

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΗ ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ





- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

- Να μελετήσετε το κείμενο που σας δίνεται, το οποίο περιγράφει τη διαχείριση της επίλυσης ενός προβλήματος από μία εκπαιδευτικό.

Να κρίνετε τον τρόπο εργασίας της.

Οι μαθητές Δ' τάξης της κυρίας Κατερίνας εργάστηκαν στο ακόλουθο πρόβλημα: ***Η Χρυσή ετοιμάζει ανθοδέσμες. Για κάθε 3 κόκκινα τριαντάφυλλα, βάζει 2 άσπρα τριαντάφυλλα. Αν χρησιμοποίησε συνολικά 40 τριαντάφυλλα, πόσα τριαντάφυλλα από το κάθε χρώμα χρησιμοποίησε;***

Η κυρία Κατερίνα είπε στους μαθητές της ότι μπορούν να λύσουν το πρόβλημα με όποιο τρόπο θέλουν, αλλά τόνισε ότι χρειάζεται να εξηγήσουν τον τρόπο εργασίας τους και να αιτιολογήσουν γιατί είναι αποτελεσματικός.

Καθώς οι μαθητές εργάζονταν σε ζευγάρια, για να λύσουν το πρόβλημα, η κυρία Κατερίνα περιφερόταν στην τάξη, ελέγχοντας ότι οι μαθητές της εργάζονταν στο πρόβλημα. Παρατήρησε με ευχαρίστηση ότι οι μαθητές της χρησιμοποιούσαν πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα – κατασκευή πίνακα, σχεδιασμό εικόνας και σε κάποιες περιπτώσεις έγραφαν επεξηγήσεις.


Παρατήρησε ότι δύο ζευγάρια μαθητών έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις. Η κυρία Κατερίνα ανησύχησε για τις λανθασμένες απαντήσεις. Ωστόσο, σκέφτηκε ότι θα παρουσιάζονταν διάφορες ορθές στρατηγικές, επομένως οι μαθητές αυτοί θα έβλεπαν τι έκαναν λάθος και θα γνώριζαν νέες στρατηγικές, για να λύσουν παρόμοια προβλήματα στο μέλλον.

Όταν οι περισσότεροι μαθητές τελείωσαν, η κυρία Κατερίνα κάλεσε όλη την τάξη να συζητήσουν μαζί το πρόβλημα. Άρχισε τη συζήτηση, ζητώντας από εθελοντές να παρουσιάσουν τις λύσεις και τις στρατηγικές τους και προσέχοντας να μην καλέσει τους μαθητές με τις λανθασμένες απαντήσεις. Κατά τη διάρκεια των επόμενων 15 λεπτών, πρώτα η Σοφία, έπειτα ο Σάββας, η Αντωνία, η Μαρίνα, ο Μιχάλης και ο Γιάννης προσφέρθηκαν να παρουσιάσουν τις λύσεις που αυτοί και το ζευγάρι τους δημιούργησαν. Η κυρία Κατερίνα φρόντισε να υποβάλει διευκρινιστικές ερωτήσεις, ώστε κάθε παιδί να αιτιολογήσει την εργασία του. Βοήθησε την τάξη να συμπεράνει ότι το πρόβλημα μπορούσε να λυθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους και από τώρα και στο εξής όταν θα έλυναν παρόμοια προβλήματα θα μπορούσαν να επιλέξουν τον τρόπο που τους αρέσει, γιατί όλοι αυτοί οι τρόποι καταλήγουν στην ίδια απάντηση.

Σημασία της Συζήτησης

Οι μαθηματικές συζητήσεις είναι ένα σημαντικό κομμάτι της αποτελεσματικής διδασκαλίας:

- ✓ Ενθαρρύνουν τους μαθητές να κατασκευάζουν μαθηματικές ιδέες.
- ✓ Αναδύεται η σκέψη των μαθητών (γίνεται δημόσια) και μπορούν να καθοδηγηθούν.
- ✓ Οι μαθητές μαθαίνουν να επικοινωνούν.



Ανάμεσα σε άλλους παράγοντες της σχολικής τάξης, φάνηκε ότι ο χρόνος που αφιερώνεται στην επεξήγηση των ιδεών από τους μαθητές έχει τη μεγαλύτερη επίδραση στη μάθηση των μαθητών.

(Megan Franke, 2011)

ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

- ✓ Οι ερευνητές Smith και Stein (2011) προσδιόρισαν διαδικασίες με επίκεντρο τον μαθητή για να γίνει η συζήτηση πιο διαχειρίσιμη και να περιορίζεται ο αυτοσχεδιασμός που απαιτείται από τον εκπαιδευτικό κατά τη διάρκεια της συζήτησης.
- ✓ Η έμφραση του μοντέλου είναι ο σχεδιασμός.
- ✓ Μέσω του σχεδιασμού οι εκπαιδευτικοί μπορούν να προβλέπουν τις απαντήσεις των μαθητών τους, να ετοιμάζουν την ανατροφοδότησή τους σε αυτές και να παίρνουν αποφάσεις για το πώς να δομήσουν τις παρουσιάσεις των μαθητών για εμπάθυνση των μαθηματικών ιδεών του μαθήματος.

(Smith & Stein, 2011)

Μοντέλο Παραγωγικής Συζήτησης

0. Καθορισμός στόχων και επιλογή κατάλληλων προβλημάτων
1. Προσδοκίες (Anticipating) – Εικασίες για τις απαντήσεις των μαθητών
2. Παρακολούθηση / Έλεγχος (Monitoring) των απαντήσεων των μαθητών
3. Επιλογή (Selecting) απαντήσεων
4. Σειροθέτηση (Sequencing) των απαντήσεων των μαθητών κατά τη συζήτηση
5. Σύνδεση (Connecting) των απαντήσεων κατά τη συζήτηση

Προσδοκίες

Παρακολούθηση / Έλεγχος

Επιλογή

Σειροθέτηση

Σύνδεση

0₁. Καθορισμός Στόχων

- Καθορισμός του τι αναμένεται να κατανοήσουν οι μαθητές ως αποτέλεσμα της συμμετοχής τους σε συγκεκριμένο μάθημα, και όχι απλώς τι θα κάνουν στο μάθημα.
- Πρέπει να είναι συγκεκριμένοι και σαφείς οι στόχοι ώστε να γίνει επιλογή κατάλληλων προβλημάτων και κατάλληλη χρήση των 5 διαδικασιών.

(Smith & Stein, 2011)

0₂. Επιλογή Προβλήματος

- Επιλογή ενός προβλήματος κατάλληλου για επίτευξη των μαθησιακών στόχων.
- Επιλογή ενός προβλήματος «πλούσιου» σε μαθηματικές ιδέες / στρατηγικές / διαδικασίες επίλυσης για υποστήριξη μιας παραγωγικής συζήτησης.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΘΟΔΕΣΜΕΣ

- Να λύσετε το πρόβλημα, χρησιμοποιώντας σχέδιο, λέξεις ή και αριθμούς, και να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.

Η Χρυσή ετοιμάζει ανθοδέσμες. Για κάθε 3 κόκκινα τριαντάφυλλα, βάζει 2 άσπρα τριαντάφυλλα. Αν χρησιμοποίησε συνολικά 40 τριαντάφυλλα, πόσα τριαντάφυλλα από κάθε χρώμα χρειάστηκε;

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Δ'
ΤΑΞΗΣ, ΕΝΟΤΗΤΑ 6

- Ποιες απαντήσεις αναμένετε ότι θα προκύψουν από τους μαθητές σας και θα ήταν βοηθητικές για τη συζήτηση που θέλετε να κάνετε;

1. Anticipating (Προσδοκίες)

Πιθανές απαντήσεις των μαθητών για το πρόβλημα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

- Ποιες στρατηγικές πιθανόν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές για να επιλύσουν το πρόβλημα;
- Τι ανατροφοδότηση θα δώσετε στους μαθητές για τις πιθανές απαντήσεις τους και τον τρόπο εργασίας τους;
- Ποιες στρατηγικές των μαθητών θα ήταν πιο χρήσιμες για την επίτευξη των στόχων σας;

Πρόβλημα με τις ανθοδέσμες: Αναμενόμενες Απαντήσεις

- **Σύνθεση νέας μονάδας**—Βρίσκουν τον αριθμό των τριαντάφυλλων που έχει μια ανθοδέσμη ($3 + 2 = 5$). Διαιρούν το 40 με τον αριθμό αυτό, για να βρουν πόσες ανθοδέσμες ετοιμάστηκαν ($40 \div 5 = 8$). Πολλαπλασιάζουν επί το 8 ($8 \times 3 = 24$ και $8 \times 2 = 16$).
- **Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση**—Αυξάνουν τον αριθμό των κόκκινων και κίτρινων τριαντάφυλλων, προσθέτοντας 3 και προσθέτοντας 2 επαναλαμβανόμενα, μέχρι να φτάσουν στον επιθυμητό συνολικό αριθμό των τριαντάφυλλων ($24 + 16 = 40$).
- **Επαναλαμβανόμενος πολλαπλασιασμός** – Διπλασιάζουν, τριπλασιάζουν, τετραπλασιάζουν... τον αριθμό των κόκκινων και άσπρων τριαντάφυλλων, μέχρι να φτάσουν στον επιθυμητό συνολικό αριθμό των τριαντάφυλλων ($24 + 16 = 40$).
- **Λανθασμένη απάντηση**—Δεν καταλήγουν σε ορθή απάντηση, παρουσιάζουν αδυναμίες στην κατανόηση και ερμηνεία του προβλήματος.

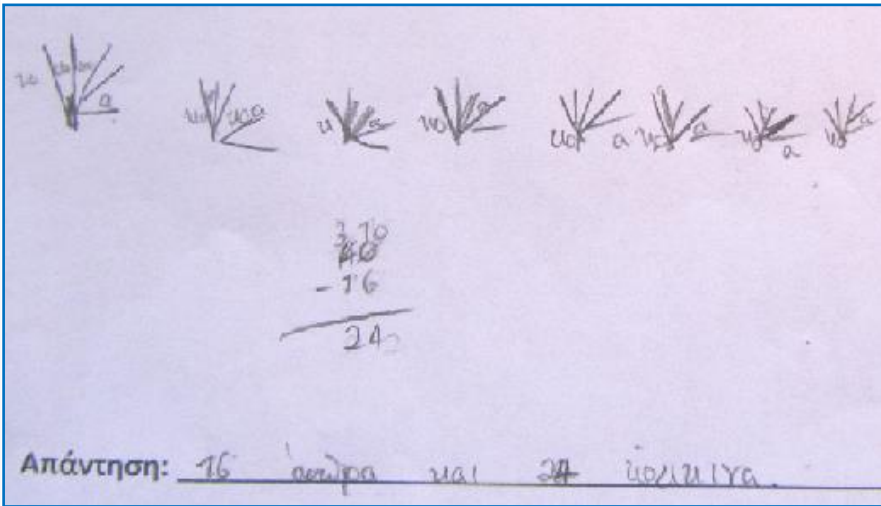
ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΘΟΔΕΣΜΕΣ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ.....

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

- Να μελετήσετε τις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές.
- Ποιες στρατηγικές χρησιμοποίησε ο κάθε μαθητής, για να επιλύσει το πρόβλημα;
- Πώς συνδέονται αυτές οι στρατηγικές;
- Πώς αξιολογείτε αυτές τις στρατηγικές;

Αντωνία

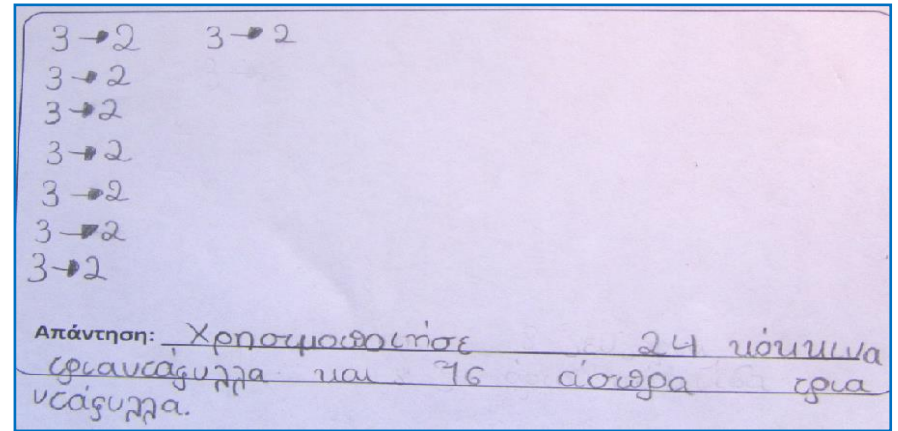


Handwritten diagrams showing groups of 3 and 2 items, and a subtraction problem:

$$\begin{array}{r} 370 \\ -16 \\ \hline 24 \end{array}$$

Απάντηση: 16 άνδρα και 24 κορίτσια.

Σάββας

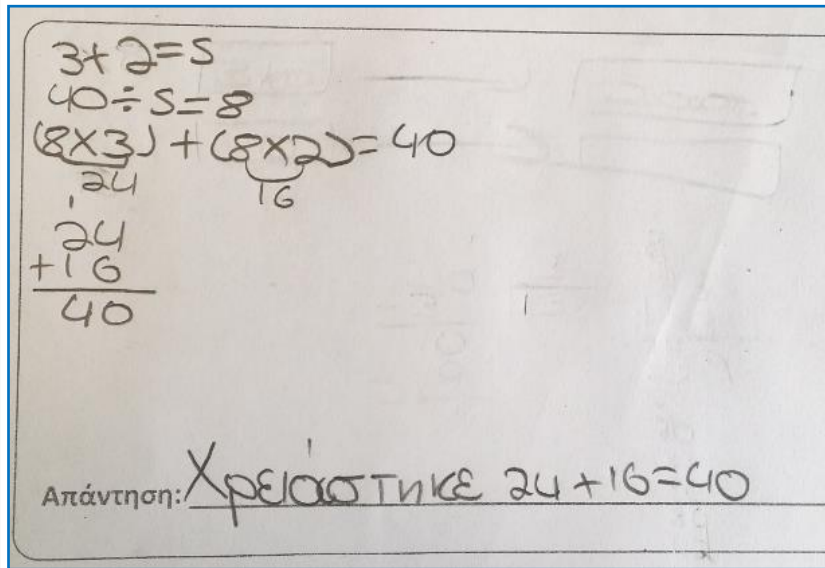


Handwritten diagrams showing groups of 3 and 2 items, and a subtraction problem:

$$\begin{array}{r} 370 \\ -16 \\ \hline 24 \end{array}$$

Απάντηση: Χρησιμοποίησε 24 κορίτσια
τριαντάφυλλα και 16 άνδρα για
ντάμπλα.

Σοφία

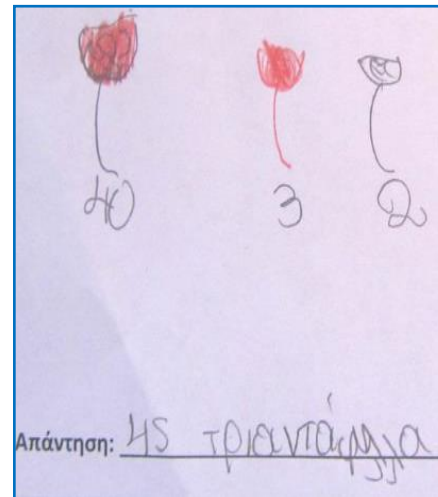


Handwritten equations and a subtraction problem:

$$3 + 2 = 5$$
$$40 \div 5 = 8$$
$$(8 \times 3) + (8 \times 2) = 40$$
$$\begin{array}{r} 24 \\ +16 \\ \hline 40 \end{array}$$

Απάντηση: Χρειάστηκε 24 + 16 = 40

Τάσος



Handwritten drawings of flowers and a subtraction problem:

$$\begin{array}{r} 45 \\ -10 \\ \hline 35 \end{array}$$

Απάντηση: 45 τριαντάφυλλα

Μαρίνα

κόκκινα	3	6	12	24	
άσπρα	2	4	8	16	

Απάντηση: Χρειάζετη 24 κόκκινα τριαντάφυλλα και 16 άσπρα τριαντάφυλλα.

Μιχάλης

$40 + 3 + 2 = \checkmark$

$$\begin{array}{r} 40 \\ + 3 \\ \hline 43 \\ + 2 \\ \hline 45 \end{array}$$

Απάντηση: Χρειαστικε 45

Γιάννης

Άσπρα τριαντάφυλλα	2	4	6	8	10	12	14	16
Κόκκινα τριαντάφυλλα	3	6	9	12	15	18	21	24

Απάντηση: Χρειαστικε 16 άσπρα τριαντάφυλλα και 24 κόκκινα τριαντάφυλλα.

Έλενα

3 κόκκινα τριαντάφυλλα > 2 άσπρα τριαντάφυλλα

κόκκινα (8x3) + (8x2) = 24 + 16 = 40

Άσπρα

$40 : 5 = 8$

Απάντηση: Χρειαστικε 24 κόκκινα τριαντάφυλλα και 16 άσπρα τριαντάφυλλα

Μυρτώ

$$\begin{array}{r} 2 \times 8 = 16 \\ + \\ 3 \\ \hline 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} + \\ 24 \\ \hline 40 \end{array}$$

Απάντηση: 16 ασπρά + 24 κόκκινα

Ζήνωνας

$$5 + 3 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 40$$

Απάντηση: ~~Η χρήση 8 γυρισ 16 κόκκινα και 8 πορτο
κα κόκκινα τριάντα φρέζα και
ή τριάντα τριάντα φρέζα~~

Στέφανος

$$\begin{array}{r} 2+2+2+2+2+2 \\ \square + \\ 3+3+3+3+3+3 \\ \text{cylinder} \\ = \\ 40 \end{array}$$

Απάντηση: 8 ασπρά και 8 κόκκινα

Νεκτάριος

$$8 \times 3 = 24$$

$$24 + 16 = 40$$

$$8 \times 2 = 16$$

Απάντηση: Χρησιμοποίησε 24 κόκκινα και
16 ασπρά

2. Monitoring (Παρακολούθηση/Έλεγχος)

Παρακολούθηση των απαντήσεων των μαθητών καθώς εργάζονται

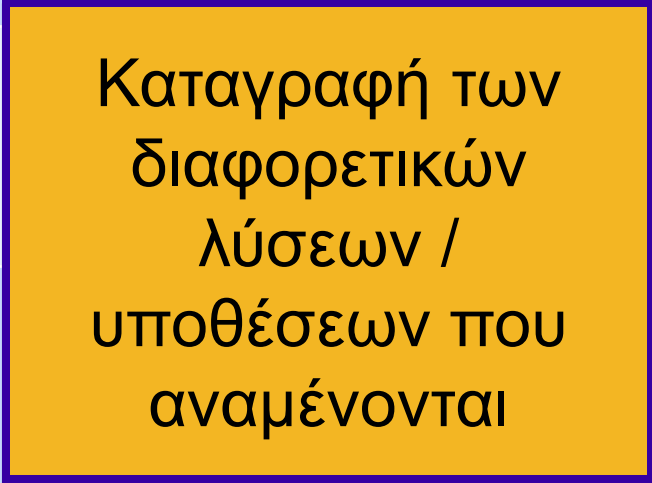
- Η παρακολούθηση/έλεγχος είναι η διαδικασία που δίνει έμφαση στο τι και πώς σκέφτονται οι μαθητές κατά τη διάρκεια της επίλυσης προβλήματος.
- Η εκπαιδευτικός περιφέρεται καθώς εργάζονται οι μαθητές, παρακολουθεί και ακούει.
- Η εκπαιδευτικός παίρνει σημειώσεις για το τι συζητούν οι μαθητές, ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν και ποια σημεία τους έχουν μπερδέψει.
- Η εκπαιδευτικός υποβάλει ερωτήσεις στους μαθητές για να τους κατευθύνει και για να τους βοηθήσει να εμβαθύνουν.

Monitoring Tool (Εργαλείο Ελέγχου)

Στρατηγική

Ποιος και Τι

Σειρά



Καταγραφή των
διαφορετικών
λύσεων /
υποθέσεων που
αναμένονται

Monitoring Tool (Εργαλείο Ελέγχου)

Στρατηγική	Ποιος και Τι	Σειρά
Σύνθεση νέας μονάδας —Βρίσκουν τον αριθμό των τριαντάφυλλων που έχει μια ανθοδέσμη ($3 + 2 = 5$). Διαιρούν το 40 με τον αριθμό αυτό, για να βρουν πόσες ανθοδέσμες ετοιμάστηκαν ($40 \div 5 = 8$). Πολλαπλασιάζουν επί το 8 ($8 \times 3 = 24$ και $8 \times 2 = 16$).		
Επαναλαμβανόμενος πολλαπλασιασμός – Διπλασιάζουν, τριπλασιάζουν, τετραπλασιάζουν... τον αριθμό των κόκκινων και άσπρων τριαντάφυλλων, μέχρι να φτάσουν στον επιθυμητό συνολικό αριθμό των τριαντάφυλλων ($24 + 16 = 40$).		
Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση —Αυξάνουν τον αριθμό των κόκκινων και κίτρινων τριαντάφυλλων, προσθέτοντας 3 και προσθέτοντας 2 επαναλαμβανόμενα, μέχρι να φτάσουν στον επιθυμητό συνολικό αριθμό των τριαντάφυλλων ($24 + 16 = 40$).		
Λανθασμένη απάντηση —Δεν καταλήγουν σε ορθή απάντηση, παρουσιάζουν αδυναμίες στην κατανόηση και ερμηνεία του προβλήματος.		
Άλλη		

Σημείωση των μαθητών που χρησιμοποίησαν τις συγκεκριμένες στρατηγικές και ότι άλλο νομίζεις ότι θα πρέπει να επισημάνεις.

Monitoring Tool (Εργαλείο Ελέγχου)

Στρατηγική	Ποιος και Τι	Σειρά
Σύνθεση νέας μονάδας —Βρίσκουν τον αριθμό των τριαντάφυλλων που έχει μια ανθοδέσμη ($3 + 2 = 5$). Διαιρούν το 40 με τον αριθμό αυτό, για να βρουν πόσες ανθοδέσμες ετοιμάστηκαν ($40 \div 5 = 8$). Πολλαπλασιάζουν επί το 8 ($8 \times 3 = 24$ και $8 \times 2 = 16$).	Σοφία, Έλενα, Μυρτώ, Νεκτάριος	
Επαναλαμβανόμενος πολλαπλασιασμός – Διπλασιάζουν, τριπλασιάζουν, τετραπλασιάζουν... τον αριθμό των κόκκινων και άσπρων τριαντάφυλλων, μέχρι να φτάσουν στον επιθυμητό συνολικό αριθμό των τριαντάφυλλων ($24 + 16 = 40$).	Μαρίνα (με πίνακα)	
Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση — Αυξάνουν τον αριθμό των κόκκινων και κίτρινων τριαντάφυλλων, προσθέτοντας 3 και προσθέτοντας 2 επαναλαμβανόμενα, μέχρι να φτάσουν στον επιθυμητό συνολικό αριθμό των τριαντάφυλλων ($24 + 16 = 40$).	Σάββας (με σχεδιάγραμμα), Αντωνία (με σχέδιο), Γιάννης (με πίνακα), Ζήνωνας, Στέφανος (με πράξεις)	
Λανθασμένη απάντηση —Δεν καταλήγουν σε ορθή απάντηση, παρουσιάζουν αδυναμίες στην κατανόηση και ερμηνεία του προβλήματος.	Τάσος, Μιχάλης	
Άλλη		

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΘΟΔΕΣΜΕΣ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ.....

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

- Να επιλέξετε τις στρατηγικές που θα ήταν οι πιο κατάλληλες, για να παρουσιαστούν στην τάξη.
- Γιατί επιλέξατε τις στρατηγικές αυτών των μαθητών;

3. Selecting (Επιλογή)

Επιλογή απαντήσεων των μαθητών για προβολή κατά τη διάρκεια της συζήτησης

- Επιλέγονται συγκεκριμένοι μαθητές να παρουσιάσουν την εργασία τους λόγω των μαθηματικών ιδεών που έχουν χρησιμοποιήσει.
- Η εκπαιδευτικός θα πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές να θεωρούν τους εαυτούς τους ως «συγγραφείς» μαθηματικών ιδεών και να τους δίνει την ευκαιρία να τις παρουσιάζουν.
- Υπάρχει έλεγχος στο περιεχόμενο της συζήτησης (όχι πλέον «ποιος θα είναι ο επόμενος που θέλει να παρουσιάσει;»)

Στόχοι

Οι μαθητές να αναγνωρίσουν ότι:

- Η σχέση μεταξύ ποσοτήτων είναι πολλαπλασιαστική και όχι προσθετική – οι ποσότητες (κόκκινα τριαντάφυλλα, άσπρα τριαντάφυλλα και ανθοδέσμες) χρειάζεται να αναπτύσσονται με σταθερό ρυθμό.
- Δημιουργείται μία νέα σύνθετη ομάδα
- Υπάρχουν τρεις σχετικές στρατηγικές για λύση προβλήματος: επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, επαναλαμβανόμενος πολλαπλασιασμός και σύνθεση νέας μονάδας.

Monitoring Tool (Εργαλείο Ελέγχου)

Στρατηγική	Ποιος και Τι	Σειρά
Σύνθεση νέας μονάδας —Βρίσκουν τον αριθμό των τριαντάφυλλων που έχει μια ανθοδέσμη ($3 + 2 = 5$). Διαιρούν το 40 με τον αριθμό αυτό, για να βρουν πόσες ανθοδέσμες ετοιμάστηκαν ($40 \div 5 = 8$). Πολλαπλασιάζουν επί το 8 ($8 \times 3 = 24$ και $8 \times 2 = 16$).	Σοφία , Έλενα, Μυρτώ, Νεκτάριος	
Επαναλαμβανόμενος πολλαπλασιασμός – Διπλασιάζουν, τριπλασιάζουν, τετραπλασιάζουν... τον αριθμό των κόκκινων και άσπρων τριαντάφυλλων, μέχρι να φτάσουν στον επιθυμητό συνολικό αριθμό των τριαντάφυλλων ($24 + 16 = 40$).	Μαρίνα (με πίνακα)	
Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση —Αυξάνουν τον αριθμό των κόκκινων και κίτρινων τριανταφύλλων, προσθέτοντας 3 και προσθέτοντας 2 επαναλαμβανόμενα, μέχρι να φτάσουν στον επιθυμητό συνολικό αριθμό των τριαντάφυλλων ($24 + 16 = 40$).	Σάββας (με σχεδιάγραμμα), Αντωνία (με σχέδιο) , Γιάννης (με πίνακα) , Ζήνωνας, Στέφανος (με πράξεις)	
Λανθασμένη απάντηση —Δεν καταλήγουν σε ορθή απάντηση, παρουσιάζουν αδυναμίες στην κατανόηση και ερμηνεία του προβλήματος.	Τάσος, Μιχάλης	
Άλλη		

4. Sequencing (Σειροθέτηση)

Επιλογή της σειράς παρουσίασης των απαντήσεων των μαθητών κατά τη διάρκεια της συζήτησης

- Με ποια σειρά θα παρουσιαστούν οι απαντήσεις των μαθητών στην τάξη, ώστε να είναι όλες προσβάσιμες και κατανοητές στους μαθητές;
- Ανάπτυξη μιας μαθηματικής λογικής ιστορίας.

Monitoring Tool (Εργαλείο Ελέγχου)

Στρατηγική	Ποιος και Τι	Σειρά
Σύνθεση νέας μονάδας —Βρίσκουν τον αριθμό των τριαντάφυλλων που έχει μια ανθοδέσμη ($3 + 2 = 5$). Διαιρούν το 40 με τον αριθμό αυτό, για να βρουν πόσες ανθοδέσμες ετοιμάστηκαν ($40 \div 5 = 8$). Πολλαπλασιάζουν επί το 8 ($8 \times 3 = 24$ και $8 \times 2 = 16$).	Σοφία , Έλενα, Μυρτώ, Νεκτάριος	4-Σοφία
Επαναλαμβανόμενος πολλαπλασιασμός – Διπλασιάζουν, τριπλασιάζουν, τετραπλασιάζουν... τον αριθμό των κόκκινων και άσπρων τριαντάφυλλων, μέχρι να φτάσουν στον επιθυμητό συνολικό αριθμό των τριαντάφυλλων ($24 + 16 = 40$).	Μαρίνα (με πίνακα)	3-Μαρίνα
Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση —Αυξάνουν τον αριθμό των κόκκινων και κίτρινων τριανταφύλλων, προσθέτοντας 3 και προσθέτοντας 2 επαναλαμβανόμενα, μέχρι να φτάσουν στον επιθυμητό συνολικό αριθμό των τριαντάφυλλων ($24 + 16 = 40$).	Σάββας (με σχεδιάγραμμα), Αντωνία (με σχέδιο), Γιάννης (με πίνακα), Ζήνωνας, Στέφανος (με πράξεις)	1-Αντωνία 2-Γιάννης
Λανθασμένη απάντηση —Δεν καταλήγουν σε ορθή απάντηση, παρουσιάζουν αδυναμίες στην κατανόηση και ερμηνεία του προβλήματος.	Τάσος, Μιχάλης	
Άλλη		

Πιθανή σειρά παρουσίασης των απαντήσεων

1. Αντωνία – σχέδιο (επαναλαμβανόμενη πρόσθεση)

Απάντηση: 16 άσπρα και 24 κόκκινα.

3. Μαρίνα – πίνακας (επαναλαμβανόμενος πολλαπλασιασμός)

κόκκινα	3	6	12	24
άσπρα	2	4	8	16

Απάντηση: ~~24~~ χρειάστηκαν 24 κόκκινα τριαντάφυλλα και 16 άσπρα τριαντάφυλλα.

2. Γιάννης – πίνακας (επαναλαμβανόμενη πρόσθεση)

Άσπρα τριαντάφυλλα	2	4	6	8	10	12	14	16
Κόκκινα τριαντάφυλλα	3	6	9	12	15	18	21	24

Απάντηση: Χρειάστηκε 16 άσπρα τριαντάφυλλα και κόκκινα τριαντάφυλλα.

4. Σοφία – πράξεις (σύνθεση νέας μονάδας)

$$3 + 2 = 5$$

$$40 \div 5 = 8$$

$$(8 \times 3) + (8 \times 2) = 40$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ + 16 \\ \hline 40 \end{array}$$

Απάντηση: Χρειάστηκε $24 + 16 = 40$

5. Connecting (Σύνδεση)

Εύρεση και προβολή συνδέσεων των απαντήσεων των μαθητών κατά τη διάρκεια της συζήτησης

- Ίσως αποτελεί το πιο σύνθετο / απαιτητικό μέρος της συζήτησης.
- Η εκπαιδευτικός θα πρέπει να υποβάλει ερωτήσεις στους μαθητές με τρόπο ώστε τα μαθηματικά να γίνονται ξεκάθαρα και κατανοητά.
- Η εστίαση πρέπει να είναι στο μαθηματικό νόημα και στις σχέσεις, καθώς και στον καθορισμό συνδέσεων μεταξύ των μαθηματικών ιδεών και των αναπαραστάσεων τους.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ.....

- * Ποιες συνδέσεις θα πρέπει να κάνετε και για ποιο σκοπό;

Εύρεση συνδέσεων στις απαντήσεις των μαθητών

1. Αντωνία – σχέδιο
(επαναλαμβανόμενη πρόσθεση)

Απάντηση: 16 αϊώρα και 24 κοιλίγια.

3. Μαρίνα – πίνακας
(επαναλαμβανόμενος πολλαπλασιασμός)

κοιλίγια	3	6	12	24
αϊώρα	2	4	8	16

Απάντηση: Οι χρειάζονται 24 κοιλίγια τριαντάφυλλα και 16 αϊώρα τριαντάφυλλα.

2. Γιάννης – πίνακας
(επαναλαμβανόμενη πρόσθεση)

Αϊώρα τριαντάφυλλα	2	4	6	8
Κοιλίγια τριαντάφυλλα	3	6	9	12

Απάντηση: Χρειάστηκε 24 κοιλίγια τριαντάφυλλα.

Πώς το σχέδιο της Αντωνίας σχετίζεται με τον πίνακα του Γιάννη;

4. Σοφία – πράξεις (σύνθεση νέας μονάδας)

$$3 + 2 = 5$$

$$40 \div 5 = 8$$

$$(8 \times 3) + (8 \times 2) = 40$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ + 16 \\ \hline 40 \end{array}$$

Απάντηση: Χρειάστηκε $24 + 16 = 40$

1. Αντωνία – σχέδιο
(επαναλαμβανόμενη
πρόσθεση)

Απάντηση: 16 αϊβάρα και 24 κοιλίδια.

2. Γιάννης – πίνακας
(επαναλαμβανόμενη
πρόσθεση)

Αϊβάρα τριαντάφυλλα	2	4	6	8	10	12	14
Κόκκινα τριαντάφυλλα	3	6	9	12	15	18	21

Απάντηση: Χρειάστηκε 16 αϊβάρα τριαντάφυλλα και κόκκινα τριαντάφυλλα.

3. Μαρίνα – πίνακας
(επαναλαμβανόμενος
πολλαπλασιασμός)

Κοιλίδια	3	6	12	24
Αϊβάρα	2	4	8	16

Απάντηση: Οι χρειάστη 24 κοιλίδια τριαντάφυλλα και 16 αϊβάρα τριαντάφυλλα.

4. Σοφία – πράξεις (σύνθεση
νέας μονάδας)

3 κόκκινα τριαντάφυλλα > 2 αϊβάρα τριαντάφυλλα

$(8 \times 3) + (8 \times 2)$

$24 + 16$

$40 : 5 = 8$

Απάντηση: Χρειάστηκε 24 κόκκινα τριαντάφυλλα και 16 αϊβάρα τριαντάφυλλα.

Σε ποια άλλη λύση παρατηρείς τη χρήση του συντελεστή αναλογίας 8;

Γιατί αυτές οι 5 (+) διαδικασίες βοηθούν τους εκπαιδευτικούς;

- **Δίνουν στους εκπαιδευτικούς περισσότερο έλεγχο στη μάθηση μέσω:**
 - Της συζήτησης του περιεχομένου.
 - Της εξέλιξης της διδασκαλίας και δεν βασίζεται στον αυτοσχεδιασμό.
- **Δίνει στους εκπαιδευτικούς περισσότερο χρόνο, για να:**
 - Κατανοήσουν τη σκέψη των μαθητών.
 - Σχεδιάσουν τις ερωτήσεις που θα υποβάλουν, καθώς και να αναπτύξουν άλλες διδακτικές ενέργειες.
- **Δίνουν μια αξιόπιστη διαδικασία στους εκπαιδευτικούς για να βελτιώσουν σταδιακά τα μαθήματά τους.**
- **«Σέβονται» τη σκέψη των μαθητών, ενώ την καθοδηγούν χρησιμοποιώντας παραγωγικές και ξεκάθαρες κατευθύνσεις.**

(Ball, 1993; Engle & Conant, 2002)