ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΦΥΣΙΚΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Δ΄ ΤΕΥΧΟΣ: Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

ΟΔΗΓΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Φυσική Α΄ Λυκείου: Δ΄ Τεύχος: Η Έννοια της Ενέργειας

ΟΔΗΓΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

Συγγραφή: Γεώργιος Αρχοντής
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Φώτιος Πτωχός
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Νικόλαος Τούμπας
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Ιωάννης Καρμιώτης
Φυσικός, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
Δημήτριος Φιλίππου
Φυσικός, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
Ανδρέας Παπαστυλιανού
Πρώτος Λειτουργός Μέσης Εκπαίδευσης
Παναγιώτης Ελευθερίου
Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης Φυσικής
Γιαννάκης Χατζηκωστής
Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης Φυσικής

Συντονισμός έκδοσης: Χρίστος Παρπούνας, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Έκδοση 2015

Χρονοδιάγραμμα Αναλυτικού Προγράμματος Φυσικής Α΄ Λυκείου για Ομάδα Προσανατολισμού			
Περιεχόμενο	**Αριθμός Περιόδων**	**ΠΔ/ Παραδείγ-ματα**	**Σχετική θεωρία (βιβλίο μαθητή)**
Κεφάλαιο 4: Η Έννοια της Ενέργειας			
Μέρος Α: Έννοιες σχετικές με Έργο Δύναμης, Κινητική Ενέργεια, Δυναμική Ενέργεια (Βαρυτική και Ελατηρίου), Διατήρηση και Μή Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας			
Εξαγωγή Σχέσης Σύνδεσης Έργου-Κινητικής Ενέργειας από τη Σχέση $\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2\alpha\Delta x$. Ορισμός Έργου Δύναμης και Κινητικής Ενέργειας. Περιπτώσεις Θετικού/Αρνητικού/Μηδενικού Έργου. **Παραδείγματα** Υπολογισμού Έργου Σταθερής Δύναμης.	2 1 1	Παράδειγμα 1, σελ. 8 Παράδειγμα 2, σελ. 9-10	Σελ. 3-10, 19
Θεώρημα Έργου-Κινητικής Ενέργειας για Σταθερή Δύναμη. **Παραδείγματα** από Καθημερινή Ζωή	2	Παραδείγ-ματα 1-4, σελ. 17	Σελ. 10-14, 19
Θεώρημα Έργου Κινητικής Ενέργειας για Μεταβαλλόμενη Δύναμη (αναφορά) Γραφικός Υπολογισμός Έργου για Μεταβαλλόμενη Δύναμη (επεξήγηση)	1	Παράδειγμα, σελ. 17	Σελ. 15-17, 19
Επιπρόσθετες Ασκήσεις Θεωρήματος Έργου-Κινητικής Ενέργειας	1		Σελ. 19
Έργο Βάρους κατά Μήκος Κεκλιμένου Επιπέδου. Ανεξαρτησία Έργου Βάρους από τη Διαδρομή για καμπυλόγραμμη διαδρομή (αναφορά). Αναφορά σε Διατηρητικές Δυνάμεις. Παραδείγματα (τσουλήθρα, roller coaster).	2		Σελ. 20-22, 32
Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια. Ορισμός Μηχανικής Ενέργειας. Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας για Σώμα που κινείται υπό την Επίδραση του Βάρους του.			Σελ. 23-28, 32-33

Σύνδεση Έργου Βάρους – Βαρυτικής Δυναμικής Ενέργειας Εφαρμογή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας στην Κατακόρυφη Βολή	2 1	Παράδειγμα σελ. 26-28	
Ασκήσεις (Έργο Βάρους – Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας για Σώμα που Κινείται με την Επίδραση του Βάρους του)	1		Σελ. 32
Η Μηχανική Ενέργεια του Συστήματος Σώματος-Γης δεν διατηρείται όταν ασκούνται Επιπρόσθετες Δυνάμεις με Μη-Μηδενικό Έργο. (Παραδείγματα: π.χ. τριβή, ανύψωση σώματος με σταθερή ταχύτητα).	1	Παραδείγματα 1-3, σελ. 28-31	Σελ. 28-31, 32-33
Ασκήσεις (Έργο Τριβής/Αντίστασης του Αέρα - Μεταβολή Μηχ. Ενέργειας)	1		Σελ. 33-34
Έργο Δύναμης Ελατηρίου. Δυναμική Ενέργεια Ελατηρίου Σύνδεση Έργου Δύναμης Ελατηρίου-Δυναμικής Ενέργειας Ελατηρίου	2		Σελ. 35-37
Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας για Σώμα που κινείται σε Σύνδεση με **Οριζόντιο** Ελατήριο	2	Παράδειγμα σελ. 37-38, Παράδειγμα σελ. 39	Σελ. 37-39
Ασκήσεις (Κίνηση Σώματος Προσδεδεμένου Σε Οριζόντιο Ελατήριο)	1		Σελ. 40-41
Σύνολο περιόδων (**Μέρος Α**):	**17+4**		

Μέρος Β: Άλλες Μορφές Ενέργειας. Αρχή της Διατήρησης της Ενέργειας, Μετατροπές μεταξύ Μορφών Ενέργειας			
Διάφορες Μορφές Ενέργειας	1		Σελ. 41-43
Θερμότητα – Μεταβολή της Εσωτερικής Ενέργειας Σώματος με Αύξηση της Θερμοκρασίας	1		Σελ. 43-45
Αρχή της Διατήρησης της Ενέργειας – Παραδείγματα Μετατροπών Ενέργειας	2	Παραδείγματα, σελ. 45-47.	Σελ. 45-47

Επανάληψη – Αξιολόγηση	**2**		
Σύνολο περιόδων (**Μέρος Β**):	**4+2**		
Σύνολο περιόδων (**Μέρος Α** και **Μέρος Β**):	**21+6**		

Στο Κεφάλαιο 4:

- Ορίζουμε το Έργο Δύναμης και την Κινητική Ενέργεια
- Αποδεικνύουμε το θεώρημα Έργου-Κινητικής Ενέργειας για σταθερή και μεταβαλλόμενη συνισταμένη δύναμη
- Εισάγουμε την έννοια της διατηρητικής ή συντηρητικής δύναμης
- Περιγράφουμε παραδείγματα διατηρητικών δυνάμεων (δύναμη βάρους, δύναμη ελατηρίου)
- Ορίζουμε τη Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια και τη Δυναμική Ενέργεια Ελατηρίου
- Ορίζουμε τη Μηχανική Ενέργεια συστήματος σωμάτων
- Συζητούμε μετατροπές μεταξύ Δυναμικής και Κινητικής Ενέργειας κατά την κίνηση σωμάτων υπό την επίδραση διατηρητικών δυνάμεων (δύναμη βάρους, δύναμη ελατηρίου). Για αυτά τα παραδείγματα κίνησης δείχνουμε ότι η Μηχανική Ενέργεια διατηρείται
- Λύνουμε προβλήματα κίνησης χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας
- Εξηγούμε ότι όταν επενεργούν επιπρόσθετες δυνάμεις σε ένα σώμα, εκτός του βάρους του και της δύναμης ελατηρίου, η μεταβολή στη Μηχανική Ενέργεια του σώματος ισούται με το έργο αυτών των δυνάμεων.
- Συζητούμε διάφορες μορφές ενέργειας (Εσωτερική Κινητική Ενέργεια, Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια, Χημική Ενέργεια, Εσωτερική Ενέργεια, Θερμότητα, Πυρηνική Ενέργεια).
- Συζητούμε την αρχή της διατήρησης της ενέργειας.
- Παρουσιάζουμε παραδείγματα μετατροπών μορφών ενέργειας.

Σημείωση προς τους Εκπαιδευτικούς: Η εισαγωγή της έννοιας της Ενέργειας εμπεριέχει δυσκολίες, σε σχέση με άλλα φυσικά μεγέθη που έχουν ήδη μελετήσει οι μαθητές/ριες, όπως η ταχύτητα και η δύναμη. Ανάμεσα στις βασικές δυσκολίες είναι (1) η ύπαρξη πολλών «μορφών ενέργειας», (2) η περιγραφή μερικών από τις μορφές ενέργειας από μαθηματικές εκφράσεις, και άλλων μορφών με λόγια, (3) η μετατροπή μεταξύ μορφών ενέργειας και ο ρόλος του έργου δύναμης, (4) οι περιπτώσεις διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, και (5) η διατήρηση της ενέργειας. Στο Κεφάλαιο αυτό ακολουθούμε μια σταδιακή πορεία εισαγωγής της έννοιας του έργου δύναμης και των διαφόρων μορφών ενέργειας. Απεικονίζουμε σχηματικά αυτή την πορεία στο επόμενο διάγραμμα, και την περιγράφουμε/επεξηγούμε συνοπτικά αμέσως μετά.

Σχέση μετατόπισης – ταχύτητας στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση:

$$\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 = 2\alpha\Delta x \Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu} = F\Delta x$$

Ορισμός Έργου και Κινητικής Ενέργειας. Παραδείγματα Υπολογισμού Έργου

Θεώρημα Έργου-Κινητικής Ενέργειας:

$$\Delta E_{\kappa\iota\nu} = F\Delta x$$

Μη Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας του Συστήματος Σώματος-Γης όταν ασκούνται στο Σώμα Επιπρόσθετες Δυνάμεις που παράγουν μή Μηδενικό Έργο (π.χ. Τριβή).

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = W_F$$

Εξίσωση Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας για Σώμα που κινείται υπό την Επίδραση του Βάρους του

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + m|\vec{g}|y = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho o$$

Ορισμός Δυναμικής Ενέργειας Βαρύτητας
Ορισμός Μηχανικής Ενέργειας
Συστήματος Σώματος-Γης

$$U_{\beta\alpha\rho} = m|\vec{g}|y$$

$$E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + m|\vec{g}|y$$

Εξίσωση Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας για Σώμα που κινείται υπό την Επίδραση Ελατηρίου

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho o$$

Ορισμός Δυναμικής Ενέργειας Ελατηρίου
Ορισμός Μηχανικής Ενέργειας
Συστήματος Σώματος-Ελατηρίου

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Άλλες Μορφές Ενέργειας:
Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια,
Εσωτερική Κινητική Ενέργεια,
Εσωτερική Δυναμική Ενέργεια,
Πυρηνική Ενέργεια
Θερμότητα

Αρχή της Διατήρησης της Ενέργειας

Μετατροπές μεταξύ Μορφών Ενέργειας

Το Κεφάλαιο 4 χωρίζεται σε δύο μέρη:

Μέρος Α

Παρουσιάζουμε πρώτα μορφές ενέργειας που δεν είναι αφηρημένες, αλλά ορίζονται από συγκεκριμένες μαθηματικές εκφράσεις. Δείχνουμε ότι οι εκφράσεις ορισμού προκύπτουν από ήδη γνωστές εξισώσεις.

1) Εισάγουμε πρώτα τις έννοιες Έργο Δύναμης και Κινητική Ενέργεια. Ξεκινούμε από τη **γνωστή** (από το Κεφ. 2) σχέση μεταβολής της ταχύτητας-μετατόπισης της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης

$$\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 = 2\alpha\Delta x$$

Με χρήση του 2ου νόμου του Νεύτωνα, η σχέση αυτή μετατρέπεται στο θεώρημα Έργου-Κινητικής Ενέργειας:

$$2\alpha\Delta x = \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 \Rightarrow F\Delta x = \frac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2$$

Στην τελευταία σχέση εμφανίζονται το έργο της συνισταμένης δύναμης και η κινητική ενέργεια. Εξηγούμε ότι η σχέση αυτή καθιστά δυνατό τον υπολογισμό της ταχύτητας από τη δύναμη και τη μετατόπιση, χωρίς να χρειάζεται να εξαχθούν κινηματικές εξισώσεις. Συνεπώς, δικαιολογεί τον ορισμό των φυσικών μεγεθών Έργο Δύναμης και Κινητική Ενέργεια.

2) Αναφέρουμε ότι η προηγούμενη σχέση είναι το **Θεώρημα Έργου-Κινητικής Ενέργειας (ΘΕΚΕ).** Δείχνουμε με παραδείγματα πώς χρησιμοποιείται το ΘΕΚΕ στη μελέτη προβλημάτων κίνησης.

Εξηγούμε και αποδεικνύουμε ότι το ΘΕΚΕ ισχύει τόσο στην περίπτωση που στο σώμα δρουν σταθερές δυνάμεις όσο και στην περίπτωση που στο σώμα δρουν μεταβαλλόμενες δυνάμεις. Εξηγούμε πώς υπολογίζεται το έργο μεταβαλλόμενης δύναμης (γιατί χρειάζεται στον υπολογισμό του έργου δύναμης ελατηρίου).

3) Χρησιμοποιούμε το **ΘΕΚΕ ως αφετηρία για την εισαγωγή της Δυναμικής Ενέργειας**. Μελετούμε δύο περιπτώσεις:

α) Για **σώμα που κινείται κατακόρυφα υπό την επίδραση του βάρους του**, δείχνουμε ότι το ΘΕΚΕ γράφεται ως

$$B\Delta y = \frac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 + mgy_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 + mgy_{\alpha\rho\chi}$$

Η σχέση αυτή δικαιολογεί τον ορισμό της Βαρυτικής Δυναμικής Ενέργειας και της Μηχανικής Ενέργειας συστήματος σώματος-Γης.

β) Για **σώμα που κινείται υπό την επίδραση οριζόντιου ελατηρίου**, δείχνουμε ότι το ΘΕΚΕ γράφεται ως

$$W_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 + \frac{1}{2}kx_{\tau\varepsilon\lambda}^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 + \frac{1}{2}kx_{\alpha\rho\chi}^2$$

Η σχέση αυτή δικαιολογεί τον ορισμό της Δυναμικής Ενέργειας Ελατηρίου και της Μηχανικής Ενέργειας συστήματος Σώματος-Ελατηρίου.

4) Αναφέρουμε περιπτώσεις στις οποίες **δεν διατηρείται** η Μηχανική Ενέργεια: Όταν στο σώμα ασκούνται, εκτός από το βάρος του ή η δύναμη ελατηρίου, άλλες δυνάμεις που παράγουν μη μηδενικό συνολικό έργο.

Μέρος Β

Οι μαθητές/ριες έχουν ήδη έρθει σε επαφή με το έργο δύναμης και συγκεκριμένες μορφές ενέργειας (κινητική, δυναμική), και έχουν μελετήσει παραδείγματα μετατροπών μεταξύ κινητικής και δυναμικής ενέργειας. Σε αυτό το σημείο αναφέρουμε ότι υπάρχουν και άλλες μορφές ενέργειας, και περιγράφουμε κάποιες από αυτές:

1) Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια, Εσωτερική Κινητική Ενέργεια, Εσωτερική Δυναμική Ενέργεια, Χημική Ενέργεια, Εσωτερική Ενέργεια, Πυρηνική Ενέργεια. Εξηγούμε την Έννοια της Θερμότητας, και αναφέρουμε ότι όταν αυξάνεται η θερμοκρασία ενός σώματος αυξάνεται η εσωτερική ενέργεια.

2) Αναφέρουμε την Αρχή της Διατήρησης της Ενέργειας.

3) Περιγράφουμε παραδείγματα μετατροπών μεταξύ διαφόρων μορφών ενέργειας.

Όπως μάθαμε στο Κεφάλαιο 3, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα συνδέει το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας ενός σώματος με τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό. Εάν γνωρίζουμε τη συνισταμένη δύναμη, μπορούμε με εφαρμογή του δεύτερου νόμου να προσδιορίσουμε την ταχύτητα του σώματος σαν συνάρτηση του χρόνου. Στο Κεφάλαιο 2 είχαμε μελετήσει δύο τέτοιες περιπτώσεις κινήσεων: Όταν η συνισταμένη δύναμη στο σώμα είναι μηδενική, η ταχύτητα του σώματος περιγράφεται από τη σχέση ταχύτητας-χρόνου της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης. Όταν η συνισταμένη δύναμη είναι μη μηδενική αλλά σταθερή, η ταχύτητα περιγράφεται από τη σχέση ταχύτητας-χρόνου της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.

Στη γενικότερη περίπτωση μιας μη σταθερής δύναμης, *η ταχύτητα του σώματος δεν μπορεί να εκφρασθεί με μια απλή σχέση με τον χρόνο*, και ο προσδιορισμός της είναι πιο δύσκολος.

Σε πολλά προβλήματα μπορεί να εφαρμοσθεί μια εναλλακτική μέθοδος για τον προσδιορισμό της ταχύτητας ενός σώματος, η οποία δεν απαιτεί τη χρήση του δευτέρου νόμου του Νεύτωνα. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στη θεμελιώδη έννοια της **ενέργειας** και στην **αρχή της διατήρησης της ενέργειας**.

Έργο Δύναμης και Κινητική Ενέργεια

Θα μελετήσουμε διάφορες περιπτώσεις **ευθύγραμμης κίνησης**, στις οποίες ένα σώμα διαγράφει μια μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ υπό την επίδραση μιας συνισταμένης δύναμης. Θα δείξουμε ότι οι τιμές της ταχύτητας του σώματος στην αρχή και το τέλος της μετατόπισης συνδέονται με μια φυσική ποσότητα, που ονομάζεται **Έργο Δύναμης**. Από τη σύνδεση αυτή θα προκύψει η έννοια της **Κινητικής Ενέργειας**. Θεωρούμε πρώτα το πιο κάτω παράδειγμα.

Σημείωση προς τους Εκπαιδευτικούς: Με το επόμενο παράδειγμα, δείχνουμε ότι η γνωστή εξίσωση ταχύτητας-μετατόπισης της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης συνδέει δύο νέα μεγέθη: το έργο δύναμης και την κινητική ενέργεια. Αμέσως μετά ορίζουμε αυτά τα μεγέθη.

Σώμα μετατοπίζεται υπό την Επίδραση Σταθερών Δυνάμεων

Σημείωση προς τους Εκπαιδευτικούς: Στον ορισμό του Έργου Δύναμης στηριζόμαστε στην **ανάλυση δυνάμεων σε συνιστώσες**, η οποία εξηγήθηκε στο Κεφάλαιο 2, τόσο στο Ένθετο Διανυσμάτων όσο και σε επιπρόσθετη ενότητα. Ειδικότερα:

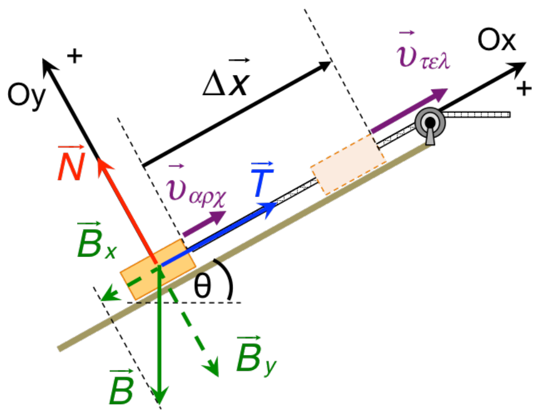
Α) Ορίζουμε έναν άξονα (π.χ. Ox) κατά μήκος της μετατόπισης και με θετική φορά αυτή της μετατόπισης.

Β) Αναλύουμε τη δύναμη $\vec{F}$ σε συνιστώσες, και εστιαζόμαστε στη συνιστώσα F_x κατά μήκος του άξονα Ox (κατά τη διεύθυνση της μετατόπισης). Η συνιστώσα F_x περιέχει το συνημίτονο της γωνίας θ που σχηματίζει η διεύθυνση της δύναμης και η διεύθυνση της μετατόπισης. Επίσης, η συνιστώσα F_x έχει θετικό ή αρνητικό πρόσημο.

Γ) Ορίζουμε ως έργο κάποιας δύναμης $\vec{F}$ το γινόμενο $W = F_x \Delta x$ της συνιστώσας F_x και της μετατόπισης Δx. Το συνημίτονο της γωνίας θ, που σχηματίζει η διεύθυνση της δύναμης και η διεύθυνση της μετατόπισης, και το πρόσημο («+» ή «-») περιέχεται στην F_x.

Ο τρόπος αυτός είναι **πιο χρήσιμος** από τη σχέση $W = |\vec{F}||\Delta\vec{x}|\sigma\upsilon\nu\theta$. Για παράδειγμα, εάν είναι γνωστό το έργο W και η μετατόπιση Δx, η συνιστώσα F_x προσδιορίζεται αμέσως από τη σχέση $F_x = W/\Delta x$, χωρίς να εμπλέκονται το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$, και η γωνία θ. Εάν είναι γνωστή η μεταβολή της κινητικής ενέργειας, η συνιστώσα F_x προσδιορίζεται από τη σχέση $F_x = W/\Delta x = \Delta E_{\kappa\iota\nu}/\Delta x$.

Η Εικόνα 4-1 απεικονίζει ένα σώμα, το οποίο μετατοπίζεται κατά μήκος ενός *λείου* κεκλιμένου επιπέδου μέσω σχοινιού. Στο σώμα ασκούνται η τάση από το σχοινί $\vec{T}$, το βάρος του $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το κεκλιμένο επίπεδο. Αναλύουμε αυτές τις δυνάμεις σε συνιστώσες ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων Ox και Oy. Ο άξονας Ox είναι παράλληλος με τη διεύθυνση της κίνησης (κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου), και η θετική φορά συμπίπτει με τη φορά της μετατόπισης. Ο άξονας Oy είναι κάθετος στο κεκλιμένο επίπεδο. Οι θετικές φορές συμβολίζονται ως «+».



Εικόνα 4-1. Ένα σώμα ανεβαίνει σε λείο κεκλιμένο επίπεδο υπό την επίδραση του βάρους του $\vec{B}$ και μιας σταθερής δύναμης $\vec{T}$.

Η *συνιστώσα* της συνισταμένης δύναμης κατά τη διεύθυνση του άξονα Oy είναι ίση με μηδέν, $\sum F_y = N + B_y = 0$, και το σώμα δεν μετατοπίζεται σε αυτή τη διεύθυνση. Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox. Οι *συνιστώσες* της δύναμης του βάρους και της τάσης του νήματος στον άξονα Ox σχετίζονται με την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης με την εξίσωση:

$$\alpha = \frac{1}{m}\sum F_x = \frac{B_x + T}{m}$$

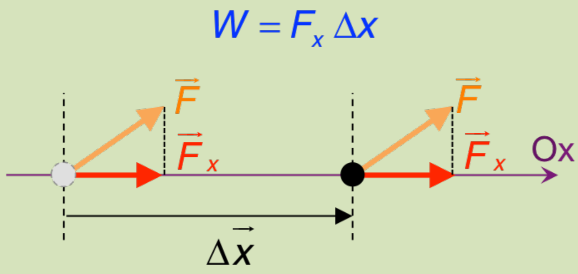
Έστω ότι το σώμα μετατοπίζεται κατά $\Delta\vec{x}$ κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Από τη μελέτη της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης στο Κεφάλαιο 2, γνωρίζουμε ότι η αρχική και τελική ταχύτητα του σώματος, $\upsilon_{\alpha\rho\chi}$ και $\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}$, ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση:

$$2\alpha\Delta x = \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 \Rightarrow 2\frac{B_x + T}{m}\Delta x = \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 \Rightarrow$$
$$B_x\Delta x + T\Delta x = \frac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2$$

Στο αριστερό μέλος της τελευταίας εξίσωσης εμφανίζονται γινόμενα της μορφής $F_x\Delta x$, τα οποία περιέχουν την αλγεβρική τιμή της μετατόπισης Δx και τις συνιστώσες F_x των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα *κατά τη διεύθυνση της μετατόπισης* (άξονας Ox). Στο δεξιό μέλος εμφανίζεται η μεταβολή της ποσότητας $1/2\, m\upsilon^2$. Η εξίσωση επιτρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα ενός σώματος σαν συνάρτηση της μετατόπισής του, **χωρίς να χρειάζεται να λύσουμε τις εξισώσεις του Νεύτωνα για το σώμα**. Αυτή η διαπίστωση οδηγεί στον ορισμό δύο πολύ σημαντικών φυσικών ποσοτήτων, του **Έργου Δύναμης** και της **Κινητικής Ενέργειας**:

Ορισμός του Έργου Σταθερής Δύναμης

Έστω ότι σε ένα σώμα ασκείται κάποια σταθερή δύναμη $\vec{F}$, και το σώμα μετατοπίζεται κατά $\Delta\vec{x}$. Ως **έργο της σταθερής δύναμης** $\vec{F}$ **ορίζουμε** το γινόμενο της αλγεβρικής τιμής της μετατόπισης Δx επί τη συνιστώσα F_x της δύναμης *κατά τη διεύθυνση της μετατόπισης*. Εξ΄ ορισμού, **το έργο της κάθετης στη μετατόπιση συνιστώσας μιας δύναμης είναι ίσο με μηδέν**.



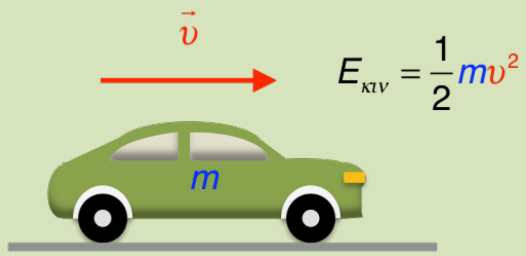
Το έργο είναι μονόμετρο μέγεθος. Θα το συμβολίζουμε με το γράμμα *W*, από την αγγλική λέξη *Work*. Η μονάδα έργου στο σύστημα SI είναι το Joule. Από τον ορισμό του έργου προκύπτει ότι $1\,\text{Joule} = 1\ \text{N} \times 1\ \text{m}$.

Στο πιο πάνω παράδειγμα, το έργο της κάθετης δύναμης $\vec{N}$ και το έργο της διανυσματικής συνιστώσας του βάρους $\vec{B}_y$ είναι ίσα με μηδέν, αφού οι δυνάμεις αυτές είναι κάθετες στη διεύθυνση της μετατόπισης.

Ορισμός της Κινητικής Ενέργειας Σώματος

Έστω ότι ένα σώμα μάζας *m* κινείται με ταχύτητα μέτρου υ. Ως **Κινητική Ενέργεια** του σώματος **ορίζουμε** την ποσότητα

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} m\upsilon^2$$

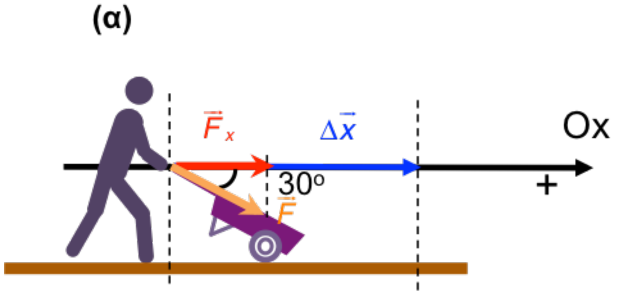


Η Κινητική Ενέργεια έχει ως μονάδα μέτρησης το Joule, όπως και το έργο:

$$\text{kg} \times (\text{m/s})^2 = \underbrace{\text{kg} \times (\text{m/s}^2)}_{=\text{N}} \times \text{m} = \text{N} \times \text{m} = \text{Joule}$$

Το Έργο Δύναμης μπορεί να έχει Θετική, Αρνητική, ή Μηδενική Τιμή

Θετικό Έργο: Η Εικόνα 4-2 απεικονίζει διάφορες περιπτώσεις σωμάτων τα οποία μετακινούνται υπό την επίδραση μιας δύναμης. Ο κηπουρός της Εικόνας 4-2(α) σπρώχνει ένα καροτσάκι, ασκώντας του δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 100 N. Η διεύθυνση της δύναμης σχηματίζει γωνία 30^o με την οριζόντια διεύθυνση, και το καροτσάκι μετακινείται οριζόντια κατά 2 m.



Εικόνα 4-2. **(α)** Ο κηπουρός μετακινεί το καροτσάκι κατά $\Delta\vec{x}$, ασκώντας μια πλάγια δύναμη που σχηματίζει γωνία 30^o με την οριζόντια διεύθυνση. Η συνιστώσα $\vec{F}_x$ ειναι **ομόρροπη** με τη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ και το έργο είναι **θετικό**.

Σχεδιάζουμε τον άξονα Ox κατά τη διεύθυνση της μετατόπισης, και επιλέγουμε ως θετική τη φορά της μετατόπισης. Η συνιστώσα $\vec{F}_x$ της δύναμης ως προς τον άξονα Ox έχει την ίδια φορά με τη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ και ισούται με

$$F_x = +|\vec{F}|\sigma\upsilon\nu\,30^o = 100 \times 0{,}866\ \text{N} = 86{,}6\ \text{N}.$$

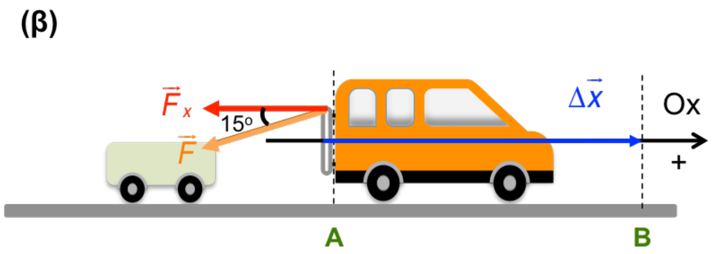
Επειδή η διανυσματική συνιστώσα $\vec{F}_x$ είναι **ομόρροπη** με τη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$, το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι **θετικό** και ισούται με

$$W = F_x \Delta x = 86{,}6\ \text{N} \times 2\ \text{m} = 173{,}2\ \text{Joule}.$$

Το έργο της δύναμης που ασκείται σε ένα κινούμενο σώμα είναι **θετικό**, εάν η συνιστώσα της δύναμης κατά τη διεύθυνση της μετατόπισης του σώματος είναι **ομόρροπη** με τη μετατόπιση. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι **η δύναμη παράγει έργο**.

Σημείωση προς τους Εκπαιδευτικούς: Η φυσική σημασία των εννοιών «παράγει»/«καταναλώνει» έργο θα γίνει πιο κατανοητή αργότερα, με την εισαγωγή της Δυναμικής Ενέργειας και τη μετατροπή μεταξύ κινητικής/δυναμικής ενέργειας. Συνιστούμε να μην γίνει ακόμη αναφορά σε αυτές τις έννοιες, πριν εμπεδωθεί καλύτερα η σημασία/χρήση του έργου και η σχέση του με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας.

Αρνητικό Έργο: Η Εικόνα 4-2(β) απεικονίζει ένα αυτοκίνητο που έλκει ένα καροτσάκι. Το καροτσάκι ασκεί στο αυτοκίνητο, μέσω του σχοινιού, μια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 800 N. Η διεύθυνση της δύναμης σχηματίζει γωνία 15^o με την οριζόντια διεύθυνση. Το αυτοκίνητο μετακινείται οριζόντια κατά 8 m από το σημείο Α στο Β, όπως στο σχήμα.



Εικόνα 4-2. **(β)** Η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης $\vec{F}$, που ασκείται από το σχοινί στο αυτοκίνητο, είναι **αντίρροπη** με τη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ του αυτοκινήτου. Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι **αρνητικό**.

Για να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ σχεδιάζουμε έναν άξονα Ox κατά τη διεύθυνση της μετατόπισης, και επιλέγουμε ως θετική τη φορά τη μετατόπισης. Η συνιστώσα $\vec{F}_x$ της δύναμης ως προς τον άξονα αυτό έχει αντίθετη φορά από τη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ και η αλγεβρική της τιμή είναι

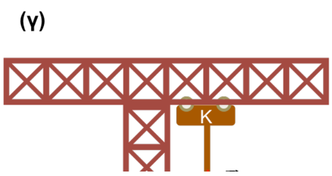
$$F_x = -\left|\vec{F}\right| \sigma\upsilon\nu 15^o = -800 \times 0{,}966 \text{ N} = -772{,}7 \text{ N}$$

Επειδή η συνιστώσα $\vec{F}_x$ και η μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ είναι αντίρροπες, το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι **αρνητικό** και ισούται με

$$W = F_x \Delta x = -800\ \sigma\upsilon\nu 15^o \times 8 \text{ N} \times \text{m} = -6181{,}9 \text{ J}$$

Το έργο της δύναμης που ασκείται σε ένα κινούμενο σώμα είναι **αρνητικό**, εάν η συνιστώσα της δύναμης κατά μήκος της μετατόπισης του σώματος είναι **αντίρροπη** με τη μετατόπιση. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι **η δύναμη καταναλώνει έργο**.

Μηδενικό Έργο: Η Εικόνα 4-2(γ) απεικονίζει έναν γερανό από τον οποίο κρέμεται ένα κιβώτιο. Η πλατφόρμα K του γερανού ολισθαίνει με σταθερή οριζόντια ταχύτητα, μετακινώντας οριζόντια το κιβώτιο από το σημείο A στο σημείο B. Το σχοινί ασκεί στο κιβώτιο μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{T}$. Επειδή η δύναμη αυτή είναι κάθετη στη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$, η συνιστώσα T_x κατά μήκος της μετατόπισης είναι ίση με μηδέν. Συνεπώς, το έργο της δύναμης $\vec{T}$ είναι ίσο με μηδέν: $W = T_x \Delta x = 0$



Το έργο της δύναμης που ασκείται σε ένα κινούμενο σώμα είναι ίσο με **μηδέν**, εάν η δύναμη είναι συνεχώς **κάθετη** στη μετατόπιση του σώματος.

Εικόνα 4-2. **(γ)** Η δύναμη $\vec{T}$, από το σχοινί στο κιβώτιο, είναι **κάθετη** στη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ του κιβωτίου. Το έργο της δύναμης $\vec{T}$ είναι **ίσο με μηδέν**.

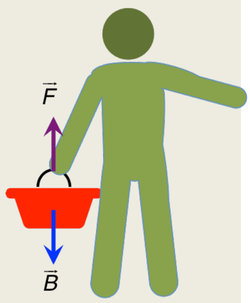
Εάν η πλατφόρμα του γερανού είναι ακίνητη, το έργο της δύναμης που ασκεί στο κιβώτιο είναι επίσης ίσο με μηδέν, επειδή το σημείο εφαρμογής της δύναμης δεν μετατοπίζεται.

Το έργο της δύναμης που ασκείται σε ένα σώμα είναι ίσο με **μηδέν**, εάν το σημείο εφαρμογής της δύναμης παραμένει ακίνητο.

Σημείωση προς τους Εκπαιδευτικούς: Τα επόμενα παραδείγματα αποσκοπούν στον να ξεδιαλύνουν συνηθισμένες παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με το έργο. Συγκεκριμένα, τονίζεται ότι το αίσθημα της κόπωσης δεν είναι κατάλληλο κριτήριο για την αποτίμηση του έργου της δύναμης που ασκείται από έναν άνθρωπο.

Επιπρόσθετο παράδειγμα που μπορεί να αναφερθεί είναι η σύγκριση των έργων δύο αθλητών: Ο αθλητής Α σηκώνει 150 kg για 1 m και ο αθλητής Β 1,5 kg για 100 m. Το έργο των δύο αθλητών είναι το ίδιο, όμως **ο Α κουράζεται περισσότερο, επειδή χρειάζεται να ασκήσει πολύ μεγαλύτερη δύναμη**.

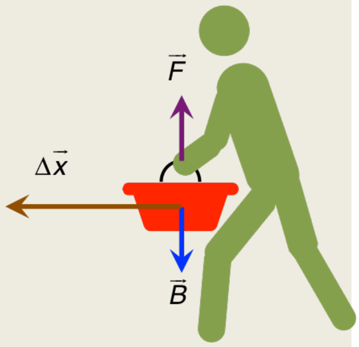
Ερώτηση: Ο άνθρωπος της διπλανής εικόνας κρατά ένα καλάθι με ψώνια και παραμένει ακίνητος. Ο άνθρωπος ασκεί στο καλάθι τη δύναμη $\vec{F}$, η οποία είναι αντίθετη με το συνολικό βάρος $\vec{B}$ του καλαθιού.



i) Ποιο είναι το έργο της δύναμης $\vec{F}$, από τον άνθρωπο στο καλάθι;
ii) Μετά από λίγη ώρα, ο άνθρωπος νιώθει κουρασμένος. Σχετίζεται το αίσθημα και το μέγεθος της κούρασής του με το έργο της $\vec{F}$;

Απάντηση: Επειδή το καλάθι είναι ακίνητο, **το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι ίσο με μηδέν**. Το αίσθημα της κούρασης προέρχεται από το γεγονός ότι ο άνθρωπος πρέπει να διατηρεί τους μύες του σε συστολή, έτσι ώστε να εξασκούν τη δύναμη $\vec{F}$ για πολλή ώρα, και από το μέγεθος της δύναμης που πρέπει να εξασκήσει. **Το αίσθημα της κούρασης δεν είναι αντιπροσωπευτικό κριτήριο για το μέγεθος του έργου μιας δύναμης που ασκεί ένας άνθρωπος.**

Ερώτηση: Ο άνθρωπος περπατά τώρα σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα, κρατώντας το καλάθι με τα ψώνια. Κατά τη διάρκεια του βαδίσματός του μετακινεί οριζόντια το καλάθι, ασκώντας του την δύναμη $\vec{F}$. Εάν η οριζόντια μετατόπιση του καλαθιού είναι $\Delta\vec{x}$, ποιο είναι το έργο της δύναμης $\vec{F}$; Σχετίζεται το αίσθημα της κούρασης που νιώθει ο άνθρωπος με το έργο αυτής της δύναμης;



Απάντηση: Επειδή ο άνθρωπος μετακινεί το καλάθι οριζόντια με σταθερή ταχύτητα, η δύναμη $\vec{F}$ δεν έχει οριζόντια συνιστώσα και είναι αντίθετη με το βάρος του καλαθιού. Επειδή η δύναμη $\vec{F}$ είναι κάθετη στη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$, **το έργο της είναι ίσο με μηδέν**. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, το αίσθημα της κούρασης προέρχεται από το γεγονός ότι οι μύες των χεριών του ανθρώπου συστέλλονται για να εξασκούν τη δύναμη αυτή για πολλή ώρα, και δεν είναι αντιπροσωπευτικό κριτήριο για το μέγεθος του έργου της δύναμης $\vec{F}$.

Παραδείγματα Υπολογισμού Έργου Δυνάμεων

Παράδειγμα 1. Έργο Βάρους για Κατακόρυφη Μετατόπιση

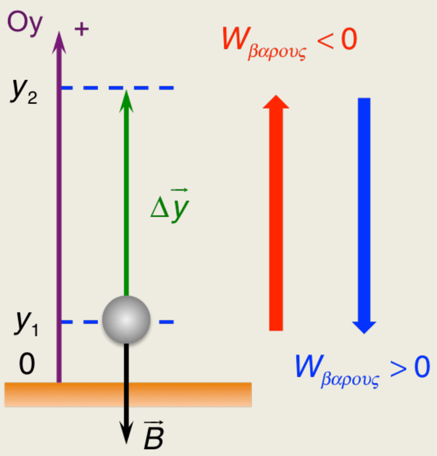
Το πιο κάτω σχήμα απεικονίζει μια σφαίρα, η οποία μετακινείται κατά μήκος κατακόρυφης ευθείας από αρχικό ύψος y_1 σε τελικό ύψος y_2.

$$B = -m|\vec{g}|$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$W_{\beta\alpha\rho o \upsilon \varsigma} = B\Delta y$$

$$= -m|\vec{g}|(y_2 - y_1)$$



Θεωρούμε τον κατακόρυφο άξονα Oy, θέτουμε ως σημείο αναφοράς ($y = 0$) το έδαφος, και επιλέγουμε ως θετική τη φορά προς τα επάνω (η οποία συμπίπτει με τη φορά της μετατόπισης). Το βάρος της σφαίρας έχει αρνητική αλγεβρική τιμή $B = -m|\vec{g}|$ και η μετατόπιση έχει αλγεβρική τιμή $\Delta y = y_2 - y_1$. Με βάση τα προηγούμενα, το έργο του βάρους ισούται με

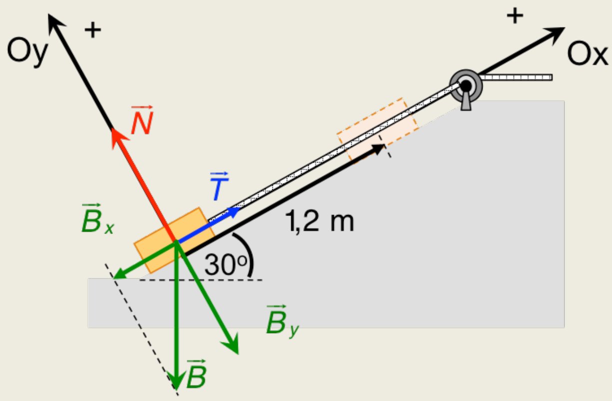
$$W = B\Delta y = -m|\vec{g}|(y_2 - y_1).$$

Όταν ένα σώμα μεταβαίνει από μικρότερο σε μεγαλύτερο ύψος, το έργο του βάρους είναι αρνητικό, επειδή το βάρος έχει αντίθετη κατεύθυνση από τη μετατόπιση. Στην αντίθετη περίπτωση το έργο του βάρους είναι θετικό.

Να παρατηρήσετε ότι **το έργο του βάρους εξαρτάται μόνο από τη διαφορά** $y_2 - y_1$ **του τελικού από το αρχικό ύψος**. Αργότερα θα δείξουμε ότι αυτό το αποτέλεσμα ισχύει όχι μόνο για κατακόρυφη μετατόπιση, αλλά για οποιαδήποτε διαδρομή που συνδέει την ίδια αρχική και τελική θέση.

Παράδειγμα 2. Έργο Δυνάμεων σε Σώμα που κινείται σε Κεκλιμένο Επίπεδο

Ένα δοχείο μάζας 0,85 kg ρυμουλκείται μέσω σχοινιού με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος *λείου* κεκλιμένου επιπέδου 30^o. Το δοχείο μετακινείται σε απόσταση 1,2 m κατά μήκος του επιπέδου. Στο δοχείο ασκούνται η δύναμη $\vec{T}$ από το σχοινί, το βάρος του $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το επίπεδο. Θα υπολογίσουμε το έργο των δυνάμεων αυτών.



Θεωρούμε ως θετική τη φορά της μετατόπισης του δοχείου. Επιλέγουμε τον άξονα Ox παράλληλο με τη μετατόπιση και τη θετική του φορά να συμπίπτει με αυτή της μετατόπισης. Ο άξονας Oy είναι κάθετος στον Ox. Οι θετικές φορές των αξόνων υποδεικνύονται ως «+».

Επειδή έχουμε επιλέξει ως θετική φορά του άξονα Ox τη φορά της κίνησης, η συνιστώσα B_x του βάρους έχει αλγεβρική τιμή $B_x = -\left|\vec{B}\right| \eta\mu 30^o = -m\left|\vec{g}\right| \eta\mu 30^o$. Έτσι, το έργο του βάρους είναι:

$$W_{\vec{B}} = B_x \Delta x = -m\left|\vec{g}\right| \eta\mu 30^o \Delta x = -0{,}85 \times 9{,}81 \times 0{,}5 \times 1{,}2 \text{ kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\text{m} = -5{,}0 \text{ J}.$$

Το έργο του βάρους είναι αρνητικό, επειδή η διανυσματική συνιστώσα $\vec{B}_x$ είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$.

Το δοχείο μετακινείται με σταθερή ταχύτητα. Συνεπώς, από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, προκύπτει ότι η τάση του σχοινιού είναι αντίθετη με τη συνιστώσα B_x

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x + T = 0 \Rightarrow T = -B_x \Rightarrow T = +m|\vec{g}|\eta\mu 30^o.$$

Το έργο της τάσης του σχοινιού είναι αντίθετο με το έργο του βάρους:

$$T = -B_x \Rightarrow T\Delta x = -B_x\Delta x \Rightarrow W_{\vec{T}} = -W_{\vec{B}} = +5{,}0 \text{ J}$$

Το έργο της τάσης είναι θετικό, επειδή η τάση $\vec{T}$ είναι ομόρροπη με τη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$.

Επειδή η δύναμη $\vec{N}$ είναι κάθετη στη μετατόπιση, το έργο αυτής της δύναμης είναι ίσο με μηδέν, $W_{\vec{N}} = 0$,

Το Θεώρημα Έργου-Κινητικής Ενέργειας

Στο παράδειγμα της Εικόνας 4-1, είχαμε καταλήξει στη σχέση

$$B_x\Delta x + T\Delta x = \frac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2$$

Η ποσότητα $B_x\Delta x + T\Delta x$ *είναι το άθροισμα των έργων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα, ή ισοδύναμα το έργο της συνισταμένης δύναμης* $\sum\vec{F} = \vec{N} + \vec{B} + \vec{T} = \vec{B}_x + \vec{T}$. Η ποσότητα $\frac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2$ είναι η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του σώματος, $\Delta E_{\kappa\iota\nu}$. Η ισότητα αυτή οδηγεί στο εξής **Θεώρημα Έργου-Κινητικής Ενέργειας:**

Θεώρημα Έργου–Κινητικής Ενέργειας για Σταθερή Συνισταμένη Δύναμη:

Όταν ένα σώμα μετατοπίζεται κατά $\Delta\vec{x}$ υπό την επίδραση πολλών σταθερών δυνάμεων, η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του σώματος ισούται με το συνολικό έργο των δυνάμεων αυτών, ή ισοδύναμα με το έργο της συνισταμένης δύναμης.

$$W = \sum(F_x\Delta x) = \left(\sum F_x\right)\Delta x = \Delta E_{\kappa\iota\nu}$$

Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα Έργου-Κινητικής ενέργειας, μπορούμε να υπολογίσουμε ξεχωριστά το έργο κάθε δύναμης και να προσθέσουμε αλγεβρικά τα επιμέρους έργα. Εναλλακτικά, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συνισταμένη δύναμη και να υπολογίσουμε το έργο της, όπως θα δούμε σε παραδείγματα που ακολουθούν.

Εφαρμογές του Θεωρήματος Έργου–Κινητικής Ενέργειας σε Προβλήματα Κίνησης

Όταν ένα σώμα κινείται υπό την επίδραση μιας συνισταμένης δύναμης, μπορούμε να προσδιορίσουμε την ταχύτητά του χρησιμοποιώντας το θεώρημα έργου–κινητικής ενέργειας.

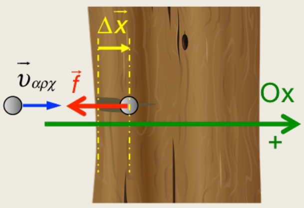
Παράδειγμα 1. Υπολογισμός της Ταχύτητας από τη Μεταβολή Κινητικής Ενέργειας

Ένα καρότσι μάζας 24 kg ξεκινά από ηρεμία και μετακινείται σε οριζόντια διεύθυνση κατά 1 m υπό την επίδραση σταθερής, οριζόντιας συνισταμένης δύναμης μέτρου 48 N. Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας, μπορούμε να υπολογίσουμε την τελική ταχύτητα του καροτσιού:

$$W = E_{τελ}^{κιν} - \underbrace{E_{αρχ}^{κιν}}_{=0} \Rightarrow F\Delta x = \frac{1}{2}m\upsilon_{τελ}^2 \Rightarrow \upsilon_{τελ} = \sqrt{\frac{2F\Delta x}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 48\times 1}{24}\frac{\text{N m}}{\text{kg}}} = \sqrt{4\,\frac{\text{kg(m/s}^2\text{) m}}{\text{kg}}} = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Σημείωση προς τους Εκπαιδευτικούς: Τα Παραδείγματα 2-4 είναι πολύ χρήσιμο να μελετηθούν τώρα από τη σκοπιά του Θεωρήματος Έργου-Κινητικής Ενέργειας, και σε μεταγενέστερη τάξη από τη σκοπιά της μεταβολής ορμής/ώθησης δύναμης. Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές/ριες συνειδητοποιούν ότι το ίδιο πρόβλημα μπορεί να λυθεί στη Φυσική με διαφορετικά εργαλεία.

Παράδειγμα 2. Εκτίμηση της Δύναμης που ασκείται σε Σώμα για να το ακινητοποιήσει



Μια σφαίρα μάζας 20 g, που κινείται με οριζόντια ταχύτητα 500 m/s, προσκρούει σε έναν ξύλινο κορμό. Η σφαίρα εισχωρεί ευθύγραμμα και οριζόντια μέσα στον κορμό μέχρι ένα τελικό βάθος 10 cm, στο οποίο ακινητοποιείται. Θεωρούμε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης της σφαίρας μέσα στον κορμό ασκείται πάνω της σταθερή συνισταμένη δύναμη $\vec{f}$, που είναι αντίρροπη προς τη μετατόπισή της $\Delta\vec{x}$. Θα υπολογίσουμε το μέτρο της δύναμης $\vec{f}$.

Επιλέγουμε τον άξονα Ox παράλληλο με τη μετατόπιση, και τη θετική φορά να συμπίπτει με αυτή της μετατόπισης. Με αυτή την επιλογή, η μετατόπιση είναι θετική ($\Delta x = +10$ cm) και η $\vec{f}$ έχει αρνητική αλγεβρική τιμή $f < 0$. Το έργο της $\vec{f}$ ισούται με $W = f\Delta x$. Από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας:

$$W = E_{τελ}^{κιν} - E_{αρχ}^{κιν} \Rightarrow f\Delta x = \underbrace{\frac{1}{2}m\upsilon_{τελ}^2}_{=0} - \frac{1}{2}m\upsilon_{αρχ}^2 \Rightarrow f = -\frac{1}{2}\frac{m\upsilon_{αρχ}^2}{\Delta x} = -\frac{0{,}02\times(500)^2}{2\times 0{,}10}\frac{\text{kg(m/s)}^2}{\text{m}} = -25000\ \text{N}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η δύναμη έχει αντίθετη φορά από τη μετατόπιση ($\Delta x = +10$ cm). Η δύναμη που ασκεί ο κορμός στη σφαίρα είναι τεράστια. Από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, συμπεραίνουμε οτι η σφαίρα ασκεί μια δύναμη ίσου μέτρου στον κορμό! Σε τέτοιες δυνάμεις οφείλεται η καταστρεπτική ικανότητα μιας σφαίρας.

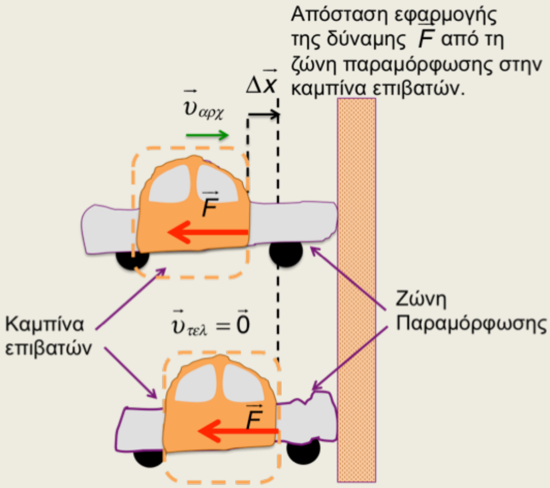
Παράδειγμα 3. Προστατευτικά Τμήματα στα Σύγχρονα Αυτοκίνητα

Τα αυτοκίνητα που κατασκευάζονται με σύγχρονες προδιαγραφές διαθέτουν προστατευτικές «ζώνες παραμόρφωσης» (crumble zones) στο μπροστινό και πίσω μέρος τους, δηλαδή τμήματα (π.χ. προφυλακτήρες) κατασκευασμένα από εύκαμπτα υλικά. Κατά τη διάρκεια ενός ατυχήματος τα τμήματα αυτά συμπιέζονται σε μεγάλο βαθμό, επιτρέποντας στην καμπίνα των επιβατών να διανύει μεγαλύτερη απόσταση προτού ακινητοποιηθεί. Με αυτό τον τρόπο ελαττώνεται σημαντικά η μέση δύναμη που ασκείται στην καμπίνα (και στους επιβάτες), όπως εξηγούμε σε αυτό το παράδειγμα.

Παραμόρφωση του μπροστινού μέρους αυτοκινήτου σε έλεγχο σύγκρουσης (crash test).

Α. Ένα αυτοκίνητο συγκρούεται με έναν ακλόνητο τοίχο. Τη στιγμή της σύγκρουσης, το αυτοκίνητο κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{\alpha\rho\chi} = 15\ \mathrm{m/s}$.

Το μπροστινό μέρος του αυτοκινήτου (ζώνη παραμόρφωσης) συμπιέζεται και επιτρέπει στην καμπίνα των επιβατών να διαγράψει οριζόντια μετατόπιση με μέτρο $\Delta x = 0{,}45\ \mathrm{m}$, μέχρι να ακινητοποιηθεί. Κατά τη διάρκεια αυτής της μετακίνησης, η καμπίνα δέχεται μια δύναμη $\vec{F}$ από το μπροστινό μέρος (θεωρούμε σταθερό το μέτρο της δύναμης).



Θα υπολογίσουμε την τιμή της δύναμης $\vec{F}$ για την περίπτωση που η συνολική μάζα της καμπίνας και των επιβατών είναι 1 000 kg. Υπολογίζουμε πρώτα το έργο της $\vec{F}$ από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας, λαμβάνοντας υπόψη ότι η τελική ταχύτητα της καμπίνας έχει μηδενική τιμή:

$$W = E_{\kappa\iota\nu}^{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi} = -\frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 = -1\,000 \times (15)^2\,\mathrm{kg}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = -225\,000\ \underbrace{\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}_{=1\ \mathrm{N}}\ \mathrm{m} = -225\,000\ \mathrm{Joule}$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα για το έργο, προκύπτει η μέση δύναμη:

$$W = F\Delta x \Rightarrow F = \frac{W}{\Delta x} = \frac{-225\,000}{0{,}45}\,\frac{\mathrm{Joule}}{\mathrm{m}} = -500\,000\ \mathrm{N}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η δύναμη $\vec{F}$ είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση. Η δύναμη αυτή αντιστοιχεί σε βάρος 50 τόνων.

Β. Τα αυτοκίνητα παλαιοτέρων προδιαγραφών ήταν κατασκευασμένα από πιο άκαμπτα υλικά και δεν περιείχαν ζώνες παραμόρφωσης. Το μπροστινό (και το πίσω) μέρος ενός τέτοιου αυτοκινήτου διατηρούσε σε μεγάλο βαθμό το σχήμα του κατά τη διάρκεια μιας σύγκρουσης, οπότε και η μετατόπιση της καμπίνας μέχρι την τελική της ακινητοποίηση ήταν πολύ μικρότερη.

Ένα αυτοκίνητο παλαιότερης γενιάς κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου 15 m/s και συγκρούεται με τον ίδιο ακλόνητο τοίχο του παραδείγματος **Α**. Επειδή το αυτοκίνητο δεν διαθέτει αντίστοιχη ζώνη παραμόρφωσης στο μπροστινό του μέρος, η μετατόπιση της καμπίνας μέχρι να ακινητοποιηθεί είναι πολύ μικρότερη, $\Delta x' = 5$ cm. Επειδή η αρχική και η τελική ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι οι ίδιες με το παράδειγμα **Α**, το έργο έχει την ίδια τιμή ($W = -\Delta E_{\kappa\iota\nu}$). Δεδομένου ότι η μέση δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη της μετατόπισης, προκύπτει να είναι μεγαλύτερη κατά 9 φορές:

$$F = \frac{W}{\Delta x'} = \frac{-225\,000}{0{,}05}\,\frac{\text{Joule}}{\text{m}} = -4\,500\,000 \text{ N}$$

Να παρατηρήσετε ότι

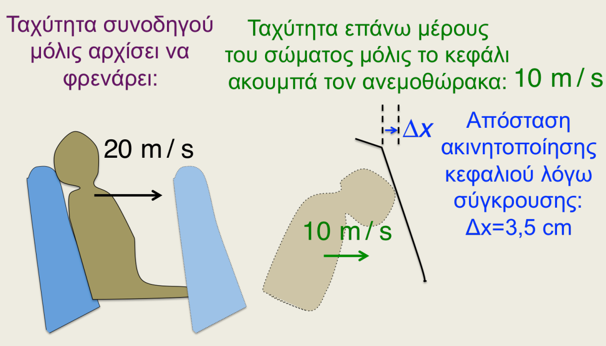
1. το έργο της δύναμης που πρέπει να ασκηθεί σε ένα κινούμενο σώμα για να ακινητοποιηθεί ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος, και συνεπώς καθορίζεται από την αρχική και τελική ταχύτητα του σώματος.
2. Το έργο ισούται με το γινόμενο της δύναμης επί τη μετατόπιση κατά την οποία υφίσταται η δύναμη. Για δεδομένο έργο, όσο μεγαλώνει το μέτρο της μετατόπισης τόσο μικραίνει το μέτρο της απαιτούμενης δύναμης.

Στις ίδιες αρχές στηρίζεται η λειτουργία της ζώνης ασφαλείας των οχημάτων, την οποία μελετούμε στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4. Η Λειτουργία της Ζώνης Ασφαλείας.

Η τροχαία κάνει συχνά εκστρατείες ευαισθητοποίησης των οδηγών σχετικά με τη χρήση των ζωνών ασφαλείας. Σε αυτό το παράδειγμα θα διαπιστώσουμε τη σημασία που έχει η ζώνη ασφαλείας για την αποφυγή τραυματισμών.

Α. Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 72 km/h (20 m/s). Ο οδηγός αντιλαμβάνεται ξαφνικά ένα εμπόδιο και φρενάρει. Η ταχύτητα του αυτοκινήτου μειώνεται απότομα εξ΄αιτίας της δύναμης τριβής από το οδόστρωμα προς τα ελαστικά του αυτοκινήτου. Εάν ο συνοδηγός έχει μάζα 70 kg, και δεν φορά ζώνη



ασφαλείας, συνεχίζει να κινείται περίπου με την αρχική του ταχύτητα λόγω αδράνειας, και πλησιάζει τον ανεμοθώρακα. Έστω ότι το κεφάλι του συνοδηγού συναντά τον ανεμοθώρακα με ταχύτητα 36 km/h (10 m/s). Θα υποθέσουμε ότι κατά τη διάρκεια της επαφής του κεφαλιού, κινείται το επάνω μέρος του σώματος του συνοδηγού, το οποίο έχει συνολική μάζα 35 kg. Εκτιμούμε ότι από τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με τον ανεμοθώρακα, το κεφάλι διαγράφει (λόγω της παραμόρφωσής του) απόσταση 3,5 cm μέχρι να ακινητοποιηθεί. Θα υπολογίσουμε τη μέση δύναμη που ασκεί ο ανεμοθώρακας στο κεφάλι (και στο επάνω μέρος του σώματος) του συνοδηγού.

Εργαζόμενοι όπως προηγουμένως, βρίσκουμε:

$$W = E^{\kappa\iota\nu}_{\tau\varepsilon\lambda} - E^{\kappa\iota\nu}_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow F\Delta x = \underbrace{\frac{1}{2}m\upsilon^2_{\tau\varepsilon\lambda}}_{=0} - \frac{1}{2}m\upsilon^2_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow$$

$$F = -\frac{1}{2}\frac{m\upsilon^2_{\alpha\rho\chi}}{\Delta x} = -\frac{1}{2}\frac{35\times(10)^2}{0{,}035}\frac{\mathrm{kg(m/s)^2}}{\mathrm{m}} = -50000\ \mathrm{N}$$

Η δύναμη αυτή είναι περίπου ίση με το βάρος ενός σώματος μάζας 5 τόνων.

Β. Ο συνοδηγός φορά ζώνη ασφαλείας. Στο διπλανό σχήμα, το κάθισμα του συνοδηγού (και το αυτοκίνητο) έχει ήδη ακινητοποιηθεί, αλλά αυτός συνεχίζει να κινείται λόγω αδράνειας, με ταχύτητα $\upsilon_{\alpha\rho\chi}$. Κατά τη διάρκεια της μετακίνησης του συνοδηγού η ζώνη ασφαλείας προεκτείνεται, και ασκεί μια δύναμη $\vec{F}$ στο σώμα του συνοδηγού. Τελικά, το σώμα του συνοδηγού σταματά αφού έχει μετατοπισθεί κατά $\Delta x = 0{,}35\,\mathrm{m}$.

Εστω ότι τη στιγμή που ακινητοποιείται το κάθισμα, όλο το σώμα του συνοδηγού ($m = 70$ kg) κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{\alpha\rho\chi} = 10$ m/s. Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συνοδηγού. Από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση δύναμη $\vec{F}$:

$$W = \underbrace{\frac{1}{2}m\upsilon^2_{\tau\varepsilon\lambda}}_{=0} - \frac{1}{2}m\upsilon^2_{\alpha\rho\chi} = F\,\Delta x \Rightarrow F = -\frac{1}{2}\frac{m\upsilon^2_{\alpha\rho\chi}}{\Delta x} = -\frac{1}{2}\frac{70\times(10)^2}{0{,}35}\frac{\mathrm{kg(m/s)^2}}{\mathrm{m}} = -10000\ \mathrm{N}$$

Να παρατηρήσετε ότι η δύναμη που ασκείται στον συνοδηγό είναι 5 φορές μικρότερη από τη δύναμη που ασκείται στον οδηγό, επειδή αυτή η δύναμη επενεργεί κατά μήκος μεγαλύτερης απόστασης.

Το κράνος των μοτοσυκλετιστών περιέχει στο εσωτερικό του κατάλληλο μαλακό υλικό. Κατά την πρόσκρουση του κεφαλιού του μοτοσυκλετιστή, το κεφάλι συμπιέζει το υλικό και δέχεται κάποια δύναμη από αυτό, που το ακινητοποιεί. Επειδή το υλικό είναι μαλακό, η δύναμη που ασκεί στο κεφάλι υφίσταται για μεγαλύτερη απόσταση (ίση με τη μεταβολή του πάχους του υλικού). Όπως και στην περίπτωση της ζώνης ασφαλείας, η μέση δύναμη στο κεφάλι ελαττώνεται σημαντικά με την αύξηση της απόστασης, ελαττώνοντας την πιθανότητα σοβαρού τραυματισμού.

Σημείωση προς τους Εκπαιδευτικούς: Η αναφορά στην περίπτωση της μεταβαλλόμενης δύναμης είναι σημαντική, διότι το Θεώρημα χρησιμοποιείται αργότερα, στην εξαγωγή της έκφρασης για τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας συστήματος σώματος-ελατηρίου. Μπορεί απλώς να τονισθεί ότι το θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση μεταβαλλόμενης δύναμης. Η απόδειξη αφήνεται στην ευχέρεια των εκπαιδευτικών.

Το Θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας ισχύει και για Μεταβαλλόμενη Δύναμη

Σε πολλές περιπτώσεις, **η δύναμη που ασκείται στο σώμα μπορεί να αλλάζει** με τη θέση του σώματος. Σχετικό παράδειγμα αποτελεί η δύναμη ελατηρίου, που ασκείται σε ένα σώμα συνδεδεμένο με την ελεύθερη άκρη του ελατηρίου. Η δύναμη αυτή μεταβάλλεται γραμμικά με τη θέση x του σώματος: $F_{\varepsilon\lambda} = -kx$, όπου $x = 0$ είναι η θέση για μηδενική παραμόρφωση του ελατηρίου. Όπως αποδεικνύουμε πιο κάτω, και στην περίπτωση μεταβαλλόμενης δύναμης, το έργο της δύναμης ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του σώματος.

Θεώρημα Έργου-Κινητικής Ενέργειας για Μεταβαλλόμενη Δύναμη

Όταν ένα σώμα μετατοπίζεται υπό την επίδραση μιας μεταβαλλόμενης συνισταμένης δύναμης, η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του σώματος ισούται με το έργο αυτής της δύναμης.

$$W = E_{\tau\varepsilon\lambda}^{\kappa\iota\nu} - E_{\alpha\rho\chi}^{\kappa\iota\nu}$$

Ένθετο: Απόδειξη του Θεωρήματος Έργου-Κινητικής Ενέργειας για την Περίπτωση Μεταβαλλόμενης Δύναμης

Θα εξετάσουμε τη γενικότερη περίπτωση ενός σώματος που κινείται σε ευθεία γραμμή υπό την επίδραση μεταβαλλόμενης δύναμης. Θα εξηγήσουμε πώς υπολογίζεται το συνολικό έργο της δύναμης, και θα δείξουμε ότι και σε αυτή την περίπτωση το έργο ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος.

Στην Εικόνα 4-3 απεικονίζεται η γραφική παράσταση της συνιστώσας F_x μιας μεταβαλλόμενης δύναμης σαν συνάρτηση της θέσης. Χωρίζουμε τη συνολική μετατόπιση Δx σε πολύ μικρά τμήματα. Η τιμή της συνιστώσας F_x μεταβάλλεται από τμήμα σε τμήμα. Εάν τα τμήματα επιλεγούν αρκετά μικρά, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι *η τιμή της F_x παραμένει προσεγγιστικά σταθερή σε κάθε τμήμα*. Συνεπώς, κατά τη διάρκεια οποιασδήποτε μικρής μετατόπισης Δx_k το σώμα δέχεται την επίδραση σταθερής δύναμης F_{kx}.

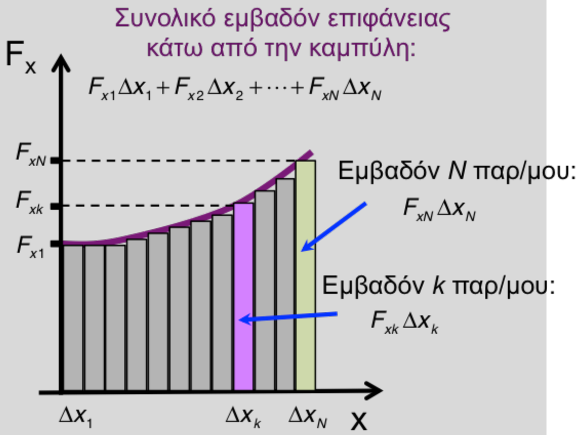
Εάν η ταχύτητα του σώματος στην αρχή και το τέλος της μετατόπισης Δx_k έχει τιμές υ_k και υ_{k+1}, προκύπτει:

$$F_{kx}\,\Delta x_k = \frac{1}{2}m\upsilon_{k+1}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_k^2$$

Εφαρμόζοντας αυτή τη σχέση σε κάθε τμήμα ξεχωριστά, βρίσκουμε:

$$\left.\begin{array}{l} F_{1x}\,\Delta x_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 \\ F_{2x}\,\Delta x_2 = \frac{1}{2}m\upsilon_3^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 \\ \ldots \\ F_{\mathrm{N}x}\,\Delta x_{\mathrm{N}} = \frac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{\mathrm{N}}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$F_{1x}\,\Delta x_1 + F_{2x}\,\Delta x_2 + \cdots + F_{\mathrm{N}x}\,\Delta x_{\mathrm{N}} = \frac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2$$



Εικόνα 4-3. Γραφική παράσταση τη συνιστώσας F_x μιας μεταβαλλόμενης δύναμη από τη θέση x.

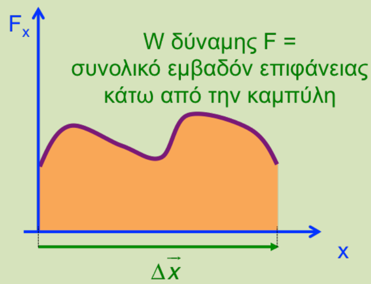
Η ποσότητα $W = F_{1x}\Delta x_1 + F_{2x}\Delta x_2 + \cdots + F_{\mathrm{N}x}\Delta x_{\mathrm{N}}$ είναι <u>το συνολικό έργο της δύναμης κατά τη συνολική μετατόπιση</u> $\Delta\vec{x} = \Delta\vec{x}_1 + \cdots + \Delta\vec{x}_N$.

Οι ποσότητες $\frac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2$ και $\frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2$ είναι, αντίστοιχα, η κινητική ενέργεια του σώματος στο τέλος και την αρχή της συνολικής μετατόπισης $\Delta\vec{x}$. Από την πιο πάνω ισότητα προκύπτει ότι το έργο της δύναμης $\vec{F}$ ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος κατά τη μετατόπιση $\Delta\vec{x}$. Συνεπώς, το θεώρημα Έργου-Κινητικής Ενέργειας ισχύει και για μεταβαλλόμενη δύναμη.

Γραφικός Υπολογισμός του Έργου Μεταβαλλόμενης Δύναμης

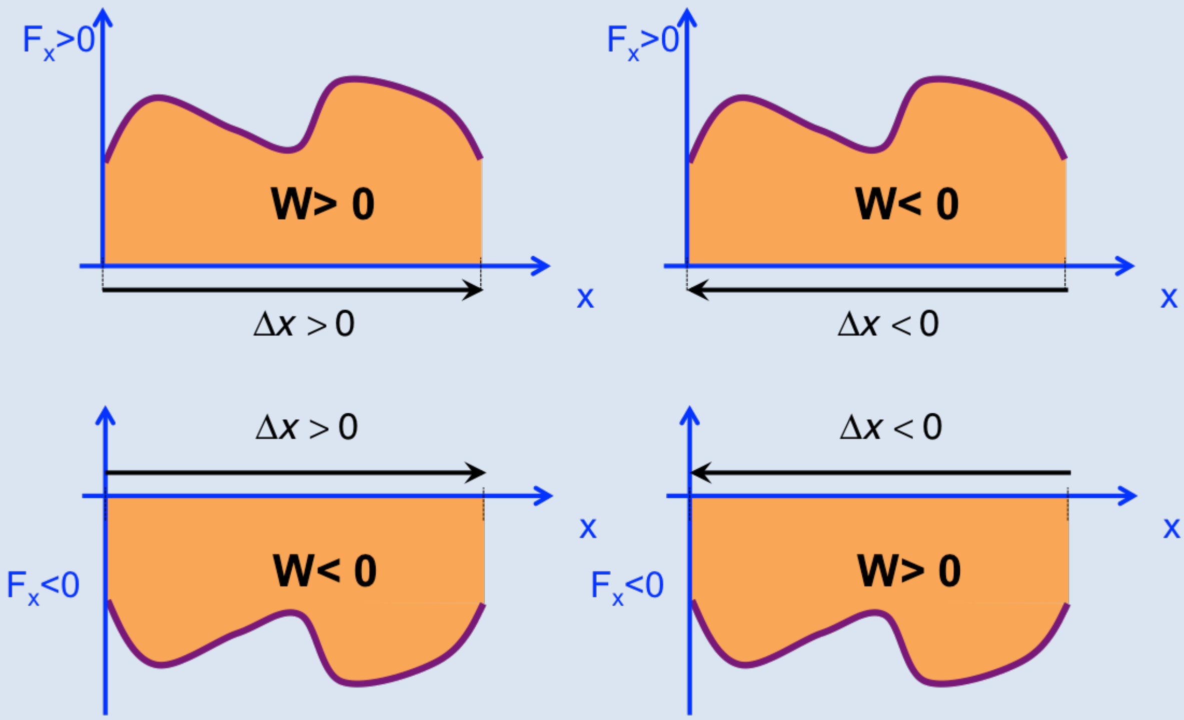
Στην περίπτωση μεταβαλλόμενης δύναμης, το έργο της δύναμης δεν μπορεί να υπολογισθεί από ένα γινόμενο της μορφής «*δύναμη x μετατόπιση*», επειδή η τιμή της δύναμης αλλάζει με τη θέση του σώματος. Μελετώντας την Εικόνα 4-3, διαπιστώνουμε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη της F_x ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους ορθογωνίων παραλληλογράμμων, $F_{1x}\Delta x_1 + F_{2x}\Delta x_2 + \cdots + F_{Nx}\Delta x_N$, και άρα με <u>το συνολικό έργο W της δύναμης κατά τη συνολική μετατόπιση.</u> Η διαπίστωση αυτή οδηγεί σε μια μέθοδο για τον υπολογισμό του έργου μιας μεταβαλλόμενης δύναμης:

Εάν γνωρίζουμε πώς εξαρτάται από τη θέση x η συνιστώσα F_x της δύναμης *κατά τη διεύθυνση της μετατόπισης* Δx, σχεδιάζουμε την καμπύλη της F_x σαν συνάρτηση της θέσης. Το συνολικό έργο της δύναμης $\vec{F}$ ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη.



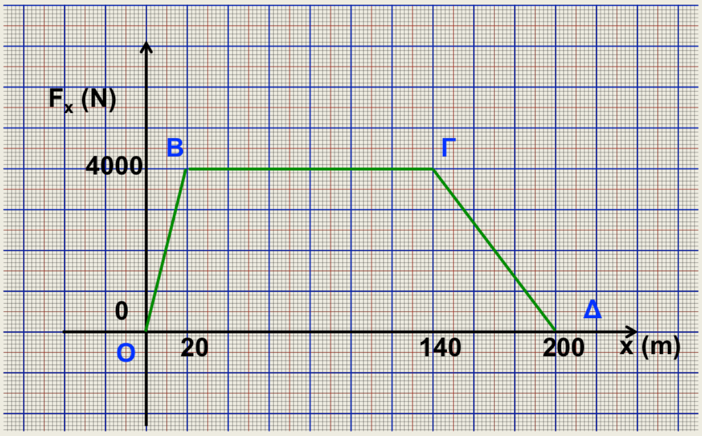
Στον υπολογισμό του εμβαδού **χρησιμοποιούμε τις αλγεβρικές τιμές της συνιστώσας** F_x **και της μετατόπισης,** οπότε το έργο μπορεί να έχει θετικό ή αρνητικό πρόσημο.

Σημείωση προς τους Εκπαιδευτικούς: Ίσως χρειασθεί να εξηγηθούν με παραδείγματα περιπτώσεις στις οποίες η μετατόπιση Δx ή/και η συνιστώσα F_x είναι αρνητικές. Το πιο κάτω σχήμα έχει διάφορες περιπτώσεις. Επαφίεται στην ευχέρεια των εκπαιδευτικών η έκταση στην οποία θα συζητήσουν αυτές τις περιπτώσεις.



Παράδειγμα: Βαγονάκι που κινείται υπό την Επίδραση Μεταβαλλόμενης Δύναμης

Ένα βαγονάκι ρυμουλκείται σε μια ευθύγραμμη σιδηροτροχιά από τη θέση $x=0$ m στη θέση $x=200$ m υπό την επίδραση μιας μεταβλητής δύναμης F. Η Εικόνα 4-4 απεικονίζει τη γραφική παράσταση της συνιστώσας F_x της δύναμης πάνω στην ευθεία της μετατόπισης, συναρτήσει της μετατόπισης του βαγονιού. Να υπολογίσετε το συνολικό έργο της δύναμης που ρυμουλκεί το βαγονάκι.



Εικόνα 4-4. Γραφική παράσταση της δύναμης που ρυμουλκεί το βαγονάκι σαν συνάρτηση της μετατόπισης. Το έργο της δύναμης είναι ίσο με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη.

Το ζητούμενο έργο ισούται με το εμβαδόν του τραπεζίου ΟΒΓΔ. Στον υπολογισμό του εμβαδού, η μετατόπιση και η δύναμη εισέρχονται με τις αλγεβρικές τους τιμές. Η μετατόπιση είναι θετική επειδή το βαγονάκι κινείται από τη θέση $x = 0$ m στη θέση $x = 200$ m. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η αλγεβρική τιμή της δύναμης είναι επίσης θετική, δηλαδή η δύναμη είναι ομόρροπη με τη μετατόπιση και παράγει έργο. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$W = E_{\mathrm{OB\Gamma\Delta}} = \frac{1}{2}\times(120+200)\times 4000 \text{ N}\times\text{m} = 640000 \text{ Joule}$$

Το πρόσημο του έργου είναι θετικό, σε συμφωνία με το γεγονός ότι η δύναμη παράγει έργο.

Ερωτήσεις Κατανόησης

	Σ/Λ
Όταν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα κινούμενο σώμα είναι ομόρροπη με τη μετατόπιση του σώματος, το μέτρο της ταχύτητας του σώματος αυξάνεται.	
Όταν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα κινούμενο σώμα είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση του σώματος, το μέτρο της ταχύτητας του σώματος ελαττώνεται.	
Όταν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα κινούμενο σώμα είναι κάθετη στη μετατόπισή του, η ταχύτητα του σώματος έχει συνεχώς σταθερό μέτρο.	
Όταν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα κινούμενο σώμα είναι ίση με μηδέν, το έργο αυτής της δύναμης είναι πάντοτε ίσο με μηδέν.	
Σε ένα σώμα ασκούνται δύο αντίθετες δυνάμεις. Τα έργα αυτών των δυνάμεων είναι ίσα μεταξύ τους.	
Ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα υπό την επίδραση πολλών δυνάμεων. Το συνολικό	

έργο αυτών των δυνάμεων μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό ή μηδενικό.	
Ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα υπό την επίδραση πολλών δυνάμεων. Κάθε μια από τις δυνάμεις ασκεί μηδενικό έργο στο σώμα.	
Δύο κινούμενα σώματα Α και Β έρχονται σε ηρεμία υπό την επίδραση δύο δυνάμεων $\vec{F}_A$ και $\vec{F}_B$. Για να είναι ίσα τα έργα των δυνάμεων αυτών, πρέπει τα σώματα Α και Β να έχουν:	
Α. Την ίδια μάζα.	
Β. Το ίδιο μέτρο αρχικής ταχύτητας (πριν την εφαρμογή των δυνάμεων).	
Γ. Την ίδια αρχική κινητική ενέργεια (πριν την εφαρμογή των δυνάμεων).	
Ένα σώμα κινείται σε ευθεία γραμμή με αρχική ταχύτητα μέτρου υ. Σε κάποια στιγμή το σώμα αρχίζει να υφίσταται την επίδραση μιας δύναμης F, εξαιτίας της οποίας ακινητοποιείται, αφού μετατοπισθεί κατά Δx. Το έργο της δύναμης F:	
Α. Αυξάνεται, εάν αυξηθεί η μετατόπιση Δx.	
Β. Αυξάνεται, εάν αυξηθεί το μέτρο της δύναμης F.	
Γ. Παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από τα μέτρα της δύναμης και της μετατόπισης.	
Η δύναμη F:	
Α. Είναι ανεξάρτητη από τη μετατόπιση Δx του σώματος, κατά την οποία εφαρμόζεται.	
Β. Είναι αντιστρόφως ανάλογη με τη μετατόπιση Δx.	
Γ. Είναι ανάλογη με τη μετατόπιση Δx.	

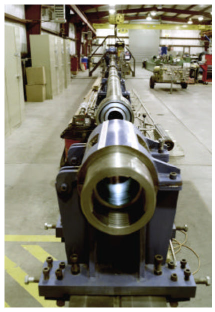
Ασκήσεις

1. Στους Ολυμπιακούς αγώνες της Ατλάντας (1986), ο τρεις φορές χρυσός ολυμπιονίκης της άρσης βαρών Πύρρος Δήμας έκανε παγκόσμιο ρεκόρ στην κατηγορία των 83 κιλών με την τεχνική μίας κίνησης (αρασέ ή απόσπασης), ανυψώνοντας 180,0 kg. Ο αθλητής έχει ύψος 1,73 m. Εάν υποθέσουμε ότι στην τελική του στάση με κατακόρυφα χέρια σήκωσε τη μπάρα σε ύψος 2,0 m, να υπολογίσετε το συνολικό έργο του βάρους της μπάρας και των σταθμών.

2. Σε μια άσκηση του Κεφαλαίου 3 αναφέραμε ότι το δεξαμενόπλοιο *Seawise Giant*, μάζας 657 000 τόνων, χρειαζόταν να διανύσει 9 km στην οριζόντια διεύθυνση για να σταματήσει, εάν η αρχική του ταχύτητα ήταν 30 km/h. Από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας να υπολογίσετε το έργο της οριζόντιας συνισταμένης δύναμης που απαιτούνταν για να σταματήσει το πλοίο, και το μέτρο αυτής της δύναμης.

3. Με την εξέλιξη των διαστημικών ταξιδιών, και για σκοπούς προετοιμασίας ενός ταξιδιού στον πλανήτη Άρη στο σύντομο μέλλον, οι επιστήμονες μελετούν τη συμπεριφορά των τοιχωμάτων διαστημοπλοίων, κατά τη πρόσπτωση σε αυτά μετεωριτών με τεράστιες ταχύτητες.

Εκτιμάται ότι θραύσματα μετεωριτών μπορεί να κινούνται στο διάστημα με ταχύτητες $200\ \mathrm{km/s}$. Για το σκοπό αυτό, η NASA εκτελεί πειράματα με ειδικά κατασκευασμένα όπλα ελαφρού αερίου (light gas guns). Με τη σημερινή τεχνολογία, ένα τέτοιο όπλο μπορεί να επιταχύνει ένα βλήμα μάζας $15{,}4\ \mathrm{g}$ από ηρεμία μέχρι τελική ταχύτητα $6{,}9\ \mathrm{km/s}$ κατά μήκος μιας κάννης μήκους $6{,}7\ \mathrm{m}$.

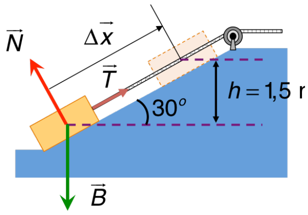


Να υπολογίσετε:

Α. Την κινητική ενέργεια του βλήματος όταν φεύγει από την κάννη του όπλου.

Β. Τη μέση δύναμη που υφίσταται το βλήμα μέσα στην κάννη του όπλου.

4. Ενα κιβώτιο μάζας $20\ \mathrm{kg}$ ρυμουλκείται κατά μήκος ενός *λείου* κεκλιμένου επιπέδου υπό την επίδραση μιας δύναμης $\vec{T}$, του βάρους του $\vec{B}$ και μιας κάθετης δύναμης $\vec{N}$ από το επίπεδο, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

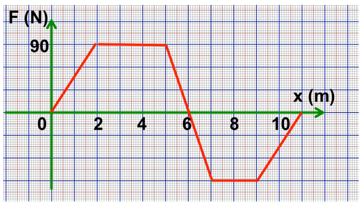


Α. Το κιβώτιο ρυμουλκείται με σταθερή ταχύτητα. Να υπολογίσετε το έργο κάθε μίας από τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό. Να συγκρίνετε το άθροισμα αυτών των έργων με το έργο της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο κιβώτιο.

Β. Το κιβώτιο έχει την ίδια τιμή ταχύτητας στην αρχή και στο τέλος της μετατόπισής του, αλλά η ταχύτητα που έχει σε ενδιάμεσες θέσεις είναι άγνωστη.

Μπορείτε από αυτά τα δεδομένα να υπολογίσετε την τάση $\vec{T}$ του σχοινιού; Μπορείτε να υπολογίσετε το έργο της τάσης;

5. Στο πιο κάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της δύναμης που μετακινεί ένα καροτσάκι κατά μήκος ενός άξονα Οx, σαν συνάρτηση της θέσης του καροτσιού.



Το καροτσάκι ξεκινά από τη θέση $x = 0\ \mathrm{m}$ με μηδενική ταχύτητα και μετακινείται μέχρι τη θέση $x = 11\ \mathrm{m}$.

Να υπολογίσετε το έργο που έχει παράξει η δύναμη όταν το καροτσάκι βρίσκεται στις θέσεις $x = 4$, 6 και $11\ \mathrm{m}$, καθώς και την ταχύτητα του καροτσιού στις ίδιες θέσεις.

Σημείωση προς τους Εκπαιδευτικούς: Όπως εξηγήσαμε στην αρχή του Κεφαλαίου, δείχνουμε πρώτα τις σχέσεις διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (από το ΘΕΚΕ). Σε αυτές τις σχέσεις εμφανίζεται η κινητική ενέργεια (γνωστή ήδη), και μια νέα ποσότητα την οποία εισάγουμε ως δυναμική ενέργεια.

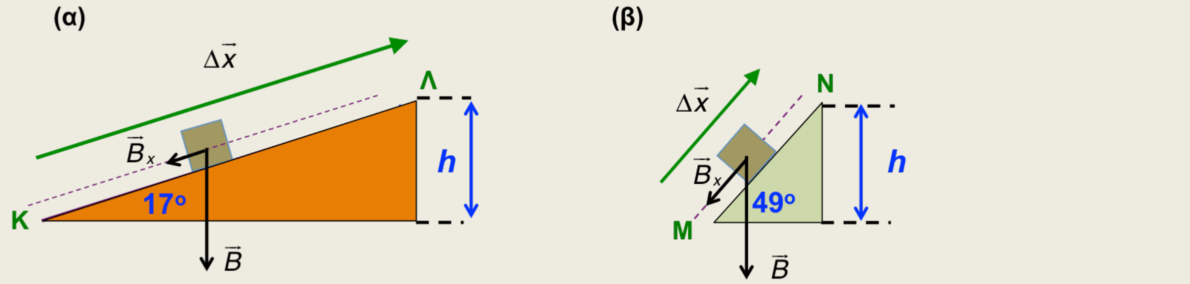
Η Έννοια της Δυναμικής Ενέργειας

Στα προηγούμενα χρησιμοποιήσαμε το έργο δύναμης και το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για να υπολογίσουμε την ταχύτητα διαφόρων σωμάτων. Το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο όταν είναι εφικτός ο υπολογισμός του έργου, δηλαδή όταν είναι γνωστή η εξάρτηση της δύναμης από τη θέση του σώματος. Γενικά, το έργο μιας δύναμης που εφαρμόζεται σε ένα κινούμενο σώμα μπορεί να εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα. Όμως, για ορισμένες κατηγορίες δυνάμεων **το έργο είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή** και καθορίζεται πλήρως από την αρχική και τελική θέση του σώματος. Σε αυτές τις περιπτώσεις το έργο μιας συγκεκριμένης δύναμης μπορεί να εκφρασθεί με τη βοήθεια μιας συνάρτησης της θέσης, που ονομάζεται **δυναμική ενέργεια**. Μελετάμε πρώτα την περίπτωση του έργου του βάρους ενός σώματος.

Σημείωση προς τους Εκπαιδευτικούς: Εξάγουμε το έργο βάρους για διαδρομή σε κεκλιμένο επίπεδο. Η απόδειξη για αυθαίρετη καμπυλόγραμμη διαδρομή περιλαμβάνεται σε Ένθετο που ακολουθεί, αλλά η εξαγωγή της επαφίεται στην ευχέρεια του εκπαιδευτικού.

Έργο του Βάρους κατά Μήκος Κεκλιμένου Επιπέδου

Η Εικόνα 4-6(α) απεικονίζει ένα κεκλιμένο επίπεδο ΚΛ, το οποίο σχηματίζει γωνία 17^o με την οριζόντια διεύθυνση. Ένα σώμα μάζας m μετατοπίζεται κατά $\Delta\vec{x}$ πάνω στο επίπεδο, και το ύψος του αλλάζει κατά h..



$$\left.\begin{aligned} B_x &= -|\vec{B}|\,\eta\mu 17^o \\ \Delta x = \mathrm{K\Lambda} &= \frac{h}{\eta\mu 17^o} \end{aligned}\right\} \Rightarrow B_x(\mathrm{K\Lambda}) = -|\vec{B}|h = -m|\vec{g}|h.$$

$$\left.\begin{aligned} B_x &= -|\vec{B}|\,\eta\mu 49^o \\ \Delta x = \mathrm{MN} &= \frac{h}{\eta\mu 49^o} \end{aligned}\right\} \Rightarrow B_x(\mathrm{MN}) = -|\vec{B}|h = -m|\vec{g}|h.$$

Εικόνα 4-6. Το σώμα του σχήματος (**α**) μετατοπίζεται κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου κατά $\Delta\vec{x}$ και το ύψος του μεταβάλλεται κατά h. Εάν η γωνία του επιπέδου με την οριζόντια διεύθυνση μεγαλώσει (σχήμα **β**), αυξάνεται η τιμή της συνιστώσας B_x του βάρους του σώματος. Για δεδομένη διαφορά ύψους h, η τιμή της μετατόπισης Δx κατά μήκος του επιπέδου ελαττώνεται και το γινόμενο $B_x\Delta x$ είναι σταθερό. Το έργο του βάρους είναι ανεξάρτητο από τη γωνία του επιπέδου.

Η συνιστώσα του βάρους του σώματος κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου ισούται με $B_x = -|\vec{B}|\,\eta\mu\,17^o$, και η μετατόπιση του σώματος ισούται με $\Delta x = \mathrm{K\Lambda} = h / \eta\mu\,17^o$. Συνεπώς, το έργο του βάρους του σώματος ισούται με

$$W_1 = B_x \Delta x = B_x (\mathrm{K\Lambda}) = -|\vec{B}|\,\eta\mu\,17^o \frac{h}{\eta\mu\,17^o} = -m|\vec{g}|h$$

Να παρατηρήσετε ότι το τελικό αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τη γωνία του κεκλιμένου επιπέδου, αλλά μόνο από την κατακόρυφη μετατόπιση h.

Στο σχήμα 4-6(β) απεικονίζεται ένα κεκλιμένο επίπεδο ΜΝ, το οποίο σχηματίζει μεγαλύτερη γωνία (49^o) με την οριζόντια διεύθυνση. Για να ανέλθει κατά το ίδιο κατακόρυφο ύψος h, το σώμα διανύει *μικρότερη απόσταση* κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου: $\mathrm{MN} = h / \eta\mu\,49^o$. Ταυτόχρονα, η συνιστώσα B_x του βάρους κατά μήκος του επειπέδου ΜΝ είναι μεγαλύτερη: $B_x = -|\vec{B}|\,\eta\mu\,49^o$. Το αντίστοιχο έργο του βάρους είναι ίδιο όπως και στην πρώτη περίπτωση:

$$W_2 = B_x (\mathrm{MN}) = -|\vec{B}|\,\eta\mu\,49^o \frac{h}{\eta\mu\,49^o} = -m|\vec{g}|h.$$

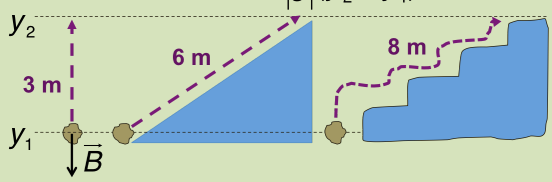
Συμπεραίνουμε ότι το έργο του βάρους δεν εξαρτάται από την τιμή της μετατόπισης κατά μήκος των δύο κεκλιμένων επιπέδων, αλλά **μόνο από τη διαφορά ύψους της τελικής από την αρχική θέση:**

$$W_1 = W_2 = -m|\vec{g}|h.$$

Επειδή το μέγεθος $h = y_2 - y_1$ είναι η διαφορά ύψους της τελικής από την αρχική θέση του σώματος, η εξίσωση στην οποία καταλήξαμε ταυτίζεται με τη σχέση για κατακόρυφη μετακίνηση. Όπως δείχνουμε στο Ένθετο που ακολουθεί, το ίδιο συμπέρασμα ισχύγαι για μετακίνηση κατά μήκος μιας αυθαίρετης καμπυλόγραμμης διαδρομής. Συμπεραίνουμε:

Έργο βάρους σώματος μάζας m, **το οποίο μεταβαίνει μέσω αυθαίρετης διαδρομής από μια αρχική θέση ύψους** y_1 **σε τελική θέση ύψους** y_2.

$$W = -m|\vec{g}|(y_2 - y_1)$$



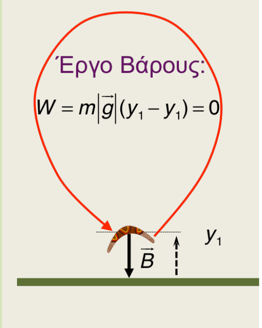
Το έργο του βάρους εξαρτάται μόνο από τη διαφορά του τελικού από το αρχικό ύψος, και όχι από τη διαδρομή.

Οι δυνάμεις, το έργο των οποίων εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του σώματος και όχι από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα, ονομάζονται **διατηρητικές ή**

συντηρητικές. **Το βάρος είναι παράδειγμα διατηρητικής δύναμης.**

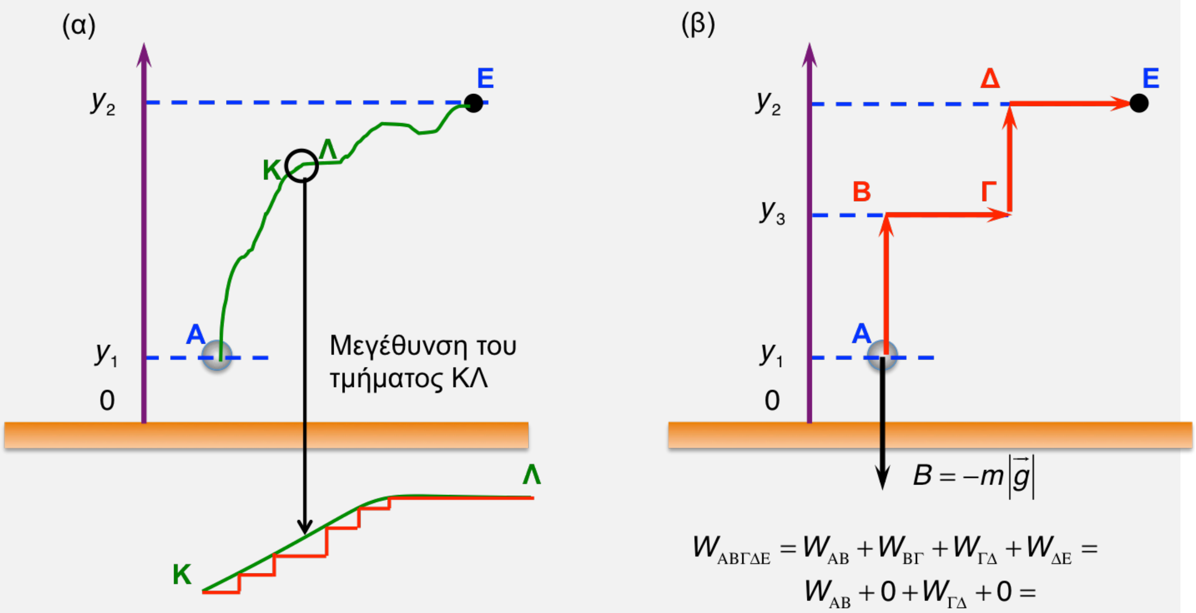
Εάν η αρχική και τελική θέση του σώματος ταυτίζονται, η διαδρομή ονομάζεται κλειστή. Το έργο του βάρους σε μια κλειστή διαδρομή είναι ίσο με μηδέν. **Το συμπέρασμα αυτό ισχύει για όλες τις διατηρητικές δυνάμεις.**

Το έργο μιας διατηρητικής δύναμης κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής είναι ίσο με μηδέν.



Ένθετο: Έργο του Βάρους κατά Μήκος Αυθαίρετης Καμπυλόγραμμης Διαδρομής.

Στο σχήμα 4-7(α) σχεδιάζουμε μια καμπυλόγραμμη διαδρομή που ξεκινά από το αρχικό σημείο Α και καταλήγει στο τελικό σημείο Ε. Η διαδρομή αυτή μπορεί να προσεγγισθεί από μια τεθλασμένη γραμμή με πολλά οριζόντια και κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα. Γι΄ αυτό το λόγο θα υπολογίσουμε το έργο του βάρους κατά μήκος μιας τεθλασμένης διαδρομής.



Χρησιμοποιώντας κατάλληλο αριθμό οριζόντιων και κατακόρυφων ευθύγραμμων τμημάτων, μπορούμε να προσεγγίσουμε το τμήμα ΚΛ της καμπύλης με την τεθλασμένη γραμμή. <u>Το ίδιο ισχύει για όλη την καμπύλη ΑΕ</u>

$$W_{ΑΒΓΔΕ} = W_{ΑΒ} + W_{ΒΓ} + W_{ΓΔ} + W_{ΔΕ} = W_{ΑΒ} + 0 + W_{ΓΔ} + 0 = -m|\vec{g}|(y_3 - y_1) - m|\vec{g}|(y_2 - y_3) = -m|\vec{g}|(y_2 - y_1)$$

Εικόνα 4-7. (**α**) Οποιαδήποτε καμπυλόγραμμη διαδρομή μπορεί να προσεγγισθεί από μια τεθλασμένη γραμμή με οριζόντια και κατακόρυφα τμήματα. (**β**) Η σφαίρα μάζας *m* μετακινείται από το σημείο Α στο σημείο Ε, διαγράφοντας την τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΕ. Στα οριζόντια τμήματα ΒΓ και ΔΕ, το έργο του βάρους είναι ίσο με μηδέν. **Μόνο τα κατακόρυφα τμήματα συνεισφέρουν στο έργο του βάρους.** Η συνολική μετατόπιση κατά μήκος αυτών των τμημάτων είναι ίση με την διαφορά ύψους $y_2 - y_1$ του τελικού σημείου της τεθλασμένης από το αρχικό της σημείο.

Η Εικόνα 4-7(β) απεικονίζει ένα σώμα μάζας m, το οποίο μετακινείται από το σημείο Α στο σημείο Ε κατά μήκος της τεθλασμένης ΑΒΓΔΕ. Για να υπολογίσουμε το έργο του βάρους του σώματος κατά μήκος αυτής της διαδρομής, θεωρούμε ξεχωριστά τα οριζόντια και κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα που την αποτελούν.
Το έργο του βάρους είναι ίσο με μηδέν κατά μήκος των οριζόντιων τμημάτων ΒΓ και ΔΕ, επειδή η διεύθυνση του βάρους είναι κάθετη σε αυτά. Στα κατακόρυφα τμήματα ΑΒ και ΓΔ, χρησιμοποιούμε το προηγούμενο αποτέλεσμα:

$$W_{\text{AB}} + W_{\Gamma\Delta} = -m|\vec{g}|(y_3 - y_1) - m|\vec{g}|(y_2 - y_3) = -m|\vec{g}|(y_2 - y_1)$$

Συνεπώς, <u>το έργο του βάρους εξαρτάται μόνο από τη διαφορά ύψους του τελικού σημείου Ε της τροχιάς από το αρχικό σημείο Α</u>. Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει για οποιαδήποτε τεθλασμένη γραμμή που ενώνει τα σημεία Α και Ε.

Επειδή η καμπυλόγραμμη διαδρομή του σχήματος 4-7(α) μπορεί να προσεγγισθεί από μια τεθλασμένη γραμμή με πολλά οριζόντια και κατακόρυφα τμήματα, συμπεραίνουμε ότι το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει για μετακίνηση κατά μήκος της.

Σύστημα Σωμάτων

Ορίζουμε ως *σύστημα σωμάτων* ένα σύνολο σωμάτων. Όλες οι δυνάμεις που ασκούνται *ανάμεσα στα σώματα* ενός συστήματος είναι **εσωτερικές δυνάμεις** του συστήματος. Όλες οι δυνάμεις, που ασκούνται στα σώματα του συστήματος *από εξωτερικά αίτια*, ονομάζονται **εξωτερικές δυνάμεις**. Στο σύστημα που ορίζεται από ένα σώμα και τη Γη («σύστημα σώματος-Γης»), εσωτερικές δυνάμεις είναι το βάρος του σώματος και η έλξη από το σώμα στη Γη (αντίδραση στο βάρος). Εάν το σώμα πιέζει τη Γη, εσωτερικές δυνάμεις είναι επίσης η κάθετη δύναμη από τη Γη στο σώμα και η αντίδραση σε αυτή. Ένα ελατήριο κι ένα σώμα, συνδεδεμένα μεταξύ τους, αποτελούν ένα «σύστημα ελατηρίου-σώματος», με εσωτερικές δυνάμεις τη δύναμη ελατηρίου στο σώμα και τη δύναμη από το σώμα στο ελατήριο (αντίδραση στη δύναμη ελατηρίου). Ένα σώμα μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως σύστημα. Τότε, όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι εξωτερικές.

Η Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια

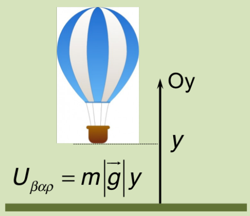
Ας εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για ένα σώμα που κινείται κατακόρυφα και μεταβαίνει από μια αρχική σε μια τελική θέση <u>μόνο υπό την επίδραση του βάρους του</u>:

$$W = E^{\kappa\iota\nu}_{\tau\varepsilon\lambda} - E^{\kappa\iota\nu}_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow -m|\vec{g}|(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + m|\vec{g}|y_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + m|\vec{g}|y_2$$

Στην τελευταία ισότητα έχει εμφανισθεί μαζί με την κινητική ενέργεια του σώματος $1/2\,m\upsilon^2$ και η φυσική ποσότητα $m|\vec{g}|y$, η οποία είναι συνάρτηση του ύψους στο οποίο βρίσκεται το σώμα. Η ποσότητα αυτή έχει επίσης μονάδες ενέργειας: $\mathrm{kg\,(m/s^2)\,m = N\,m =}$ Joule. Ονομάζουμε την ποσότητα $m|\vec{g}|y$ **βαρυτική δυναμική ενέργεια** του συστήματος σώματος-Γης, και τη συμβολίζουμε ως $U_{\beta\alpha\rho}$:

Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια του συστήματος σώματος-Γης, για σώμα μάζας *m*, που βρίσκεται σε ύψος *y* από την επιφάνεια της Γης:

$$U_{\beta\alpha\rho}(y) = m|\vec{g}|y$$



Η βαρυτική δυναμική ενέργεια οφείλεται στις ελκτικές δυνάμεις μεταξύ ενός σώματος και της Γης, οι οποίες εμφανίζονται ως ζεύγος δράσης-αντίδρασης. Γι΄ αυτό, **η βαρυτική δυναμική ενέργεια συνδέεται με το σύστημα σώματος-Γης**.

Αργότερα θα μελετήσουμε και άλλες μορφές δυναμικής ενέργειας. Γενικά, κάθε μορφή δυναμικής ενέργειας οφείλεται σε κάποια αλληλεπίδραση μεταξύ σωμάτων. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, οι δυνάμεις μεταξύ σωμάτων εμφανίζονται κατά ζεύγη δράσης-αντίδρασης. Γι αυτό κάθε μορφή δυναμικής ενέργειας *δεν συνδέεται με ένα σώμα, αλλά με ένα σύστημα σωμάτων που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.*

Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας για την περίπτωση Σώματος που κινείται υπό την Επίδραση του Βάρους του

Σύμφωνα με τα πιο πάνω, ένα σώμα που βρίσκεται σε κάποιο ύψος y από την επιφάνεια της Γής και κινείται υπό την επίδραση του βάρους του, συνδέεται με δύο φυσικά μεγέθη: την κινητική ενέργεια $E_{\kappa\iota\nu}$ και τη βαρυτική δυναμική ενέργεια $U_{\beta\alpha\rho}$. **Το άθροισμα της κινητικής ενέργειας και της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ορίζεται ως η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος-Γης**. Επειδή η Γη έχει τεράστια αδράνεια, η μεταβολή στην κινητική της κατάσταση λόγω της βαρυτικής έλξης που υφίσταται από το σώμα είναι αμελητέα. Γι' αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η Γη είναι ακίνητη και έχει μηδενική κινητική ενέργεια.
Από τον ορισμό της μηχανικής ενέργειας προκύπτει:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + m|\vec{g}|y_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + m|\vec{g}|y_2 \Rightarrow E_{\mu\eta\chi}^{\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi}^{\tau\varepsilon\lambda}$$

Συμπεραίνουμε:

Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας

Εάν η μοναδική δύναμη που ασκείται σε ένα κινούμενο σώμα είναι το βάρος του, τότε

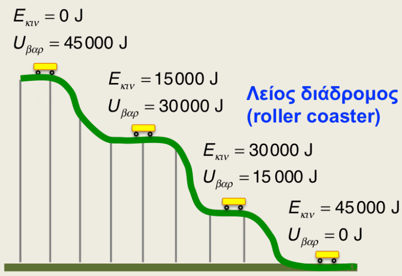
$$E_{\mu\eta\chi} = E_{\kappa\iota\nu} + U_{\beta\alpha\rho} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + m|\vec{g}|y.$$

$$E_{\mu\eta\chi}^{\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi}^{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \Delta E_{\mu\eta\chi} = 0 \Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu} = -\Delta U_{\beta\alpha\rho}$$

Η Μηχανική Ενέργεια του Συστήματος Σώματος-Γης Διατηρείται Σταθερή.

Σημείωση προς τους Εκπαιδευτικούς: Η απόδειξη στη γενικότερη περίπτωση καμπυλόγραμμης κίνησης (π.χ. στην περίπτωση των βολών) θα γίνει στην επόμενη τάξη, Όμως, μπορεί να αναφερθεί εδώ, χωρίς απόδειξη, ότι η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας ισχύει γενικά για καμπυλόγραμμες κινήσεις, και να παρουσιασθούν κάποια παραδείγματα, όπως το «roller coaster».

Σημείωση: Η προηγούμενη απόδειξη διατήρησης της μηχανικής ενέργειας του συστήματος σώματος-Γης θεώρησε κατακόρυφη κίνηση του σώματος υπό την επίδραση του βάρους του. **Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας** ενός σώματος, που κινείται μόνο υπό την επίδραση του βάρους του, **ισχύει γενικά και για καμπυλόγραμμες κινήσεις**.



Σύνδεση Έργου Βάρους – Βαρυτικής Δυναμικής Ενέργειας

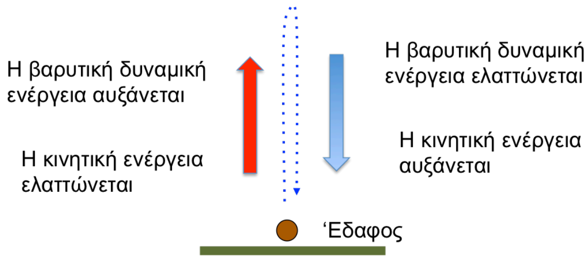
Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας επιτρέπει να υπολογίσουμε το έργο του βάρους ενός σώματος κατά τη μετατόπισή του από μια αρχική θέση ύψους y_1 σε τελική θέση ύψους y_2.

Το έργο του βάρους ενός σώματος ισούται με την **αρνητική** μεταβολή στη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος-Γης.

$$W_{y_1 \to y_2} = U_{βαρ}(y_1) - U_{βαρ}(y_2) = -\Delta U_{βαρ}$$

Όταν το έργο του βάρους είναι θετικό (το σώμα κατέρχεται), η βαρυτική δυναμική ενέργεια ελαττώνεται. *Εάν η μόνη δύναμη που κινεί το σώμα είναι το βάρος του, η βαρυτική δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια:*

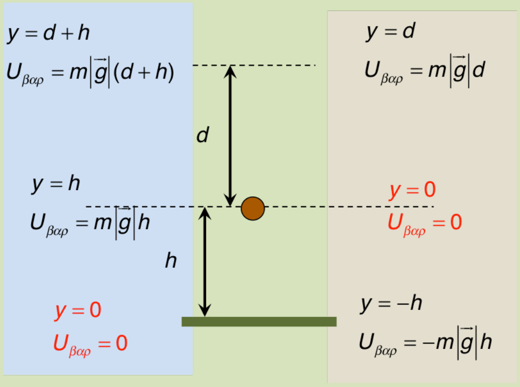
$$\Delta E_{κιν} = -\Delta U_{βαρ} > 0$$



Αντιστρόφως, όταν ένα σώμα ανέρχεται, η βαρυτική δυναμική ενέργεια αυξάνεται, επειδή αυξάνεται το ύψος από την επιφάνεια της Γης. Σε αυτή την περίπτωση *η κινητική ενέργεια του σώματος μετατρέπεται σε βαρυτική δυναμική ενέργεια:*

$$\Delta E_{κιν} = -\Delta U_{βαρ} < 0$$

Επισήμανση: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση ορισμού $U_{βαρ} = m|\vec{g}|y$, ακόμη κι εάν το ύψος αναφοράς $y=0$ δεν επιλεγεί στην επιφάνεια του εδάφους, επειδή η *διαφορά δυναμικής ενέργειας μεταξύ δύο σημείων θα παραμείνει ίδια*. Συνεπώς, το έργο του βάρους θα ισούται πάλι με τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας, και θα ισχύει πάλι η αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (εάν η μοναδική δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι το βάρος του).

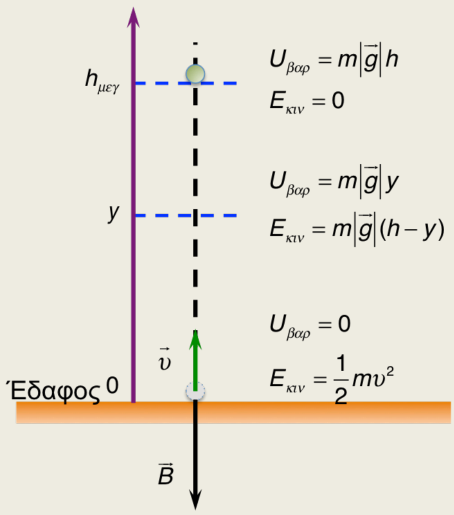


Αριστερά: Το ύψος αναφοράς $y=0$ είναι στο έδαφος. **Δεξιά:** Το ύψος αναφοράς είναι στη θέση του σώματος.

Παράδειγμα: Εφαρμογή της Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας στην Μελέτη της Κατακόρυφης Βολής

Α. Ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ από το έδαφος, και κινείται υπό την επίδραση μόνο του βάρους του.

(i) Εφαρμόζοντας την αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, θα υπολογίσουμε το μέγιστο ύψος $h_{μεγ}$, στο οποίο θα φθάσει το σώμα. Επιλέγουμε κάποιο ύψος στο οποίο η μηχανική ενέργεια είναι γνωστή, και απαιτούμε η μηχανική ενέργεια στο μέγιστο ύψος $h_{μεγ}$ (όπου η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται στιγμιαία) να έχει την ίδια τιμή.



Στο έδαφος, όπου $y=0$, η δυναμική ενέργεια μηδενίζεται, και η μηχανική ενέργεια ταυτίζεται με την κινητική ενέργεια. Συνεπώς:

$$E_{κιν}(h_{μεγ}) + U_{βαρ}(h_{μεγ}) = E_{κιν}(0) + U_{βαρ}(0) \Rightarrow 0 + m|\vec{g}|h_{μεγ} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0 \Rightarrow h_{μεγ} = \upsilon^2/(2|\vec{g}|)$$

Το αποτέλεσμα για το μέγιστο ύψος συμπίπτει με αυτό στο οποίο είχαμε καταλήξει από τις εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.

(ii) Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, μπορούμε να βρούμε μια έκφραση για την κινητική ενέργεια του σώματος σαν συνάρτηση του ύψους του y από το έδαφος.

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια σε ύψος y είναι ίση με $U_{βαρ} = m|\vec{g}|y$. Εφαρμόζοντας την αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, καταλήγουμε στη σχέση:

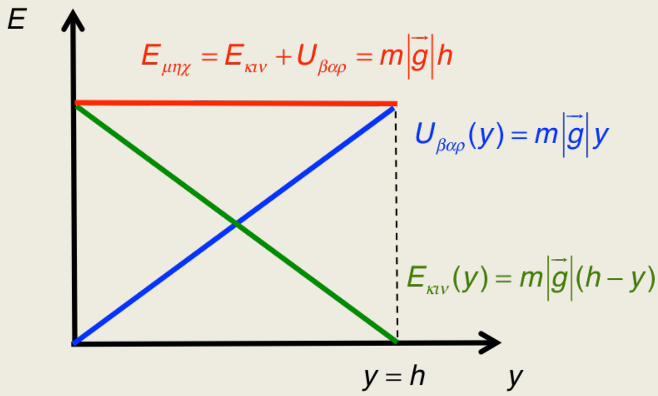
$$E_{κιν}(y) + U_{βαρ}(y) = E_{κιν}(0) + U_{βαρ}(0) \Rightarrow E_{κιν}(y) + m|\vec{g}|y = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow E_{κιν}(y) = m|\vec{g}|(h_{μεγ} - y)$$

Στην πιο πάνω σχέση χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα $h_{μεγ} = \upsilon^2 / (2|\vec{g}|) \Rightarrow \upsilon^2 = 2h_{μεγ}|\vec{g}|$.

(iii) Στο ίδιο διάγραμμα σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, της κινητικής ενέργειας και της μηχανικής ενέργειας του συστήματος σώματος-Γης σαν συνάρτηση του ύψους του από το έδαφος κατά τη διάρκεια της ανόδου του.

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα.

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια και η κινητική ενέργεια μεταβάλλονται γραμμικά με το ύψος, αλλά το άθροισμά τους (που είναι ίσο με τη μηχανική ενέργεια) παραμένει σταθερό.



(iv) Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του σώματος κατά την κάθοδό του. Εφαρμόζοντας την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, παίρνουμε:

$$E_{κιν}(h) + U_{βαρ}(h) = E_{κιν}(y) + U_{βαρ}(y) \Rightarrow 0 + m|\vec{g}|h = E_{κιν}(y) + m|\vec{g}|y \Rightarrow E_{κιν}(y) = m|\vec{g}|(h-y)$$

$$\upsilon^2 = 2|\vec{g}|y \Rightarrow \upsilon = -\sqrt{2|\vec{g}|y}$$

Παρατηρούμε ότι **η κινητική ενέργεια του σώματος εξαρτάται με τον ίδιο τρόπο από το ύψος y κατά την κάθοδο και την άνοδο**.

Δηλαδή, σε ένα συγκεκριμένο ύψος, η ταχύτητα του σώματος έχει το ίδιο μέτρο κατά την άνοδο και κάθοδό του.

Β. Κατά την κίνηση του σώματος πραγματοποιούνται οι εξής μετατροπές κινητικής και βαρυτικής δυναμικής ενέργειας:

Κατά την κάθοδο της σφαίρας η βαρυτική δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια. Κατά την άνοδο της σφαίρας, η κινητική ενέργεια της σφαίρας μετατρέπεται σε βαρυτική δυναμική ενέργεια. Και στις δύο περιπτώσεις, η μηχανική ενέργεια του συστήματος σφαίρας-Γης παραμένει σταθερή.

Σημείωση προς τους Εκπαιδευτικούς: Η επόμενη παρατήρηση είναι σημαντική και θεωρούμε ότι είναι χρήσιμο να τονισθεί στους μαθητές/ριες.

Τονίζουμε ότι η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας καθιστά εφικτό τον υπολογισμό της τελικής ταχύτητας ενός σώματος από την αρχική ταχύτητά του και τη θέση του, χωρίς να χρειάζεται να λύσουμε τις εξισώσεις του Νεύτωνα για το σώμα, και χωρίς να μας απασχολεί η κινητική του κατάσταση σε ενδιάμεσες θέσεις. Η έννοια της ενέργειας είναι δηλαδή ένα συμπληρωματικό εργαλείο για τη μελέτη της κίνησης σωμάτων. Αυτό αναδεικνύεται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

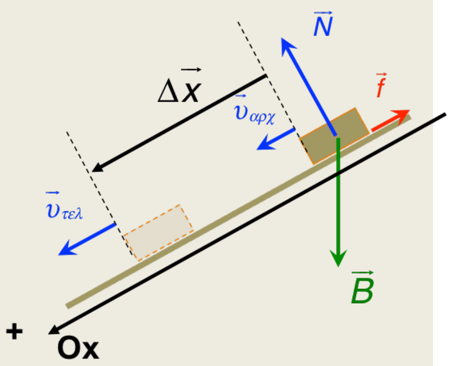
Σημείωση προς τους Εκπαιδευτικούς: Η επόμενη ενότητα παρουσιάζει παραδείγματα στα οποία δεν διατηρείται η μηχανική ενέργεια. Είναι σημαντικό οι μαθητές να κατανοήσουν ότι η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται πάντοτε. (Στις τελευταίες ενότητες, θα μάθουν ότι **ακόμη κι αν δεν διατηρείται η μηχανική ενέργεια, διατηρείται η συνολική ενέργεια**).

Η Μηχανική Ενέργεια του συστήματος σώματος-Γης δεν διατηρείται όταν ασκούνται επιπρόσθετες δυνάμεις που παράγουν ή καταναλώνουν μη μηδενικό συνολικό έργο.

Στα προηγούμενα δείξαμε ότι εάν η μοναδική δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα είναι το βάρος του, η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος-Γης παραμένει σταθερή. Εάν στο σώμα ασκούνται επιπρόσθετες δυνάμεις με μη μηδενικό συνολικό έργο, η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος-Γης δεν διατηρείται. Παραδείγματα επιπρόσθετων δυνάμεων είναι η αντίσταση από τον αέρα, η τριβή από το έδαφος, ή μια τάση σχοινιού. Μελετούμε σχετικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1. Η Δύναμη Τριβής

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται ένα σώμα που κατεβαίνει σε ένα τραχύ κεκλιμένο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται το βάρος του $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το επίπεδο και η δύναμη κινητικής τριβής $\vec{f}$ από το επίπεδο, η οποία είναι αντίρροπη προς τη μετατόπιση. Το σώμα μετατοπίζεται κατά $\Delta\vec{x}$. Επιλέγουμε τον άξονα Ox παράλληλο με την μετατόπιση, και τη θετική φορά να συμπίπτει με αυτή της μετατόπισης (σημειώνεται με «+» στο σχήμα). Η τριβή $\vec{f}$ έχει αρνητική αλγεβρική τιμή ($f < 0$).



Το έργο του βάρους $\vec{B}$ ισούται με την αρνητική μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος σώματος-Γης: $W_{\vec{B}} = -\Delta U_{βαρ}$. Εφαρμόζοντας τη σχέση έργου-κινητικής ενέργειας για το σώμα, προκύπτει:

$$\Delta E_{\kappa\iota\nu} = W_{\vec{B}} + W_{\vec{f}} + W_{\vec{N}} \Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu} = -\Delta U_{\beta\alpha\rho} + W_{\vec{f}} + W_{\vec{N}} \Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu} + \Delta U_{\beta\alpha\rho} = W_{\vec{f}} + W_{\vec{N}} \Rightarrow$$
$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = W_{\vec{f}} + W_{\vec{N}}$$

Να παρατηρήσετε ότι **η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος-Γης δεν διατηρείται.** Αυτό οφείλεται στο ότι στο σώμα ασκούνται εκτός από το βάρος του και οι επιπρόσθετες δυνάμεις $\vec{f}$ και $\vec{N}$. **Το συνολικό έργο των επιπρόσθετων αυτών δυνάμεων ισούται με τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος σώματος-Γης.**

Στο παράδειγμα που μελετούμε, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ δεν παράγει έργο επειδή είναι κάθετη στη μετατόπιση του σώματος. Η τριβή $\vec{f}$ είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση και καταναλώνει έργο $W_{\vec{f}} = f\Delta x < 0$. Τελικά:

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = W_{\vec{f}} = f\Delta x < 0$$

Επειδή το έργο της τριβής είναι αρνητικό, η μηχανική ενέργεια ελαττώνεται.

Καταλήγουμε στο πιο κάτω γενικό συμπέρασμα:

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος-Γης δεν διατηρείται όταν στο σώμα ασκούνται εκτός από το βάρος του και επιπρόσθετες δυνάμεις με μη μηδενικό έργο. Η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας ισούται με το συνολικό έργο των δυνάμεων αυτών:

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = \sum W_F$$

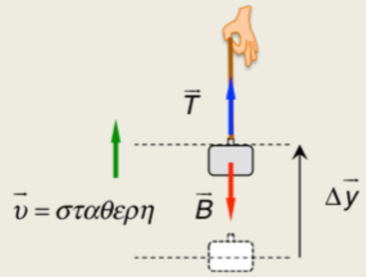
Σημείωση προς τους εκπαιδευτικούς: Στο κείμενο δεν έχουμε κάνει σαφές ότι η δυναμική ενέργεια ορίζεται μόνο για διατηρητικές δυνάμεις. **Θεωρούμε ότι η επεξήγηση αυτού του σημείου δεν είναι αναγκαία σε αυτό το επίπεδο.**

Στην επόμενη σημείωση αναφέρουμε ότι η τριβή και η αντίσταση του αέρα είναι παραδείγματα μη διατηρητικών δυνάμεων. Δεν χρειάζεται να αναφερθεί ότι οι δυνάμεις αυτές δεν συνδέονται με κάποια συνάρτηση δυναμικής ενέργειας, επειδή δεν είναι διατηρητικές.

Σημείωση: Η τριβή και η αντίσταση του αέρα δεν είναι διατηρητικές δυνάμεις. Όταν ένα σώμα κινείται σε ένα τραχύ δάπεδο, η κινητική τριβή που ασκείται στο σώμα από το δάπεδο είναι συνεχώς αντίρροπη με την ταχύτητα του σώματος, και το έργο της κινητικής τριβής είναι πάντα αρνητικό. Το συνολικό έργο της τριβής σε μια κλειστή διαδρομή δεν είναι μηδενικό.

Παράδειγμα 2. Σώμα που ανυψώνεται με Σταθερή Ταχύτητα.

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται ένα σώμα, το οποίο ανυψώνεται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ υπό την επίδραση του βάρους του $\vec{B}$ και της τάσης $\vec{T}$ του σχοινιού. Επειδή η ταχύτητα είναι σταθερή, η συνισταμένη δύναμη στο σώμα είναι ίση με μηδέν. Από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας συμπεραίνουμε:



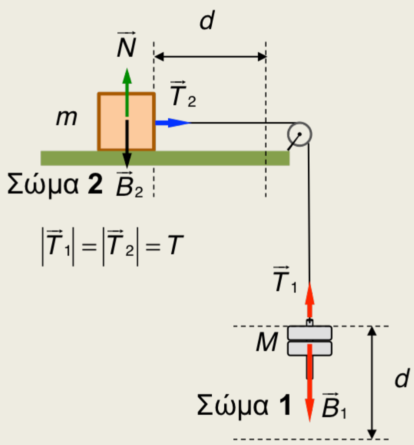
$$W_{\vec{B}} + W_{\vec{T}} = \Delta E_{κιν} \Rightarrow -\Delta U_{βαρ} + W_{\vec{T}} = \Delta E_{κιν} \Rightarrow$$
$$W_{\vec{T}} = \Delta U_{βαρ} + \Delta E_{κιν} \Rightarrow W_{\vec{T}} = \Delta E_{μηχ}$$

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος-Γης δεν διατηρείται επειδή στο σώμα **δεν ασκείται μόνο το βάρος του,** αλλά και η τάση $\vec{T}$ του σχοινιού. Η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας ισούται με το (θετικό) έργο της επιπρόσθετης δύναμης $\vec{T}$ από το σχοινί.

Παράδειγμα 3. Στο Κεφάλαιο 3 χρησιμοποιήσαμε τη διάταξη του πιο κάτω σχήματος για να μελετήσουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. **Μελετούμε εδώ την ίδια διάταξη, χρησιμοποιώντας το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας.**

Τα σώματα 1 και 2 έχουν μάζες M και m και συνδέονται μέσω τροχαλίας με αβαρές σχοινί. Υποθέτουμε ότι το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο και δεν εξασκεί τριβή, και ότι η τροχαλία έχει αμελητέα μάζα και οι τριβές με τον άξονά της μπορούν να αγνοηθούν.

Το σώμα 1 κινείται υπό την επίδραση του βάρους του $\vec{B}_1$ και της δύναμης $\vec{T}_1$ από το σχοινί. Το σώμα 2 κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{T}_2$ από το σχοινί. Όπως είχαμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 3, οι δυνάμεις $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ έχουν ίσα μέτρα: $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$.



Στο σώμα 2 ασκούνται επίσης το βάρος του $\vec{B}_2$ και μια κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το επίπεδο, οι οποίες έχουν μηδενική συνισταμένη.

Θα υποθέσουμε ότι τα σώματα αφήνονται από ηρεμία και μετακινούνται σε απόσταση d.

1) Κίνηση του σώματος 1. Σύμφωνα με το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας:

$$W_{\vec{B}_1} + W_{\vec{T}_1} = \Delta E_{κιν,1}$$

Το έργο του βάρους $\vec{B}_1$ και η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος σώματος 1-Γης συνδέονται με τη σχέση $W_{\vec{B}_1} = -\Delta U_{\beta\alpha\rho,1}$. Η δύναμη $\vec{T}_1$ είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση και το έργο της ισούται με $W_{\vec{T}_1} = -Td$. Έτσι, παίρνουμε:

$$W_{\vec{B}_1} + W_{\vec{T}_1} = \Delta E_{\kappa\iota\nu,1} \Rightarrow -\Delta U_{\beta\alpha\rho,1} - Td = \Delta E_{\kappa\iota\nu,1} \Rightarrow \Delta E_{\mu\eta\chi,1} = -Td$$

Παρατηρείστε ότι **η μηχανική ενέργεια $E_{\mu\eta\chi,1}$ του συστήματος σώμα 1-Γη δεν διατηρείται.** Αυτό οφείλεται στο ότι στο σώμα ασκείται εκτός από το βάρος του και η επιπρόσθετη δύναμη $\vec{T}_1$ από το σχοινί, η οποία παράγει μη μηδενικό έργο. Η μεταβολή στη μηχανική ενέργεια του συστήματος σώμα 1-Γη ισούται με το έργο της δύναμης $\vec{T}_1$.

Κίνηση του σώματος 2: Το σώμα 2 μετακινείται προς τα δεξιά κατά την ίδια απόσταση d. Η δύναμη $\vec{T}_2$ είναι ομόρροπη με τη μετατόπιση του σώματος 2, και το έργο της ισούται με $W_{\vec{T}_2} = +Td$. Οι δυνάμεις $\vec{B}_2$ και $\vec{N}$ παράγουν μηδενικό έργο, επειδή είναι κάθετες στη μετατόπιση του σώματος 2. Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας, παίρνουμε:

$$\Delta E_{\kappa\iota\nu,2} = W_{\vec{B}_2} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{T}_2} \Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu,2} = 0 + 0 + Td \Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu,2} + \underbrace{\Delta U_{\beta\alpha\rho,2}}_{=0} = Td \Rightarrow \Delta E_{\mu\eta\chi,2} = Td$$

Στην προηγούμενη σχέση χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος 2-Γης παραμένει σταθερή. Παρατηρείστε ότι **η μηχανική ενέργεια $E_{\mu\eta\chi,1}$ του συστήματος σώμα 2-Γη δεν διατηρείται.** Εκτός από το βάρος του, στο σώμα 2 ασκούνται και οι επιπρόσθετες δυνάμεις $\vec{T}_2$ (από το σχοινί) και $\vec{N}$ (από το επίπεδο). Η δύναμη $\vec{N}$ δεν παράγει έργο, αλλά η $\vec{T}_2$ παράγει μη μηδενικό έργο. Η μεταβολή στη μηχανική ενέργεια του συστήματος σώμα 2-Γη ισούται με το έργο της δύναμης $\vec{T}_2$.

Συνολικό σύστημα σώμα 1-σώμα 2-Γη: Από τις τελευταίες δύο σχέσεις, προκύπτει:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta E_{\mu\eta\chi,1} = -Td \\ \Delta E_{\mu\eta\chi,2} = Td \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta E_{\mu\eta\chi,1} + \Delta E_{\mu\eta\chi,2} = 0$$

Η συνολική μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος 1-σώματος 2-Γης διατηρείται, επειδή **το συνολικό έργο των επιπρόσθετων δυνάμεων $\vec{N}$, $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ τυχαίνει να είναι ίσο με μηδέν**. Από αυτή τη διατήρηση μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα των δύο σωμάτων. Εάν ξεκινούν από ηρεμία και μετατοπίζονται κατά d, προκύπτει:

$$\Delta E_{\mu\eta\chi,1} + \Delta E_{\mu\eta\chi,2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon^2 - M|\vec{g}|d + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(M+m)\upsilon^2 = M|\vec{g}|d \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{2M}{M+m}|\vec{g}|d$$

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα με την ένδειξη «Σωστό/Λάθος» (Σ/Λ).

	Σ/Λ
Το έργο του βάρους είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή.	
Το έργο του βάρους είναι μηδενικό μόνο όταν η μετατόπιση του σώματος είναι οριζόντια.	
Το έργο του βάρους είναι πάντα αρνητικό όταν το τελικό ύψος είναι μεγαλύτερο από το αρχικό.	
Η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος σώματος-Γης παραμένει αμετάβλητη όταν το σώμα μετατοπίζεται οριζόντια.	
Η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος σώματος-Γης αυξάνεται όταν το σώμα ανέρχεται.	
Ένα σώμα κινείται μόνο υπό την επίδραση του βάρους του. Όταν το σώμα κατέρχεται, η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος-Γης μετατρέπεται σε κινητική.	
Ένα σώμα κινείται κατακόρυφα μόνο υπό την επίδραση του βάρους του. Στο μέγιστο ύψος μηδενίζεται η κινητική ενέργεια.	
Ένα σώμα ανέρχεται κατακόρυφα μόνο υπό την επίδραση του βάρους του. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος-Γης αυξάνεται.	
Ένα σώμα κατέρχεται κατακόρυφα υπό την επίδραση του βάρους του και της αντίστασης από τον αέρα. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος-Γης ελαττώνεται.	
Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, υπό την επίδραση του βάρους του και της αντίστασης του αέρα, με αρχική ταχύτητα υ_0 προς τα επάνω. Όταν επιστρέψει στο αρχικό ύψος, η κινητική του ενέργεια είναι ίση με την αρχική.	
Οι ράμπες αναπήρων κατασκευάζονται με μικρή κλίση για να ελαττώνεται το έργο του βάρους κατά την άνοδο σε συγκεκριμένο ύψος από το έδαφος.	

Ασκήσεις

1. Μία μικρή μεταλλική σφαίρα μάζας 0,35 kg εκτοξεύεται από την επιφάνεια του εδάφους με αρχική κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{\alpha\rho\chi} = 10\ \mathrm{m/s}$. Να θεωρήσετε ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

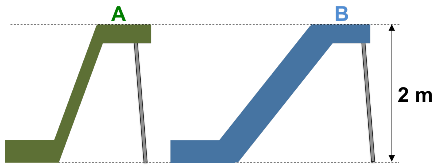
Α. Να υπολογίσετε την αρχική κινητική και δυναμική ενέργεια της σφαίρας.

Β. Χρησιμοποιώντας την αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φθάσει η σφαίρα. Εξαρτάται το ύψος αυτό από τη μάζα της μπάλας;

Γ. Να υπολογίσετε την ταχύτητα της σφαίρας όταν επιστρέψει στο έδαφος.

2. Μια παιδική χαρά είναι εξοπλισμένη με δύο εντελώς *λείες* τσουλήθρες Α και Β, που απεικονίζονται στο πιο κάτω σχήμα.

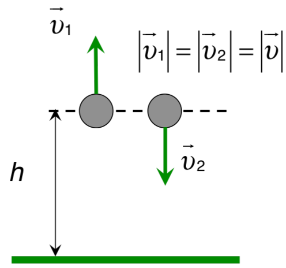
Δύο παιδιά με μάζες 15 kg και 20 kg αντίστοιχα, χρησιμοποιούν τις τσουλήθρες. Να υποθέσετε ότι τα παιδιά μπορούν να περιγραφούν σαν υλικά σημεία, και ξεκινούν από την κορυφή της κάθε τσουλήθρας με μηδενική ταχύτητα. Χρησιμοποιώντας την διατήρηση μηχανικής ενέργειας, να υπολογίσετε:



Α. Το έργο του βάρους των παιδιών κατά την κάθοδό τους.
Β. Την ταχύτητα με την οποία θα φθάσουν στο έδαφος.
Γ. Την κινητική ενέργεια κάθε παιδιού όταν φθάσει στο έδαφος.

3. Δύο μπάλες ξεκινούν από το ίδιο ύψος h από την επιφάνεια της Γης με αντίθετες αρχικές κατακόρυφες ταχύτητες μέτρου υ. Να θεωρήσετε ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Χρησιμοποιώντας την αρχή της διατήρησης μηχανικής ενέργειας, να υπολογίσετε τις ταχύτητες που έχουν οι μπάλες όταν φθάνουν στη Γη.



4. Μια μπάλα καλαθόσφαιρας, μάζας 500 g, ρίχνεται κατακόρυφα προς τα επάνω από ύψος 1 m, με αρχική ταχύτητα μέτρου 8 m/s. και φθάνει σε μέγιστο ύψος 3 m από το έδαφος.

Α. Να υπολογίσετε την αρχική μηχανική ενέργεια της μπάλας και την μηχανική ενέργεια στο μέγιστο ύψος της.

Β. Ξεκινώντας από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για τη μπάλα, να βρείτε μια σχέση που να συνδέει τη μεταβολή μηχανικής ενέργειας της μπάλας με το έργο της αντίστασης του αέρα. Να υπολογίσετε το έργο της αντίστασης του αέρα.

5. Στις 14 Οκτωβρίου 2012, ο Felix Baumgartner έσπασε το παγκόσμιο ρεκόρ πτώσης, κάνοντας άλμα από ύψος 38 969 m. Η συνολική μάζα του (μαζί με την προστατευτική στολή) ήταν 118 kg.

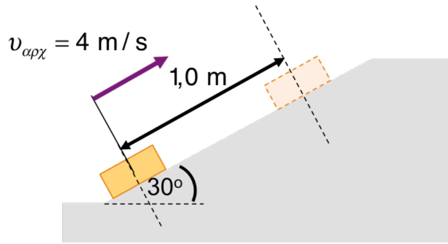
Α. Να υπολογίσετε με τι ταχύτητα θα έφθανε στο έδαφος, αν δεν υπήρχε αντίσταση του αέρα. (Στην πραγματικότητα, η μέγιστη ταχύτητα που ανέπτυξε ήταν 1358 km/h).

Β. Εάν η ταχύτητα με την οποία έφθασε στο έδαφος ήταν 8 m/s, να υπολογίσετε το συνολικό έργο της αντίστασης του αέρα.

6. Ένα σώμα μάζας 3,0 kg σπρώχνεται προς τα επάνω κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου, με αρχική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{αρχ} = 4\ m/s$. Κατά τη διάρκεια της κίνησής του, στο σώμα ασκείται μια σταθερή τριβή ολίσθησης από το επίπεδο. Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται αφού διατρέξει 1,0 m κατά μήκος του επιπέδου.

Α. Ξεκινώντας από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για το σώμα, να βρείτε μια σχέση που να συνδέει το έργο της τριβής ολίσθησης και τη μεταβολή μηχανικής ενέργειας του συστήματος σώματος-Γης.

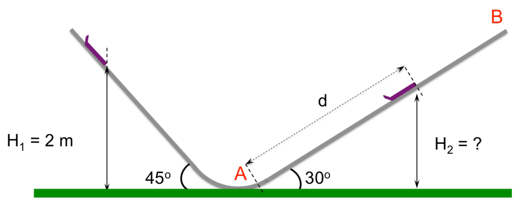
Β. Να υπολογίσετε το έργο της τριβής κατά την άνοδο του σώματος.



Γ. Να προσδιορίσετε την ταχύτητα του σώματος όταν επιστρέψει στο σημείο Α. Να θεωρήσετε ότι η κινητική τριβή που υφίσταται το σώμα έχει το ίδιο μέτρο κατά την άνοδο και κάθοδο του σώματος.

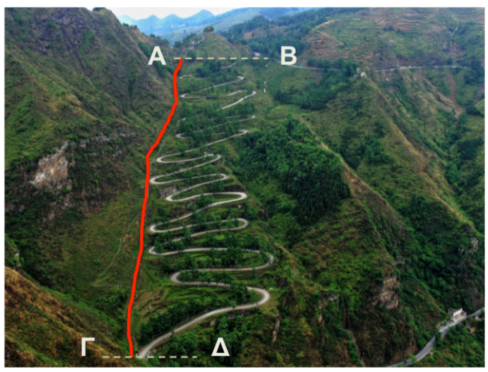
7. Μια σανίδα χιονιού μάζας (snowboard) $m = 250$ g αφήνεται από την ηρεμία να κινηθεί κατά μήκος της πίστας του πιο κάτω σχήματος.

Α. Εάν η τριβή από την πίστα μπορεί να αγνοηθεί, να χρησιμοποιήσετε την αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος H_2, στο οποίο θα φθάσει η σανίδα στην πίστα ΑΒ.



Β. Εάν κατά την κίνηση στην πίστα ΑΒ ασκείται στη σανίδα μια σταθερή δύναμη κινητικής τριβής με μέτρο $T = (m|\vec{g}|)/2$, να υπολογίσετε (i) το ύψος στο οποίο θα φθάσει η σανίδα, (ii) το έργο της τριβής, και (iii) τη μεταβολή στη μηχανική ενέργεια. (iv) Να εξηγήσετε γιατί δεν διατηρείται η μηχανική ενέργεια σε αυτή την περίπτωση.

8. Ο ελικοειδής δρόμος «24-ζιγκ» της εικόνας είναι κατασκευασμένος στην Κίνα και φέρει αυτή την ονομασία από τις 24 στροφές («ζιγκ-ζαγκ») που τον αποτελούν. Η υψομετρική διαφορά του τέλους του δρόμου (ευθεία ΑΒ) από την αρχή του (ευθεία ΓΔ) είναι 260 m, και το μήκος του δρόμου είναι περίπου 4 km. Το σχεδόν ευθύγραμμο μονοπάτι (κόκκινη γραμμή) ξεκινά και καταλήγει στο ίδιο υψόμετρο με τον ελικοειδή δρόμο, και έχει μήκος περίπου 300 m.



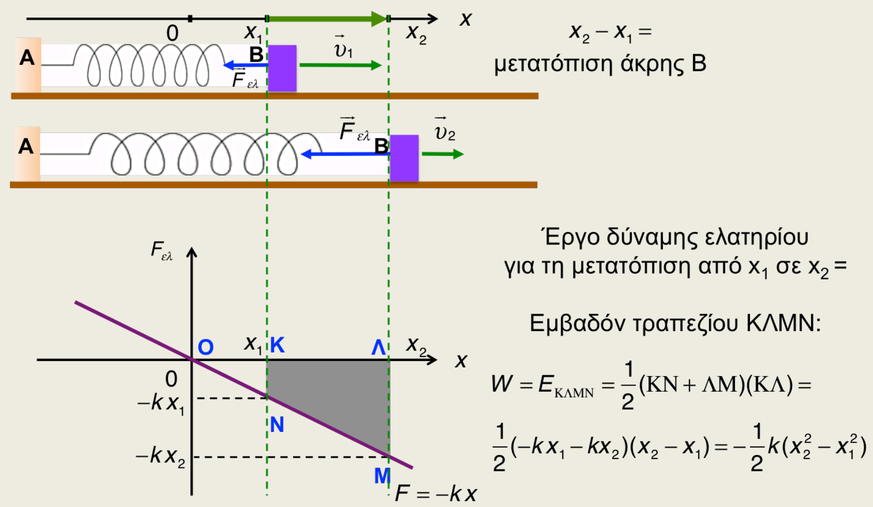
(i) Ποιόν από τους δύο δρόμους θα ακολουθούσατε προκειμένου το βάρος σας να καταναλώσει λιγότερο έργο;

(ii) Γιατί στις απότομες πλαγιές των βουνών κατασκευάζονται ελικοειδείς δρόμοι σαν αυτόν της εικόνας, αντί για ευθύγραμμους δρόμους με κατεύθυνση προς την κορυφή;

Σημείωση προς τους εκπαιδευτικούς: Η απόδειξη του έργου δύναμης ελατηρίου γίνεται γραφικά, και προϋποθέτει ότι έχει συζητηθεί ο γραφικός προσδιορισμός του έργου μεταβαλλόμενης δύναμης.

Έργο Δύναμης Ελατηρίου

Στην Εικόνα 4-8 απεικονίζεται ένα σώμα μάζας m, το οποίο είναι στερεωμένο στην ελεύθερη άκρη ενός οριζόντιου ελατηρίου αμελητέας μάζας, και κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο.



Εικόνα 4-8. Το σώμα είναι προσδεδεμένο στην ελεύθερη άκρη Β του ελατηρίου, και μετακινείται από τη θέση x_1 στη θέση x_2. Η γραφική παράσταση απεικονίζει τη δύναμη από το ελατήριο στο σώμα σαν συνάρτηση της θέσης της άκρης Β. Το εμβαδόν του τραπεζίου ΚΛΜΝ ισούται με το έργο της δύναμης ελατηρίου για τη μετακίνηση $x_1 \to x_2$.

Η άκρη Α του ελατηρίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο τοίχο. Η άκρη Β είναι ελεύθερη να κινηθεί, και η θέση της περιγράφεται με τη βοήθεια του οριζόντιου άξονα Οx. Η τιμή $x = 0$ αντιστοιχεί στη θέση της ελεύθερης άκρης Β, όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Για θετικές τιμές της θέσης $(x > 0)$ το ελατήριο είναι επιμηκυμένο, και για αρνητικές τιμές $(x < 0)$ είναι συσπειρωμένο.

Στο σώμα ασκείται το βάρος του $\vec{B}$, μια κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το έδαφος, και η δύναμη ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$. Οι δυνάμεις $\vec{B}$ και $\vec{N}$ είναι αντίθετες (δεν συμπεριλαμβάνονται στο σχήμα). Η συνισταμένη δύναμη στο σώμα είναι η <u>δύναμη ελατηρίου</u>.
Στο κάτω μέρος της Εικόνας 4-8 απεικονίζεται η γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής $F_{ελ}$ της δύναμης ελατηρίου σαν συνάρτηση της θέσης x της ελεύθερης άκρης Β. Έστω ότι το σώμα μετατοπίζεται από την αρχική θέση x_1 στην τελική θέση x_2. Όπως αποδείξαμε προηγουμένως, το έργο της δύναμης ελατηρίου για αυτή τη μετατόπιση ισούται με το εμβαδόν της αντίστοιχης επιφάνειας κάτω από τη γραφική παράσταση, δηλαδή του τραπεζίου ΚΛΜΝ. <u>Οι πλευρές του τραπεζίου εισέρχονται με τις αλγεβρικές τους τιμές</u> στον υπολογισμό αυτού του εμβαδού:

$$W_{x_1 \to x_2} = \frac{1}{2}(-kx_1 - kx_2)(x_2 - x_1) = -\frac{1}{2}k(x_1 + x_2)(x_2 - x_1) = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

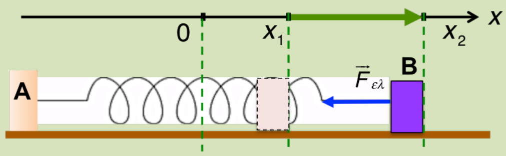
Το έργο της δύναμης ελατηρίου είναι αρνητικό εάν η τελική θέση είναι μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή από την αρχική θέση $|x_2| > |x_1|$, επειδή σε αυτή την περίπτωση η δύναμη ελατηρίου και η μετατόπιση είναι αντίρροπες.

Στην πιο πάνω σχέση, <u>το έργο της δύναμης ελατηρίου εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση του σώματος</u>. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η ίδια σχέση περιγράφει το έργο της δύναμης ελατηρίου, για οποιαδήποτε διαδρομή που ξεκινά από τη θέση x_1 και καταλήγει στη θέση x_2 (η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση).

Έργο Δύναμης Ελατηρίου για Μετακίνηση της Ελεύθερης Άκρης του από μια Αρχική Θέση x_1 σε μια Τελική Θέση x_2.

Η μορφή αυτή είναι σωστή εάν η ελεύθερη (κινούμενη) άκρη του ελατηρίου είναι στη θέση $x = 0$, όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

$$W_{x_1 \to x_2} = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$



Το έργο της δύναμης ελατηρίου εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση της ελεύθερης άκρης του ελατηρίου. **Η δύναμη ελατηρίου είναι διατηρητική.**

Σημείωση προς τους εκπαιδευτικούς: Όπως και στην περίπτωση του βάρους, χρησιμοποιούμε το έργο δύναμης ελατηρίου και το Θεώρημα Έργου-Κινητικής Ενέργειας για να δείξουμε πώς εμφανίζεται η ποσότητα $1/2kx^2$.

Δυναμική Ενέργεια Συστήματος Ελατηρίου-Σώματος

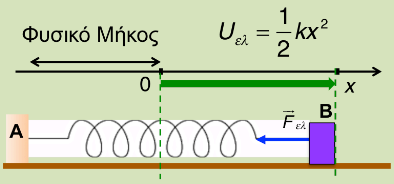
Έστω ότι το σώμα της Εικόνας 4-8 διέρχεται από τη θέση $x = x_1$ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ και από τη θέση $x = x_2$ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$. Επειδή η δύναμη ελατηρίου $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ είναι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα, από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας προκύπτει ότι το έργο της $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος. Συνεπώς:

$$W_{x_1 \to x_2} = E_{\tau\varepsilon\lambda}^{\kappa\iota\nu} - E_{\alpha\rho\chi}^{\kappa\iota\nu} \Rightarrow -\frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$

Στην τελευταία ισότητα έχει εμφανισθεί εκτός από την κινητική ενέργεια του σώματος $1/2\, m\upsilon^2$ και η ποσότητα $1/2\, kx^2$, η οποία είναι συνάρτηση της θέσης της ελεύθερης άκρης του ελατηρίου. Η ποσότητα αυτή έχει επίσης μονάδες ενέργειας $[(\mathrm{N/m})\,\mathrm{m}^2 = \mathrm{N\,m} =$ Joule].

Ονομάζουμε την ποσότητα $1/2\, kx^2$ **Δυναμική Ενέργεια του Συστήματος Ελατηρίου-Σώματος** $U_{\varepsilon\lambda}$ (ή δυναμική ενέργεια ελατηρίου).

Δυναμική Ενέργεια Συστήματος Ελατηρίου-Σώματος, όταν το μήκος του ελατηρίου διαφέρει κατά x από το φυσικό του μήκος: $U_{\varepsilon\lambda}(x) = \frac{1}{2} k\, x^2$



Η μορφή αυτή είναι σωστή εάν η ελεύθερη (κινούμενη) άκρη του ελατηρίου είναι στη θέση $x = 0$, όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

Σύνδεση Έργου Δύναμης Ελατηρίου – Δυναμικής Ενέργειας Ελατηρίου

Ο πιο πάνω ορισμός της δυναμικής ενέργειας ελατηρίου μας επιτρέπει να εκφράσουμε άμεσα το έργο δύναμης ελατηρίου, κατά τη μετατόπιση της ελεύθερης άκρης του από μια αρχική θέση x_1 σε τελική θέση x_2, χρησιμοποιώντας τη δυναμική ενέργεια ελατηρίου:

$$W_{x_1 \to x_2} = U_{\varepsilon\lambda}(x_1) - U_{\varepsilon\lambda}(x_2) = -\Delta U_{\varepsilon\lambda}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι το έργο ελατηρίου ισούται με την **αρνητική** μεταβολή στη δυναμική ενέργεια του συστήματος ελατηρίου-σώματος. Όπως δείξαμε πριν, παρόμοια σχέση συνδέει το έργο του βάρους με τη μεταβολή στη βαρυτική δυναμική ενέργεια.

Σημείωση προς τους εκπαιδευτικούς: Το οριζόντιο ελατήριο αποτελεί το πιο απλό παράδειγμα εφαρμογής της δυναμικής ενέργειας ελατηρίου σε προβλήματα κίνησης. **Δεν χρειάζεται να γίνει αναφορά σε ταλαντωτική κίνηση**, αλλά είναι σημαντικό να κατανοήσουν οι μαθητές/ριες ότι με τη βοήθεια της διατήρησης μηχανικής ενέργειας μπορούν να επιλύσουν τέτοια προβλήματα, χωρίς χρήση του δευτέρου νόμου του Νεύτωνα. Η μελέτη του κατακόρυφου ελατηρίου περιλαμβάνει δύο είδη δυναμικής ενέργειας (βαρυτική/ελατηρίου), και θα γίνει σε μεταγενέστερη τάξη.

Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας για την περίπτωση Σώματος Προσδεδεμένου σε Οριζόντιο Ελατήριο

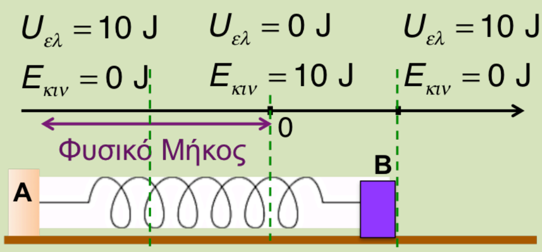
Στο παράδειγμα της Εικόνας 4-8, το σώμα κινείται σε οριζόντια διεύθυνση υπό την επίδραση της δύναμης αβαρούς ελατηρίου. **Το άθροισμα της κινητικής ενέργειας του σώματος και της δυναμικής ενέργειας ελατηρίου είναι η μηχανική ενέργεια** του συστήματος ελατηρίου-σώματος. (Επειδή θεωρούμε ότι το ελατήριο έχει αμελητέα μάζα, η κινητική ενέργεια του ελατηρίου είναι συνεχώς ίση με μηδέν).

Μηχανική Ενέργεια Συστήματος Ελατηρίου-Σώματος = Κινητική Ενέργεια + Δυναμική Ενέργεια

$$E_{\mu\eta\chi} = E_{\kappa\iota\nu} + U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Εάν η μοναδική δύναμη που κινεί ένα σώμα συνδεδεμένο με ελατήριο είναι η δύναμη ελατηρίου, **η μηχανική ενέργεια του συστήματος Ελατηρίου-Σώματος παραμένει σταθερή** κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος.

$$E_{\mu\eta\chi}^{\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi}^{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \Delta E_{\mu\eta\chi} = 0 \Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu} = -\Delta U_{\varepsilon\lambda}$$



Όταν το σώμα κινείται έτσι ώστε το ελατήριο να παραμορφώνεται, η δύναμη από το ελατήριο στο σώμα καταναλώνει έργο επειδή είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση του σώματος. Σε αυτή την περίπτωση, η δυναμική ενέργεια ελατηρίου αυξάνεται επειδή αυξάνεται η απόλυτη τιμή της θέσης *x*. *Εάν η μόνη δύναμη που κινεί το σώμα είναι η δύναμη ελατηρίου, η κινητική ενέργεια μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια ελατηρίου-σώματος* ($\Delta E_{\kappa\iota\nu} = -\Delta U_{\varepsilon\lambda} < 0$).

Αντίθετα, όταν το σώμα κινείται έτσι ώστε το ελατήριο να επανακτά το φυσικό του μήκος, η δύναμη ελατηρίου παράγει έργο. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου ελαττώνεται επειδή ελαττώνεται η απόλυτη τιμή της θέσης *x*. *Εάν η μόνη δύναμη που κινεί το σώμα είναι η δύναμη ελατηρίου, η δυναμική ενέργεια ελατηρίου μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του σώματος:* ($\Delta U_{\varepsilon\lambda} = -\Delta E_{\kappa\iota\nu} < 0$).

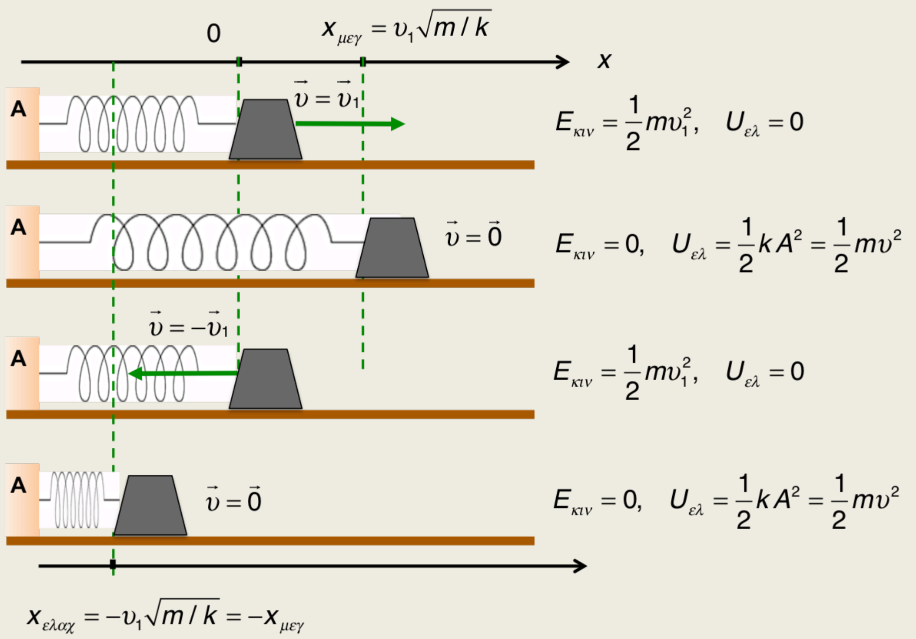
Παράδειγμα: Υπολογισμός της Ταχύτητας Σώματος που συνδέεται με Οριζόντιο Ελατήριο.

Ένα σώμα είναι συνδεδεμένο με οριζόντιο αβαρές ελατήριο και εφάπτεται σε οριζόντιο λείο τραπέζι. Στο σώμα προσδίδεται θετική ταχύτητα $\upsilon_1 > 0$ στη θέση $x = 0$, για την οποία το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

(i) Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση μηχανικής ενέργειας, θα προσδιορίσουμε τις θέσεις στις οποίες μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος.

Το βάρος του σώματος και η κάθετη δύναμη από το λείο τραπέζι δεν παράγουν έργο. Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι η δύναμη ελατηρίου, η μηχανική ενέργεια Ελατηρίου-Σώματος διατηρείται. Στις θέσεις όπου μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος, η κινητική ενέργεια μηδενίζεται και η δυναμική ενέργεια παίρνει τη μέγιστη δυνατή τιμή. Από την αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, προκύπτει:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+0=0+\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x=\pm\upsilon_1\sqrt{\frac{m}{k}}$$



Επειδή αρχικά το σώμα έχει θετική ταχύτητα στη θέση $x=0$, θα κινηθεί προς τη θετική κατεύθυνση (όπου αυξάνονται οι τιμές τιμές θέσεων). Συνεπώς, η πρώτη θέση στην οποία μηδενίζεται η ταχύτητά του δίνεται από τη θετική λύση $x_{\mu\varepsilon\gamma}=+\upsilon_1\sqrt{m/k}$. Σε εκείνο το σημείο, το ελατήριο είναι επιμηκυμένο και η δύναμη ελατηρίου αναγκάζει το σώμα να κινηθεί προς την αρνητική κατεύθυνση. Το σώμα θα επιστρέψει στην θέση $x=0$ έχοντας αρνητική ταχύτητα, και θα συνεχίσει να κινείται μέχρι την αρνητική θέση $x_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}=-\upsilon_1\sqrt{m/k}$, όπου μηδενίζεται ξανά η ταχύτητά του.

(ii) Ας προσδιορίσουμε την ταχύτητα του σώματος, όταν επιστρέψει στη θέση $x=0$.

Όταν το σώμα επιστρέψει για πρώτη φορά στη θέση ισορροπίας, η δυναμική ενέργεια ελατηρίου μηδενίζεται, και η συνολική μηχανική ενέργεια ισούται με την κινητική ενέργεια του σώματος. Συνεπώς, το σώμα έχει ταχύτητα:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_2^2+0=0+\frac{1}{2}k(\upsilon_1\sqrt{m/k})^2 \Rightarrow \upsilon_2=\pm\upsilon_1$$

Επειδή το σώμα κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, αποδεκτή λύση είναι η αρνητική

$\upsilon_2 = -\upsilon_1$.

(iii) Η ταχύτητα του σώματος σε μια ενδιάμεση θέση x.

Σε μια ενδιάμεση θέση, οι τιμές της κινητικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας ελατηρίου είναι μη μηδενικές. Εξισώνοντας τη μηχανική ενέργεια στις θέσεις x και $x_{\mu\varepsilon\gamma}$, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0 + \frac{1}{2}kx_{\mu\varepsilon\gamma}^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(x_{\mu\varepsilon\gamma}^2 - x^2\right)}$$

Τα δύο πρόσημα αντιστοιχούν στις τιμές της ταχύτητας, για την περίπτωση που το σώμα βρίσκεται στη θέση x και κινείται προς τη θετική ή την αρνητική κατεύθυνση.

Σημείωση προς τους Εκπαιδευτικούς: Η επόμενη παρατήρηση είναι σημαντική και προτείνουμε να τονισθεί στην τάξη.

Να παρατηρήσετε ότι η επίλυση του προηγούμενου προβλήματος με χρήση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα θα ήταν πιο δύσκολη, επειδή η συνισταμένη δύναμη στο σώμα είναι μεταβαλλόμενη, και συνεπώς η κίνηση του σώματος δεν είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη. Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, η επίλυση γίνεται εύκολη.

Παράδειγμα: Καροτσάκι με προφυλακτήρα ελατηρίου

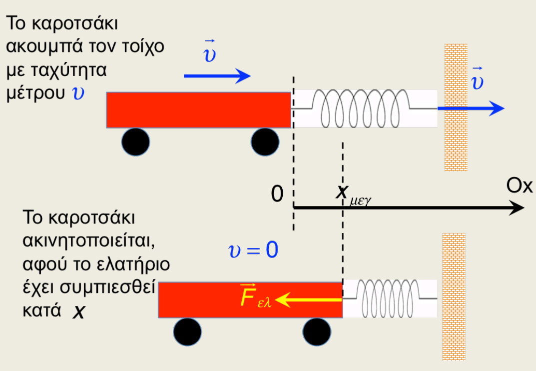
Στο πιο κάτω σχήμα απεικονίζεται ένα καροτσάκι, το οποίο περιέχει ένα ελατήριο στο μπροστινό του μέρος. Το αυτοκίνητο ακουμπά τον τοίχο με ταχύτητα μέτρου υ. Κατά την πρόσκρουση, το ελατήριο συσπειρώνεται μέχρις ότου το καροτσάκι να ακινητοποιηθεί. Από τη διατήρηση μηχανικής ενέργειας για το σύστημα αυτοκίνητο-ελατήριο, προκύπτει για τη μέγιστη συσπείρωση $x_{\mu\varepsilon\gamma}$:

$$E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi} = U_{\varepsilon\lambda}^{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}kx_{\mu\varepsilon\gamma}^2 \Rightarrow x_{\mu\varepsilon\gamma} = \upsilon\sqrt{m/k}$$

Στη θέση μέγιστης συσπείρωσης $x_{μεγ}$, η δύναμη από το ελατήριο στο καροτσάκι αποκτά μέγιστο μέτρο:

$$F_{μεγ} = -kx_{μεγ} = -υ\sqrt{km}.$$

Παρατηρείστε ότι για δεδομένη ταχύτητα, η δύναμη που ασκείται στο καροτσάκι ελαττώνεται, εάν ελαττωθεί η σταθερά ελατηρίου (ταυτόχρονα αυξάνεται η μέγιστη συσπείρωση $x_{μεγ}$).



Όπως αναφέραμε σε προηγούμενο παράδειγμα, τα σύγχρονα αυτοκίνητα διαθέτουν προστατευτικές «ζώνες παραμόρφωσης» (crumble zones), οι οποίες συμπιέζονται και ελαττώνουν τη δύναμη που ασκείται στην καμπίνα του οδηγού. Το απλό αυτό μοντέλο μας βοηθά να κατανοήσουμε τη λειτουργία των ζωνών παραμόρφωσης: όσο πιο «μαλακό» είναι το υλικό της ζώνης παραμόρφωσης, τόσο πιο μεγάλη η παραμόρφωση και τόσο πιο μικρή η δύναμη που υφίσταται η καμπίνα. (Στην πραγματικότητα, η παραμόρφωση αυτών των ζωνών είναι μόνιμη και η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται, όπως εξηγούμε στο τέλος του κεφαλαίου).

Ερωτήσεις Κατανόησης

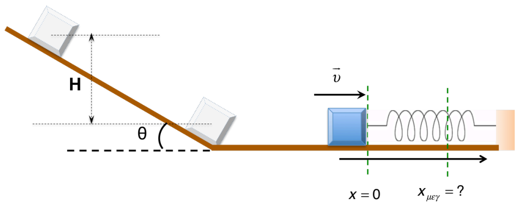
Να συμπληρώσετε τις επόμενες ερωτήσεις κατανόησης με την ένδειξη «Σωστό/Λάθος».

Οι επόμενες ερωτήσεις αναφέρονται σε ένα σώμα προσδεδεμένο στην μία άκρη οριζόντιου, αβαρούς ελατηρίου. Η άλλη άκρη του ελατηρίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο. Το σώμα κινείται σε λείο, οριζόντιο δάπεδο υπό την επίδραση της δύναμης του ελατηρίου.	**Σ/Λ**
Όταν το ελατήριο επαναφέρεται στο φυσικό του μήκος, το έργο της δύναμης ελατηρίου είναι θετικό.	
Όταν αυξάνεται η παραμόρφωση του ελατηρίου, το έργο της δύναμης ελατηρίου είναι αρνητικό.	
Η δύναμη ελατηρίου είναι διατηρητική.	
Η δυναμική ενέργεια του συστήματος Ελατηρίου-Σώματος είναι θετική όταν το ελατήριο είναι παραμορφωμένο.	
Η δυναμική ενέργεια του συστήματος Ελατηρίου-Σώματος ελαττώνεται πάντοτε όταν ελαττώνεται το μήκος του ελατηρίου.	
Η μηχανική ενέργεια του συστήματος Ελατηρίου-Σώματος παραμένει σταθερή.	

Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι μέγιστη όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.	

Ασκήσεις

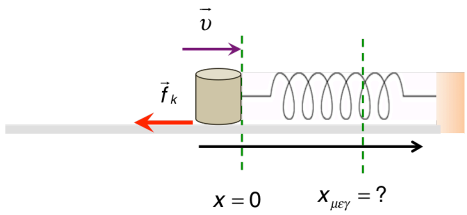
1. Ένα σώμα μάζας m αρχίζει να κινείται από την ηρεμία στο κεκλιμένο δάπεδο του σχήματος, συνεχίζει την κίνησή του στο οριζόντιο δάπεδο και τελικά προσκρούει με ταχύτητα μέτρου υ σε αβαρές οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k. Να υποθέσετε ότι όλα τα δάπεδα είναι λεία.



Α. Εφαρμόζοντας την αρχή της διατήρησης μηχανικής ενέργειας για το σύστημα σώματος-Γης, να υπολογίσετε την ταχύτητα που θα έχει το σώμα όταν συναντήσει το ελατήριο, σαν συνάρτηση των m, H και θ.

Β. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας για το σύστημα Ελατηρίου-Σώματος, να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου σαν συνάρτηση των m, H, θ και k.

2. Ένα σώμα μάζας $m = 25$ kg κινείται σε ένα τραχύ οριζόντιο δάπεδο, και προσκρούει με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 4$ m/s σε αβαρές οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 400$ N/m. Εκτός από τη δύναμη ελατηρίου, στο σώμα ασκείται και μια σταθερή δύναμη κινητικής τριβής, μέτρου $T = m|\vec{g}|/2$, από το δάπεδο.



Α. Έστω ότι στη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_{\mu\varepsilon\gamma}$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας, να εξάγετε μια σχέση ανάμεσα στο έργο της τριβής και στη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος Ελατηρίου-Σώματος στα σημεία $x = 0$ και $x_{\mu\varepsilon\gamma}$. Η σχέση αυτή είναι δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς τη μεταβλητή $x_{\mu\varepsilon\gamma}$.

Β. Αντικαθιστώντας τις τιμές της μάζας, της ταχύτητας του σώματος και της σταθεράς ελατηρίου, να υπολογίσετε τη θέση $x_{\mu\varepsilon\gamma}$ της μέγιστης συσπείρωσης.

Μορφές Ενέργειας που χρησιμοποιούνται στην Περιγραφή του Φυσικού Κόσμου, και Μετατροπές Μορφών Ενέργειας

Στις προηγούμενες ενότητες του Κεφαλαίου 4 εξετάσαμε υλικά σώματα, τα οποία κινούνται στο χώρο υπό την επίδραση **διατηρητικών δυνάμεων** όπως το βάρος και η δύναμη ελατηρίου, και συνδέσαμε την κινητική κατάσταση και τη θέση αυτών των σωμάτων στο χώρο με συγκεκριμένες μορφές ενέργειας: την **κινητική ενέργεια**, τη **βαρυτική δυναμική ενέργεια** και τη **δυναμική ενέργεια ελατηρίου**. Σε αυτή την ενότητα θα συζητήσουμε επιπρόσθετες μορφές ενέργειας, που χαρακτηρίζουν τα διάφορα σώματα.

Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια

Οι ηλεκτρικές δυνάμεις μπορούν να παράγουν έργο και να μεταβάλλουν την κινητική κατάσταση φορτισμένων σωματιδίων. Ένα σύστημα φορτίων που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με ηλεκτρικές δυνάμεις έχει **ηλεκτρική δυναμική ενέργεια**.

Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 3, τα άτομα και μόρια της ύλης ασκούν μεταξύ τους ηλεκτρικές δυνάμεις, οι οποίες οφείλονται στα ηλεκτρικά φορτία των πυρήνων και των ηλεκτρονίων τους. *Ακόμη και εάν τα άτομα ή μόρια είναι ηλεκτρικά ουδέτερα, οι ηλεκτρικές δυνάμεις μεταξύ τους είναι μη μηδενικές, εξαιτίας της ασυμμετρικής κατανομής του θετικού φορτίου των πυρήνων τους και του αρνητικού φορτίου των ηλεκτρονίων τους.* Ένα σώμα έχει **εσωτερική δυναμική ενέργεια** εξαιτίας των ηλεκτρικών δυνάμεων που ασκούνται μεταξύ των ατόμων ή μορίων του.

Σημείωση προς τους Εκπαιδευτικούς: Η κινητική ενέργεια των ατόμων/μορίων ενός σώματος λόγω της άτακτης κίνησής τους αναφέρεται σε κάποια βιβλία ως «θερμική ενέργεια».

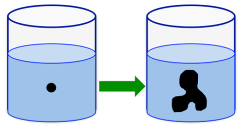
Η χρήση αυτή ενδέχεται να δημιουργήσει τη λανθασμένη εντύπωση στους μαθητές/ριες, ότι η θερμότητα που μεταφέρεται σε ένα σώμα μεταβάλλει μόνο την κινητική ενέργεια των ατόμων/μορίων του, ενώ στην πραγματικότητα μεταβάλλει τη συνολική τους ενέργεια.

Σε άλλα βιβλία χρησιμοποιείται - πιο σωστά - ο ίδιος όρος «θερμική ενέργεια», για να περιγράψει τη συνολική ενέργεια που έχει ένα σώμα λόγω της θερμοκρασίας του (δηλαδή το άθροισμα της κινητικής **και** δυναμικής ενέργειας των ατόμων/μορίων του). Για να αποφύγουμε σύγχυση, χρησιμοποιούμε τους όρους «Εσωτερική Κινητική Ενέργεια», «Εσωτερική Δυναμική Ενέργεια», και «Εσωτερική Ενέργεια».

Εσωτερική Κινητική Ενέργεια ενός Σώματος

Ένα σώμα που *βρίσκεται σε ηρεμία* (π.χ. μια πέτρα που ηρεμεί στην επιφάνεια του εδάφους, το νερό στο εσωτερικό ενός ακίνητου ποτηριού, το αέριο στο εσωτερικό ενός ακίνητου μπαλονιού) έχει μηδενική κινητική ενέργεια: $\upsilon_{\sigma\omega\mu} = 0 \Rightarrow E_{\kappa\iota\nu} = 1/2 M\upsilon_{\sigma\omega\mu}^2 = 0$. Στη σχέση αυτή, *M* είναι η συνολική μάζα του σώματος και $\upsilon_{\sigma\omega\mu} = 0$ είναι η ταχύτητα με την οποία το παρατηρούμε να κινείται *σαν ένα σύνολο*.

Εάν παρατηρήσουμε τα σωματίδια που αποτελούν ένα ακίνητο σώμα, θα διαπιστώσουμε ότι *βρίσκονται σε συνεχή κίνηση*. Εάν ανοίξουμε μια φιάλη με άρωμα, θα αντιληφθούμε μετά από κάποιο χρονικό διάστημα ότι τα μόρια του αρώματος έχουν διασκορπισθεί στο χώρο του δωματίου. Εάν τοποθετήσουμε μια σταγόνα μελανιού στο εσωτερικό ενός ποτηριού με νερό, θα παρατηρήσουμε μετά από λίγο ότι τα σωματίδια του μελανιού διαχέονται σε όλο τον όγκο του νερού.



Η σταγόνα μελανιού διαχέεται στο νερό, εξαιτίας της κίνησης των μορίων του και των μορίων του νερού.

Τα άτομα ή μόρια ενός αερίου, υγρού ή στερεού σώματος κινούνται συνεχώς προς όλες τις κατευθύνσεις με διάφορες ταχύτητες, ακόμη κι όταν το σώμα δεν μετακινείται στο χώρο. Οι ταχύτητες των ατόμων ή μορίων ενός σώματος αλλάζουν συνεχώς κατά μέτρο και κατεύθυνση, εξαιτίας των συγκρούσεών τους με άλλα άτομα ή μόρια.

Εξαιτίας της κίνησής του, κάθε άτομο ή μόριο ενός σώματος έχει **εσωτερική κινητική ενέργεια**. Θεωρούμε ότι τα άτομα ή μόρια του σώματος αποτελούν υλικά σημεία. Τότε, η κινητική ενέργεια κάποιου μορίου είναι ίση με $E_{\kappa\iota\nu,i} = 1/2\, m_i \upsilon_i^2$. Σε αυτή τη σχέση, m_i είναι η μάζα του μορίου και υ_i είναι το μέτρο της ταχύτητας που μετρούμε ότι έχει το μόριο, *όταν το σώμα είναι ακίνητο* ($\vec{\upsilon}_{\sigma\omega\mu} = \vec{0}$). Το άθροισμα των εσωτερικών κινητικών ενεργειών όλων των ατόμων ή μορίων ενός σώματος ισούται με τη συνολική εσωτερική κινητική ενέργεια του σώματος:

$$E_{\kappa\iota\nu}^{\varepsilon\sigma\omega\tau} = \sum E_{\kappa\iota\nu,i} = \sum \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2$$

Εσωτερική Κινητική Ενέργεια

(Σώμα που αποτελείται από μονοατομικά μόρια)

Εάν τα μόρια ενός σώματος αποτελούνται από περισσότερα άτομα, η κίνησή τους είναι πιο σύνθετη: καθώς τα μόρια μετατοπίζονται, ταυτόχρονα περιστρέφονται και τα άτομά τους ταλαντώνονται. Αυτές οι κινήσεις συνεισφέρουν στην συνολική κινητική ενέργεια.

Χημική Ενέργεια

Όταν οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ δύο ή περισσοτέρων ατόμων είναι αρκετά ισχυρές, ώστε τα άτομα αυτά να δημιουργούν σταθερά και ανεξάρτητα συσσωματώματα που ονομάζονται μόρια, θεωρούμε ότι μεταξύ των ατόμων αναπτύσσονται χημικοί δεσμοί. Για παράδειγμα, στο μόριο του μεθανίου ένα άτομο άνθρακα σχηματίζει χημικούς δεσμούς με τέσσερα άτομα υδρογόνου. Εξαιτίας των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων και της κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων και των πυρήνων, κάθε χημικός δεσμός περιέχει ενέργεια που την ονομάζουμε **χημική ενέργεια**. Όταν διασπάται ένας χημικός δεσμός κατά τη διάρκεια μιας χημικής αντίδρασης, απελευθερώνεται ενέργεια.

Ενέργεια απελευθερώνεται κατά την καύση διαφόρων ενώσεων, όπως οι θρεπτικές ουσίες και το πετρέλαιο.

Σημείωση προς τους Εκπαιδευτικούς: Επειδή οι μαθητές/ριες δεν έχουν έρθει σε επαφή με την ατομική και μοριακή δομή, είναι δύσκολο να κατανοήσουν τις διάφορες μορφές εσωτερικής ενέργειας. Μπορεί να αναφερθεί ότι τα άτομα ή μόρια ενός σώματος έλκονται και απωθούνται μεταξύ τους με ηλεκτρικές δυνάμεις, και ότι στο *εσωτερικό* των ατόμων/μορίων, τα ηλεκτρόνια και οι πυρήνες επίσης ασκούν μεταξύ τους ηλεκτρικές δυνάμεις. Όλες αυτές οι δυνάμεις παράγουν έργο και συνδέονται με τη συνολική εσωτερική ενέργεια ενός σώματος. Σε αυτή προστίθεται η εσωτερική κινητική ενέργεια των ατόμων και μορίων.

Συνολική Εσωτερική Ενέργεια

Εκτός από την εσωτερική κινητική τους ενέργεια, τα άτομα ή μόρια ενός σώματος έχουν επιπρόσθετη ηλεκτρική δυναμική και χημική ενέργεια. Το άθροισμα αυτών των μορφών ενέργειας είναι η **συνολική εσωτερική ενέργεια** ενός σώματος. Στη συνολική εσωτερική ενέργεια δεν περιλαμβάνεται η κινητική ενέργεια εξαιτίας της συνολικής κίνησης του σώματος, ή η δυναμική ενέργεια που έχει το σώμα εξαιτίας της θέσης του ή της αλληλεπίδρασής του με άλλα σώματα (π.χ. η βαρυτική δυναμική ενέργεια, η ενέργεια ελατηρίου και η ενέργεια λόγω αλληλεπίδρασης με άλλα φορτισμένα σώματα).

Πυρηνική Ενέργεια

Οι πυρήνες αποτελούνται από υποατομικά σωματίδια (πρωτόνια και νετρόνια) που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με πυρηνικές δυνάμεις. Εξαιτίας αυτών των αλληλεπιδράσεων, οι πυρήνες περιέχουν ενέργεια που την ονομάζουμε **πυρηνική ενέργεια**. Κατά τη διάσπαση μεγάλων ασταθών πυρήνων (πυρηνική σχάση), ή κατά τη συνένωση μικρών πυρήνων σε μεγαλύτερους (πυρηνική σύντηξη), απελευθερώνεται ενέργεια. Σε τέτοιες **πυρηνικές αντιδράσεις**, η συνολική μάζα των τελικών πυρήνων είναι μικρότερη από τη συνολική μάζα των αρχικών πυρήνων. Το έλλειμμα μάζας Δm οφείλεται στη μετατροπή μάζας σε ενέργεια ΔE, σύμφωνα με τη φημισμένη εξίσωση του Einstein $\Delta E = \Delta m c^2$ (όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός).

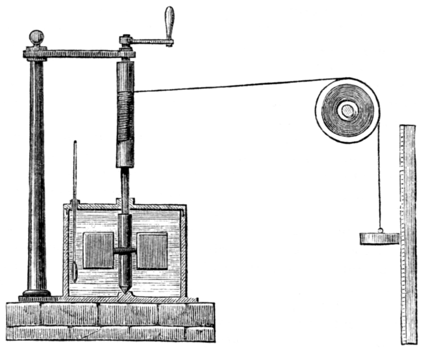
Η Έννοια της Θερμότητας

Από την καθημερινή μας εμπειρία γνωρίζουμε ότι εάν φέρουμε σε επαφή δύο σώματα με διαφορετικές θερμοκρασίες, μετά από λίγο οι θερμοκρασίες των σωμάτων θα εξισωθούν. Η εξίσωση των θερμοκρασιών επιτυγχάνεται με μεταφορά ενέργειας από το σώμα υψηλότερης στο σώμα χαμηλότερης θερμοκρασίας. **Η ενέργεια που μεταφέρεται από ένα σώμα υψηλής θερμοκρασίας σε ένα σώμα χαμηλής θερμοκρασίας, εξαιτίας της διαφοράς θερμοκρασίας τους, ονομάζεται θερμότητα.**

Η θερμότητα μετράται σε μονάδες ενέργειας (Joule). Για ιστορικούς λόγους, χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της θερμότητας και η μονάδα cal (calorie), που ορίζεται ως η ποσότητα θερμότητας που απαιτείται για να αυξήσει τη θερμοκρασία μιας μάζας νερού ίσης με 1 g κατά 1 ^{o}C (μεταξύ 14,5 ^{o}C και 15,5 ^{o}C) σε ατμοσφαιρική πίεση. Το 1 cal θερμότητας ισούται περίπου με 4,18 Joule.

Τη δεκαετία του 1840 ο Βρετανός φυσικός και ζυθοποιός James Prescott Joule (1818-1889) πραγματοποίησε μια σειρά από πολύ ακριβή πειράματα, με τα οποία έδειξε ότι *μια συγκεκριμένη ποσότητα μηχανικού έργου απαιτούνταν για να αυξήσει (μέσω τριβής) τη θερμοκρασία μιας συγκεκριμένης ποσότητας νερού κατά ένα βαθμό Fahrenheit* (μεταβολή θερμοκρασίας κατά 1 βαθμό Fahrenheit = μεταβολή κατά 1 βαθμό Κελσίου). Το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξε ο Joule είναι το **μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας.** Το ισοδύναμο αυτό αποδεικνύει ότι το αίτιο που προκαλεί τη μεταβολή θερμοκρασίας του νερού, δηλαδή η θερμότητα, είναι μεταφερόμενη ενέργεια.

Στην Εικόνα 4-9 απεικονίζεται μία από τις συσκευές που χρησιμοποίησε ο Joule για να αποδείξει το μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας.



Εικόνα 4-9. Μία συσκευή, με την οποία ο Joule μέτρησε το μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας.

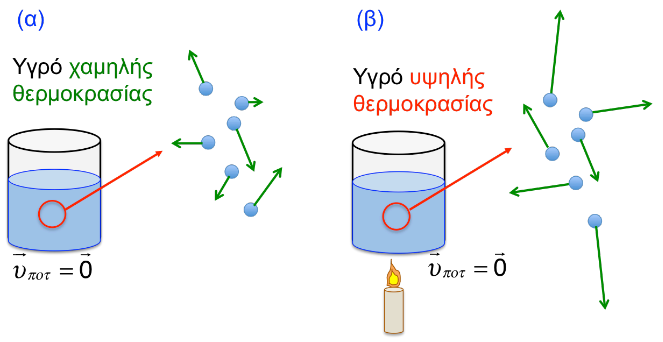
Ένα σώμα (δεξιό μέρος της εικόνας) είναι προσδεδεμένο μέσω τροχαλίας σε έναν αναδευτήρα, που μπορεί να περιστρέφεται στο εσωτερικό ενός δοχείου με νερό. Όταν το σώμα κατέρχεται, προκαλεί περιστροφή του αναδευτήρα μέσα στο νερό. Εξαιτίας της τριβής των πτερυγίων του αναδευτήρα με το νερό, το σύστημα νερού-δοχείου θερμαίνεται. Από το πείραμα μπορεί να προσδιορισθεί το έργο που πρέπει να παράξει το βάρος του σώματος, έτσι ώστε να αυξηθεί η θερμοκρασία μιας συγκεκριμένης ποσότητας νερού κατά 1 ^{o}C.

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος-Γης μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια και τελικά σε εσωτερική ενέργεια του συστήματος δοχείου-νερού.

Μεταβολή της Εσωτερικής Ενέργειας ενός Σώματος με Αύξηση της Θερμοκρασίας

Όταν αυξάνεται η θερμοκρασία ενός σώματος, τα άτομα ή μόριά του συνεχίζουν να κινούνται προς όλες τις κατευθύνσεις με διάφορες, *μεγαλύτερες τιμές ταχύτητας*. Εάν θερμάνουμε μια ποσότητα νερού που περιέχεται σε ένα ακίνητο δοχείο, αυτή συνεχίζει να ηρεμεί (επειδή οι ταχύτητες των μορίων της έχουν οποιαδήποτε κατεύθυνση), αλλά τα μέτρα αυτών των ταχυτήτων μεγαλώνουν (Εικόνα 4-10).

Μπορούμε να διαπιστώσουμε πειραματικά ότι τα άτομα ή μόρια ενός θερμότερου σώματος κινούνται πιο γρήγορα: Εάν τοποθετήσουμε δύο παρόμοιες σταγόνες μελανιού στο εσωτερικό δύο δοχείων με κρύο και ζεστό νερό, θα παρατηρήσουμε ότι η σταγόνα μελανιού



Εικόνα 4-10. (**α**) Το νερό στο εσωτερικό του ποτηριού ηρεμεί (δεν μετακινείται ως προς το δωμάτιο). Τα μόρια του νερού κινούνται συνεχώς σε οποιαδήποτε κατεύθυνση με διαφορετικές ταχύτητες. Η συνολική κινητική ενέργεια των μορίων του υγρού είναι η εσωτερική κινητική ενέργεια του υγρού. **β**) Εάν αυξηθεί η θερμοκρασία του νερού, τα μέτρα των ταχυτήτων των μορίων μεγαλώνουν. Όταν αυξάνεται η θερμοκρασία ενός σώματος, αυξάνεται η εσωτερική κινητική ενέργεια των ατόμων ή μοριών πο η εσωτερική κινητική ενέργεια των ατόμων ή μορίων που το αποτελούν.

που βρίσκεται στο δοχείο με το ζεστό νερό διαχέεται πιο γρήγορα. Τα σωματίδια του ζεστού νερού κινούνται πιο γρήγορα από πριν και μεταδίδουν μεγαλύτερη ποσότητα κινητικής ενέργειας στα σωματίδια του μελανιού, καθώς συγκρούονται με αυτά. Τα σωματίδια του μελανιού κινούνται γρηγορότερα, συγκριτικά με το δοχείο του κρύου νερού.

Επειδή τα σωματίδια ενός θερμού σώματος κινούνται με μεγαλύτερες ταχύτητες, **αυξάνεται η εσωτερική κινητική ενέργεια του σώματος**. Επειδή έχουν μεγαλύτερες ταχύτητες, τα σωματίδια μπορούν να πλησιάζουν και να απομακρύνονται πιο εύκολα το ένα από το άλλο. Διαπιστώνουμε πειραματικά αυτή τη συμπεριφορά από το γεγονός ότι πολλά στερεά σώματα διαστέλλονται όταν θερμανθούν (αυξάνονται κατά μέσο όρο οι απόστάσεις μεταξύ των ατόμων ή των μορίων τους). Εξαιτίας αυτής της μεταβολής στις αποστάσεις μεταξύ ατόμων ή μορίων, αυξάνεται η **εσωτερική δυναμική ενέργεια** των σωμάτων.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι **όταν αυξάνεται η θερμοκρασία ενός σώματος, αυξάνεται η εσωτερική ενέργεια των ατόμων ή μορίων του.**

Αρχή της Διατήρησης της Ενέργειας

Πειραματικά διαπιστώνεται ότι ισχύει η εξής **Γενική Αρχή της Διατήρησης της Ενέργειας:**

Αρχή της Διατήρησης της Ενέργειας:

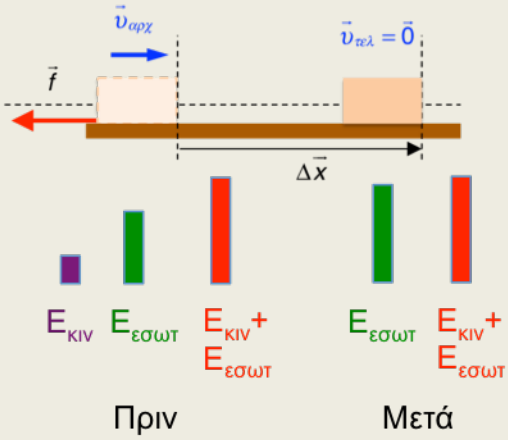
Κατά την αλληλεπίδραση μεταξύ δύο ή περισσοτέρων σωμάτων πραγματοποιούνται μετατροπές μεταξύ διαφόρων μορφών ενέργειας ή/και μεταφορά ενέργειας μεταξύ των σωμάτων ή και του περιβάλλοντός τους, αλλά δεν δημιουργείται ούτε χάνεται ενέργεια.

Παραδείγματα Μετατροπών μεταξύ Μορφών Ενέργειας

Παράδειγμα 1. Μετατροπή Κινητικής Ενέργειας σε Εσωτερική Ενέργεια Μέσω Τριβής

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται ένα σώμα μάζας M, το οποίο κινείται σε ένα τραχύ οριζόντιο δάπεδο. Στο σώμα ασκείται μια σταθερή δύναμη κινητικής τριβής $\vec{f}$, η οποία ελαττώνει και τελικά μηδενίζει την ταχύτητα του σώματος. Το έργο της τριβής είναι αρνητικό, $W_{\vec{f}} = f\Delta x < 0$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου- κινητικής ενέργειας, προκύπτει:

$$\Delta E_{\kappa\iota\nu} = W_{\vec{f}} = f\Delta x < 0$$



Η κινητική ενέργεια του σώματος ελαττώνεται εξαιτίας της τριβής. Διαπιστώνουμε ότι η επιφάνεια του σώματος και του δαπέδου *θερμαίνονται*, δηλαδή η εσωτερική ενέργειά τους αυξάνεται. Προσεκτικές μετρήσεις αποδεικνύουν ότι *η αύξηση στη συνολική εσωτερική ενέργεια του σώματος και του δαπέδου ισούται ακριβώς με το μέγεθος* $-f\Delta x > 0$.

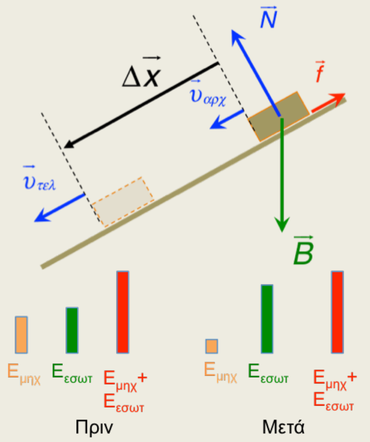
$$\Delta E_{\varepsilon\sigma\omega\tau} = -f\Delta x \Rightarrow \Delta E_{\varepsilon\sigma\omega\tau} = -\Delta E_{\kappa\iota\nu}$$

Συνεπώς, *η κινητική ενέργεια του σώματος (λόγω της συνολικής του κίνησης) μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια του σώματος και του δαπέδου.* Ένα τμήμα της κινητικής ενέργειας του σώματος μετατρέπεται σε εσωτερική κινητική και δυναμική ενέργεια των μορίων του σώματος και του δαπέδου. Εάν η τριβή προκαλεί παραμορφώσεις στο σώμα ή στο δάπεδο, κάποιο τμήμα της κινητικής ενέργειας του σώματος αποθηκεύεται ως ενέργεια χημικών δεσμών. Τελικά, η κινητική ενέργεια του σώματος μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια του σώματος και του δαπέδου.

Παράδειγμα 2. Μετατροπή Μηχανικής Ενέργειας σε Εσωτερική Ενέργεια Μέσω Τριβής

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται ένα σώμα που κατεβαίνει σε ένα τραχύ, ακίνητο κεκλιμένο επίπεδο δάπεδο. Στο σώμα ασκείται το βάρος του $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το δάπεδο και η δύναμη κινητικής τριβής $\vec{f}$ από το δάπεδο, η οποία είναι αντίρροπη προς τη μετατόπιση. Η δύναμη $\vec{N}$ δεν παράγει έργο επειδή είναι κάθετη στη μετατόπιση του σώματος. Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας στο σώμα, προκύπτει:

$$W_{\vec{B}} + W_{\vec{f}} = \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow -\Delta U_{\beta\alpha\rho} + f\Delta x = \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow \Delta E_{\mu\eta\chi} = f\Delta x < 0$$



Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος-Γης ελαττώνεται. Όπως και πριν, παρατηρούμε ότι οι επιφάνειες του σώματος και του δαπέδου θερμαίνονται, και συνεπώς η εσωτερική τους ενέργεια αυξάνεται. Αποδεικνύεται πειραματικά ότι η αύξηση στην εσωτερική ενέργεια του σώματος και του δαπέδου ισούται με το γινόμενο $-f\Delta x$. Έτσι:

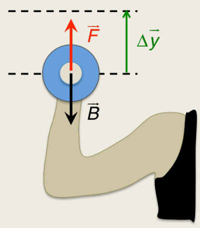
$$\Delta E_{\varepsilon\sigma\omega\tau} = -f\Delta x \Rightarrow \Delta E_{\varepsilon\sigma\omega\tau} = -\Delta E_{\mu\eta\chi}$$

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματος-Γης μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια του σώματος και του δαπέδου.

Παράδειγμα 3. Μετατροπή Κινητικής Ενέργειας σε Εσωτερική Ενέργεια

Προηγουμένως, συζητήσαμε τη σημασία των τμημάτων προστασίας (crumble zones) στα αυτοκίνητα. Στο διπλανό σχήμα, ένα αυτοκίνητο συγκρούεται με έναν τοίχο και ακινητοποιείται. Κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης, το αυτοκίνητο και ο τοίχος παραμορφώνονται και θερμαίνονται. Ένα τμήμα της κινητικής ενέργειας του αυτοκινήτου μετατρέπεται σε εσωτερική κινητική ενέργεια των δομικών λίθων (ατόμων και μορίων) του αυτοκινήτου και του τοίχου. Επιπρόσθετα, εξαιτίας της παραμόρφωσης του αυτοκινήτου και του τοίχου, ένα τμήμα της κινητικής ενέργειας του αυτοκινήτου μετατρέπεται σε εσωτερική δυναμική ενέργεια και ενέργεια χημικών δεσμών των δομικών λίθων του αυτοκινήτου και του τοίχου. *Η κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια του αυτοκίνητου και του τοίχου:* $\Delta E_{\kappa\iota\nu} = -\Delta E_{\varepsilon\sigma\omega\tau}$

Παράδειγμα 4. Μετατροπή Χημικής Ενέργειας σε Εσωτερική και Μηχανική Ενέργεια



Ο αθλητής του διπλανού σχήματος σηκώνει ένα βαράκι βάρους $\vec{B}$, ασκώντας τη δύναμη $\vec{F}$. Εφαρμογή του θεωρήματος έργου-κινητικής ενέργειας στο βαράκι δίνει:

$$W_{\vec{B}} + W_{\vec{F}} = \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow -\Delta U_{\beta\alpha\rho} + F\Delta y = \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow \Delta E_{\mu\eta\chi} = F\Delta y > 0$$

Άρα, *η μηχανική ενέργεια του συστήματος βαράκι-Γη αυξάνεται* επειδή το έργο της $\vec{F}$ είναι θετικό. Ταυτόχρονα, η εσωτερική ενέργεια του σώματος του αθλητή αυξάνεται, επειδή το σώμα του θερμαίνεται: $\Delta E_{\varepsilon\sigma\omega\tau} > 0$.

Η συνολική αύξηση της μηχανικής και της εσωτερικής ενέργειας του αθλητή προέρχεται από χημική ενέργεια μορίων στο σώμα του αθλητή, την οποία χρησιμοποιούν οι μύες του χεριού του αθλητή για να μπορέσουν να ασκήσουν τη δύναμη $\vec{F}$. Η χημική ενέργεια του σώματος ελαττώνεται ($\Delta E_{\chi\eta\mu} < 0$), έτσι ώστε να ισχύει:

$$-\Delta E_{\chi\eta\mu} = \Delta E_{\mu\eta\chi} + \Delta E_{\varepsilon\sigma\omega\tau}$$

Δηλαδή, η χημική ενέργεια μετατρέπεται σε μηχανική ενέργεια του συστήματος βαράκι-Γη και εσωτερική ενέργεια του σώματος του αθλητή.

Εάν ο αθλητής κρατά ακίνητο το βαράκι, οι μύες του χρειάζεται πάλι να εξασκούν δύναμη, που εξισορροπεί το βάρος του: χημική ενέργεια μετατρέπεται σε εσωτερική, ενώ η μηχανική ενέργεια του συστήματος βαράκι-Γη δεν μεταβάλλεται. Η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$-\Delta E_{\chi\eta\mu} = \Delta E_{\varepsilon\sigma\omega\tau}$$

Παρατηρείστε ότι σε αυτή την περίπτωση **πραγματοποιούνται μετατροπές μεταξύ μορφών ενέργειας, ακόμη κι εάν καμία δύναμη δεν παράγει έργο**.

Ασκήσεις

1. Μια μπάλα μάζας 500 g αφήνεται να πέσει από ύψος 1 m. Μετά την αναπήδησή της, η μπάλα επιστρέφει σε μέγιστο ύψος 75 cm. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας της μπάλας μεταξύ της θέσης της στο νέο μέγιστο ύψος και της αρχικής της θέσης. Δεδομένου ότι η συνολική ενέργεια της μπάλας και του περιβάλλοντος διατηρείται, να συζητήσετε σε ποιες μορφές ενέργειας ενδεχομένως μετατράπηκε η χαμένη μηχανική ενέργεια της μπάλας. Να λάβετε υπ΄ όψη σας την αλληλεπίδραση της μπάλας με τον αέρα και το πάτωμα.

2. Ένα αυγό αφήνεται να πέσει από κάποιο ύψος. Κατά τη σύγκρουσή του με το δάπεδο, το αυγό σπάει και ακινητοποιείται. Να συζητήσετε σε ποιες μορφές ενέργειας ενδεχομένως μετατράπηκε η κινητική ενέργεια που είχε το αυγό αμέσως πριν την πρόσκρουσή του στο δάπεδο.

3. Ένας αλεξιπτωτιστής συνολικής μάζας m πέφτει με ανοικτό αλεξίπτωτο. Σε κάποια στιγμή η επιτάχυνση του αλεξιπτωτιστή μηδενίζεται, οπότε πέφτει με σταθερή ορική ταχύτητα μέτρου υ.

Α. Να συζητήσετε σε ποιες μορφές ενέργειας μετατρέπεται η βαρυτική δυναμική ενέργεια του αλεξιπτωτιστή, πριν και μετά την απόκτηση οριkής ταχύτητας.

Β. Να υπολογίσετε το ρυθμό με τον οποίο ελαττώνεται η βαρυτική δυναμική ενέργεια.

4. Ένας αρσιβαρίστας κρατάει μια μπάρα με βάρη ακίνητη πάνω από το κεφάλι του.

Α. Να συζητήσετε εάν η δύναμη, που ασκεί ο αρσιβαρίστας στη μπάρα, παράγει ή καταναλώνει έργο.

Β. Η δύναμη, που ασκεί ο αρσιβαρίστας, οφείλεται στη δράση των μυών του, η οποία απαιτεί την κατανάλωση ενέργειας. Τι μορφής πιστεύετε ότι είναι αυτή η ενέργεια, και σε τι μορφές μετατρέπεται, έτσι ώστε η συνολική ενέργεια να παραμένει σταθερή;

5. Για να κάνει επιτόπιο κατακόρυφο άλμα (χωρίς φόρα) ένας αθλητής, λυγίζει τα πόδια του και κατόπιν σπρώχνει το έδαφος δυνατά με τα πόδια του.

Α. Από που προέρχεται η αρχική κινητική ενέργεια, με την οποία ο αθλητής εγκαταλείπει το έδαφος;

Β. Ο αθλητής αποφασίζει να χρησιμοποιήσει ειδικά παπούτσια, οι σόλες των οποίων περιέχουν θήκες με στρώμα αέρα, που συμπιέζονται ελαστικά. Γιατί αυξάνεται το τελικό ύψος στο οποίο θα φθάσει;