Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus

# Φιλοσοφία και Δομή Νέου Αναλυτικού Προγράμματος Μαθηματικών

## Βιβλία Μαθηματικών




**Σεπτέμβριος 2026**

# Θέματα

- Νέο Αναλυτικό πρόγραμμα
- Δομή και διάρθρωσης περιεχομένου και διδασκαλίας
  - Κριτήρια διδασκαλίας και αξιολόγησης
- Χαρακτηριστικά Εγχειριδίων
- Προγραμματισμοί και υποστηρικτικό υλικό
- Ενότητα Ε’ τάξης

# Προβληματισμοί

Ποιος ο σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών στην Ε’ τάξη;

# Προβληματισμοί

Πώς Μαθαίνουν οι Μαθητές Μαθηματικά;

Μαθηματική Σκέψη και Παρανοήσεις Μαθητών

Σχεδιασμός Μαθημάτων Μαθηματικών

Διδακτικές Προσεγγίσεις στα Μαθηματικά

Ερωτήσεις και Μαθηματικός Διάλογος

# Προβληματισμοί-Τι πρέπει να σκεφτεί ο εκπαιδευτικός;

- Ποια προηγούμενη γνώση χρειάζεται ο μαθητής;
- Ποια παρανόηση είναι δυνατό να έχει;
- Ποια αναπαράσταση θα βοηθήσει;
- Ποιο παράδειγμα θα χρησιμοποιήσω;
- Ποια ερώτηση θα κάνω;
- Πώς θα καταλάβω ότι το κατάλαβε;

# Πέντε τρόποι να διδάξουμε την ίδια ιδέα

Verbal — με λόγια

Symbolic — με μαθηματικά σύμβολα

Visual — με εικόνα/διάγραμμα

Graphical — με γραφική παράσταση

Contextual — μέσα από πραγματικό πρόβλημα

# Φιλοσοφία

Η έμφαση μετατοπίζεται από τη διαδικασία στη μαθηματική σκέψη.

| Ο/η μαθητής/ τρια: |
| --- |
| Διερευνά μοτίβα |
| Αναπτύσσει στρατηγικές |
| Εξηγεί τη σκέψη |
| Δοκιμάζει νέες ιδέες |
| Αξιολογεί λύσεις |
| Τεκμηριώνει ισχυρισμούς |
| Ακούει διαφορετικές λύσεις |
| Βρίσκει το λάθος και διορθώνει |
| Αποκτά εννοιολογική γνώση |
| Συνδυάζει διαδικασίες και κατανόηση |

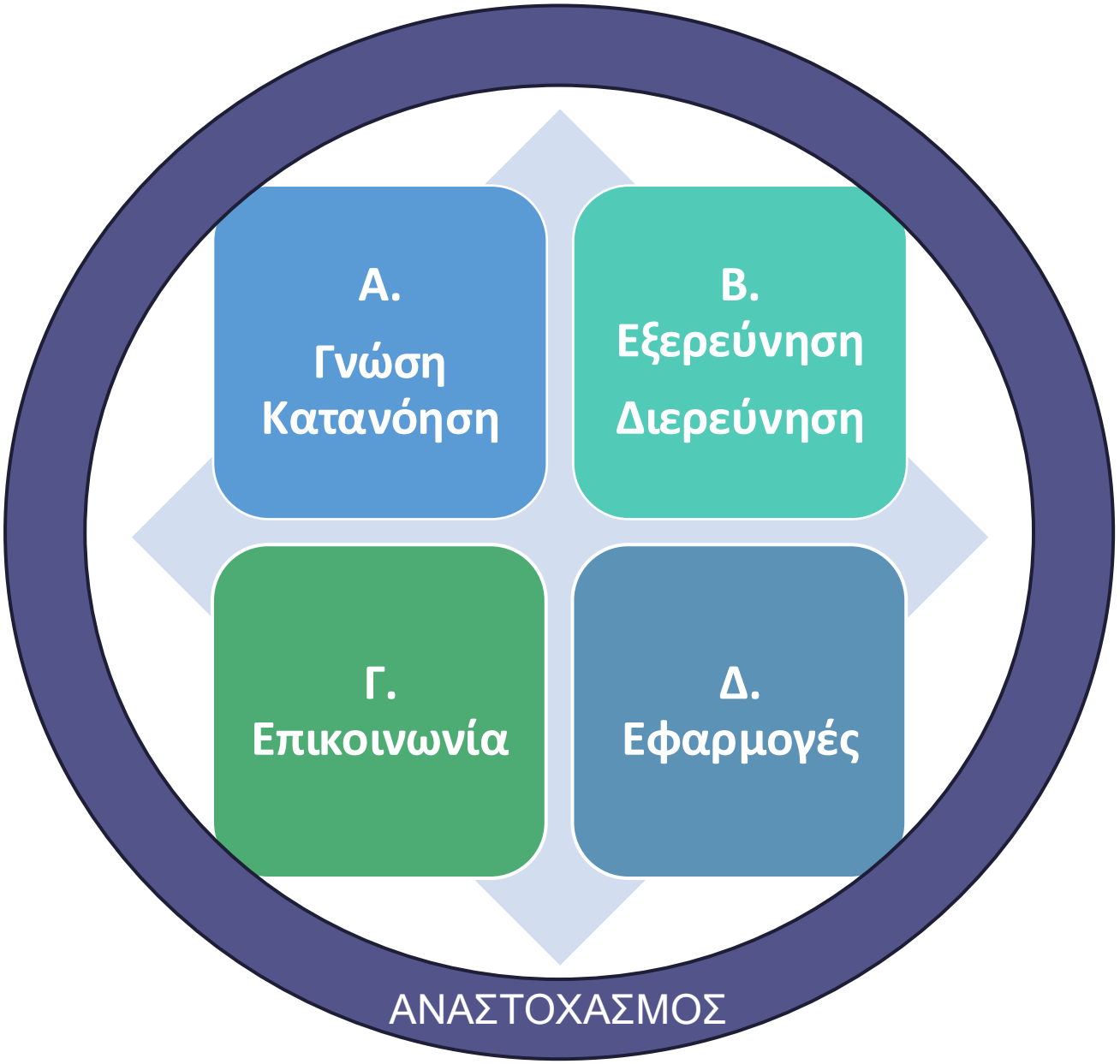
# Δεξιότητες

Οι δεξιότητες δεν διδάσκονται ξεχωριστά, αλλά ενσωματώνονται στη μαθησιακή διαδικασία:

1. **Δεξιότητες σκέψης** (κριτική σκέψη, δημιουργική σκέψη, ηθική σκέψη)
2. **Δεξιότητες έρευνας** (σύγκριση, αντιπαραβολή, ιεράρχηση πληροφοριών)
3. **Δεξιότητες επικοινωνίας** (γραπτή και προφορική επικοινωνία, διατύπωση επιχειρημάτων)
4. **Κοινωνικές δεξιότητες** (σύγχρονα προβλήματα, δεξιότητες ακρόασης)
5. **Δεξιότητες αυτοδιαχείρισης** (οργανωτικές δεξιότητες - διαχείριση του χρόνου και καθηκόντων/υποχρεώσεων, συναισθηματικές δεξιότητες)

# ΔΟΜΗ ΔΙΑΡΘΡΩΣΗΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus



Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus

- Τα Μαθηματικά στον κόσμο
- Εξερεύνηση
- Διερεύνηση
- Αναστοχασμός
- Παράδειγμα 1
- Δραστηριότητες 1
- Μικρή Επανάληψη
- Περίληψη Ενότητας
- Επιπρόσθετες Δραστηριότητες

- Εφαρμογή
- Επικοινωνία

# Τα μαθηματικά στον κόσμο

- **Ανθρώπινες σχέσεις**
- **Ιστορία ανθρωπότητας**
- **Πολιτισμός κουλτούρα**
- **Επιστήμη Τεχνολογία**
- **Περιβάλλον**
- **Οικονομική Ανάπτυξη**

**Διαπνέουν την ενότητα:**

- ως κίνητρο ενασχόλησης
- για κριτική δημιουργική σκέψη
- για επικοινωνία
- για εφαρμογές

# Τα μαθηματικά στον κόσμο

## Τα Μαθηματικά στον κόσμο

Σε κάθε γωνιά του κόσμου, οι άνθρωποι ανέπτυξαν «έξυπνους» τρόπους, για να υπολογίζουν το αποτέλεσμα μαθηματικών πράξεων. Για παράδειγμα, για να υπολογίσει ένας έμπορος πόσα μήλα υπάρχουν συνολικά σε 4 καλάθια που το καθένα έχει 25 μήλα, θα μπορούσε να μετρήσει τα μήλα ένα-ένα. Με αυτόν τον τρόπο, όμως, θα καθυστερούσε πολύ. Για να κάνει τον υπολογισμό πιο γρήγορα, θα μπορούσε να τα μετρήσει 25-25 ή να υπολογίσει πόσα μήλα υπάρχουν στα δύο καλάθια και στη συνέχεια στα άλλα δύο. Δηλαδή, να υπολογίσει πρώτα ότι $2 \times 25 = 50$ και στη συνέχεια να προσθέσει $50 + 50 = 100$.




Οι «έξυπνοι» αυτοί τρόποι βασίζονται στις ιδιότητες των πράξεων και μας βοηθούν μέχρι και σήμερα να απλοποιούμε τους υπολογισμούς μας και να βρίσκουμε το αποτέλεσμα πιο εύκολα και γρήγορα.

- Να αναφέρετε μια περίπτωση στην οποία χρησιμοποιήσατε έναν «έξυπνο» τρόπο, για να υπολογίσετε το αποτέλεσμα μιας πράξης.

Ε΄ τάξη

Ενότητα 2

Ιδιότητες των πράξεων

# Τα μαθηματικά στον κόσμο

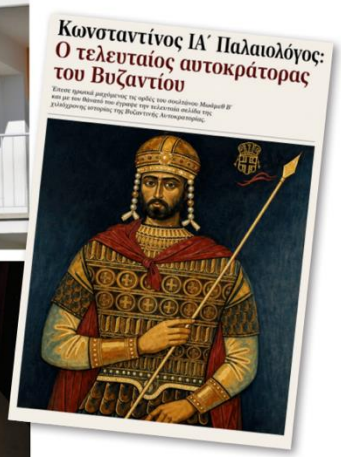
## Τα Μαθηματικά στον κόσμο

Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν το **Ιωνικό σύστημα αρίθμησης**, στο οποίο κάθε γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου αντιστοιχούσε σε έναν αριθμό. Για να ξεχωρίζουν τους αριθμούς από τα γράμματα, σημείωναν μία οξεία στην πάνω δεξιά πλευρά του γράμματος.

| Μονάδες | Δεκάδες | Εκατοντάδες |
|---|---|---|
| Α' = 1 | Ι' = 10 | Ρ' = 100 |
| Β' = 2 | Κ' = 20 | Σ' = 200 |
| Γ' = 3 | Λ' = 30 | Τ' = 300 |
| Δ' = 4 | Μ' = 40 | Υ' = 400 |
| Ε' = 5 | Ν' = 50 | Φ' = 500 |
| ϛ' (Στίγμα) = 6 | Ξ' = 60 | Χ' = 600 |
| Ζ' = 7 | Ο' = 70 | Ψ' = 700 |
| Η' = 8 | Π' = 80 | Ω' = 800 |
| Θ' = 9 | ϟ' (Κόππα) = 90 | ϡ' (Σαμπί) = 900 |

Οι υπόλοιποι αριθμοί σχηματίζονταν ως συνδυασμός γραμμάτων, προσθέτοντας τις αριθμητικές τους αξίες, π.χ. **ΙΒ΄** = **12** (10 + 2), **ΚΑ΄** = **21** (20 + 1).
Το Ιωνικό σύστημα αρίθμησης εξακολουθεί να χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως φαίνεται πιο κάτω.






Χρυσή λάρνακα του τάφου του Φιλίππου Β΄

- Να διαβάσετε τους αριθμούς στις εικόνες.

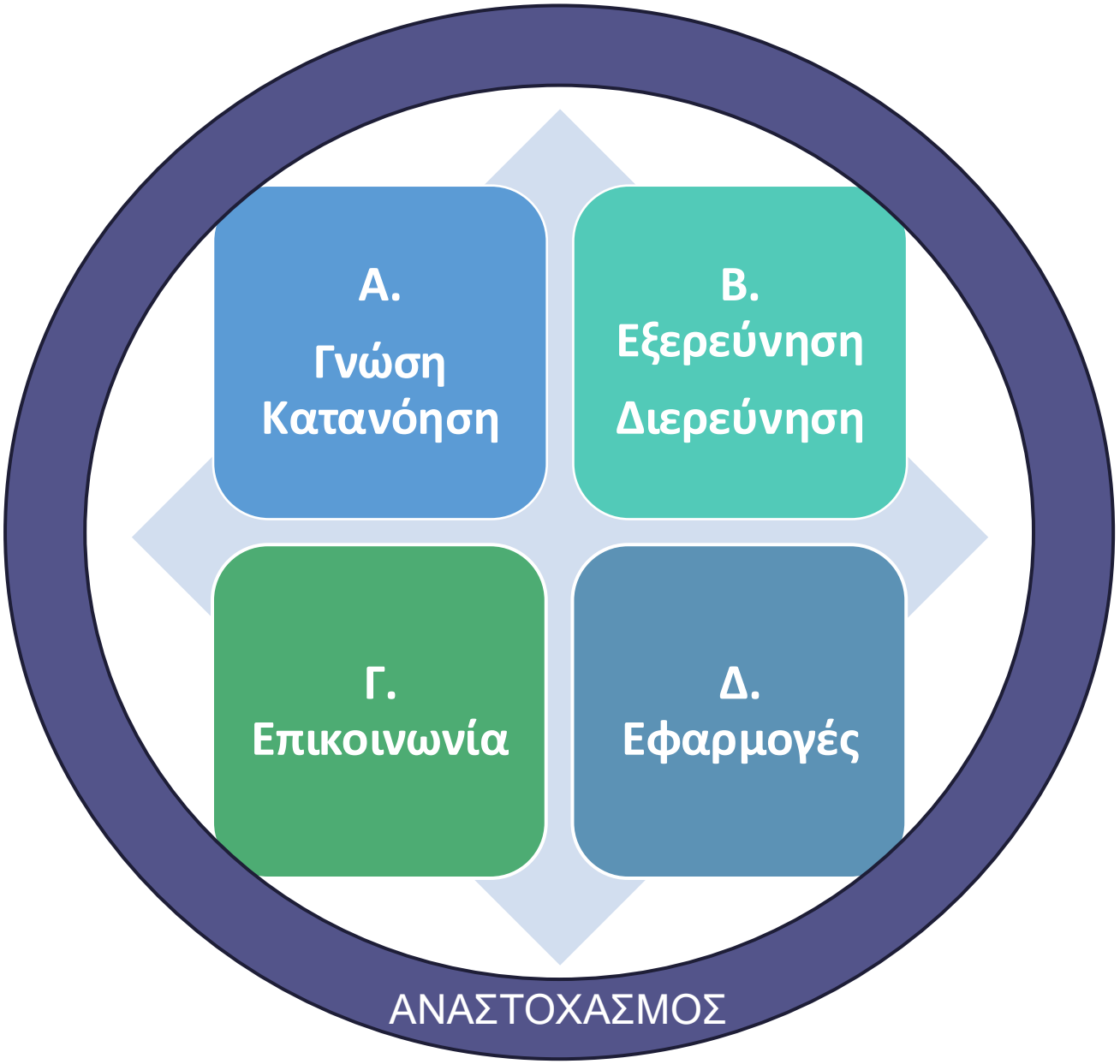
Ε΄ τάξη

Ενότητα 3

Αριθμοί- Πράξεις

# ΔΟΜΗ ΔΙΑΡΘΡΩΣΗΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus



# Κριτήρια-Διδασκαλία




Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus

## Α. Γνώση - Κατανόηση

- Οι μαθητές εφαρμόζουν έννοιες και διαδικασίες των μαθηματικών σε γνωστές και άγνωστες καταστάσεις.
- **Επιλέγουν κατάλληλες στρατηγικές**
- Εφαρμόζουν **τη μαθηματική ορολογία**, τα σύμβολα, τη γλώσσα
- Επιλέγουν γενικούς κανόνες και εφαρμόζουν επαγωγική και **παραγωγική σκέψη** στην επίλυση προβλημάτων

# Γνώση-Κατανόηση

## Παράδειγμα 1

Να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα, για να υπολογίσετε το γινόμενο 14 x 12.

Λύση:

Δύο ενδεικτικοί τρόποι υπολογισμού του γινομένου είναι οι πιο κάτω:

**Α' τρόπος**

Γράφουμε το 14 ως άθροισμα αριθμών και πολλαπλασιάζουμε ξεχωριστά κάθε όρο της πρόσθεσης με το 12.

$$\begin{aligned} 14 \times 12 &= (10 + 4) \times 12 \\ &= (10 \times 12) + (4 \times 12) \\ &= 120 + 48 \\ &= 168 \end{aligned}$$

**Β' τρόπος**

Γράφουμε το 12 ως άθροισμα αριθμών και πολλαπλασιάζουμε ξεχωριστά κάθε όρο της πρόσθεσης με το 14.

$$\begin{aligned} 14 \times 12 &= 14 \times (10 + 2) \\ &= (14 \times 10) + (14 \times 2) \\ &= 140 + 28 \\ &= 168 \end{aligned}$$

## Δραστηριότητες 2

2.1. Να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα, για να υπολογίσετε το γινόμενο. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(α) 24 x 18 (β) 16 x 15 (γ) 68 x 11 (δ) 22 x 45

Ε΄ τάξη

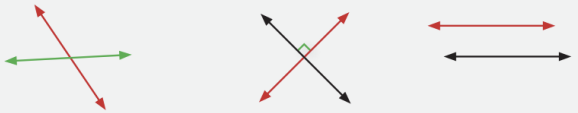
Ενότητα 2

Ιδιότητες των πράξεων

## Παράδειγμα 1

Να χρησιμοποιήσετε μία φράση από το πλαίσιο, για κάθε ζεύγος ευθειών.

« παράλληλες ευθείες» | «τεμνόμενες ευθείες» | «κάθετες ευθείες»

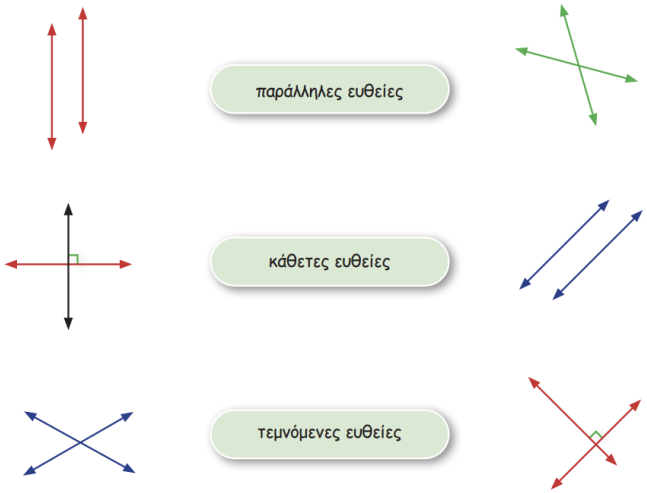


Λύση:

| | |
|---|---|
| (α) τεμνόμενες ευθείες | Οι ευθείες τέμνονται, αφού έχουν ένα κοινό σημείο. |
| (β) κάθετες ευθείες | Οι ευθείες τέμνονται και επιπλέον σχηματίζουν μεταξύ τους ορθή γωνία. |
| (γ) παράλληλες ευθείες | Οι ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. |

## Δραστηριότητες 1

1.1. Να αντιστοιχίσετε.




# Γνώση - Κατανόηση

Ε΄ τάξη

Ενότητα 4

Γεωμετρία

# Κριτήρια Διδασκαλίας




## Β. Εξερεύνηση

- **Εξερεύνηση** – Περιέργεια – Πρόκληση

# Εξερεύνηση

## Εξερεύνηση

Οι Ρώσοι χωρικοί ανέπτυξαν μια πρακτική μέθοδο που τους βοηθούσε να υπολογίζουν εύκολα ένα γινόμενο. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του γινομένου 16 × 25, οι Ρώσοι χωρικοί εργάζονταν με τον ακόλουθο τρόπο:

| | |
|---|---|
| 16 | 25 |
| 8 | 50 |
| 4 | 100 |
| 2 | 200 |
| 1 | 400 |

**Άρα,** 16 × 25 = 400

Να περιγράψετε την πιο πάνω μέθοδο υπολογισμού ενός γινομένου που χρησιμοποιούσαν οι Ρώσοι χωρικοί.

Ε΄ τάξη

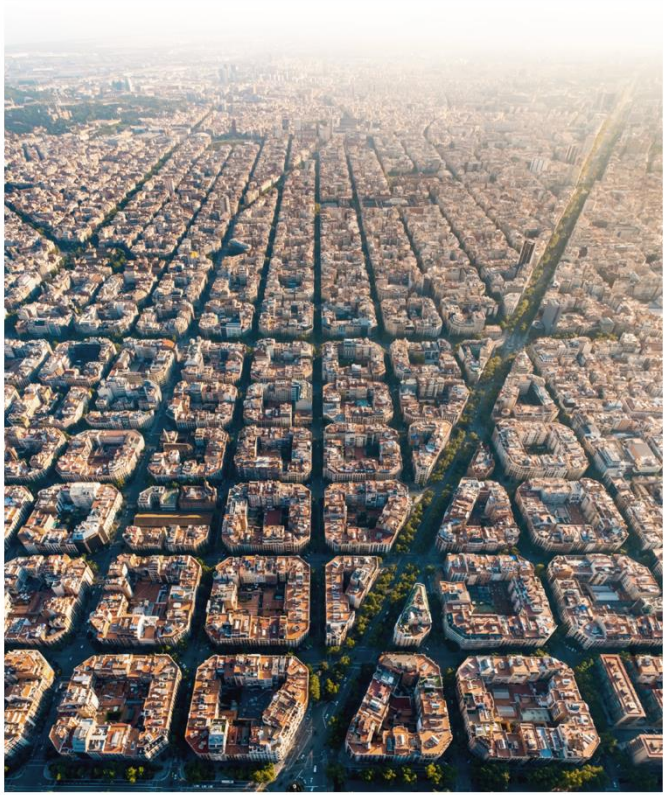
Ενότητα 2

Ιδιότητες των πράξεων

# Εξερεύνηση

## Εξερεύνηση

Η Βαρκελώνη είναι μια πανέμορφη πόλη της Ισπανίας και αποτελεί έναν από τους πιο δημοφιλείς τουριστικούς προορισμούς στον κόσμο. Είναι γνωστή για την πλούσια ιστορία, την τέχνη και την ξεχωριστή αρχιτεκτονική της.
Η πιο κάτω αεροφωτογραφία παρουσιάζει μια περιοχή της Βαρκελώνης.



Η Βαρκελώνη είναι επίσης γνωστή για τον τρόπο με τον οποίο είναι κατασκευασμένοι οι δρόμοι της.

Γιατί νομίζετε συμβαίνει αυτό;

Ε΄ τάξη

Ενότητα 4

Γεωμετρία

# Κριτήρια




## Β. Διερεύνηση

- **Διερεύνηση** – Επέκταση – Εφαρμογή – Δημιουργικότητα – Χρόνος για εργασία μαθητών – Παρέμβαση εκπαιδευτικού **Συμπέρασμα**

# Διερεύνηση

## Διερεύνηση 2

Η επιμεριστική ιδιότητα είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί και στη διαίρεση, όπως φαίνεται πιο κάτω.

$$345 \div 5 = (300 + 40 + 5) \div 5$$
$$= (300 \div 5) + (40 \div 5) + (5 \div 5)$$
$$= 60 + 8 + 1$$
$$= 69$$

345 ÷ 5 = 69

διαιρετέος, πηλίκο, διαιρέτης

(α) Τι παρατηρείτε; Πώς εφαρμόζεται η επιμεριστική ιδιότητα στη διαίρεση;

(β) Να εισηγηθείτε διαφορετικούς τρόπους υπολογισμού του πιο πάνω πηλίκου που βασίζονται στην επιμεριστική ιδιότητα.

Η διαίρεση 345 ÷ 5 είναι **τέλεια**, γιατί δίνει πηλίκο 69 και **υπόλοιπο 0**.

Μία διαίρεση που δίνει υπόλοιπο διαφορετικό από το 0, λέγεται **ατελής**.

Ε΄ τάξη

Ενότητα 2

Ιδιότητες των πράξεων

# Διερεύνηση

## Διερεύνηση 1

Πιο κάτω παρουσιάζεται μία μέθοδος υπολογισμού του πηλίκου 120 ÷ 15.

120 ÷ 15
÷3 ÷3
40 ÷ 5 = 8
Άρα, 120 ÷ 15 = 8

ή

$$\frac{120}{15} \overset{\div 3}{=} \frac{40}{5} = 40 \div 5 = 8$$

120 ÷ 15
÷5 ÷5
24 ÷ 3 = 8
Άρα, 120 ÷ 15 = 8

ή

$$\frac{120}{15} \overset{\div 5}{=} \frac{24}{3} = 24 \div 3 = 8$$

Κάθε διαίρεση είναι δυνατόν να γραφεί με τη μορφή κλάσματος.

$120 \div 15 = \frac{120}{15}$

(α) Πώς διευκολύνει η πιο πάνω μέθοδος τον υπολογισμό του πηλίκου;

(β) Να εφαρμόσετε την πιο πάνω μέθοδο, για να υπολογίσετε το πηλίκο:

(i) 210 ÷ 35

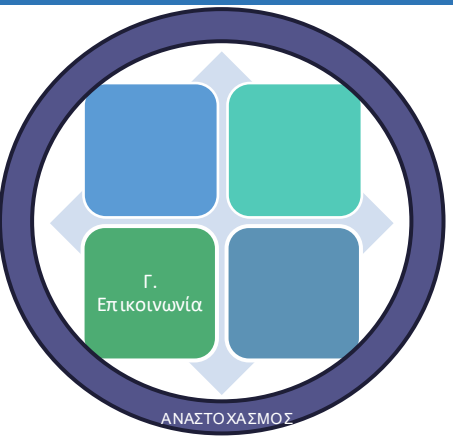
(ii) $\frac{450}{150}$

Ε΄ τάξη

Ενότητα 2

Ιδιότητες των πράξεων

# Κριτήρια Διδασκαλίας



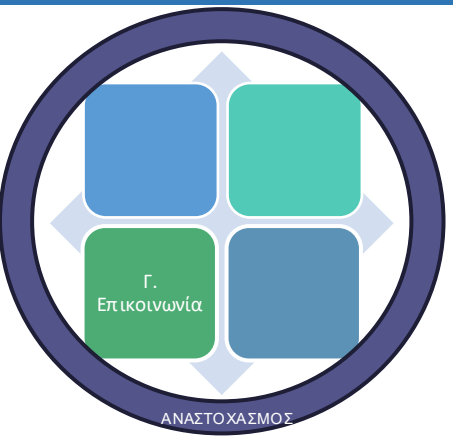

## Γ. Επικοινωνία

Είναι η ικανότητα των μαθητών να **εκφράζουν, να εξηγούν, να αιτιολογούν και να συζητούν** χρησιμοποιώντας λόγο, γραπτό κείμενο, σύμβολα, διαγράμματα και μοντέλα.

**Οι μαθητές/τριες:**

- Χρησιμοποιούν σωστή μαθηματική ορολογία.
- Εξηγούν τα βήματα και τις στρατηγικές τους.
- Παρουσιάζουν ιδέες με πίνακες, γραφήματα και διαγράμματα.
- Αιτιολογούν γιατί μια λύση είναι σωστή.
- Συμμετέχουν σε συζητήσεις και επιχειρηματολογούν.

# Κριτήρια Διδασκαλίας




## Γ. Επικοινωνία

**1. Επεξηγηματική επικοινωνία**
Ο μαθητής εξηγεί μια μαθηματική ιδέα σε συμμαθητή, γονέα ή νεότερο μαθητή.

**2. Επιχειρηματολογική επικοινωνία**
Ο μαθητής αιτιολογεί γιατί μια λύση είναι σωστή ή ποια στρατηγική είναι αποτελεσματικότερη.

**3. Ερευνητική επικοινωνία**
Παρουσιάζει ερωτήματα, υποθέσεις, δεδομένα και συμπεράσματα μιας διερεύνησης.

**4. Οπτική επικοινωνία**
Χρήση διαγραμμάτων, γραφημάτων, GeoGebra, μοντέλων, χαρτών εννοιών ή infographics.

**5. Διαθεματική επικοινωνία**
Σύνδεση των μαθηματικών με επιστήμη, τέχνη, ιστορία, οικονομία ή τεχνολογία.

# Επικοινωνία

Επικοινωνία

1.3. Γνωρίζουμε ότι στην πρόσθεση και στον πολλαπλασιασμό ισχύει η **αντιμεταθετική ιδιότητα**:

Όταν προσθέτουμε ή πολλαπλασιάζουμε δύο αριθμούς, το τελικό αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από τη σειρά με την οποία κάνουμε τις προσθέσεις ή τους πολλαπλασιασμούς.

Για παράδειγμα $4 + 5 = 5 + 4$ και $3 \times 7 = 3 \times 7$.

Να εισηγηθείτε μία δική σας διερεύνηση, η οποία να εξετάζει αν η αντιμεταθετική ιδιότητα ισχύει στην αφαίρεση και στη διαίρεση.

1.4. Να συμπληρώσετε τον αριθμό που λείπει σε κάθε περίπτωση.

(α) $35 + 18 = 18 +$ _____

(β) $25 \times 7 \times 4 = 25 \times$ _____ $\times 7$

(γ) $25 + 49 + 15 =$ _____ $+ 25 + 15$

(δ) $45 \times 9 \times$ _____ $= 45 \times 2 \times 9$

(ε) $14 + 39 + 26 =$ _____ $+ 39$

(στ) $25 \times 48 \times$ _____ $= 50 \times 48$

## Επικοινωνία

Ε΄ τάξη

Ενότητα 2

Ιδιότητες των πράξεων

# Επικοινωνία

Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus

**Επικοινωνία**

3.2. Η Σοφία θα χρησιμοποιήσει υπολογιστική μηχανή, για να υπολογίσει το πηλίκο 200 ÷ 8. Το πλήκτρο 8 της μηχανής δεν λειτουργεί. Πώς είναι δυνατόν να υπολογίσει το πηλίκο; Να βρείτε δύο διαφορετικούς τρόπους.






3.3. Να αντιστοιχίσετε κάθε δήλωση με την κατάλληλη λέξη **ΟΡΘΟ** ή **ΛΑΘΟΣ**. Να εξηγήσετε.

(α) Για να υπολογίσουμε το πηλίκο 264 ÷ 12, διαιρούμε πρώτα το 264 διά 2 και στη συνέχεια διαιρούμε το αποτέλεσμα διά 6.

(β) Για να υπολογίσουμε το πηλίκο 216 ÷ 24, διαιρούμε πρώτα το 216 διά 4 και στη συνέχεια διαιρούμε το αποτέλεσμα διά 8.

(γ) Για να υπολογίσουμε το πηλίκο 420 ÷ 15, διαιρούμε πρώτα το 420 διά 10 και στη συνέχεια διαιρούμε το αποτέλεσμα διά 5.

(δ) Για να υπολογίσουμε το πηλίκο 144 ÷ 16, διαιρούμε πρώτα το 144 διά 2 και στη συνέχεια διαιρούμε το αποτέλεσμα διά 8.

ΟΡΘΟ

ΛΑΘΟΣ

## Επικοινωνία

Ε΄ τάξη

Ενότητα 2

Ιδιότητες των πράξεων

# Κριτήρια Διδασκαλίας




## Δ. Εφαρμογές

- Χρησιμοποιούν τα μαθηματικά, για να παίρνουν αποφάσεις.
- Εφαρμόζουν μαθηματικές έννοιες σε νέα πλαίσια.
- Συνδέουν τα μαθηματικά με άλλα γνωστικά αντικείμενα.
- Ελέγχουν αν οι λύσεις τους είναι λογικές και χρήσιμες.
- Κατασκευάζουν προβλήματα

# Εφαρμογές

Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus

Εφαρμογή

4 Ο Σάββας παρακολουθεί κάθε χρόνο τους εντός έδρας αγώνες της αγαπημένης του ποδοσφαιρικής ομάδας. Έχει τις πιο κάτω επιλογές για την αγορά των εισιτηρίων.

Επιλογή Α: Το εισιτήριο για κάθε αγώνα κοστίζει €17.

Επιλογή Β: Το εισιτήριο διαρκείας κοστίζει €200.

Φέτος, ο Σάββας προγραμματίζει να παρακολουθήσει 14 αγώνες. Ποια επιλογή νομίζετε ότι είναι η πιο συμφέρουσα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



## Εφαρμογές

Ε΄ τάξη

Ενότητα 3

Αριθμοί και Πράξεις

# Εφαρμογές

Εφαρμογή

1.4. Σε μια σχολική εκδρομή χρειάζεται η μεταφορά με λεωφορεία 576 παιδιών και 32 ενηλίκων. Το κάθε λεωφορείο έχει τη δυνατότητα να μεταφέρει μέχρι και 55 επιβάτες.




Με ποιο από τα παιδιά συμφωνείτε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

## Εφαρμογές

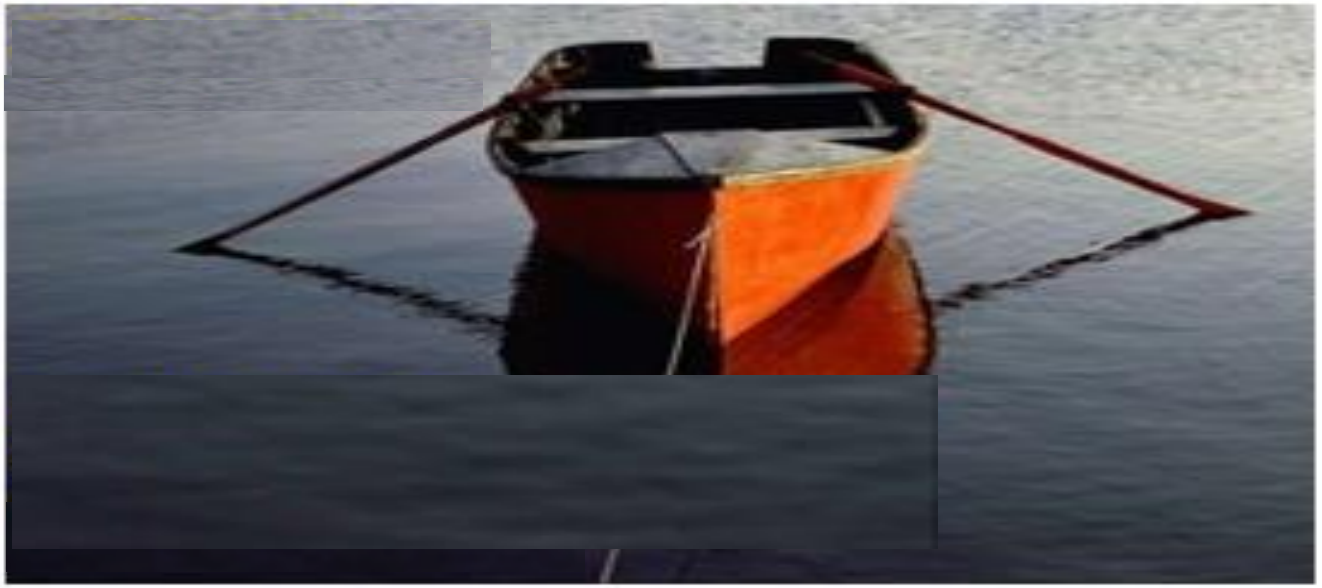
Ε΄ τάξη

Ενότητα 3

Αριθμοί και πράξεις

# Αναστοχασμός

## Αναστοχασμός:



**Προηγουμένως σκεφτόμουν…**

**Τώρα σκέφτομαι ότι…**

**Και αυτό γιατί …**

# Αναστοχασμός

Γνωριμία με την ανθρώπινη σκέψη

Ανάπτυξη της δεξιότητας για ανάκληση και ανάλυση της γνώσης με βάση τις εμπειρίες που απόκτησε στο μάθημα

# Ο Αναστοχασμός ως διαδικασία μάθησης

1. **Κατανόηση της μαθησιακής διαδικασίας**
   *πώς* έλυσαν ένα πρόβλημα, *τι δυσκολίες αντιμετώπισαν* και *πώς τις ξεπέρασαν*.
2. **Ανάπτυξη μαθηματικής γλώσσας και επιχειρηματολογίας**
   εκφράζουν τις μαθηματικές τους σκέψεις με ακρίβεια και σαφήνεια.
3. **Ενίσχυση της αυτορρύθμισης**
   εντοπίζουν τα λάθη τους, αξιολογούν τις επιλογές τους.
4. **Σύνδεση με την πραγματική ζωή**

   αντιλαμβάνονται τη σημασία των μαθηματικών πέρα από την τάξη, ως εργαλείο σκέψης και επίλυσης προβλημάτων

# Αναστοχασμός

Η συνειδητή διερεύνηση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών, των στρατηγικών που χρησιμοποιούν, των λαθών τους και της εξέλιξης της κατανόησής τους.

# Αναστοχασμός

Σκέφτονται συνειδητά:

- τι έμαθαν, **(Γνωστικός αναστοχασμός)**
- πώς το έμαθαν, γιατί λειτούργησε ή δεν λειτούργησε η στρατηγική που χρησιμοποίησαν, **(Στρατηγικός αναστοχασμός)**
- πώς είναι δυνατό να βελτιώσουν τη μαθηματική τους σκέψη, **(Αναστοχασμός λάθους)**
- πώς συνδέεται η νέα γνώση με προηγούμενες εμπειρίες ή με πραγματικές καταστάσεις **(Μεταγνωστικός αναστοχασμός)**

# Αναστοχασμός

- Κατά τη διάρκεια μιας διερεύνησης
- Μετά τις δραστηριότητες ή τη λύση προβλήματος
- Για επέκταση της σκέψης
- Στο τέλος του μαθήματος
- Για εισαγωγή σε επόμενο μάθημα
- Μετά τη διαμορφωτική αξιολόγηση

# Αναστοχασμός

Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus

## Αναστοχασμός

Να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα, για να υπολογίσετε το πηλίκο 297 ÷ 3 με τρεις διαφορετικούς τρόπους.

Ε΄ τάξη

Ενότητα 2

Ιδιότητες των πράξεων

# Αναστοχασμός

## Αναστοχασμός

Η Χαρά κατέληξε στον πιο κάτω γενικό κανόνα:

Όταν ο διαιρετέος παραμένει ο ίδιος και ο διαιρέτης μεγαλώνει, τότε το πηλίκο μικραίνει. Για παράδειγμα:

$168 \div 12 = \boxed{14}$

$168 \div 24 = \boxed{7}$

Να παρατηρήσετε το πιο κάτω παράδειγμα. Να διατυπώσετε έναν άλλο γενικό κανόνα που προκύπτει από αυτό.

$612 \div 18 = \boxed{34}$

$306 \div 18 = \boxed{17}$

Ε΄ τάξη

Ενότητα 3

Αριθμοί και πράξεις

# Εμφάσεις στα Βιβλία Μαθηματικών

**Δ' τάξη**

- Αξιοποίηση της έννοιας της ισότητας και των ιδιοτήτων των πράξεων για την απλοποίηση υπολογισμών

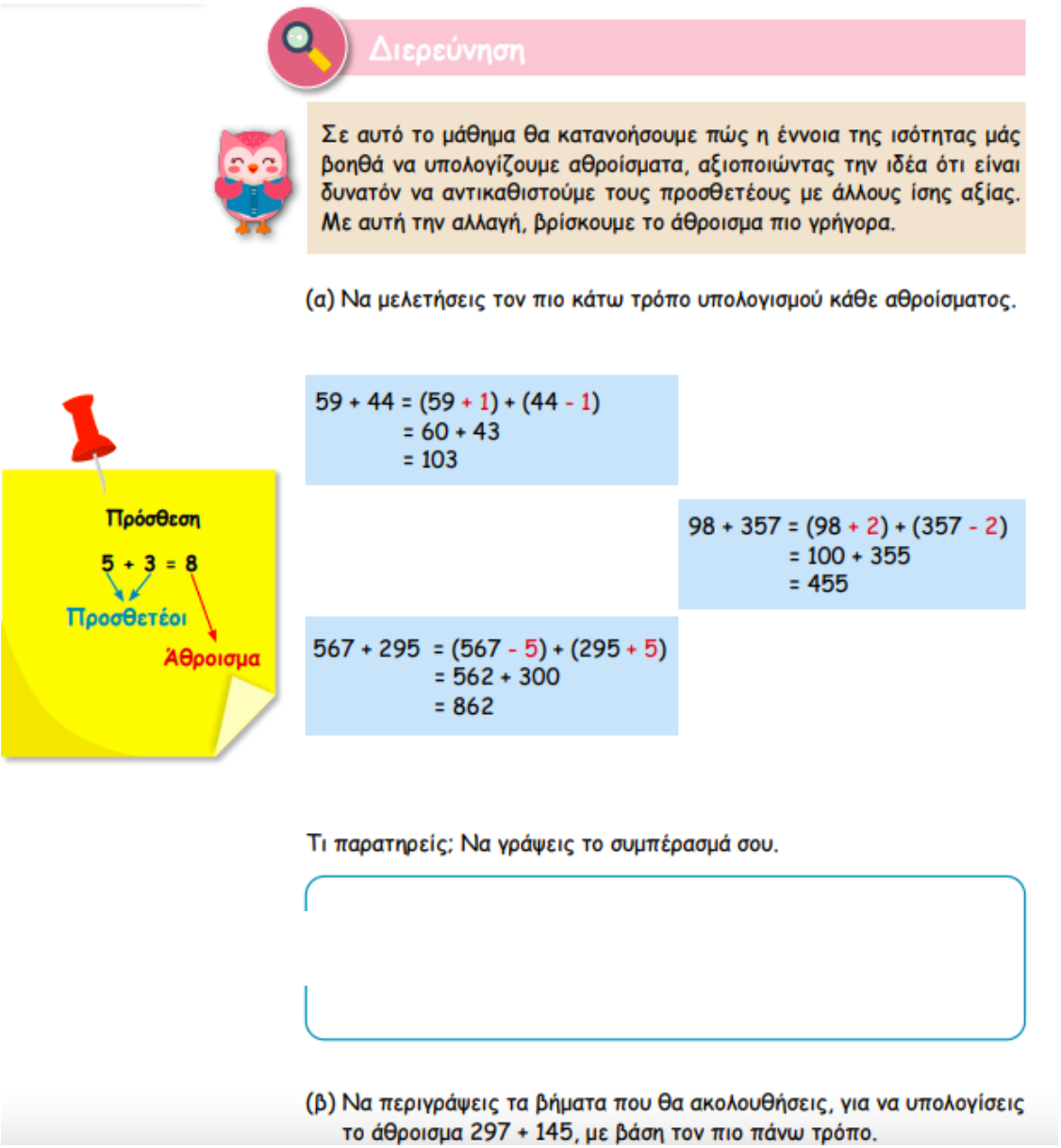
**Ε' τάξη**

- Επέκταση της μαθηματικής σκέψης από τους ακέραιους στους ρητούς αριθμούς

**Στ' τάξη**

- Εφαρμογή παραγωγικού συλλογισμού
- Υπολογιστική σκέψη

# Εμφάσεις στα Βιβλία Μαθηματικών



## Διερεύνηση

Σε αυτό το μάθημα θα κατανοήσουμε πώς η έννοια της ισότητας μάς βοηθά να υπολογίζουμε αθροίσματα, αξιοποιώντας την ιδέα ότι είναι δυνατόν να αντικαθιστούμε τους προσθετέους με άλλους ίσης αξίας. Με αυτή την αλλαγή, βρίσκουμε το άθροισμα πιο γρήγορα.

(α) Να μελετήσεις τον πιο κάτω τρόπο υπολογισμού κάθε αθροίσματος.

**Πρόσθεση**

5 + 3 = 8

Προσθετέοι

Άθροισμα

59 + 44 = (59 + 1) + (44 - 1)
= 60 + 43
= 103

98 + 357 = (98 + 2) + (357 - 2)
= 100 + 355
= 455

567 + 295 = (567 - 5) + (295 + 5)
= 562 + 300
= 862

Τι παρατηρείς; Να γράψεις το συμπέρασμά σου.

(β) Να περιγράψεις τα βήματα που θα ακολουθήσεις, για να υπολογίσεις το άθροισμα 297 + 145, με βάση τον πιο πάνω τρόπο.

**Δ' τάξη**

Αξιοποίηση της έννοιας της ισότητας και των ιδιοτήτων των πράξεων για την απλοποίηση υπολογισμών

Ενότητα 3

Αριθμοί

Πρόσθεση και αφαίρεση

# Εμφάσεις στα Βιβλία Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus

## ΜΑΘΗΜΑ 5

### Εξερεύνηση

(α) Να γράψετε μία κατάλληλη μαθηματική πρόταση και να επιλύσετε κάθε πρόβλημα.

A.

Ένας αγώνας καλαθοσφαίρισης είχε 40 λεπτά καθαρού αγωνιστικού χρόνου και επιπλέον 55 λεπτά λόγω του διαλείμματος του ημιχρόνου και των διακοπών. Πόσα λεπτά διήρκεσε συνολικά ο αγώνας;

Μαθηματική πρόταση: _____

Απάντηση: _____

B.

Ένας αγώνας καλαθοσφαίρισης είχε 40 λεπτά καθαρού αγωνιστικού χρόνου και επιπλέον 1 ώρα λόγω του διαλείμματος του ημιχρόνου και των διακοπών. Πόσα λεπτά διήρκεσε συνολικά ο αγώνας;

Μαθηματική πρόταση: _____

Απάντηση: _____

Πώς διαφέρουν τα δύο προβλήματα; Ποιο επιπρόσθετο βήμα χρειάστηκε να κάνετε, για να επιλύσετε το πρόβλημα B;

(β) Να γράψετε μία κατάλληλη μαθηματική πρόταση για κάθε πρόβλημα.

A.

Σε μια σχολική αυλή, τα $\frac{5}{8}$ της επιφάνειας καταλαμβάνει το γήπεδο καλαθοσφαίρισης και το $\frac{1}{8}$ ο χώρος παιχνιδιών. Τι μέρος της επιφάνειας της αυλής καταλαμβάνει το γήπεδο και ο χώρος παιχνιδιών;

Μαθηματική πρόταση: _____

B.

Σε μια σχολική αυλή, τα $\frac{5}{8}$ της επιφάνειας καταλαμβάνει το γήπεδο καλαθοσφαίρισης και το $\frac{1}{4}$ ο χώρος παιχνιδιών. Τι μέρος της επιφάνειας της αυλής καταλαμβάνει το γήπεδο και ο χώρος παιχνιδιών;

Μαθηματική πρόταση: _____

Σε ποιο από τα δύο προβλήματα θα χρειαστεί να κάνετε ένα επιπρόσθετο βήμα, για να το επιλύσετε;

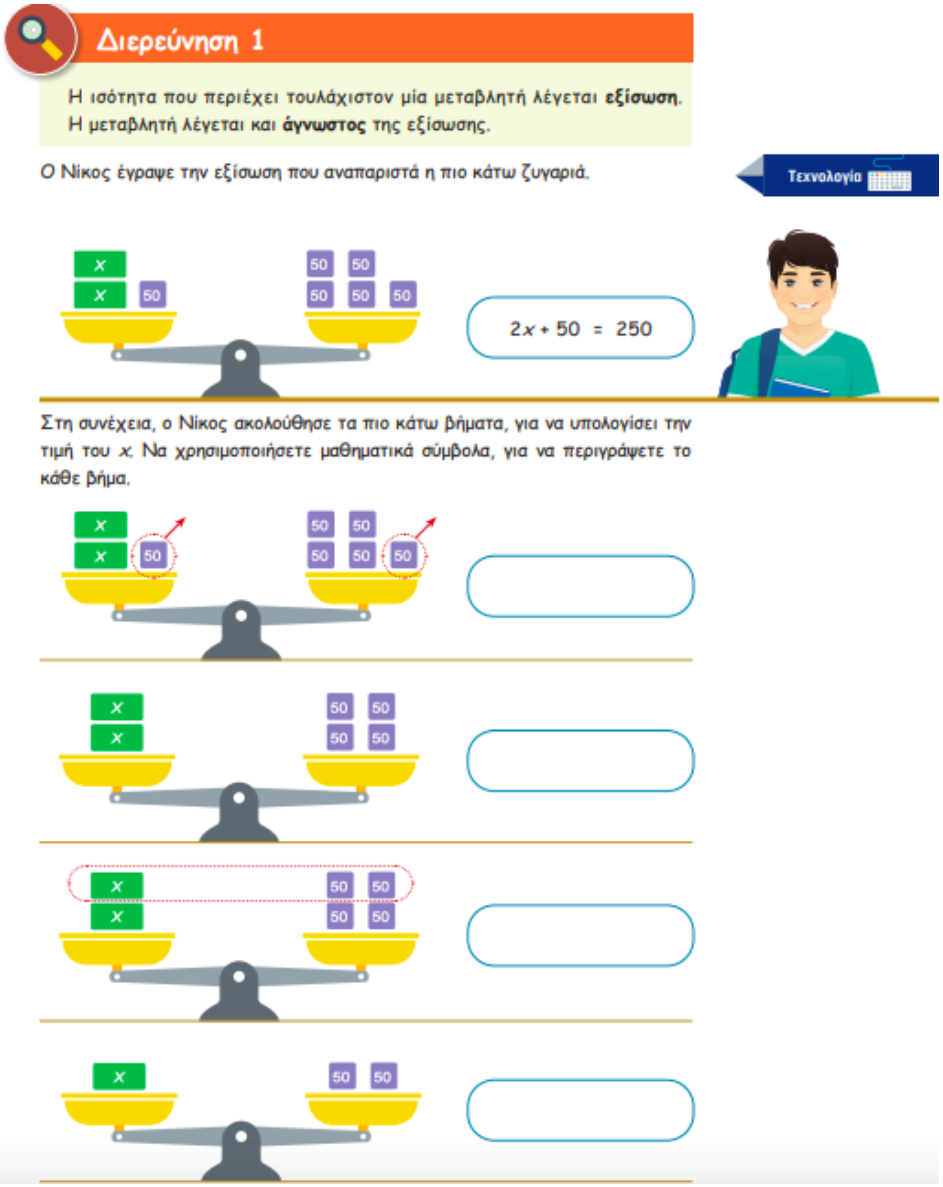
## Ε’ τάξη

Επέκταση της μαθηματικής σκέψης από τους ακέραιους στους ρητούς αριθμούς

Ενότητα 7

Κλάσματα

# Εμφάσεις στα Βιβλία Μαθηματικών



## Διερεύνηση 1

Η ισότητα που περιέχει τουλάχιστον μία μεταβλητή λέγεται **εξίσωση**.
Η μεταβλητή λέγεται και **άγνωστος** της εξίσωσης.

Ο Νίκος έγραψε την εξίσωση που αναπαριστά η πιο κάτω ζυγαριά.

Τεχνολογία

$2x + 50 = 250$

Στη συνέχεια, ο Νίκος ακολούθησε τα πιο κάτω βήματα, για να υπολογίσει την τιμή του $x$. Να χρησιμοποιήσετε μαθηματικά σύμβολα, για να περιγράψετε το κάθε βήμα.

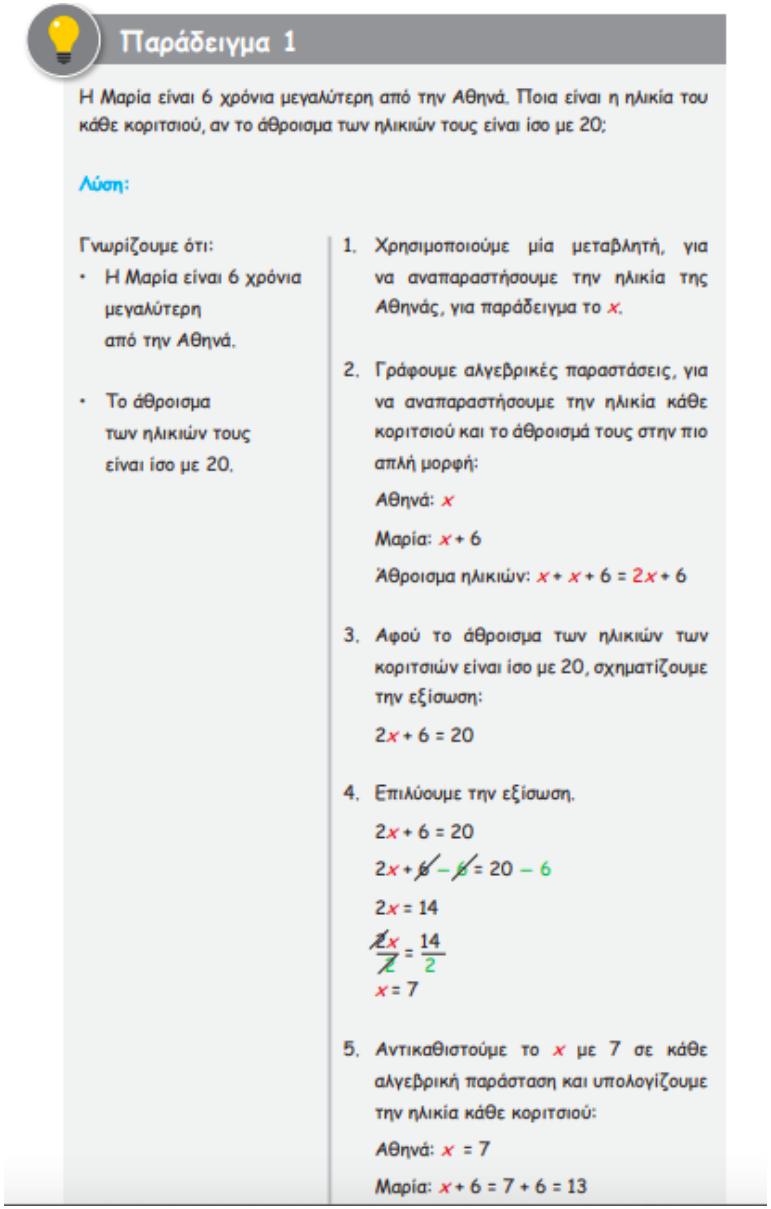
## Στ' τάξη

Εφαρμογή παραγωγικού συλλογισμού

Ενότητα 2

Άλγεβρα

# Εμφάσεις στα Βιβλία Μαθηματικών



## Παράδειγμα 1

Η Μαρία είναι 6 χρόνια μεγαλύτερη από την Αθηνά. Ποια είναι η ηλικία του κάθε κοριτσιού, αν το άθροισμα των ηλικιών τους είναι ίσο με 20;

**Λύση:**

Γνωρίζουμε ότι:

- Η Μαρία είναι 6 χρόνια μεγαλύτερη από την Αθηνά.
- Το άθροισμα των ηλικιών τους είναι ίσο με 20.

1. Χρησιμοποιούμε μία μεταβλητή, για να αναπαραστήσουμε την ηλικία της Αθηνάς, για παράδειγμα το $x$.

2. Γράφουμε αλγεβρικές παραστάσεις, για να αναπαραστήσουμε την ηλικία κάθε κοριτσιού και το άθροισμά τους στην πιο απλή μορφή:

   Αθηνά: $x$

   Μαρία: $x + 6$

   Άθροισμα ηλικιών: $x + x + 6 = 2x + 6$

3. Αφού το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι ίσο με 20, σχηματίζουμε την εξίσωση:

   $2x + 6 = 20$

4. Επιλύουμε την εξίσωση.

   $2x + 6 = 20$

   $2x + \cancel{6} - \cancel{6} = 20 - 6$

   $2x = 14$

   $\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{14}{2}$

   $x = 7$

5. Αντικαθιστούμε το $x$ με 7 σε κάθε αλγεβρική παράσταση και υπολογίζουμε την ηλικία κάθε κοριτσιού:

   Αθηνά: $x = 7$

   Μαρία: $x + 6 = 7 + 6 = 13$

## Στ’ τάξη

Ακολουθία διαδοχικών βημάτων για την εκτέλεση υπολογισμών και την επίλυση προβλημάτων

Ενότητα 2

Άλγεβρα

- Τα Μαθηματικά στον κόσμο
- Εξερεύνηση
- Διερεύνηση
- Αναστοχασμός
- Παράδειγμα 1
- Δραστηριότητες 1
- Μικρή Επανάληψη
- Διαμορφωτική Αξιολόγηση
- Περίληψη Ενότητας
- Επιπρόσθετες Δραστηριότητες






# Διαμορφωτική Αξιολόγηση

## Διαμορφωτική Αξιολόγηση

1. Να εκτιμήσετε και να υπολογίσετε το πηλίκο 892 ÷ 31.

2. Να υπολογίσετε κατακόρυφα το πηλίκο. Να επαληθεύσετε την απάντησή σας.

   (α) 472 ÷ 14

   (β) 543 ÷ 23

3. Σε μια αποθήκη υπάρχουν 35 κιβώτια με αμύγδαλα. Κάθε κιβώτιο περιέχει 48 συσκευασίες. Μια τοπική καφετέρια προμηθεύεται από την αποθήκη αυτή 56 συσκευασίες την εβδομάδα. Για πόσες εβδομάδες επαρκεί η ποσότητα της αποθήκης;

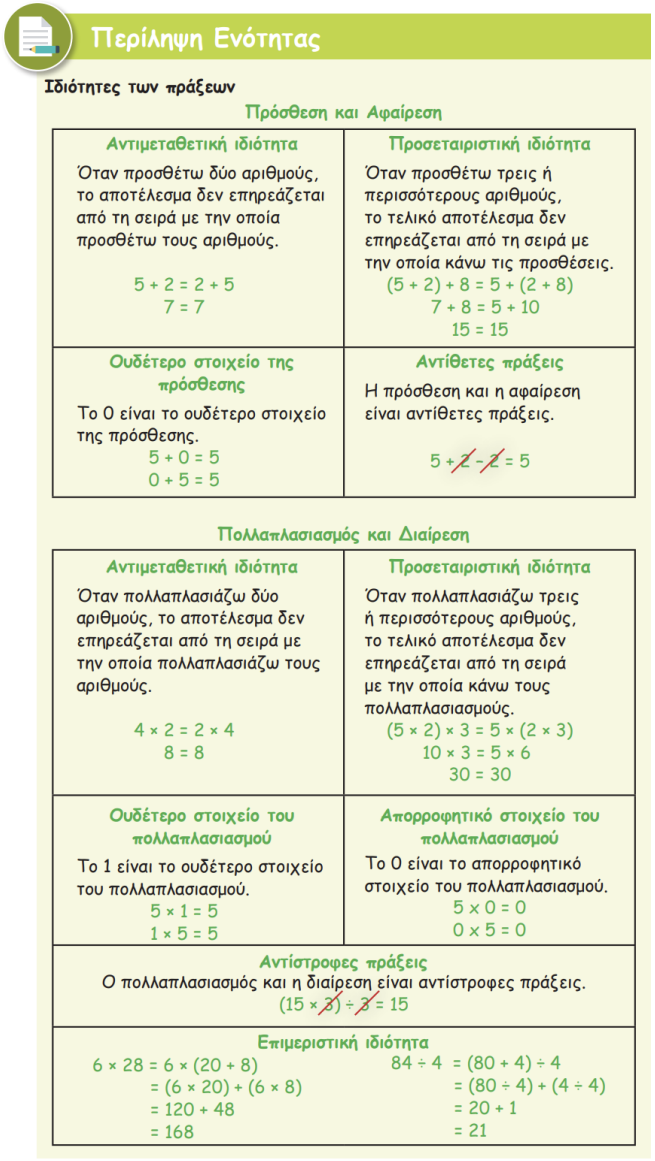
4. Να γράψετε δύο διαφορετικές διαιρέσεις με πηλίκο 24 και υπόλοιπο 3.

Ε΄ τάξη

Ενότητα 3

Αριθμοί και πράξεις

# Περίληψη Ενότητας



## Περίληψη Ενότητας

**Ιδιότητες των πράξεων**

### Πρόσθεση και Αφαίρεση

| Αντιμεταθετική ιδιότητα | Προσεταιριστική ιδιότητα |
|---|---|
| Όταν προσθέτω δύο αριθμούς, το αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από τη σειρά με την οποία προσθέτω τους αριθμούς.<br>$5 + 2 = 2 + 5$<br>$7 = 7$ | Όταν προσθέτω τρεις ή περισσότερους αριθμούς, το τελικό αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από τη σειρά με την οποία κάνω τις προσθέσεις.<br>$(5 + 2) + 8 = 5 + (2 + 8)$<br>$7 + 8 = 5 + 10$<br>$15 = 15$ |
| **Ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**<br>Το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης.<br>$5 + 0 = 5$<br>$0 + 5 = 5$ | **Αντίθετες πράξεις**<br>Η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι αντίθετες πράξεις.<br>$5 + 2 - 2 = 5$ |

### Πολλαπλασιασμός και Διαίρεση

| Αντιμεταθετική ιδιότητα | Προσεταιριστική ιδιότητα |
|---|---|
| Όταν πολλαπλασιάζω δύο αριθμούς, το αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από τη σειρά με την οποία πολλαπλασιάζω τους αριθμούς.<br>$4 \times 2 = 2 \times 4$<br>$8 = 8$ | Όταν πολλαπλασιάζω τρεις ή περισσότερους αριθμούς, το τελικό αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από τη σειρά με την οποία κάνω τους πολλαπλασιασμούς.<br>$(5 \times 2) \times 3 = 5 \times (2 \times 3)$<br>$10 \times 3 = 5 \times 6$<br>$30 = 30$ |
| **Ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**<br>Το 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.<br>$5 \times 1 = 5$<br>$1 \times 5 = 5$ | **Απορροφητικό στοιχείο του πολλαπλασιασμού**<br>Το 0 είναι το απορροφητικό στοιχείο του πολλαπλασιασμού.<br>$5 \times 0 = 0$<br>$0 \times 5 = 0$ |
| **Αντίστροφες πράξεις**<br>Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις.<br>$(15 \times 3) \div 3 = 15$ | |
| **Επιμεριστική ιδιότητα**<br>$6 \times 28 = 6 \times (20 + 8)$<br>$= (6 \times 20) + (6 \times 8)$<br>$= 120 + 48$<br>$= 168$ | $84 \div 4 = (80 + 4) \div 4$<br>$= (80 \div 4) + (4 \div 4)$<br>$= 20 + 1$<br>$= 21$ |

# Περίληψη ενότητας

Ε΄ τάξη

Ενότητα 2

Ιδιότητες των πράξεων

# Επιπρόσθετες Δραστηριότητες

Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus

## Επιπρόσθετες Δραστηριότητες

Ανάλυση, σύνθεση, πρόσθεση και αφαίρεση αριθμών μέχρι τα 100 000 000

**1** Να βάλετε σε κύκλο την ορθή απάντηση.

(α) Ποια είναι η αξία του ψηφίου 9 στον αριθμό 39 768 072;

(i) 9 εκατοντάδες (ii) 9 εκατοντάδες χιλιάδες (iii) 9 εκατομμύρια (iv) 9 μονάδες

(β) Σε ποιον αριθμό η αξία του ψηφίου 8 είναι 800 000;

(i) 128 070 764 (ii) 148 050 (iii) 814 901 (iv) 83 502

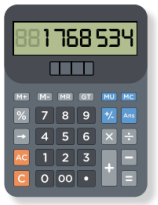
**2** Να συμπληρώσετε το ψηφίο που λείπει σε κάθε αριθμό.

(α) 64 __ 67 < 64 26 __ < 64 2 __ 9

(β) 545 __ 18 < 545 61 __ < 545 62 __

(γ) 51 __ 999 < 51 __ 000 < 519 00 __

**3** Ο Άγγελος έγραψε στην υπολογιστική μηχανή τον αριθμό 1 768 534.




Ποιον αριθμό χρειάζεται να προσθέσει κάθε φορά στο 1 768 534, ώστε:

(α) το ψηφίο 4 να γίνει 9 _____ (β) το ψηφίο 8 να γίνει 9 _____

(γ) το ψηφίο 5 να γίνει 7 _____ (δ) το ψηφίο 1 να γίνει 8 _____

Ε΄ τάξη

Ενότητα 3

Αριθμοί και πράξεις

# Μικρή Επανάληψη

## Μικρή Επανάληψη

1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα, για να σχηματίσετε τον κάθε αριθμό με δύο διαφορετικούς τρόπους.

| Συμβολική μορφή αριθμού | Χ | Ε | Δ | Μ | Αναλυτική μορφή αριθμού |
|---|---|---|---|---|---|
| 1935 | | | | | |
| 1935 | | | | | |
| 5407 | | | | | |
| 5407 | | | | | |

2. Να συμπληρώσετε.

(α) 5429 → ____ χιλιάδες και ____ εκατοντάδες και ____ μονάδες

(β) 3464 → ____ εκατοντάδες και ____ δεκάδες και ____ μονάδες

Ε΄ τάξη

Ενότητα

Ιδιότητες των πράξεων

# Παραδείγματα

## Παράδειγμα 1

Να γράψετε σε λεκτική μορφή τους πιο κάτω αριθμούς.

(α) 34 510 (β) 345 100 (γ) 3 451 000

Λύση:

(α) 34 510

Τριάντα τέσσερις χιλιάδες πεντακόσια δέκα

| | |
|---|---|
| 34 | 510 |
| χιλιάδες | μονάδες |

(β) 345 100

Τριακόσιες σαράντα πέντε χιλιάδες εκατόν

| | |
|---|---|
| 345 | 100 |
| χιλιάδες | μονάδες |

(γ) 3 451 000

Τρία εκατομμύρια

τετρακόσιες πενήντα μία χιλιάδες

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 451 | 000 |
| εκατομμύρια | χιλιάδες | μονάδες |

Ε΄ τάξη

Ενότητα 3

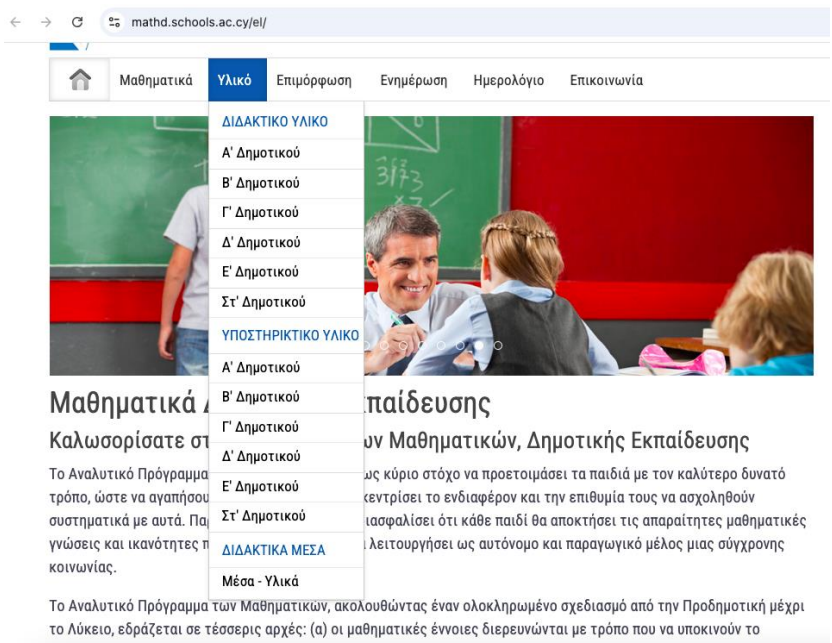
Αριθμοί και πράξεις

# Προγραμματισμοί και Υποστηρικτικό Υλικό

# Προγραμματισμοί και Υποστηρικτικό Υλικό

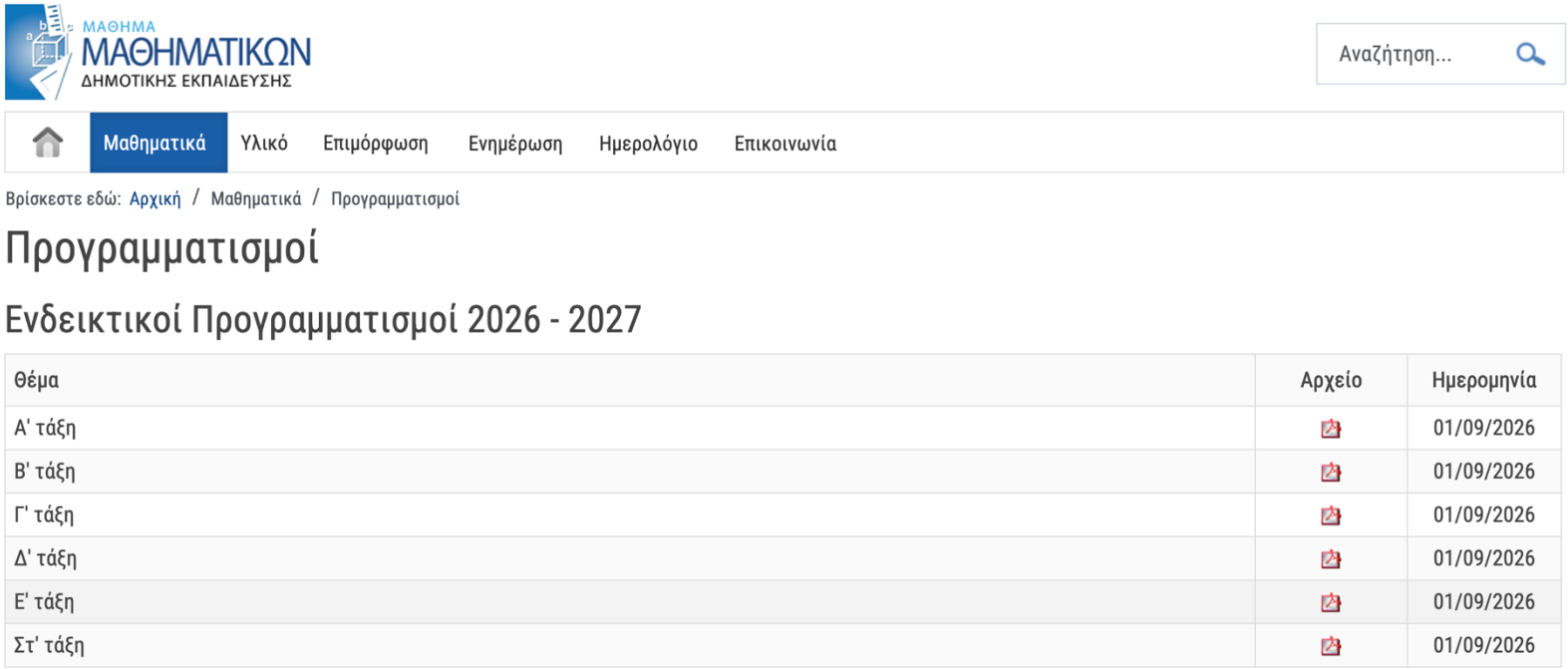
https://mathd.schools.ac.cy/el/



# Προγραμματισμοί

https://mathd.schools.ac.cy/el/mathimatika/programmatismoi



# Προγραμματισμός Ε’



**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ε’ ΤΑΞΗΣ**

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ - ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2026-2027**

| Χρονική Περίοδος | Μέρος | Ενότητα | Τίτλος | Θέματα | Ενδεικτικός αριθμός διδακτικών περιόδων |
|---|---|---|---|---|---|
| **Α’ Τρίμηνο**<br>**14/9/26 – 22/12/26** | Μέρος 1 | 1 | Επανάληψη | 1. Αριθμοί μέχρι το 10 000<br>2. Πρόσθεση και αφαίρεση αριθμών<br>3. Πολλαπλάσια και διαιρέτες<br>4. Πολλαπλασιασμός ακέραιων αριθμών<br>5. Διαίρεση ακέραιων αριθμών | 12 |
| | | 2 | Ιδιότητες των πράξεων | 1. Προσεταιριστική και αντιμεταθετική ιδιότητα πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού<br>2. Επιμεριστική ιδιότητα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης<br>3. Ιδιότητες πολλαπλασιασμού και στρατηγικές υπολογισμού γινομένου<br>4. Ιδιότητες διαίρεσης και στρατηγικές υπολογισμού πηλίκου | 18 |
| | | 3 | Αριθμοί - Πράξεις | 1. Αριθμοί μέχρι τα 100 000 000<br>2. Εκτίμηση γινομένου<br>3. Διψήφιος πολλαπλασιασμός<br>4. Εκτίμηση πηλίκου<br>5. Διψήφια διαίρεση | 24 |
| | | 4 | Γεωμετρία Ι | 1. Ευθεία, ημιευθεία και ευθύγραμμο τμήμα<br>2. Παράλληλες, τεμνόμενες και κάθετες ευθείες<br>3. Εκτίμηση και μέτρηση γωνιών | 12 |
| **ΔΙΑΚΟΠΕΣ ΧΡΙΣΤΟΥΓΕΝΝΩΝ**<br>**23/12/26 - 6/1/2027** | | | | | |
| **Β’ Τρίμηνο**<br>**7/1/27 –** | Μέρος 2 | 5 | Διαιρετότητα | 1. Βέννειο Διάγραμμα - Πολλαπλάσια και διαιρέτες<br>2. Κριτήρια διαιρετότητα 2, 5, 10 και 4<br>3. Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί<br>4. Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης<br>5. Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο | 18 |

# Προγραμματισμός Ε’



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **23/4/27** | | 6 | Γεωμετρία ΙΙ - Στατιστική | 1. Διατεταγμένα ζεύγη<br>2. Γραμμική γραφική παράσταση | 6 |
| | | 7 | Κλάσματα | 1. Υπολογισμός κλασματικού μέρους αριθμού<br>2. Ισοδυναμία και απλοποίηση κλασμάτων<br>3. Μικτοί αριθμοί και καταχρηστικά κλάσματα – μετατροπές<br>4. Σύγκριση κλασμάτων<br>5. Πρόσθεση και αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων και μικτών αριθμών | 25 |
| | Μέρος 3 | 8 | Δεκαδικοί αριθμοί | 1. Αισθητοποίηση δεκαδικών αριθμών (δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά)<br>2. Πρόσθεση και αφαίρεση δεκαδικών αριθμών<br>3. Μετατροπές μονάδων μέτρησης μήκους, μάζας, χωρητικότητας<br>4. Επίλυση και κατασκευή προβλήματος | 12 |
| **ΔΙΑΚΟΠΕΣ ΠΑΣΧΑ**<br>**26/4/27 - 7/5/2027** | | | | | |
| **Γ’ Τρίμηνο**<br>**9/5/27 - 16/6/27** | | 9 | Άλγεβρα - Στατιστική | 1. Έννοια μεταβλητής και αλγεβρικής παράστασης<br>2. Σχηματικά μοτίβα<br>3. Πιθανότητες | 10 |
| | | 10 | Γεωμετρία ΙΙΙ - Μέτρηση | 1. Εμβαδόν τριγώνου<br>2. Παραλληλόγραμμα<br>3. Εμβαδόν παραλληλογράμμου<br>4. Υπολογισμός περιμέτρου και εμβαδού ευθύγραμμων σχημάτων<br>5. Μετασχηματισμοί (μεταφορά, συμμετρία, ανάκλαση)<br>6. Τρισδιάστατα σχήματα και αναπτύγματα<br>7. Έδρες, ακμές κορυφές και τύπος Euler<br>8. Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου | 18 |
| | | | | **ΣΥΝΟΛΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΔΩΝ** | **155** |

# Υποστηρικτικό Υλικό – Οδηγοί Εκπαιδευτικού

Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus

ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Αναζήτηση...

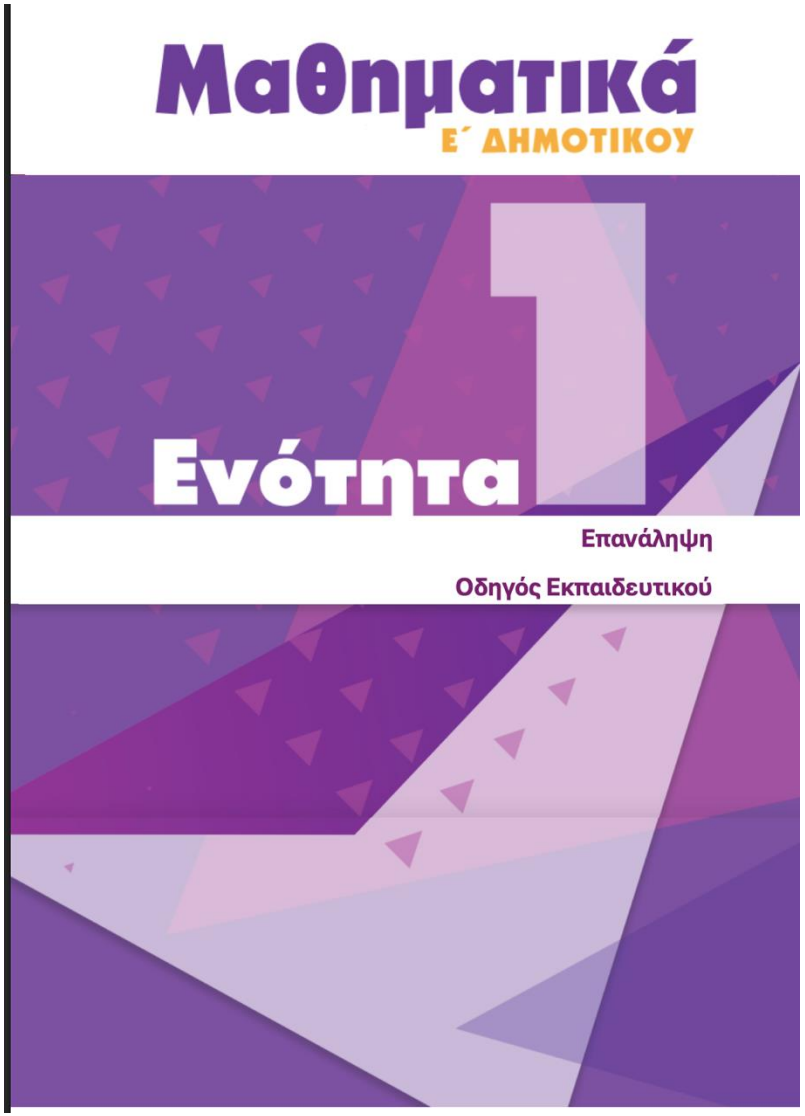
Μαθηματικά | Υλικό | Επιμόρφωση | Ενημέρωση | Ημερολόγιο | Επικοινωνία

Βρίσκεστε εδώ: Αρχική / Υλικό / Ε' Δημοτικού

## Ε' Δημοτικού

| Θέμα | Αρχείο | Ημερομηνία |
|---|---|---|
| Οδηγοί Εκπαιδευτικού | | |
| Ενότητα 1 | | 01/09/2026 |

# Υποστηρικτικό Υλικό – Οδηγοί Εκπαιδευτικού




**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ε' ΤΑΞΗΣ – ΕΝΟΤΗΤΑ 1**

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΝΟΤΗΤΑΣ**

| Μάθημα | Σελίδες | Θέματα | Ενδεικτικός αριθμός διδακτικών περιόδων |
|---|---|---|---|
| 1 | 9-13 | Αισθητοποίηση αριθμών μέχρι το 10 000:<br>• ανάγνωση, γραφή, αναπαράσταση,<br>• αξία θέσης ψηφίου,<br>• ανάλυση και σύνθεση με διάφορους τρόπους<br>• σύγκριση και σειροθέτηση,<br>• στρογγυλοποίηση. | 2 |
| 2 | 14-17 | Νοεροί υπολογισμοί και κατακόρυφοι αλγόριθμοι πρόσθεσης αφαίρεσης μέχρι το 10 000:<br>• στρατηγικές νοερών υπολογισμών πρόσθεσης και αφαίρεσης,<br>• κατακόρυφοι αλγόριθμοι πρόσθεσης και αφαίρεσης,<br>• επίλυση προβλημάτων αθροιστικής δομής. | 3 |
| 3 | 18-19 | Παράγοντες/Διαιρέτες και πολλαπλάσια | 1 |
| 4 | 20-22 | Κατακόρυφος αλγόριθμος πολλαπλασιασμού και επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιαστικής δομής | 3 |
| 5 | 23-25 | Κατακόρυφος αλγόριθμος διαίρεσης και επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιαστικής δομής | 3 |
| **Συνολικός αριθμός διδακτικών περιόδων ενότητας** | | | **12** |

# Αλλαγές στην ύλη της Ε’ τάξης

Παραμένουν…

- Ιδιότητες πράξεων
- Αισθητοποίηση αριθμών μέχρι τις 1 000 000 000
- Διψήφιος πολλαπλασιασμός και διψήφια διαίρεση
- Ισοδυναμία και απλοποίηση, σύγκριση κλασμάτων
- Έννοια μικτού αριθμού και καταχρηστικού κλάσματος, μετατροπές
- Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων και μικτών αριθμών
- Δεκαδικοί αριθμοί (δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά), πρόσθεση και αφαίρεση δεκαδικών, μετατροπές δεκαδικών αριθμών και κλασμάτων
- Ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, παράλληλες και κάθετες γραμμές, παραλληλόγραμμα, μετασχηματισμοί
- Έννοια μεταβλητής και αλγεβρικής παράστασης, Μοτίβα, Επίλυση και κατασκευή προβλήματος
- Παραλληλόγραμμα
- Μέτρηση γωνιών, εμβαδόν τριγώνου και παραλληλογράμμου, υπολογισμός περιμέτρου και εμβαδού ευθύγραμμων σχημάτων,
- Τρισδιάστατα σχήματα, τύπος Euler, Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου

Έχουν αφαιρεθεί…

- Πολλαπλασιασμός κλασμάτων
- Διαίρεση ακέραιου διά κλάσμα και κλάσματος διά ακέραιο
- Πολλαπλασιασμός και διαίρεση δεκαδικού αριθμού με ακέραιο αριθμό
- Λόγοι και αναλογίες

# Παράδειγμα Ενότητας

Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus

## Ε’ τάξη
## Ενότητα 2
## Ιδιότητες των πράξεων



2 Ιδιότητες των πράξεων

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε...

- Να χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των πράξεων, για να απλοποιούμε υπολογισμούς και να ελέγχουμε τα αποτελέσματά τους.

28

# Παράδειγμα Ενότητας

## Τα Μαθηματικά στον κόσμο

Σε κάθε γωνιά του κόσμου, οι άνθρωποι ανέπτυξαν «έξυπνους» τρόπους, για να υπολογίζουν το αποτέλεσμα μαθηματικών πράξεων. Για παράδειγμα, για να υπολογίσει ένας έμπορος πόσα μήλα υπάρχουν συνολικά σε 4 καλάθια που το καθένα έχει 25 μήλα, θα μπορούσε να μετρήσει τα μήλα ένα-ένα. Με αυτόν τον τρόπο, όμως, θα καθυστερούσε πολύ. Για να κάνει τον υπολογισμό πιο γρήγορα, θα μπορούσε να τα μετρήσει 25-25 ή να υπολογίσει πόσα μήλα υπάρχουν στα δύο καλάθια και στη συνέχεια στα άλλα δύο. Δηλαδή, να υπολογίσει πρώτα ότι 2 × 25 = 50 και στη συνέχεια να προσθέσει 50 + 50 = 100.



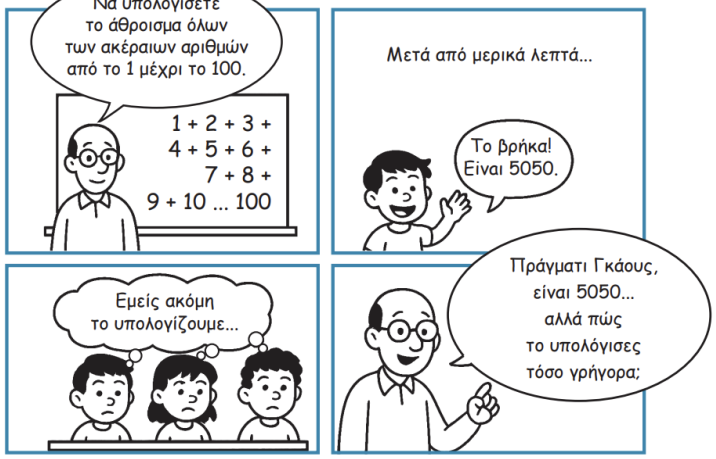

Οι «έξυπνοι» αυτοί τρόποι βασίζονται στις ιδιότητες των πράξεων και μας βοηθούν μέχρι και σήμερα να απλοποιούμε τους υπολογισμούς μας και να βρίσκουμε το αποτέλεσμα πιο εύκολα και γρήγορα.

- Να αναφέρετε μια περίπτωση στην οποία χρησιμοποιήσατε έναν «έξυπνο» τρόπο, για να υπολογίσετε το αποτέλεσμα μιας πράξης.

## ΜΑΘΗΜΑ 1

### Εξερεύνηση

Ο Καρλ Φρίντριχ Γκάους γεννήθηκε το 1777 μ.Χ. στη Γερμανία και θεωρείται ένας από τους σημαντικότερους μαθηματικούς όλων των εποχών. Από μικρή ηλικία ξεχώρισε για τις μαθηματικές του ικανότητες. Η πιο κάτω γελοιογραφία παρουσιάζει ένα γνωστό περιστατικό από τα μαθητικά του χρόνια.




Πώς θα εργαζόσασταν, για να υπολογίσετε το πιο πάνω άθροισμα;

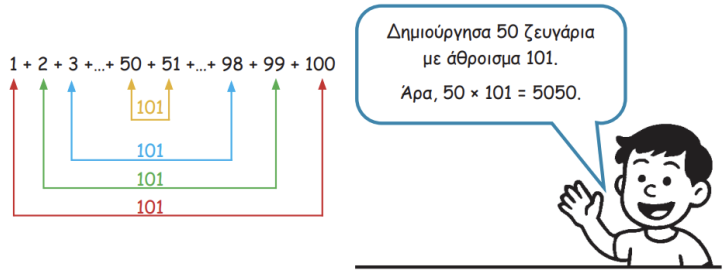
# Παράδειγμα Ενότητας

## Διερεύνηση

Ο Γκάους, για να υπολογίσει γρήγορα το άθροισμα όλων των ακέραιων αριθμών από το 1 μέχρι το 100, αξιοποίησε την **προσεταιριστική ιδιότητα**:

Όταν προσθέτουμε ή πολλαπλασιάζουμε τρεις ή περισσότερους αριθμούς, το τελικό αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από τη σειρά με την οποία κάνουμε τις προσθέσεις ή τους πολλαπλασιασμούς.

(α) Πιο κάτω παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο εργάστηκε ο Γκάους. Να τον περιγράψετε.




(β) Να υπολογίσετε το αποτέλεσμα.

(i) 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10

(ii) 2 + 75 + 25 + 30 + 58

(iii) 2 × 25 × 5 × 4

## Παράδειγμα 1

Να χρησιμοποιήσετε την προσεταιριστική ιδιότητα, για να υπολογίσετε το αποτέλεσμα.

(α) 17 + 52 + 13 (β) 5 × 7 × 12

Λύση:

(α) 17 + 52 + 13 = (17 + 13) + 52
= 30 + 52
= 82

(β) 5 × 7 × 12 = 7 × (5 × 12)
= 7 × 60
= 420

## Δραστηριότητες 1

1.1. Να χρησιμοποιήσετε την προσεταιριστική ιδιότητα, για να υπολογίσετε το αποτέλεσμα.

(α) 57 + 26 + 13 =

(β) 118 + 345 + 12 =

(γ) 24 + 25 + 26 + 27 + 25 =

(δ) 2 × 7 × 5 =

(ε) 4 × 8 × 25 × 9 =

(στ) 15 × 5 × 3 × 4 =

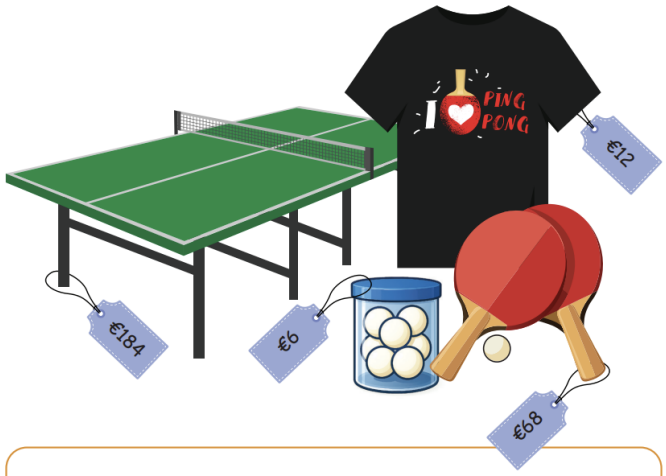
# Παράδειγμα Ενότητας

Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus

Εφαρμογή

1.2. Στην καθημερινή ζωή χρησιμοποιούμε συχνά την προσεταιριστική ιδιότητα. Για παράδειγμα, όταν κάνουμε αγορές και θέλουμε να υπολογίσουμε γρήγορα το συνολικό ποσό που θα πληρώσουμε, δεν προσθέτουμε πάντα τους αριθμούς με τη σειρά που τους βλέπουμε.

Ο Γιάννης θα αγοράσει τα πιο κάτω προϊόντα επιτραπέζιας αντισφαίρισης. Πώς είναι δυνατόν να υπολογίσει εύκολα τη συνολική αξία των προϊόντων;




## Αναστοχασμός

Να χρησιμοποιήσετε την προσεταιριστική ιδιότητα, για να υπολογίσετε το αποτέλεσμα.

(α) 193 + 25 + 74 + 17 + 20 + 5 + 6 =

(β) 2 × 5 × 4 × 25 × 10 × 2 × 5 × 2 =

Επικοινωνία

1.3. Γνωρίζουμε ότι στην πρόσθεση και στον πολλαπλασιασμό ισχύει η **αντιμεταθετική ιδιότητα**:

Όταν προσθέτουμε ή πολλαπλασιάζουμε δύο αριθμούς, το τελικό αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από τη σειρά με την οποία κάνουμε τις προσθέσεις ή τους πολλαπλασιασμούς.

Για παράδειγμα $4 + 5 = 5 + 4$ και $3 \times 7 = 3 \times 7$.

Να εισηγηθείτε μία δική σας διερεύνηση, η οποία να εξετάζει αν η αντιμεταθετική ιδιότητα ισχύει στην αφαίρεση και στη διαίρεση.

1.4. Να συμπληρώσετε τον αριθμό που λείπει σε κάθε περίπτωση.

(α) 35 + 18 = 18 + _____

(β) 25 × 7 × 4 = 25 × _____ × 7

(γ) 25 + 49 + 15 = _____ + 25 + 15

(δ) 45 × 9 × _____ = 45 × 2 × 9

(ε) 14 + 39 + 26 = _____ + 39

(στ) 25 × 48 × _____ = 50 × 48

Επικοινωνία

1.5. Ο Ιωάννης σκέφτηκε ότι, για να υπολογίσει το γινόμενο 83 × 4, είναι δυνατόν να υπολογίσει το γινόμενο 83 × 2 × 2.



(α) Να εξηγήσετε γιατί $83 \times 4 = 83 \times 2 \times 2$.

(β) Να χρησιμοποιήσετε τον τρόπο του Ιωάννη, για να υπολογίσετε το γινόμενο σε κάθε περίπτωση.

(i) 35 × 14

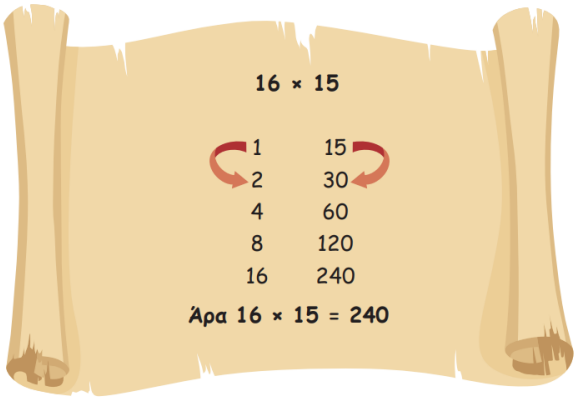
(ii) 12 × 25

(iii) 60 × 15

# Παράδειγμα Ενότητας

## Εξερεύνηση

Ο πάπυρος του Ριντ είναι ένα από τα σημαντικότερα έγγραφα της αρχαιότητας. Χρονολογείται γύρω στο 1650 π.Χ. και βρέθηκε στα ερείπια μιας πόλης κοντά στον ποταμό Νείλο. Στον πάπυρο περιγράφεται η μέθοδος που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι για τον υπολογισμό ενός γινομένου. Πιο κάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα.




(α) Να περιγράψετε την μέθοδο υπολογισμού ενός γινομένου που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι.

(β) Να συνεχίσετε την πιο πάνω διαδικασία, για να υπολογίσετε το γινόμενο 32 × 15.

(γ) Με ποιον τρόπο είναι δυνατόν να συνδυάσουμε ορισμένα από τα πιο πάνω γινόμενα, για να υπολογίσουμε τα γινόμενα:

(i) 6 × 15

(ii) 20 × 15

(iii) 28 × 15

## Δραστηριότητες 1

1.1. Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο των αρχαίων Αιγυπτίων, για να υπολογίσετε το γινόμενο.

(α) 16 × 35

(β) 64 × 25

(γ) 9 × 45

(δ) 12 × 24

## Αναστοχασμός

(α) Πόσο μεγαλύτερο είναι το 17 x 12 από το 16 x 12 ;

(i) 1 (ii) 17 (iii) 12 (iv) 16 (v) 24

(β) Πόσο μικρότερο είναι το γινόμενο 30 x 21 από το 32 x 21 ;

(i) 30 (ii) 2 (iii) 42 (iv) 21 (v) 1

# Παράδειγμα Ενότητας

Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus

## Διερεύνηση 1

Η μέθοδος των αρχαίων Αιγυπτίων στηριζόταν στον διπλασιασμό και την **επιμεριστική ιδιότητα**. Για παράδειγμα, για να υπολογίσουμε το γινόμενο 11 x 18, είναι δυνατόν να εργαστούμε με τους πιο κάτω τρόπους.

**Α**

$$\begin{aligned} 11 \times 18 &= (10 + 1) \times 18 \\ &= (10 \times 18) + (1 \times 18) \\ &= 180 + 18 \\ &= 198 \end{aligned}$$

**Β**

$$\begin{aligned} 11 \times 18 &= 11 \times (9 + 9) \\ &= (11 \times 9) + (11 \times 9) \\ &= 99 + 99 \\ &= 198 \end{aligned}$$

**Γ**

$$\begin{aligned} 11 \times 18 &= 11 \times (5 + 5 + 8) \\ &= (11 \times 5) + (11 \times 5) + (11 \times 8) \\ &= 55 + 55 + 88 \\ &= 198 \end{aligned}$$

**Δ**

$$\begin{aligned} 11 \times 18 &= 11 \times (20 - 2) \\ &= (11 \times 20) - (11 \times 2) \\ &= 220 - 22 \\ &= 198 \end{aligned}$$

(α) Πώς εφαρμόζεται η επιμεριστική ιδιότητα σε κάθε περίπτωση; Να επεξηγήσετε.

(β) Να εισηγηθείτε ακόμα έναν τρόπο για τον υπολογισμό του γινομένου 11 x 18 που βασίζεται στην επιμεριστική ιδιότητα.

## Παράδειγμα 1

Να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα, για να υπολογίσετε το γινόμενο 14 x 12.

Λύση:

Δύο ενδεικτικοί τρόποι υπολογισμού του γινομένου είναι οι πιο κάτω:

**Α' τρόπος**

Γράφουμε το 14 ως άθροισμα αριθμών και πολλαπλασιάζουμε ξεχωριστά κάθε όρο της πρόσθεσης με το 12.

$$\begin{aligned} 14 \times 12 &= (10 + 4) \times 12 \\ &= (10 \times 12) + (4 \times 12) \\ &= 120 + 48 \\ &= 168 \end{aligned}$$

**Β' τρόπος**

Γράφουμε το 12 ως άθροισμα αριθμών και πολλαπλασιάζουμε ξεχωριστά κάθε όρο της πρόσθεσης με το 14.

$$\begin{aligned} 14 \times 12 &= 14 \times (10 + 2) \\ &= (14 \times 10) + (14 \times 2) \\ &= 140 + 28 \\ &= 168 \end{aligned}$$

## Δραστηριότητες 2

2.1. Να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα, για να υπολογίσετε το γινόμενο. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(α) 24 x 18 (β) 16 x 15 (γ) 68 x 11 (δ) 22 x 45

2.2. Να επιλέξετε τις αριθμητικές παραστάσεις που δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα με το γινόμενο:

(α) **6 x 19**

(i) (6 + 10) x (6 + 9) (ii) (6 x 20) – (6 x 1)

(iv) (2 x 19) + (2 x 19) + (2 x 19) (vi) (4 x 19) + (2 x 19)

(β) **13 x 25**

(i) (10 x 25) + (3 x 25) (ii) (13 x 20) + (13 x 5)

(iv) (4 x 25) + (4 x 25) + (3 x 25) (v) (13 x 5) + (13 x 5)

# Παράδειγμα Ενότητας

## Εξερεύνηση

Οι Ρώσοι χωρικοί ανέπτυξαν μια πρακτική μέθοδο που τους βοηθούσε να υπολογίζουν εύκολα ένα γινόμενο. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του γινομένου 16 × 25, οι Ρώσοι χωρικοί εργάζονταν με τον ακόλουθο τρόπο:

| | |
|---|---|
| 16 | 25 |
| 8 | 50 |
| 4 | 100 |
| 2 | 200 |
| 1 | 400 |

**Άρα,** 16 × 25 = 400

Να περιγράψετε την πιο πάνω μέθοδο υπολογισμού ενός γινομένου που χρησιμοποιούσαν οι Ρώσοι χωρικοί.

## Δραστηριότητες 1

1.1. Να υπολογίσετε το γινόμενο, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των Ρώσων χωρικών.

(α) 16 × 15

(β) 32 × 55

## Αναστοχασμός

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου τους, οι Ρώσοι χωρικοί κάποιες φορές έφταναν σε έναν περιττό αριθμό, ο οποίος δεν μπορούσε να διαιρεθεί ακριβώς διά 2, όπως στο πιο κάτω παράδειγμα.

12 × 15

| | |
|---|---|
| 12 | 15 |
| 6 | 30 |
| 3 | 60 |

Πώς νομίζετε ότι θα εργάζονταν στη συνέχεια οι Ρώσοι χωρικοί, ώστε να υπολογίσουν το γινόμενο 12 × 15;

# Παράδειγμα Ενότητας

## Παράδειγμα 2

Να συμπληρώσετε, ώστε το γινόμενο σε κάθε περίπτωση να είναι το ίδιο.

(α) 18 x 25 = 450 (β) 25 x 24 = 600

9 x ___ = 450 75 x ___ = 600

Λύση:

(α) 18 x 25 = 450
÷ 2 x 2
9 x 50 = 450

Το 18 διαιρείται διά 2. Άρα, το 25 διπλασιάζεται, ώστε το γινόμενο να παραμείνει το ίδιο.

(β) 25 x 24 = 600
x 3 ÷ 3
75 x 8 = 600

Το 25 τριπλασιάζεται. Άρα, το 24 διαιρείται διά τρία, ώστε το γινόμενο να παραμείνει το ίδιο.

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις.

## Δραστηριότητες 2

2.1. Να συμπληρώσετε.

(α) 18 x 12 = 216
36 x ___ = 216

(β) 15 x 36= 540
___ x 12 = 540

(γ) 11 x 35 = 385
77 x ___ = 385

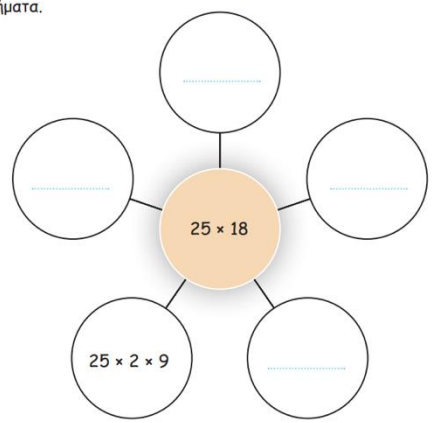
(δ) 22 x 24 = 528
___ x 6 = 528

(ε) 15 x 32 = 480
60 x ___ = 480

(στ) 28 x 41 = 1148
___ x 164 = 1148

Επικοινωνία

2.2. Να συμπληρώσετε το διάγραμμα με διαφορετικές αριθμητικές παραστάσεις που δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα με την αριθμητική παράσταση 25 × 18, αξιοποιώντας τις ιδιότητες που μελετήσατε στα προηγούμενα μαθήματα.




## Μικρή Επανάληψη

1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα, για να σχηματίσετε τον κάθε αριθμό με δύο διαφορετικούς τρόπους.

| Συμβολική μορφή αριθμού | Χ | Ε | Δ | Μ | Αναλυτική μορφή αριθμού |
|---|---|---|---|---|---|
| 1935 | | | | | |
| 1935 | | | | | |
| 5407 | | | | | |
| 5407 | | | | | |

2. Να συμπληρώσετε.

(α) 5429 → ___ χιλιάδες και ___ εκατοντάδες και ___ μονάδες

(β) 3464 → ___ εκατοντάδες και ___ δεκάδες και ___ μονάδες

# Παράδειγμα Ενότητας

Πανεπιστήμιο Κύπρου
University of Cyprus

## ΜΑΘΗΜΑ 4

### Διερεύνηση 1

Πιο κάτω παρουσιάζεται μία μέθοδος υπολογισμού του πηλίκου 120 ÷ 15.

$120 \div 15$ (÷3, ÷3) $40 \div 5 = 8$

Άρα, $120 \div 15 = 8$

ή

$$\frac{120}{15} \overset{\div 3}{=} \frac{40}{5} = 40 \div 5 = 8$$

$120 \div 15$ (÷5, ÷5) $24 \div 3 = 8$

Άρα, $120 \div 15 = 8$

ή

$$\frac{120}{15} \overset{\div 5}{=} \frac{24}{3} = 24 \div 3 = 8$$

Κάθε διαίρεση είναι δυνατόν να γραφεί με τη μορφή κλάσματος

$120 \div 15 = \frac{120}{15}$

(α) Πώς διευκολύνει η πιο πάνω μέθοδος τον υπολογισμό του πηλίκου;

(β) Να εφαρμόσετε την πιο πάνω μέθοδο, για να υπολογίσετε το πηλίκο:

(i) $210 \div 35$

(ii) $\frac{450}{150}$

### Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το πηλίκο $96 \div 12$, χρησιμοποιώντας απλοποίηση.

Λύση:

Α' τρόπος

$96 \div 12$ (÷2, ÷2) $48 \div 6 = 8$

$$96 \div 12 = \frac{96}{12} \overset{\div 2}{=} \frac{48}{6} = 48 \div 6 = 8$$

Β' τρόπος

$96 \div 12$ (÷3, ÷3) $32 \div 4 = 8$

$$96 \div 12 = \frac{96}{12} \overset{\div 3}{=} \frac{32}{4} = 32 \div 4 = 8$$

Γ' τρόπος

$96 \div 12$ (÷2, ÷2) $48 \div 6 = 8$ (÷2, ÷2) $24 \div 3 = 8$

$$96 \div 12 = \frac{96}{12} \overset{\div 2}{=} \frac{48}{6} \overset{\div 2}{=} \frac{24}{3} = 24 \div 3 = 8$$

*Άρα, $96 \div 12 = 8$*

### Δραστηριότητες 1

1.1. Να υπολογίσετε το πηλίκο, χρησιμοποιώντας απλοποίηση.

(α) $60 \div 15$

(β) $72 \div 18$

(γ) $\frac{210}{14}$

(δ) $\frac{408}{24}$

# Παράδειγμα Ενότητας

## Διερεύνηση 2

(α) Να μελετήσετε τον πιο κάτω τρόπο υπολογισμού ενός πηλίκου.

| 72 ÷ 18 | 180 ÷ 15 |
|---|---|
| 72 ÷ 18 = 72 ÷ 9 ÷ 2 | 180 ÷ 15 = 180 ÷ 3 ÷ 5 |
| 72 ÷ 9 = 8 | 180 ÷ 3 = 60 |
| 8 ÷ 2 = 4 | 60 ÷ 5 = 12 |
| Άρα, 72 ÷ 18 = 4 | Άρα, 180 ÷ 15 = 12 |

Τι παρατηρείτε; Με ποιον τρόπο απλοποιείται η διαίρεση στις πιο πάνω περιπτώσεις;

(β) Να περιγράψετε τα βήματα που θα ακολουθήσετε, για να υπολογίσετε το πηλίκο 180 ÷ 12, με βάση τον πιο πάνω τρόπο.

## Παράδειγμα 2

Να συμπληρώσετε τον αριθμό που λείπει.

300 ÷ 15 = 300 ÷ 3 ÷ ☐

Λύση:

300 ÷ 15 = 300 ÷ 3 ÷ 5 Ο αριθμός που λείπει είναι το 5, γιατί 15 = 3 × 5.

## Δραστηριότητες 2

2.1. Να συμπληρώσετε τον αριθμό που λείπει.

(α) 90 ÷ 18 = 90 ÷ 9 ÷ ☐

(β) 70 ÷ 14 = 70 ÷ ☐ ÷ 2

(γ) 105 ÷ ☐ = 105 ÷ 5 ÷ 3

(δ) 120 ÷ ☐ = 120 ÷ 6 ÷ 4

## Αναστοχασμός

Ποια από τα πιο κάτω θα χρησιμοποιούσατε, για να απλοποιήσετε τη διαίρεση 72 ÷ 24; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α. 72 ÷ 8 ÷ 3

Β. 72 ÷ (20 + 4)

Γ. 72 ÷ 2 ÷ 12

# Παράδειγμα Ενότητας

## Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε το πηλίκο 450 ÷ 18.

Λύση:

**Α' τρόπος**

Διαιρούμε τον διαιρετέο και τον διαιρέτη με έναν κοινό παράγοντα, π.χ. με το 9.

450 ÷ 18
÷ 9 ÷ 9
50 ÷ 2 = 25

Άρα, 450 ÷ 18 = 25

**Β' τρόπος**

Διαιρούμε τον διαιρετέο διαδοχικά με μικρότερους διαιρέτες, π.χ. το 9 και το 2, αφού 18 = 9 × 2.

450 ÷ 18 = 450 ÷ 9 ÷ 2
450 ÷ 9 = 50
50 ÷ 2 = 25

Άρα, 450 ÷ 18 =25

## Δραστηριότητες 3

3.1. Να υπολογίσετε το πηλίκο.

(α) 150 ÷ 6

(β) 210 ÷ 15

(γ) 770 ÷ 14

(δ) 240 ÷ 48

Επικοινωνία

3.2. Η Σοφία θα χρησιμοποιήσει υπολογιστική μηχανή, για να υπολογίσει το πηλίκο 200 ÷ 8. Το πλήκτρο 8 της μηχανής δεν λειτουργεί. Πώς είναι δυνατόν να υπολογίσει το πηλίκο; Να βρείτε δύο διαφορετικούς τρόπους.





3.3. Να αντιστοιχίσετε κάθε δήλωση με την κατάλληλη λέξη **ΟΡΘΟ** ή **ΛΑΘΟΣ**. Να εξηγήσετε.

(α) Για να υπολογίσουμε το πηλίκο 264 ÷ 12, διαιρούμε πρώτα το 264 διά 2 και στη συνέχεια διαιρούμε το αποτέλεσμα διά 6.

(β) Για να υπολογίσουμε το πηλίκο 216 ÷ 24, διαιρούμε πρώτα το 216 διά 4 και στη συνέχεια διαιρούμε το αποτέλεσμα διά 8. — ΟΡΘΟ

(γ) Για να υπολογίσουμε το πηλίκο 420 ÷ 15, διαιρούμε πρώτα το 420 διά 10 και στη συνέχεια διαιρούμε το αποτέλεσμα διά 5. — ΛΑΘΟΣ

(δ) Για να υπολογίσουμε το πηλίκο 144 ÷ 16, διαιρούμε πρώτα το 144 διά 2 και στη συνέχεια διαιρούμε το αποτέλεσμα διά 8.

## Αναστοχασμός

Είναι δυνατόν να υπολογίσετε το πηλίκο, απλοποιώντας τη διαίρεση; Να εξηγήσετε.

(α) 156 ÷ 13

(β) 80 ÷ 6

# Παράδειγμα Ενότητας

## Διαμορφωτική Αξιολόγηση

**1** Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των πράξεων, για να υπολογίσετε το αποτέλεσμα.

(α) 12 + 39 + 28 =

(β) 25 × 8 × 4 × 2 =

(γ) 29 × 18 =

(δ) 80 ÷ 16 =

**2** Να συμπληρώσετε.

(α) 15 × 42 = (15 × ☐) + (☐ × 2)

(β) 168 ÷ 14 = (140 ÷ ☐) + (☐ ÷ 14)

(γ) 25 × 18 = 50 × ☐

(δ) 75 × 2 = 15 × ☐

(ε) 120 ÷ 15 = 120 ÷ 3 ÷ ☐

(στ) 144 ÷ 8 = ☐ ÷ 4

**3** (α) Ποια από τις πιο κάτω δηλώσεις είναι ορθή; Γιατί;

Α. Για να διαιρέσω έναν αριθμό διά 5, μπορώ πρώτα να τον διαιρέσω διά 10 και έπειτα να διαιρέσω αυτό που θα βρω διά 2.

Β. Για να διαιρέσω έναν αριθμό διά 5, μπορώ, πρώτα να τον διαιρέσω διά 10 και έπειτα να πολλαπλασιάσω αυτό που θα βρω επί 2.

(β) Να χρησιμοποιήσετε την ορθή δήλωση, για να υπολογίσετε κάθε πηλίκο.

(i) 420 ÷ 5

(ii) 3700 ÷ 5

## Περίληψη Ενότητας

**Ιδιότητες των πράξεων**

### Πρόσθεση και Αφαίρεση

| Αντιμεταθετική ιδιότητα | Προσεταιριστική ιδιότητα |
|---|---|
| Όταν προσθέτω δύο αριθμούς, το αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από τη σειρά με την οποία προσθέτω τους αριθμούς.<br>5 + 2 = 2 + 5<br>7 = 7 | Όταν προσθέτω τρεις ή περισσότερους αριθμούς, το τελικό αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από τη σειρά με την οποία κάνω τις προσθέσεις.<br>(5 + 2) + 8 = 5 + (2 + 8)<br>7 + 8 = 5 + 10<br>15 = 15 |
| **Ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης** | **Αντίθετες πράξεις** |
| Το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης.<br>5 + 0 = 5<br>0 + 5 = 5 | Η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι αντίθετες πράξεις.<br>5 + 7 − 7 = 5 |

### Πολλαπλασιασμός και Διαίρεση

| Αντιμεταθετική ιδιότητα | Προσεταιριστική ιδιότητα |
|---|---|
| Όταν πολλαπλασιάζω δύο αριθμούς, το αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από τη σειρά με την οποία πολλαπλασιάζω τους αριθμούς.<br>4 × 2 = 2 × 4<br>8 = 8 | Όταν πολλαπλασιάζω τρεις ή περισσότερους αριθμούς, το τελικό αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από τη σειρά με την οποία κάνω τους πολλαπλασιασμούς.<br>(5 × 2) × 3 = 5 × (2 × 3)<br>10 × 3 = 5 × 6<br>30 = 30 |
| **Ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού** | **Απορροφητικό στοιχείο του πολλαπλασιασμού** |
| Το 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.<br>5 × 1 = 5<br>1 × 5 = 5 | Το 0 είναι το απορροφητικό στοιχείο του πολλαπλασιασμού.<br>5 × 0 = 0<br>0 × 5 = 0 |
| **Αντίστροφες πράξεις** | |
| Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις.<br>(15 × 3) ÷ 3 = 15 | |
| **Επιμεριστική ιδιότητα** | |
| 6 × 28 = 6 × (20 + 8)<br>= (6 × 20) + (6 × 8)<br>= 120 + 48<br>= 168 | 84 ÷ 4 = (80 + 4) ÷ 4<br>= (80 ÷ 4) + (4 ÷ 4)<br>= 20 + 1<br>= 21 |

# Παράδειγμα Ενότητας

## Επιπρόσθετες Δραστηριότητες

**Προσεταιριστική ιδιότητα στην πρόσθεση και στον πολλαπλασιασμό.**

**1** Να υπολογίσετε το αποτέλεσμα των πιο κάτω αριθμητικών παραστάσεων.

(α) 82 + 73 + 17 = (β) 125 + 192 + 75 = (γ) 18 + 24 + 12 + 26 =

(δ) 9 × 5 × 2 = (ε) 15 × 8 × 4 = (στ) 5 × 9 × 4 × 6 =

**2** (α) Να συμπληρώσετε τον αριθμό που λείπει σε κάθε περίπτωση.

25 × 24 = 25 × 4 × ____ 25 × 24 = 25 × 3 × ____

(β) Σε ποια περίπτωση θα υπολογίσετε πιο εύκολα το γινόμενο 25 × 24; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ) Να χρησιμοποιήσετε τον πιο πάνω τρόπο, για να υπολογίσετε το γινόμενο σε κάθε περίπτωση.

(i) 35 × 18 (ii) 16 × 25

**3** Πώς είναι δυνατόν να υπολογίσουμε την τιμή των πιο κάτω αριθμητικών παραστάσεων, αν γνωρίζουμε ότι ισχύει η πιο κάτω σχέση;

★ + ♥ = 100

(α) ★ + ♥ + 350 =

(β) ♥ + ★ =

(γ) ★ + 85 + ♥ =

(δ) ★ + 125 − ★ =

## Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού

**4** (α) Να υπολογίσετε το γινόμενο, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(i) 54 × 11 (ii) 34 × 16 (iii) 46 × 19 (iv) 15 × 81

(β) Να υπολογίσετε το γινόμενο, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των Ρώσων χωρικών. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(i) 8 × 14 (ii) 31 × 6 (iii) 16 × 24 (iv) 32 × 45

**5** Να συμπληρώσετε.

(α) 15 × 42 = (15 × ☐) + (☐ × 2) (β) 32 × 18 = (30 × ☐) + 36

(γ) 48 × 39 = (48 × ☐) − (48 × 1) (δ) 37 × 16 = 370 + ( 37 × ☐)

**6** Να συμπληρώσετε.

(α) 45 × 8 = 90 × ☐ (β) 12 × 15 = ☐ × 60 (γ) 48 × 25 = 12 × ☐

(δ) ☐ × 75 = 4 × 150 (ε) 15 × ☐ = 5 × 21 (στ) 26 × 15 = 30 × ☐

**7** (α) Να υπολογίσετε το γινόμενο στους πιο κάτω πολλαπλασιασμούς.

(i) 65 × 10 = ☐ (ii) 72 × 100 = ☐ (iii) 5 × 1000 = ☐

(β) Να αξιοποιήσετε τα πιο πάνω γινόμενα, για να υπολογίσετε:

| (i) 65 × 9 | (ii) 72 × 99 | (iii) 5 × 999 |
|---|---|---|
| | | |