεται **λύση** της εξίσωσης.

Βαθμός μιας εξίσωσης είναι ο μεγαλύτερος εκθέτης που έχει ο άγνωστος στην εξίσωση.

Δύο ή περισσότερες εξισώσεις που έχουν ίδια λύση λέγονται **ισοδύναμες**.

Παράδειγμα

Στην εξίσωση $3x - 15 + 6x = 5x + 9$:

- ✓ Το $3x - 15 + 6x$ λέγεται **α' μέλος** ή **αριστερό μέλος** της εξίσωσης.
- ✓ Το $5x + 9$ λέγεται **β' μέλος** ή **δεξιό μέλος** της εξίσωσης.
- ✓ Οι $3x, 6x, 5x$ λέγονται **άγνωστοι όροι** της εξίσωσης.
- ✓ Οι $-15, 9$ λέγονται **γνωστοί όροι** της εξίσωσης.

Ιδιότητες ισοτήτων

- $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$
- $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha - \gamma = \beta - \gamma$
- $\alpha = \beta \Leftrightarrow \gamma - \alpha = \gamma - \beta$
- $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$
- $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha : \gamma = \beta : \gamma$ με $\gamma \neq 0$
- $\alpha = \beta \Leftrightarrow \gamma : \alpha = \gamma : \beta$ με $\alpha, \beta \neq 0$

3.1 Επίλυση εξισώσεων α' βαθμού

Διερεύνηση

Αν η ζυγαριά στο πιο κάτω σχήμα ισορροπεί και όλα τα πακέτα έχουν την ίδια μάζα, να βρείτε πόσο ζυγίζει κάθε πακέτο. Να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε και να παραστήσετε αλγεβρικά τη διαδικασία λύσης.



Επίλυση εξίσωσης είναι η διαδικασία που ακολουθούμε για να βρούμε την τιμή του αγνώστου που επαληθεύει την εξίσωση. Για να λύσουμε μια εξίσωση α' βαθμού με έναν άγνωστο, τη μετατρέπουμε σε μια ισοδύναμη εξίσωση, ώστε ο άγνωστος να βρίσκεται στο ένα μέλος, ακολουθώντας τα πιο κάτω βήματα:

- **Απαλείφουμε τους παρονομαστές, αν υπάρχουν.**
- **Κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς, αν υπάρχουν.**
- **Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους.** Κατά τη μεταφορά ενός όρου από το ένα μέλος της εξίσωσης στο άλλο, γίνεται αλλαγή του προσήμου του όρου.
- **Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.**
- **Εφαρμόζουμε ιδιότητες ισότητας.** Διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον συντελεστή του αγνώστου.

Παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2y}{3} + 1 = \frac{y}{2} - \frac{y+3}{3}$

Λύση

$$\frac{2y}{3} + 1 = \frac{y}{2} - \frac{y+3}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2y}{3} + \frac{6}{3} = \frac{y}{2} - \frac{y+3}{3}$$

$$\Leftrightarrow 4y + 6 = 3y - 2(y + 3)$$

$$\Leftrightarrow 4y + 6 = 3y - 2y - 6$$

$$\Leftrightarrow 4y - 3y + 2y = -6 - 6$$

$$\Leftrightarrow 3y = -12$$

$$\Leftrightarrow \frac{3y}{3} = \frac{-12}{3}$$

$$\Leftrightarrow y = -4$$

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. $[3, 2, 1] = 6$ και μετατρέπουμε σε ομώνυμα.

Απαλείφουμε τους παρονομαστές.

Κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς.

Χωρίζουμε τους γνωστούς από τους άγνωστους όρους.

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Εφαρμόζουμε ιδιότητες ισότητας.

Βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης.

Δραστηριότητες

1) Να εξετάσετε κατά πόσον οι αριθμοί 9 και 8 είναι λύσεις της εξίσωσης $x + 12 = 20$.

2) Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $3x = 12$

(β) $x + 3 = 10$

(γ) $-2y + 5 = 19$

(δ) $2\alpha - 5 = 7$

3) Η Αλίκη κρατούσε €63 και αγόρασε 5 ίδια δώρα για τις φίλες της. Να βρείτε πόσα κόστισε το κάθε δώρο, αν της περίσσεψαν €3.

4) Να βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου που έχει περίμετρο 36 cm , αν γνωρίζουμε ότι η μια διάστασή του είναι διπλάσια της άλλης.

5) Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $5x + 7 = 3x + 1$

(β) $5(x + 1) = 9x - 3$

(γ) $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = 1 + \frac{x}{4}$

(δ) $\frac{4\omega-1}{2} - \frac{2\omega+5}{3} = \frac{5\omega+2}{6}$

(ε) $\frac{2(2x+1)}{5} - \frac{2x-5}{3} + 1 = \frac{x+1}{2}$

(στ) $\frac{2-3x}{5} + 1 = \frac{3(x+1)}{2} - \frac{3x+4}{10}$

(ζ) $2(x - 3) - (-2x + 1) = 4x - 3$

3.2 Μετασχηματισμός τύπου

Η διαδικασία με την οποία προκύπτει ένας νέος τύπος από έναν γνωστό τύπο λέγεται **μετασχηματισμός τύπου** ή επίλυση τύπου ως προς ένα ή περισσότερα γράμμά του.

Για να μετασχηματίσουμε έναν τύπο ως προς ένα γράμμα του, θεωρούμε τον τύπο σαν εξίσωση, την οποία επιλύουμε με άγνωστο το γράμμα ως προς το οποίο θέλουμε να τον μετασχηματίσουμε.

Παράδειγμα

Να μετασχηματίσετε τους πιο κάτω τύπους ως προς το γράμμα που είναι στην παρένθεση:

(α) $T = \frac{K \cdot E \cdot X}{100}$ (X)

$$100T = K \cdot E \cdot X$$

$$\frac{100T}{K \cdot E} = \frac{K \cdot E \cdot X}{K \cdot E}$$

$$X = \frac{100T}{K \cdot E}$$

Απαλείφουμε τους παρονομαστές.

Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου K · E

(β) $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{ολ}}$ ($R_{ολ}$)

$$R_2 R_{ολ} + R_1 R_{ολ} = R_1 R_2$$

$$R_{ολ}(R_1 + R_2) = R_1 R_2$$

$$\frac{R_{ολ}(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{ολ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Απαλείφουμε τους παρονομαστές.

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $R_{ολ}$

Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου $R_1 + R_2$

Δραστηριότητες

Να μετασχηματίσετε τους πιο κάτω τύπους ως προς το γράμμα που είναι στην παρένθεση:

1) $\Gamma = 2\pi R$ (R)

2) $\Pi = 2\alpha + 2\beta$ (α)

3) $E = \pi R\lambda + \pi R^2$ (λ)

4) $T = \alpha + (\nu - 1)\delta$ (ν)

5) $\Sigma = \frac{[2\alpha_1 + (\nu - 1)\delta] \cdot \nu}{2}$ (δ)

3.3 Λύση προβλημάτων με τη βοήθεια εξισώσεων

- ✓ Οι εξισώσεις βοηθούν στην επίλυση πολλών προβλημάτων.
- ✓ Σημαντική είναι η μετατροπή των λεκτικών προτάσεων σε συμβολικές μαθηματικές εκφράσεις με στόχο τον σχηματισμό εξίσωσης.
- ✓ Η επίλυση της εξίσωσης οδηγεί στην εύρεση της λύσης του προβλήματος.

Διερεύνηση

Λεκτικές προτάσεις	Συμβολικές εκφράσεις
Σκέφτομαι έναν αριθμό	
Το διπλάσιο ενός αριθμού	
3 περισσότερα από έναν αριθμό	
Ο αριθμός ελαττωμένος κατά 5	
Δύο αριθμοί διαφέρουν κατά 30	
Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 15	
Ποια ήταν η ηλικία του Μάριου πριν 12 χρόνια;	
Ο Γιάννης είναι 25 χρονών. Μετά από x χρόνια, πόσα θα είναι τα $\frac{2}{3}$ της ηλικίας του;	
Σε μια εκδρομή μετείχαν 30 μαθητές και μαθήτριες. (α) Αν οι μαθητές ήταν x , πόσες ήταν οι μαθήτριες; (β) Αν κάθε μαθητής πλήρωσε €2 και κάθε μαθήτρια €3, πόσα πλήρωσαν όλες οι μαθήτριες; (γ) Πόσα πλήρωσαν όλοι μαζί;	

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα, συνήθως ακολουθούμε την εξής πορεία:

- (α)** Αφού διαβάσουμε το πρόβλημα, συμβολίζουμε με ένα γράμμα την άγνωστη ποσότητα.
- (β)** Εκφράζουμε με μαθηματικά σύμβολα τα δεδομένα του προβλήματος και σχηματίζουμε εξίσωση.
- (γ)** Λύνουμε την εξίσωση που σχηματίζεται.

Δραστηριότητες

- 1) Να βρείτε τον αριθμό, του οποίου το διπλάσιο ελαττωμένο κατά 12 ισούται με 6.
- 2) Τρία άτομα, A , B και Γ , έχουν συνολικά €145. Ο A έχει €15 περισσότερα από τον B και ο Γ έχει τα διπλάσια από τον A . Να βρείτε πόσα χρήματα έχει ο καθένας.
- 3) Η ηλικία ενός πατέρα είναι σήμερα τριπλάσια από την ηλικία της κόρης του. Μετά από 4 χρόνια, το διπλάσιο της ηλικίας της κόρης θα είναι κατά 8 χρόνια μικρότερο από την ηλικία του πατέρα. Ποιες είναι οι σημερινές τους ηλικίες;
- 4) Σε μια εκδρομή οι γυναίκες ήταν 3 περισσότερες από τους άντρες. Κάθε γυναίκα πλήρωσε €16 και κάθε άντρας €20. Αν οι γυναίκες πλήρωσαν συνολικά €8 περισσότερα από τους άντρες, να βρείτε πόσες ήταν οι γυναίκες και πόσοι ήταν οι άντρες.

4. Αλγεβρικές παραστάσεις

4.1. Αλγεβρική παράσταση

- ✓ Μια μαθηματική έκφραση που περιλαμβάνει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές ονομάζεται **αλγεβρική παράσταση**.

Παραδείγματα

$$4x^2, -5\alpha\beta^4, 2xy^3 + 3x^2y^2$$

- ✓ Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικατασταθούν οι μεταβλητές με συγκεκριμένους αριθμούς, τότε το αποτέλεσμα των πράξεων ονομάζεται **αριθμητική τιμή** της αλγεβρικής παράστασης.

Παράδειγμα

Η αριθμητική τιμή της παράστασης $6x + 3x^2$ για $x = -2$ είναι:

$$6(-2) + 3(-2)^2 = 6(-2) + 3 \cdot 4 = -12 + 12 = 0$$

4.2 Μονώνυμα – Πράξεις μονωνύμων

- ✓ **Μονώνυμο** ονομάζεται κάθε γινόμενο το οποίο αποτελείται από έναν πραγματικό αριθμό και μεταβλητές με εκθέτη μη αρνητικό ακέραιο αριθμό.
- ✓ Ο αριθμητικός παράγοντας ονομάζεται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο των μεταβλητών ονομάζεται **κύριο μέρος**.
- ✓ **Βαθμός του μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή** ονομάζεται ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.
- ✓ **Βαθμός** του μονωνύμου ονομάζεται το άθροισμα των εκθετών όλων των μεταβλητών του.
- ✓ Τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος ονομάζονται **όμοια μονώνυμα**.
- ✓ Το **άθροισμα/διαφορά** όμοιων μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά, το οποίο έχει συντελεστή το άθροισμα/διαφορά των συντελεστών τους. Η πρόσθεση όμοιων μονωνύμων ονομάζεται **αναγωγή ομοίων όρων**.
- ✓ Ο **πολλαπλασιασμός/διαίρεση** μονωνύμων προκύπτει όταν πολλαπλασιάσουμε/διαιρέσουμε τους συντελεστές τους και τα κύρια μέρη τους.

Δραστηριότητες

1) Να εξετάσετε κατά πόσον οι πιο κάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα, συμπληρώνοντας κατάλληλα την πρώτη στήλη. Στην περίπτωση που είναι μονώνυμο, να συμπληρώσετε και τις υπόλοιπες στήλες του πίνακα.

Αλγ. παράσταση	Είναι μονώνυμο	Συντελεστής	Κύριο μέρος	Βαθμός
$\frac{2}{5}x^2$				
$-3x^3y^4$				
$4x^3y^4 + 2x^2$				
$3\alpha^2\beta^{-3}$				
$-xy$				

2) Να αντιστοιχίσετε κάθε αλγεβρική παράσταση της στήλης Α, με το άθροισμά της, στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
(α) $x + 3x - 5x$	(i) $2x^2$
(β) $4x^2 - 3x^2 - 9x^2$	(ii) $4x^3$
(γ) $7x^3 - 4x^3 + x^3$	(iii) $5x$
(δ) $7x^2 - 3x^2 - 2x^2$	(iv) $-x$
	(v) $7x^3$
	(vi) $-8x^2$

3) Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:

(α) $3x + 7x =$

(β) $2\alpha\beta^3 - 5\alpha\beta^3 =$

(γ) $(-x^2) - (+2x^2) + (-4x^2) =$

(δ) $(-5x) \cdot (3x^2) =$

(ε) $(-xy^3) \cdot (2xy^6) =$

(στ) $(20\alpha^4) : (5\alpha^2) =$

(ζ) $(4x^8) : (-2x^3) =$

4) Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω ισότητες:

(α) $-7x^2 + \dots\dots\dots = 3x^2$

(β) $-7x^2y^6 - \dots\dots\dots = -5x^2y^6$

(γ) $5\beta \cdot \dots\dots\dots = -20\beta^3$

(δ) $\dots\dots\dots : (-2y^4) = 3x^2y^2$

4.3 Πολυώνυμα – Πράξεις πολυωνύμων

- ✓ **Πολυώνυμο** ονομάζουμε την αλγεβρική παράσταση που είναι άθροισμα μονωνύμων. Τα μονώνυμα που αποτελούν το πολυώνυμο λέγονται **όροι** του πολυωνύμου.
- ✓ **Βαθμός** ενός πολυωνύμου ως προς **μία ή περισσότερες μεταβλητές**, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του ως προς την μεταβλητή ή τις μεταβλητές αυτές.
- ✓ **Βαθμός ενός πολυωνύμου** είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του ως προς όλες τις μεταβλητές του.

Παράδειγμα

Το πολυώνυμο $-3x^2 + 2x$ είναι 2^{ου} βαθμού.

Το πολυώνυμο $3xy - 2x^3y^2\omega + 7x^2\omega^2 + 3$ είναι 6^{ου} βαθμού, 3^{ου} βαθμού ως προς x και 4^{ου} βαθμού ως προς x και ω , 3^{ου} βαθμού ως προς y και ω , 5^{ου} βαθμού ως προς x και y .

Πρόσθεση πολυωνύμων

Για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερα πολυώνυμα, σχηματίζουμε το πολυώνυμο με όρους όλους τους όρους των δοσμένων πολυωνύμων και μόνο αυτούς. Στη συνέχεια, προχωρούμε σε αναγωγή ομοίων όρων, αν υπάρχουν.

Παράδειγμα

(α)

$$(2x^2 - 5x + 2) + (x^2 - 4x + 1)$$

$$= 2x^2 - 5x + 2 + x^2 - 4x + 1$$

$$= 3x^2 - 9x + 3$$

Απαλείφουμε τις παρενθέσεις.

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

(β)

$$(2x^2 - 5x + 2) - (x^2 - 4x + 1)$$

$$= 2x^2 - 5x + 2 - x^2 + 4x - 1$$

$$= x^2 - x + 1$$

Απαλείφουμε τις παρενθέσεις.

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Πολλαπλασιασμός μονωνύμου με πολυώνυμο

Για να πολλαπλασιάσουμε ένα μονώνυμο με ένα πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Παράδειγμα

$$(-2x) \cdot (x + 3) = (-2x) \cdot (x) + (-2x) \cdot 3 = -2x^2 - 6x$$

Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου με πολώνυμο

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πολώνυμα, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Παράδειγμα

$$\begin{aligned}(\alpha + 2) \cdot (\alpha^2 + 3\alpha) &= \alpha \cdot (\alpha^2 + 3\alpha) + 2 \cdot (\alpha^2 + 3\alpha) \\&= \alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha^2 + 6\alpha \\&= \alpha^3 + 5\alpha^2 + 6\alpha\end{aligned}$$

Διαίρεση πολυωνύμου με μονώνυμο

Για να διαιρέσουμε ένα πολώνυμο με ένα μονώνυμο, διαιρούμε τον κάθε όρο του πολυωνύμου με το μονώνυμο και προσθέτουμε τα πηλίκα που προκύπτουν.

Παράδειγμα

$$\begin{aligned}(12y^5 - 6y^3) : (2y^3) &= (12y^5 : 2y^3) - (6y^3 : 2y^3) \\&= 6y^2 - 3\end{aligned}$$

Διαίρεση πολυωνύμου με πολώνυμο

Αν έχουμε δύο πολώνυμα $\Delta(x)$ και $\delta(x)$, με $\delta(x) \neq 0$, τότε για τη διαίρεση $\Delta(x) : \delta(x)$ υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $\pi(x)$ και $\nu(x)$ τέτοιο ώστε:

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \nu(x)$$

(Ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης)

όπου το $\nu(x)$ είναι είτε ίσο με μηδέν είτε έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του $\delta(x)$.

Παράδειγμα

$$\begin{array}{r|l} \Delta(x) & \delta(x) \\ 6\alpha^2 + 5\alpha + 3 & 2\alpha + 1 \\ -6\alpha^2 - 3\alpha & 3\alpha + 1 \\ \hline +2\alpha + 3 & \pi(x) \\ -2\alpha - 1 & \\ \hline +2 & \nu(x) \end{array}$$

Άρα, το πηλίκο της διαίρεσης είναι $3\alpha + 1$ και το υπόλοιπο 2.

Ισχύει: $(2\alpha + 1)(3\alpha + 1) + 2 = 6\alpha^2 + 5\alpha + 3$

Δραστηριότητα

Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:

$$(α) (3x^2 - 2x) + (7x^2 + 5x) =$$

$$(β) (3x^2 - 2x) - (7x^2 + 5x) =$$

$$(γ) (x^2 - 4xy + 3) + (x^2 + 3xy) =$$

$$(δ) (3β^2 + 2) - (2β^2 + 2β + 1) =$$

$$(ε) x(x + 2) =$$

$$(στ) -5x(3x - x^2) =$$

$$(ζ) -xy^3(2x - y^6) =$$

$$(η) (20α^4 + 5α^3) : (5α^2) =$$

$$(θ) (4x^8 - 12x^5) : (-2x^3) =$$

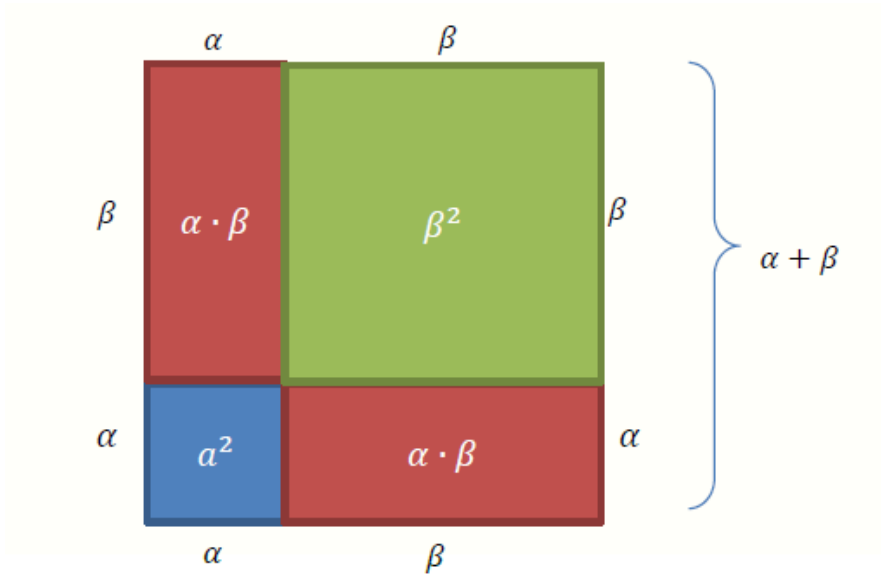
$$(ι) (15α^4 - 3α^3) : (3α^2) =$$

4.4 Ταυτότητες

Διερεύνηση 1

Δίνεται το πιο κάτω τετράγωνο πλευράς $(\alpha + \beta)$.

Να βρείτε το εμβαδόν του και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα σας.



Διερεύνηση 2

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «[C_En1_\(a+b\)^3.ggb](#)».

(α) Να διερευνήσετε γεωμετρικά το ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta)^3$.

(β) Ποιο είναι το ανάπτυγμα του $(\alpha - \beta)^3$;

✓ **Αλγεβρική ταυτότητα** είναι κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών.

Παράδειγμα: $(2x - y)(3x + 5y) = 6x^2 + 10xy - 3xy - 5y^2 = 6x^2 + 7xy - 5y^2$

Κάποιες από τις πιο **αξιοσημείωτες ταυτότητες** είναι:

- ✓ **Τετράγωνο αθροίσματος δύο όρων:** Το τετράγωνο του αθροίσματος δύο όρων είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο όρων, αυξημένο κατά το διπλάσιο του γινομένου αυτών.

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

- ✓ **Τετράγωνο διαφοράς δύο όρων:** Το τετράγωνο της διαφοράς δύο όρων είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο όρων, μειωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο αυτών.

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

- ✓ **Γινόμενο του αθροίσματος επί τη διαφορά δύο όρων:** Το γινόμενο του αθροίσματος δύο όρων επί τη διαφορά τους, είναι ίσο με τη διαφορά των τετραγώνων των δύο όρων.

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

- ✓ **Κύβος αθροίσματος δύο όρων:**

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

- ✓ **Κύβος διαφοράς δύο όρων:**

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Δραστηριότητες

1) Να αναγνωρίσετε και να αιτιολογήσετε ποια από τις πιο κάτω ισότητες αποτελεί ταυτότητα και ποια εξίσωση.

$$2(x + 3) = x + 10 \quad \text{και} \quad 2(x + 3) = 2x + 6$$

2) Να εξηγήσετε γιατί η ισότητα $(\alpha + 2)^2 = \alpha^2 + 4\alpha + 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$, είναι ταυτότητα.

3) Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

(α) $(\alpha + 1)^2 =$

(β) $(y - 3)^2 =$

(γ) $(x + 5y)^2 =$

(δ) $(x - 2)(x + 2) =$

(ε) $(x - 2)^3 =$

(στ) $(3x + y)^3 =$

(ζ) $(5x - 2)^2 - (2x + 3)^2 =$

(η) $(4x - 3)(4x + 3) - (1 - 5x)^2 =$

4) Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

(α) $(x + y)^2 - (x - 2y)(x + 2y) = 5y^2 + 2xy$

(β) $(x - 1)^3 + x(3x - 7) = x^3 - 4x - 1$

5) Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω ταυτότητες.

(α) $(y + \quad)^2 = y^2 + 4y + 4$

(β) $(x + \quad)^2 = 9 + 6x + x^2$

(γ) $(\quad + \quad)^2 = 25 + x^2 + 10x$

(δ) $(\quad - \quad)^2 = -20y + 4y^2 + 25$

(ε) $a^2 - \quad = (\quad - \quad)(\quad + \frac{1}{2})$

(στ) $27x^3 + 1 + \quad + \quad = (\quad + \quad)^3$

4.5 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

✓ **Παραγοντοποίηση ή ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων** λέγεται η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε μια αλγεβρική παράσταση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

✓ **Κοινός παράγοντας**

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma)$$

Κοινός παράγοντας του $\alpha\beta$ και του $\alpha\gamma$ είναι το α

$$5xy - 10y^2 = 5y(x - 2y)$$

Κοινός παράγοντας το $5y$

✓ **Κοινός παράγοντας κατά ομάδες (ομαδοποίηση)**

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta x - \alpha y - \beta y &= x(\alpha + \beta) - y(\alpha + \beta) \\ &= (\alpha + \beta)(x - y) \end{aligned}$$

Κοινός παράγοντας κάθε ομάδας/Κοινός παράγοντας των όρων που προκύπτουν

✓ **Διαφορά τετραγώνων**

$$4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)$$

Ταυτότητα: $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

✓ **Τέλειο τετράγωνο**

$$9\omega^2 - 12\omega + 4 = (3\omega - 2)^2$$

Ταυτότητα: $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$

$$4x^2 + 4xy + y^2 = (2x + y)^2$$

Ταυτότητα: $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$

✓ **Παραγοντοποίηση τριωνύμου $x^2 + \beta x + \gamma$**

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$$

Βρίσκουμε δύο αριθμούς κ και λ , οι οποίοι να έχουν γινόμενο γ και άθροισμα β , έτσι ώστε:

$$x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$$

$$x^2 + \beta x + \gamma = (x + \kappa)(x + \lambda)$$

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$$

Δραστηριότητες

1) Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $x^2 + 7x =$

(β) $2\beta^2\gamma^3 - 8\beta\gamma^2 =$

(γ) $3xy - 9x^2y^3 + 6xy^6 =$

(δ) $2x(\alpha + \beta) + 5y(\alpha + \beta) =$

(ε) $10(x - y) + 2\beta(y - x) =$

(στ) $(\alpha + \beta)^2 - 3\gamma(\alpha + \beta) =$

2) Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $x^2 - 4y^2 =$

(β) $\alpha^2 - 1 =$

(γ) $25x^2 - 16y^4 =$

(δ) $x^2 - 7x + 12$

(ε) $\alpha^2 - 10\alpha + 25 =$

(στ) $x^2 - y^2 - 5x - 5y =$

(ζ) $x^3 + 7x^2 + 6x =$

(η) $3x - 6 - 2y + xy =$

(θ) $3\alpha^2 - 27\beta^2 =$

(ι) $16(y + 4) - y^2(y + 4) =$

(ια) $25x^2 + 10xy + y^2 =$

(ιβ) $x^2 - 6x + 9 + yx - 3y =$

4.6 Απλοποίηση αλγεβρικού κλάσματος

Για να απλοποιήσουμε ένα αλγεβρικό κλάσμα, παραγοντοποιούμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή και απλοποιούμε τους κοινούς παράγοντες.

Σημείωση

Οι μεταβλητές μιας ρητής αλγεβρικής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν πραγματικές τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή, γιατί δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή το μηδέν.

Παραδείγματα

1. Να απλοποιήσετε το κλάσμα: $\frac{3x^2y^4}{9x^3y^2}$

Λύση: $\frac{3x^2y^4}{9x^3y^2} = \frac{y^2}{3x}$

Η απλοποιημένη παράσταση που προέκυψε ορίζεται (έχει νόημα) για $x \neq 0$ και $y \neq 0$.

2. Να απλοποιήσετε το κλάσμα: $\frac{x^2-y^2}{x^2-xy}$

Λύση: $\frac{x^2-y^2}{x^2-xy} = \frac{(x-y)(x+y)}{x(x-y)}$

Η απλοποιημένη παράσταση που προέκυψε ορίζεται (έχει νόημα) για $x \neq 0$ και $x \neq y$.

Δραστηριότητες

1) Να αναφέρετε τις πραγματικές τιμές του x , για τις οποίες ορίζεται η καθεμιά από τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\frac{x}{x+1}$

(β) $\frac{x+2}{(x+5)(x-2)}$

(γ) $\frac{3x+7}{x(2x-4)}$

2) Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

$$(\alpha) \frac{5x^5y^2}{10x^3y} =$$

$$(\beta) \frac{12(y+1)^5}{4(y+1)^3} =$$

$$(\gamma) \frac{\alpha+5}{\alpha^2-25} =$$

$$(\delta) \frac{3\alpha-3}{\alpha^2-1} =$$

$$(\epsilon) \frac{8x^2-4x}{4x-2} =$$

$$(\sigma\tau) \frac{x^2-6x+9}{x^2-9} =$$

$$(\zeta) \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} =$$

$$(\eta) \frac{\alpha^2-5\alpha+4}{\alpha^2-2\alpha+1} =$$

$$(\theta) \frac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}{\alpha^3-\alpha\beta^2} =$$

4.7 Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π. ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων

- ✓ **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.)** δύο ή περισσότερων πολυωνύμων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι το γινόμενο **όλων των κοινών παραγόντων** με εκθέτη κάθε παράγοντα τον μικρότερο από τους εκθέτες τους.
- ✓ **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.)** δύο ή περισσότερων πολυωνύμων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι το γινόμενο **όλων των παραγόντων (κοινών και μη-κοινών)** με εκθέτη κάθε παράγοντα τον μεγαλύτερο από τους εκθέτες τους.

Παραδείγματα

1) Να βρείτε τον Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. των μονωνύμων: $21x^3y$, $9x^2y^2$

Λύση

$$21x^3y = 3 \cdot 7 \cdot x^3y$$

$$9x^2y^2 = 3 \cdot 3 \cdot x^2y^2$$

$$Μ.Κ.Δ. (21x^3y, 9x^2y^2) = 3x^2y$$

$$Ε.Κ.Π. (21x^3y, 9x^2y^2) = 3 \cdot 7 \cdot x^3y^2 = 21x^3y^2$$

2) Να βρείτε τον Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. των αλγεβρικών παραστάσεων:

$$2x^2 - 2x, x^2 - 1, x^2 - 2x + 1$$

Λύση

$$2x^2 - 2x = 2x(x - 1)$$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$Μ.Κ.Δ. (2x^2 - 2x, x^2 - 1, x^2 - 2x + 1) = x - 1$$

$$Ε.Κ.Π. (2x^2 - 2x, x^2 - 1, x^2 - 2x + 1) = 2x(x + 1)(x - 1)^2$$

Δραστηριότητα

1) Να βρείτε τον Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. των πιο κάτω αλγεβρικών παραστάσεων:

(α) $2xy^2$, $6x^2y$

(β) $x^2 - y^2$, $x^2 + 2xy + y^2$

(γ) $\alpha^2 + 5\alpha$, $\alpha^2 - 25$

(δ) $x^2 - 4x + 3$, $x^2 - 3x$, $x^2 - 6x + 9$

4.8 Πράξεις αλγεβρικών κλασμάτων (απλές περιπτώσεις)

Διερεύνηση

Η Γεωργία και η Χριστίνα έκαναν τις πιο κάτω πράξεις:

Γεωργία

$$\begin{aligned} & \frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{3x}{3x-6} \\ = & \frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}(x-2)} \\ = & \frac{x}{x+2} \end{aligned}$$

Χριστίνα

$$\begin{aligned} & \frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{3x}{3x-6} \\ = & \frac{\cancel{x}-2}{\cancel{x}+2} \cdot \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}x-6} \\ = & \frac{x}{x-6} \end{aligned}$$

Να εξηγήσετε ποιο από τα δύο αποτελέσματα είναι ορθό και γιατί.

✓ Πρόσθεση και αφαίρεση αλγεβρικών κλασμάτων

Παράδειγμα

Να κάνετε τις πράξεις: $\frac{3}{x^2-x} + \frac{3x-2}{x^2-1} - \frac{2}{x+1}$

Λύση

$$\begin{aligned} & \frac{3}{x^2-x} + \frac{3x-2}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} \\ = & \frac{3}{x(x-1)} + \frac{3x-2}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{x+1} \\ = & \frac{3(x+1) + x(3x-2) - 2x(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \\ = & \frac{3x+3+3x^2-2x-2x^2+2x}{x(x-1)(x+1)} \\ = & \frac{x^2+3x+3}{x(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές και βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. $(x^2-x, x^2-1, x+1) = x(x-1)(x+1)$
Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα.

Κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις αναγωγές ομοίων όρων.

✓ Πολλαπλασιασμός αλγεβρικών κλασμάτων

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε το γινόμενο: $\frac{x^2+2x-3}{x^3-x} \cdot \frac{2x-6}{x^2-9}$

Λύση

$$\begin{aligned} & \frac{x^2+2x-3}{x^3-x} \cdot \frac{2x-6}{x^2-9} \\ &= \frac{(x^2+2x-3)(2x-6)}{(x^3-x)(x^2-9)} \\ &= \frac{(x+3)(x-1) \cdot 2(x-3)}{x(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή.

Αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Απλοποιούμε τους ίδιους όρους.

✓ Διαίρεση αλγεβρικών κλασμάτων

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε το πηλίκο: $\frac{4x+4}{x^2-1} : \frac{3x}{x-1}$

Λύση

$$\begin{aligned} & \frac{4x+4}{x^2-1} : \frac{3x}{x-1} \\ &= \frac{(4x+4)(x-1)}{(x^2-1) \cdot 3x} \\ &= \frac{4(x+1)(x-1)}{3x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{4}{3x} \end{aligned}$$

Αντιστρέφουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος.

Αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Απλοποιούμε τους ίδιους όρους.

✓ Σύνθετα κλάσματα

Παράδειγμα

Να μετατρέψετε το σύνθετο κλάσμα σε απλό:

$$\frac{\frac{x^2+x}{3y}}{\frac{x+1}{12y^2}}$$

Λύση

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{x^2+x}{3y}}{\frac{x+1}{12y^2}} \\ &= \frac{x^2+x}{3y} : \frac{x+1}{12y^2} \\ &= \frac{(x^2+x) \cdot 12y^2}{3y(x+1)} \\ &= \frac{x(x+1) \cdot 12y^2}{3y(x+1)} \\ &= 4xy \end{aligned}$$

Γράφουμε το σύνθετο κλάσμα ως διαίρεση δύο κλασμάτων.

Αντιστρέφουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος.

Αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Απλοποιούμε τους ίδιους όρους.

Δραστηριότητα

Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:

(α) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} =$

(β) $\frac{5x}{x^2-9} - \frac{3}{2x+6} =$

(γ) $\frac{3x}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} =$

(δ) $\frac{6}{x^4} \cdot \frac{x^4}{2} =$

$$(\epsilon) \frac{2x-8}{x-4} \cdot \frac{x^3}{2x} =$$

$$(\sigma\tau) \frac{x^2-9}{6+2x} \cdot \frac{4x}{x-3} =$$

$$(\zeta) \frac{3x^2y}{5\omega^3} : \frac{12xy}{15\omega^2} =$$

$$(\eta) \frac{5x+x^2}{2x-3} : \frac{x^3+6x^2+5x}{8x-12} =$$

$$(\theta) \frac{\frac{x^2+2x+1}{x^2-3x}}{\frac{2x+2}{x^2-2x-3}} =$$

5. Δυνάμεις και ρίζες πραγματικών αριθμών

5.1 Δυνάμεις

Διερεύνηση

✓ Τι παρατηρείτε για τους αριθμούς που εμφανίζονται σε κόκκινο κουτάκι;

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

✓ Πώς αλλιώς θα μπορούσαμε να εκφράσουμε αυτούς τους αριθμούς;



Ιδιότητες δυνάμεων στο $\mathbb{R}$

- $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$
- $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$
- $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$
- $(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu \cdot \gamma^\nu$
- $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$, $\beta \neq 0$
- $\alpha^0 = 1$, $\alpha \neq 0$
- $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\nu$, $\alpha \neq 0$

Δραστηριότητα

Να γράψετε υπό μορφή μίας δύναμης τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $5^3 \cdot 5^4 \cdot 5 =$

(β) $(-6)^4 : (-6)^2 =$

(γ) $(-2)^3 \cdot 4^2 =$

(δ) $(x^{-3})^4 \cdot x^5 =$

(ε) $\frac{y^{-2} \cdot y^2}{y^{-4}} =$

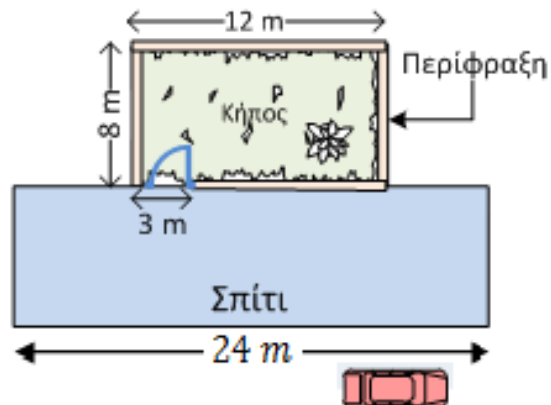
(στ) $(3^4)^{-2} : (3^2 \cdot 3^{-8}) =$

(ζ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{12} : \left(\frac{1}{8}\right)^{-5} =$

(η) $\frac{1}{9^4} \cdot (3^2)^3 : 27 =$

5.2 Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

Διερεύνηση



Η οικογένεια Αντωνίου έχει έναν κήπο στο πίσω μέρος του σπιτιού της και θέλει να τον επεκτείνει. Ο κήπος που έχει σήμερα η οικογένεια είναι σχήματος ορθογωνίου με μήκος 12 m και πλάτος 8 m . Ο νέος κήπος που θέλει να κατασκευάσει πρέπει να έχει εμβαδόν 225 m^2 , να έχει σχήμα τετράγωνο ή ορθογώνιο και το μήκος των πλευρών του να είναι ακέραιοι αριθμοί, μικρότεροι από το μήκος του σπιτιού.

Ποιες μπορεί να είναι οι διαστάσεις και ποιο σχήμα μπορεί να έχει ο νέος κήπος;

Ορισμός

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α , είναι ο μη αρνητικός αριθμός β , ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό α .

Συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και ισχύει ότι:

$$\sqrt{\alpha} = \beta \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha \quad (\alpha, \beta \geq 0)$$

Δραστηριότητες

1) Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες:

(α) $\sqrt{36} =$

(β) $\sqrt{81} =$

(γ) $\sqrt{\frac{1}{4}} =$

(δ) $\sqrt{0,25} =$

2) Η οργανωτική επιτροπή μιας συναυλίας θέλει να τοποθετήσει 900 καθίσματα σε ένα κλειστό γήπεδο. Τα καθίσματα θα τοποθετηθούν σε τετράγωνη διάταξη. Πόσα καθίσματα θα τοποθετηθούν σε κάθε σειρά;

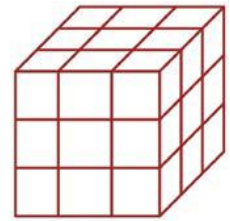
3) Η πυραμίδα του Χέοπα είναι η ψηλότερη πυραμίδα στον κόσμο. Η βάση της πυραμίδας έχει σχήμα τετράγωνο με εμβαδόν 52900 m^2 . Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς της βάσης της πυραμίδας.



5.3 Νιοστή ρίζα πραγματικού αριθμού

Διερεύνηση

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένας κύβος, ο οποίος κατασκευάστηκε χρησιμοποιώντας 27 μικρότερους κύβους ακμής 1 *cm*.



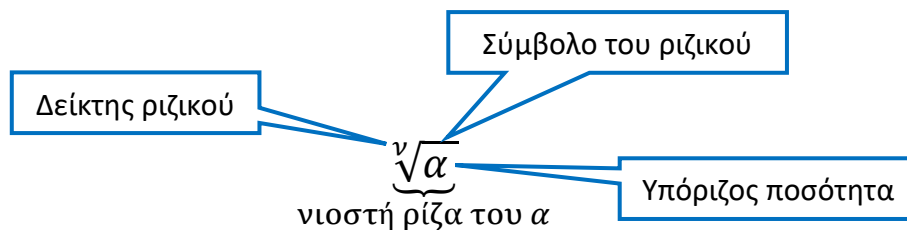
- 1) Να υπολογίσετε το μήκος της ακμής του μεγάλου κύβου.
- 2) Να σχεδιάσετε πώς θα είναι ένας κύβος που αποτελείται από 64 μικρούς κύβους.
- 3) Να εξετάσετε αν μπορεί να κατασκευαστεί κύβος από 216 μικρούς κύβους.
- 4) Να εξετάσετε αν μπορεί να κατασκευαστεί ένας κύβος από 300 και ένας άλλος από 343 μικρούς κύβους (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την υπολογιστική μηχανή σας).

Ορισμός

Η **νιοστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α , όπου n φυσικός αριθμός, είναι ο μη αρνητικός αριθμός β , ο οποίος όταν υψωθεί σε δύναμη με εκθέτη n , δίνει τον αριθμό α .

Συμβολίζεται με $\sqrt[n]{\alpha}$ και ισχύει ότι:

$$\sqrt[n]{\alpha} = \beta \Leftrightarrow \beta^n = \alpha \quad (\alpha, \beta \geq 0, n \in \mathbb{N})$$



Δραστηριότητες

1) Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες:

(α) $\sqrt[4]{81} =$

(β) $\sqrt[5]{32} =$

(γ) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} =$

(δ) $-\sqrt[7]{1} =$

2) Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:

(α) $7\sqrt{11} - 4\sqrt{11} + \sqrt{11} =$

(β) $2\sqrt[3]{27} - 5\sqrt[3]{\frac{1}{1000}} =$

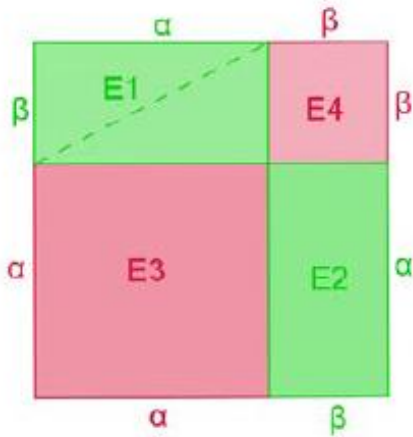
(γ) $\sqrt[3]{8} + 2\sqrt{25} - 3\sqrt[4]{0} =$

3) Να δείξετε ότι ισχύει η ισότητα: $\sqrt{16} + \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{1} = \sqrt{36}$

6. Πυθαγόρειο Θεώρημα

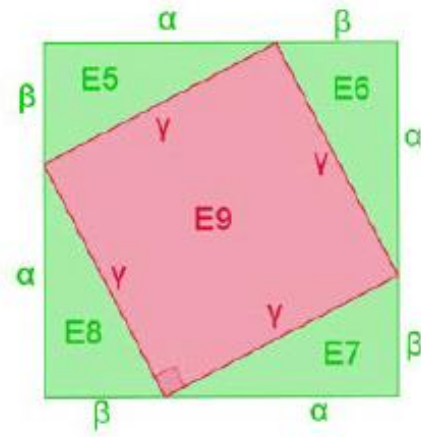
Διερεύνηση

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο με πλευρά $(\alpha + \beta)$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου, σε κάθε περίπτωση, και να αναφέρετε τα συμπεράσματά σας.



Το εμβαδόν (E) του τετραγώνου είναι:

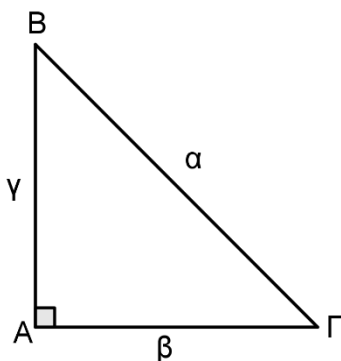
1^η περίπτωση:



2^η περίπτωση:

6.1 Πυθαγόρειο Θεώρημα (Π.Θ.)

Σε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του μήκους της υποτείνουσάς του είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων του μηκών των δύο κάθετων πλευρών του.



Πυθαγόρειο Θεώρημα: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

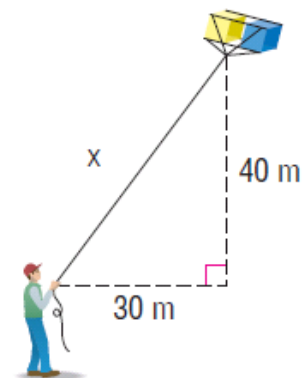
Δραστηριότητες

1) Να εξετάσετε κατά πόσον το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις. Αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, να εντοπίσετε την ορθή γωνία.

(α) $AB = 7\text{ m}$, $B\Gamma = 24\text{ m}$, $A\Gamma = 25\text{ m}$

(β) $AB = 2\text{ m}$, $B\Gamma = 3\text{ m}$, $A\Gamma = 4\text{ m}$

2) Στο διπλανό σχήμα, το μήκος του σχοινιού του χαρταετού συμβολίζεται με x . Να υπολογίσετε την τιμή του x .



3) Ένας οικοδόμος, για να σχηματίσει ορθή γωνία, κόβει τρία ξύλα μήκους 6 m , 8 m και 10 m . Στη συνέχεια με αυτά σχηματίζει ένα τρίγωνο. Να εξηγήσετε γιατί είναι σίγουρος ότι έχει σχηματίσει ορθή γωνία.



4) Οι ίσες πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου έχουν μήκος 17 cm και το ύψος που αντιστοιχεί στην τρίτη πλευρά του έχει μήκος 15 cm . Να υπολογίσετε το μήκος της τρίτης πλευράς του τριγώνου.

7. Τριγωνομετρία

7.1 Εισαγωγή

Η λέξη «Τριγωνομετρία» προέρχεται από τις ελληνικές λέξεις «τρίγωνον» και «μέτρον». Η Τριγωνομετρία είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που ασχολείται με τις σχέσεις μεταξύ των πλευρών και γωνιών τριγώνου. Η ιστορία της Τριγωνομετρίας εκτείνεται σε αρχαίους πολιτισμούς, όπως οι Βαβυλώνιοι, οι Αιγύπτιοι και οι Έλληνες. Η παλαιότερη γνωστή χρήση των τριγωνομετρικών εννοιών συναντάται στην αρχαία Αίγυπτο, όπου οι υπολογισμοί γωνιών και λόγων χρησιμοποιήθηκαν στην κατασκευή πυραμίδων και άλλων αρχιτεκτονικών δομών.

Διερεύνηση

Ο κύριος Μιχάλης θέλει να κατασκευάσει ένα ντουλάπι κάτω από τον χώρο της σκάλας, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Θέλει να μελετήσει ποιο θα είναι το μήκος (x) των κατακόρυφων ξύλινων δοκών που θα χρειαστεί. Ο κύριος Μιχάλης μπορεί να μετρήσει με ακρίβεια τη γωνία που σχηματίζει η σκάλα με το πάτωμα, καθώς και το μήκος (y) των οριζόντιων δοκών.

Να εξετάσετε κατά πόσον οι δύο μετρήσεις είναι αρκετές, ώστε να μπορεί να υπολογίζει στο χαρτί το μήκος (x) κάθε δοκού, αφού είναι δύσκολο να το μετρήσει στην πράξη.



Να ανοίξετε το αρχείο «[C_En5_TrigArithmoi.ggb](#)», για να διερευνήσετε το πιο πάνω σενάριο.

7.2 Μονάδες μέτρησης γωνιών

Όπως όλα τα φυσικά μεγέθη έχουν τις μονάδες μέτρησής τους, έτσι και οι γωνίες έχουν τις δικές τους μονάδες μέτρησης. Η μέτρηση των γωνιών γίνεται με το **μοιρογνωμόνιο** (γεωμετρικό όργανο). Ο αριθμός που προκύπτει από τη μέτρηση ονομάζεται μέτρο γωνίας.

- ✓ Αν χωρίσουμε έναν κύκλο σε 360 ίσα τόξα, τότε το κάθε ένα από αυτά τα τόξα λέγεται **τόξο μιας μοίρας** (1°) και αυτή είναι η μονάδα μέτρησης των τόξων. Μια μοίρα χωρίζεται σε 60 πρώτα λεπτά ($60'$) και κάθε πρώτο λεπτό σε 60 δεύτερα λεπτά ($60''$). Δηλαδή:

$$1^\circ = 60'$$

$$1' = 60''$$

- ✓ Το **ακτίνιο** είναι το τόξο του οποίου το μήκος ισούται με το μήκος της ακτίνας του κύκλου στο οποίο ανήκει. Γωνία ενός ακτινίου είναι η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία του τόξου ενός ακτινίου.

Δηλαδή αν: $AB = R \Leftrightarrow \hat{\varphi} = 1 \text{ rad}$

Από τη Γεωμετρία ξέρουμε ότι το μήκος ενός κύκλου είναι $2\pi R$. Άρα το τόξο ενός κύκλου είναι 2π ακτίνια.

- ✓ Αν μ και α είναι οι αριθμοί που εκφράζουν μία γωνία σε μοίρες και ακτίνια αντίστοιχα, τότε ισχύει η σχέση:

$$\frac{\mu^\circ}{360^\circ} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad \text{ή} \quad \frac{\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi}$$

Δραστηριότητες

1) Να μετατρέψετε σε ακτίνια τις πιο κάτω γωνίες:

(α) 60°

(β) 150°

(γ) 310°

(δ) 225°

(ε) 180°

2) Να μετατρέψετε σε μοίρες τις πιο κάτω γωνίες:

(α) 1 rad

(β) $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$

(γ) $\frac{4\pi}{3} \text{ rad}$

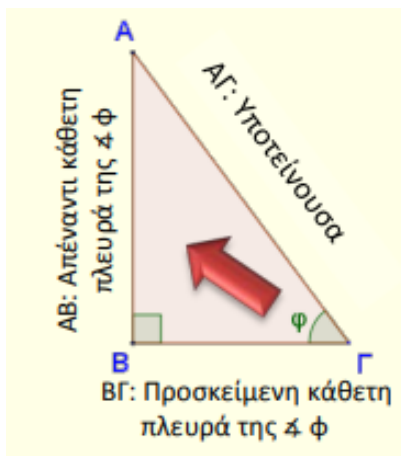
(δ) $\frac{3\pi}{8} \text{ rad}$

(ε) $\frac{2\pi}{9} \text{ rad}$

7.3 Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Κύριο αντικείμενο της Τριγωνομετρίας είναι η εύρεση σχέσεων που συνδέουν τα μήκη των πλευρών και τα μέτρα των γωνιών ενός τριγώνου, με σκοπό την επίλυσή του.

Έστω ότι έχουμε το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} = 90^\circ$):



✓ Ο λόγος $\frac{AB}{AG}$ λέγεται **ημίτονο** της γωνίας φ και γράφουμε **ημφ**.

✓ Ο λόγος $\frac{B\Gamma}{AG}$ λέγεται **συνημίτονο** της γωνίας φ και γράφουμε **συνφ**.

✓ Ο λόγος $\frac{AB}{B\Gamma}$ λέγεται **εφαπτομένη** της γωνίας φ και γράφουμε **εφφ**.

Γενικά, για την οξεία γωνία φ ενός ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\eta\mu\varphi = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\epsilon\varphi\varphi = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

- ✓ **Συντέμνουσα της γωνίας φ** ορίζεται το αντίστροφο του ημιτόνου της γωνίας φ .
- ✓ **Τέμνουσα της γωνίας φ** ορίζεται το αντίστροφο του συνημιτόνου της γωνίας φ .
- ✓ **Συνεφαπτομένη της γωνίας φ** ορίζεται το αντίστροφο της εφαπτομένης της γωνίας φ .

Συμβολικά έχουμε:

$$\sigma\tau\epsilon\mu\varphi = \frac{1}{\eta\mu\varphi} \Leftrightarrow \eta\mu\varphi \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\varphi = 1$$

$$\tau\epsilon\mu\varphi = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \tau\epsilon\mu\varphi = 1$$

$$\sigma\varphi\varphi = \frac{1}{\epsilon\varphi\varphi} \Leftrightarrow \epsilon\varphi\varphi \cdot \sigma\varphi\varphi = 1$$

Δραστηριότητες

1) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών B και Γ ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), αν ισχύει ότι $AB = 9\text{ cm}$ και $A\Gamma = 12\text{ cm}$.

Παρατήρηση:

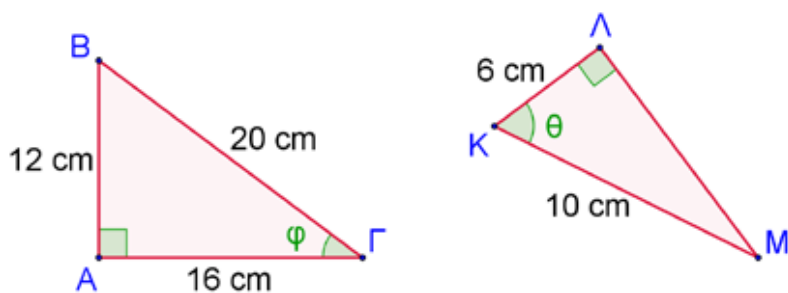
Οι γωνίες B, Γ είναι συμπληρωματικές ($\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$).

Παρατηρούμε ότι το ημίτονο μίας οξείας γωνίας είναι ίσο με το συνημίτονο της συμπληρωματικής της και αντίστροφα.

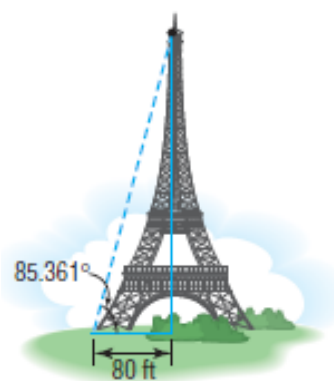
Η εφαπτομένη μίας οξείας γωνίας είναι ίση με τη συνεφαπτομένη της συμπληρωματικής της και αντίστροφα.

2) Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η γωνία B έχει $\varepsilon\varphi B = \frac{3}{4}$. Να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας B .

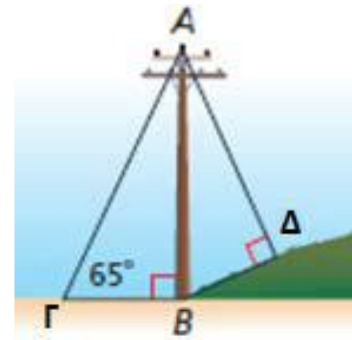
3) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών φ και θ , στο πιο κάτω σχήμα.



4) Να βρείτε ποιο ήταν το ύψος του Πύργου του Άιφελ πριν από την τοποθέτηση της τηλεοπτικής κεραίας, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που δίνονται στην πιο κάτω εικόνα.

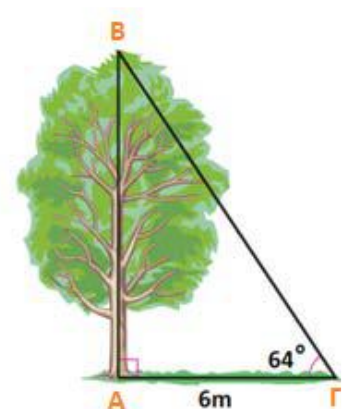


5) Ένας πάσσαλος της ηλεκτρικής μήκους 8 m είναι τοποθετημένος στη βάση ενός λόφου, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Αν η γωνία που σχηματίζει ο λόφος με το έδαφος είναι 20° , να υπολογίσετε το μήκος των δύο συρμάτων με τα οποία στερεώνεται ο πάσσαλος.



6) Ο κύριος Αβραάμ θέλει να υπολογίσει το ύψος ενός δέντρου στον κήπο του. Τοποθέτησε τον εξάντα σε απόσταση 6 m από τον κορμό του δέντρου, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Υπολόγισε ότι το μέτρο της γωνίας υπό την οποία φαίνεται το δέντρο ήταν 64° . Να υπολογίσετε το ύψος του δέντρου και την απόσταση $BΓ$.

(Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί να υπολογιστούν με προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων).



7.4 Χρήση υπολογιστικής μηχανής

Για να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών με τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, πληκτρολογούμε τις πιο κάτω εντολές:

(α)

Με την υπολογιστική μηχανή μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ως εξής:

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$\eta\mu 30^\circ$		$\sin 30$ 0.5
$\sigma\upsilon\nu 42^\circ$		$\cos 42$ 0.7431448255
$\epsilon\phi 70^\circ$		$\tan 70$ 2.747477419

Στρογγυλοποιούμε κατάλληλα τους αριθμούς. Άρα,
 $\eta\mu 30^\circ = 0,5$ $\sigma\upsilon\nu 42^\circ \cong 0,743$ $\epsilon\phi 70^\circ \cong 2,747$

(β)

Για να βρούμε ποιας γωνίας είναι ένας συγκεκριμένος τριγωνομετρικός αριθμός μπορούμε να εξετάσουμε τον τριγωνομετρικό πίνακα ή να χρησιμοποιήσουμε υπολογιστική μηχανή.

Για να υπολογίσουμε τη γωνία θα γράψουμε στην υπολογιστική την εντολή για την «αντίστροφη πράξη του τριγωνομετρικού αριθμού». Δηλαδή:

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$\eta\mu\omega = 0,9$		$\sin^{-1} 0.9$ 64.15806724
$\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,5$		$\cos^{-1} 0.5$ 60
$\epsilon\phi\chi = 2,2$		$\tan^{-1} 2.2$ 65.55604522

Στρογγυλοποιούμε κατάλληλα τους αριθμούς. Άρα,

$$\omega \cong 64^\circ \quad \varphi = 60^\circ \quad \chi \cong 66^\circ$$

Δραστηριότητες

1) Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων με τη βοήθεια της υπολογιστικής μηχανής:

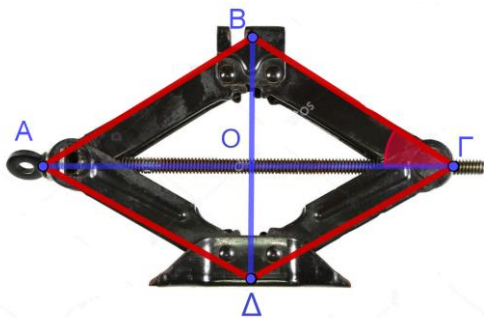
$$A = 6 \cdot \eta\mu 30^\circ - 4 \cdot \varepsilon\varphi 45^\circ + 8 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 45^\circ + 2\sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ$$

$$B = \frac{5\varepsilon\varphi 60^\circ - 10\eta\mu 30^\circ + 4\sigma\upsilon\nu 150^\circ}{2\eta\mu 90^\circ + 4\sigma\upsilon\nu 60^\circ}$$

2) Ο Άγγελος πρέπει να αλλάξει το λάστιχο του αυτοκινήτου του, γι' αυτό θα ανυψώσει το αυτοκίνητο χρησιμοποιώντας το εργαλείο που φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Το μηχάνημα είναι σε σχήμα ρόμβου (άρα $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$ και οι διαγώνιοι του διχοτομούνται $OA = OG$ και $OB = OD$).



Αν η γωνία $B\Gamma O$ πάρει την τιμή 30° και το εργαλείο έχει μήκος πλευράς $B\Gamma = 30\text{ cm}$, να υπολογίσετε την απόσταση $B\Delta$ του αυτοκινήτου από το έδαφος.



7.5 Τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60°

Τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° και 60°

Διερεύνηση:

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με μήκος πλευράς α και ύψος AD .

(α) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους AD .

(β) Να υπολογίσετε, στο τρίγωνο ΔAB , τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30° και 60° .

Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 45°

Διερεύνηση:

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB = A\Gamma = \alpha$.

(α) Να υπολογίσετε το μήκος της υποτείνουσας $B\Gamma$.

(β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 45° .

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα έχουμε:

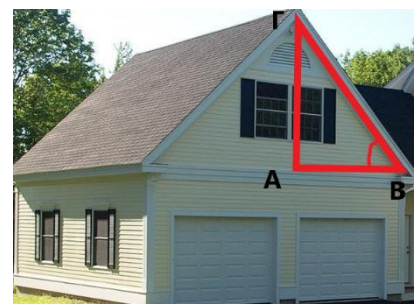
ω	30°	45°	60°
$\eta\mu\omega$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\epsilon\varphi\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Δραστηριότητες

1) Να αποδείξετε ότι σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με μία οξεία γωνία 30° , η πλευρά απέναντι από την γωνία των 30° είναι ίση με το μισό του μήκους της υποτείνουσας.

2) Να αποδείξετε ότι αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία από τις οξείες γωνίες του είναι 45° , τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

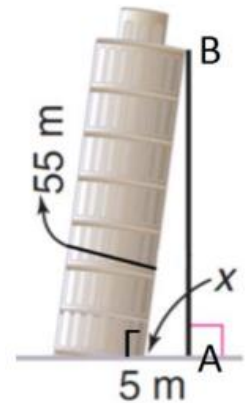
3) Η στέγη του πιο κάτω σπιτιού έχει χτιστεί με κλίση 45° ($\hat{B} = 45^\circ$). Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος της στέγης, αν γνωρίζετε ότι η πλευρά του κεκλιμένου επιπέδου (η απόσταση $B\Gamma$) είναι 4 m. Η απάντηση να δοθεί με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.



7.6 Εφαρμογές στη λύση προβλημάτων

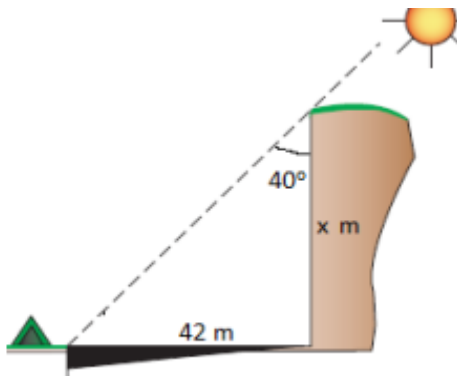
Δραστηριότητες

1) Να υπολογίσετε το μέτρο της οξείας γωνίας x που σχηματίζει ο Πύργος της Πίζας με το έδαφος, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

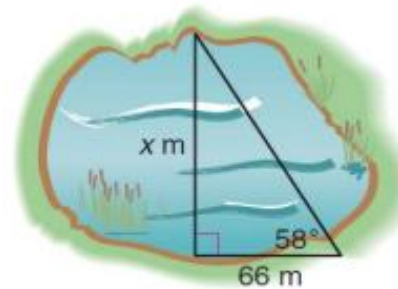


2) Να υπολογίσετε τις τιμές του x , σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις (Οι απαντήσεις να δοθούν κατά προσέγγιση ακεραίου).

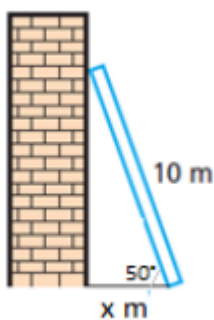
(α)



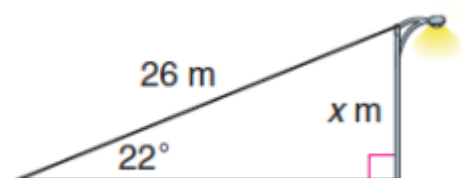
(β)



(γ)

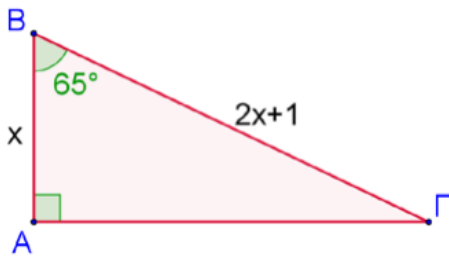


(δ)

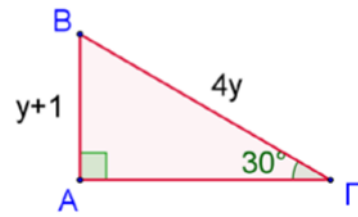


3) Να υπολογίσετε την τιμή του x και του y στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α)

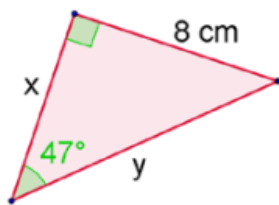


(β)

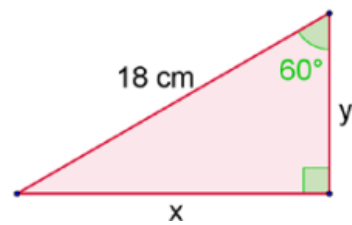


4) Να υπολογίσετε την τιμή του x και του y στις πιο κάτω περιπτώσεις (Οι απαντήσεις να δοθούν κατά προσέγγιση δεκάτου).

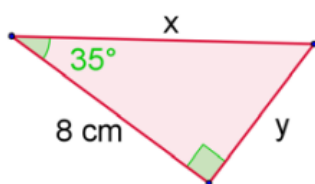
(α)



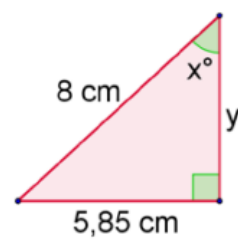
(β)



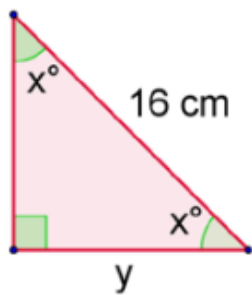
(γ)



(δ)



(ε)



(στ)

