



Παρουσίαση Ενοτήτων 8-12

Μαθηματικές Πρακτικές

Κωνσταντίνος Χρίστου
Ρίτα Παναούρα
Δήμητρα Πίττα-Πανταζή
Μάριος Πιττάλης

Μάρτης 2017

Συγγραφική ομάδα:

Αθανασίου Χρύσω
Δεληγιάννη Ελένη
Μάκη-Παναούρα Γεωργία
Παντζιαρά Μαριλένα
Χειμωνή Μαρία

**Ακαδημαϊκοί Συνεργάτες
για Δημοτική και Μέση Εκπαίδευση:**

Χρίστου Κωνσταντίνος, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Βίδρας Αλέκος, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Παναούρα Ρίτα, Πανεπιστήμιο Frederick
Παπαγεωργίου Ελένη, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο
Πίττα-Πανταζή Δήμητρα, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πιτάλης Μάριος, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Συντονιστής Πρώτος Λειτουργός Εκπαίδευσης:

Χαμπιαούρης Κώστας

**Επιθεωρητές Ενδοτμηματικής
Επιτροπής Μαθηματικών :**

Χαμπιαούρης Κώστας, Πρόεδρος
Χαριδήμου Κυριάκος, Αντιπρόεδρος
Σιμητρά - Κωνσταντίνου Ανδρούλα, Γραμματέας
Βούρια Λουκία, Μέλος
Δημοσθένους Χρίστος, Μέλος
Ζαμπακίδου Αναστασία, Μέλος
Ιακώβου Πόπη, Μέλος
Παπακώστα Μαρία, Μέλος
Χρίστου Ανδρούλα, Μέλος

Σύμβουλοι Μαθηματικών:

Καψάλης Χαράλαμπος
Μάρκου Άντρη
Σεργίου Σέργιος
Στεφάνου Λάμπρος

Στ' ΤΑΞΗ

**ΧΡΟΝΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΚΑΙ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ
ΕΝΟΤΗΤΩΝ**

ΜΑΡΤΗΣ-ΑΠΡΙΛΗΣ



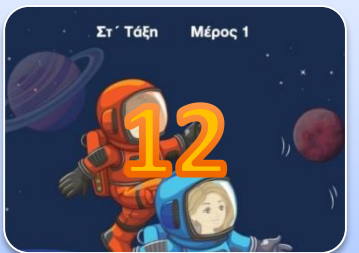
- 8_Πολλαπλασιασμός & διαίρεση, κλασμάτων & μικτών_4 εβδομάδες
- 9_Πολλαπλασιασμός & διαίρεση δεκαδικών_ 3 εβδομάδες

ΜΑΗΣ



- 10_Άλγεβρα_2 εβδομάδες
- 11_Αναλογίες – Ποσοστά – Πιθανότητες_ 3 εβδομάδες

ΙΟΥΝΗΣ



- 12_Γεωμετρία (κύκλος), Μέτρηση (Εμβαδόν, περιφέρεια κύκλου, όγκος) _ 2 εβδομάδες

- Αναλυτική
Παρουσίαση Ενοτήτων

Ενότητα 8_ Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση Κλασμάτων και μικτών

- Πολλαπλασιασμός ακέραιος επί κλάσμα και κλάσμα επί ακέραιος
- Πολλαπλασιασμός κλασμάτων
- Πολλαπλασιασμός μικτών
- Διαίρεση ακέραιου διά κλάσμα και κλάσμα διά ακέραιος
- Διαίρεση κλασμάτων
- Διαίρεση μικτών

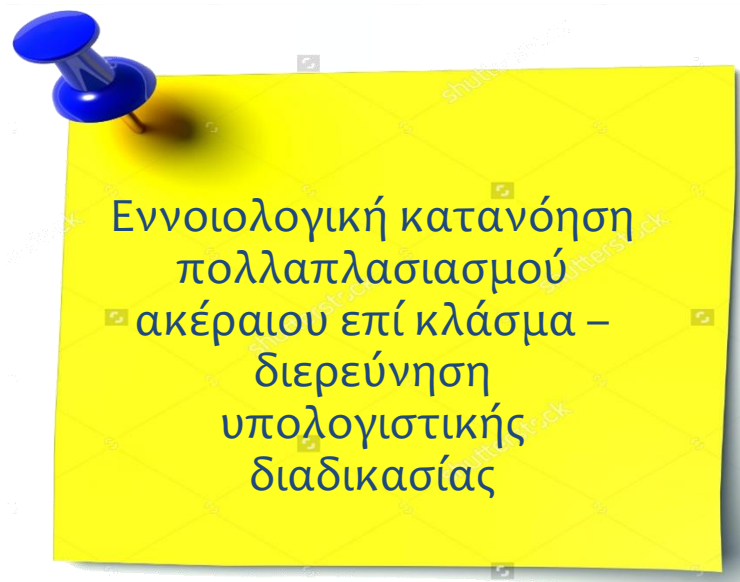
Διερεύνηση 1

- (α) Στη συσκευασία της διπλανής εικόνας, κάθε μπουκάλι περιέχει $\frac{2}{5}$ L χυμό.
Να υπολογίσετε τη συνολική ποσότητα χυμού που υπάρχει σε:



(i) 3 μπουκάλια

(ii) 5 μπουκάλια



(iii) 7 μπουκάλια

- (β) Να περιγράψετε έναν τρόπο υπολογισμού του γινομένου ενός ακέραιου επί έναν κλασματικό αριθμό.

Δραστηριότητες

1. Η Άννα είχε 8 L χυμό και χρησιμοποίησε το $\frac{1}{4}$ της ποσότητας αυτής. Πόσο χυμό χρησιμοποίησε;

(α) Ποια μαθηματική πρόταση ταιριάζει στο πιο πάνω πρόβλημα; Να επεξηγήσετε.

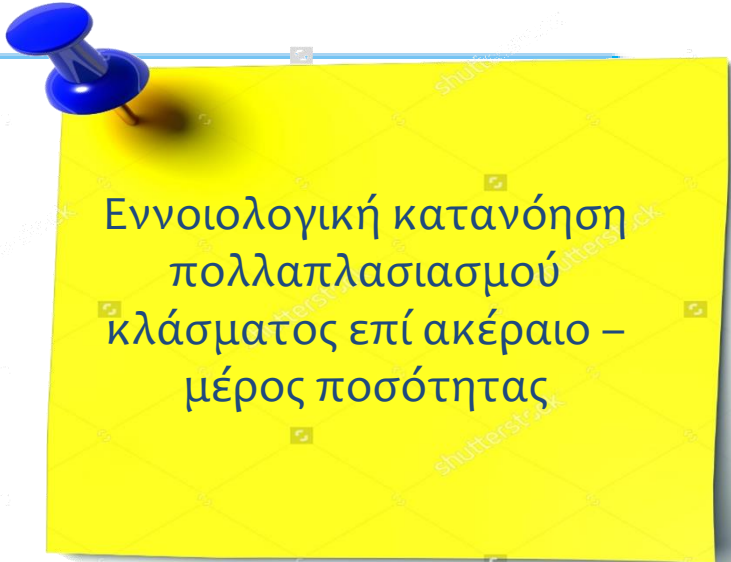
A. $8 - \frac{1}{4}$

B. $8 + \frac{1}{4}$

Γ. $8 \div \frac{1}{4}$

Δ. $\frac{1}{4} \cdot 8$

Ε. $\frac{1}{4} \div 8$



Εννοιολογική κατανόηση
πολλαπλασιασμού
κλάσματος επί ακέραιο –
μέρος ποσότητας

(β) Να χρησιμοποιήσετε λέξεις, σχέδιο ή σύμβολα, για να επιλύσετε το πρόβλημα.

(α) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω γινόμενα. Να γράψετε την απάντηση στην πιο απλή μορφή.

ΣΤΗΛΗ Α

ΣΤΗΛΗ Β

$4 \cdot 2 =$	$2 \cdot 4 =$
$4 \cdot 1 =$	$1 \cdot 4 =$
$4 \cdot \frac{1}{2} =$	$\frac{1}{2} \cdot 4 =$
$4 \cdot \frac{1}{4} =$	$\frac{1}{4} \cdot 4 =$
$4 \cdot \frac{1}{8} =$	$\frac{1}{8} \cdot 4 =$
$4 \cdot \frac{1}{16} =$	$\frac{1}{16} \cdot 4 =$

Αξιοποίηση
αντιμεταθετικής ιδιότητας
για υπολογισμό
κλάσματος επί ακέραιο ή
ακέραιου επί κλάσματος
με τον πιο εύκολο τρόπο

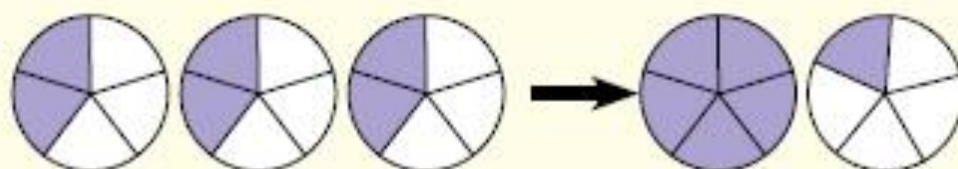
(β) Ποια μοτίβα παρατηρείτε στον πίνακα;

Νέες Έννοιες

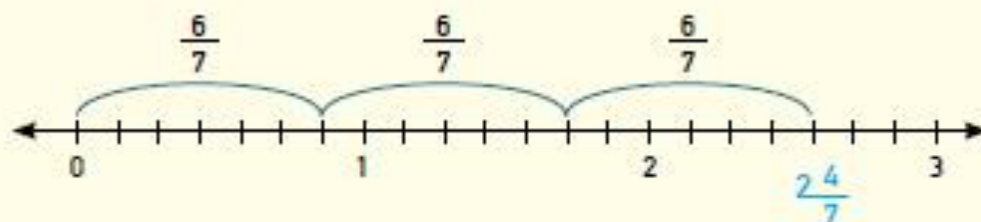
- Πολλαπλασιασμός ακέραιου αριθμού επί κλάσμα
Για να πολλαπλασιάσουμε έναν ακέραιο αριθμό επί ένα κλάσμα, πολλαπλασιάζουμε τον ακέραιο αριθμό επί τον αριθμητή του κλάσματος.

Παραδείγματα:

$$3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5} = 1 \frac{1}{5}$$



$$3 \cdot \frac{6}{7} = \frac{6}{7} + \frac{6}{7} + \frac{6}{7} = \frac{3 \cdot 6}{7} = \frac{18}{7} = 2 \frac{4}{7}$$

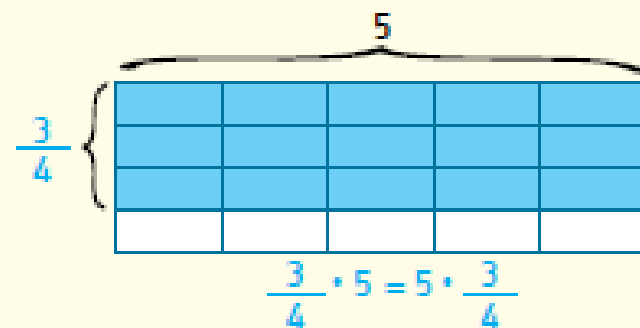
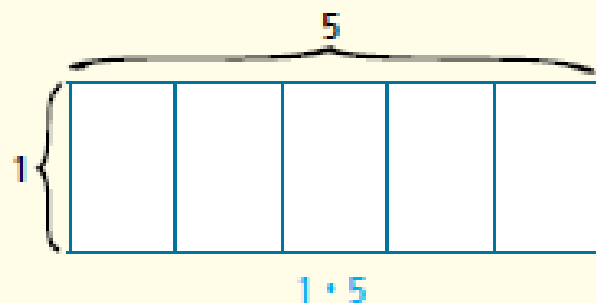


$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \cdot 5 &= 5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{5 \cdot 3}{4} = \frac{15}{4} = 3 \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Με βάση την αντιμεταθετική ιδιότητα, το γινόμενο $\frac{3}{4} \cdot 5$ είναι ίσο με το γινόμενο $5 \cdot \frac{3}{4}$.

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του γινομένου $\frac{3}{4} \cdot 5$ είναι:

$$\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{1} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 1} = \frac{15}{4} = 3 \frac{3}{4}$$





Πιτσαρία «Νοστιμιά».
Πώς μπορώ να σας
βοηθήσω;



Θα ήθελα μια πίτσα. Η μισή
να έχει κοτόπουλο και η
άλλη μισή ανανά. Το $\frac{1}{2}$
της πίτσας με κοτόπουλο
θα ήθελα να έχει ελιές
και το $\frac{1}{4}$ της πίτσας με
ανανά να έχει καλαμπόκι.





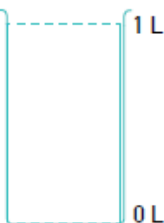
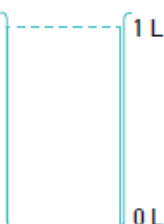
Ο πελάτης αυτός είναι
σίγουρα μαθηματικός!



Πολλαπλασιασμός
κλάσματος
επί κλάσμα

Να κάνετε ένα σχέδιο, για να δείξετε την πίτσα που παράγγειλε ο πελάτης.

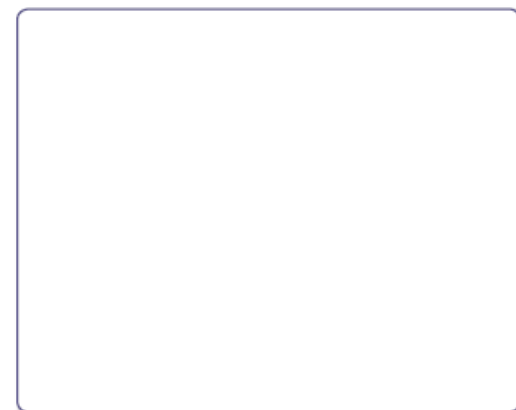
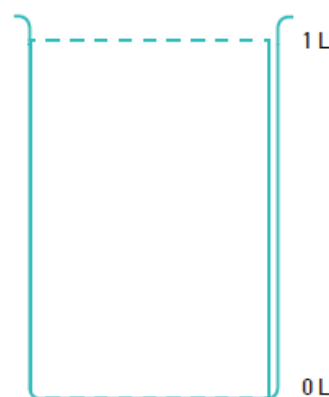
Ο Δημήτρης χρειάζεται $\frac{1}{4}$ L χυμό βατόμουρο για την ετοιμασία μιας δόσης γρανίτας. Να συμπληρώσετε τον πίνακα, για να υπολογίσετε την ποσότητα του χυμού που χρειάζεται ο Δημήτρης σε κάθε περίπτωση.

	Λεκτική έκφραση	Αναπαράσταση	Μαθηματική πρόταση
διπλάσια δόση	2 φορές το $\frac{1}{4}$		$2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{4} = \frac{2}{4}$
1 δόση			
$\frac{1}{2}$ της δόσης			
$\frac{1}{4}$ της δόσης			

(α) Τι παρατηρείτε;

(β) Να δείξετε και να υπολογίσετε πόσο χυμό θα χρειαστεί ο Δημήτρης, αν θα ετοιμάσει:

(i) $\frac{2}{3}$ της δόσης



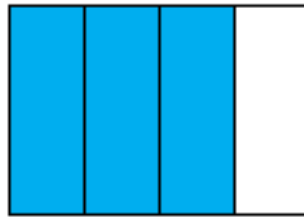
Διασύνδεση
αναπαράστασεων,
αξιοποίηση γνωστών
γινομένων

Παραδείγματα

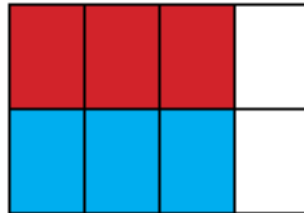
1. Να αναπαραστήσετε και να υπολογίσετε το γινόμενο $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$.

Λύση:

Στο ορθογώνιο σκιάζουμε τα $\frac{3}{4}$.



Στη συνέχεια σκιάζουμε το $\frac{1}{2}$ των $\frac{3}{4}$.



Το $\frac{1}{2}$ των $\frac{3}{4}$ που έχουμε σκιάσει είναι τα $\frac{3}{8}$ του αρχικού ορθογωνίου.

$$\text{Άρα, } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$$

Έμφαση στον
υπολογισμό του
 $\frac{1}{2}$ των $\frac{3}{4}$

(α) Να υπολογίσετε τα γινόμενα.

$$2 \cdot \frac{1}{4} =$$

$$1 \cdot \frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} =$$

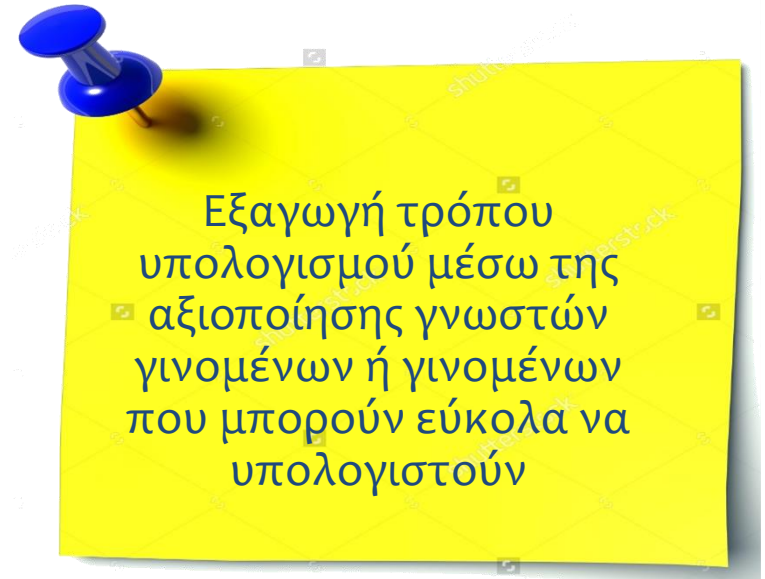
$$4 \cdot \frac{1}{5} =$$

$$2 \cdot \frac{1}{5} =$$

$$1 \cdot \frac{1}{5} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} =$$



(i) Ποια μοτίβα παρατηρείτε;

(ii) Με ποιο τρόπο προκύπτουν τα πιο πάνω γινόμενα;

(β) Να δείξετε με ποιο τρόπο μπορείτε να υπολογίσετε τα πιο κάτω γινόμενα.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} =$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} =$$

(γ) Να περιγράψετε έναν τρόπο υπολογισμού του γινομένου δύο κλασματικών αριθμών.

Να επεξηγήσετε το σκεπτικό κάθε παιδιού.

Το γινόμενο της μαθηματικής πρότασης
 $\frac{7}{8} \cdot 2\frac{2}{3}$ είναι μικρότερο από το $2\frac{2}{3}$.



Άρης

Το γινόμενο της μαθηματικής πρότασης
 $\frac{8}{7} \cdot 2\frac{2}{3}$ είναι μεγαλύτερο από το $2\frac{2}{3}$.



Πολλαπλασιασμός μικτών αριθμών
 Αξιοποίηση της εκτίμησης γινομένου, έμφαση στην εννοιολογική ερμηνεία του γινομένου

Η Έλενα, ο Γιάννης και η Νικολέτα χρησιμοποίησαν διαφορετικές μεθόδους, για να υπολογίσουν το γινόμενο $3 \cdot 2\frac{3}{4}$

(α) Να περιγράψετε τη μέθοδο που χρησιμοποίησε κάθε παιδί.

$$\begin{aligned}
 3 \cdot 2\frac{3}{4} &= 3 \cdot (2 + \frac{3}{4}) \\
 &= (3 \cdot 2) + (3 \cdot \frac{3}{4}) \\
 &= 6 + (\frac{3 \cdot 3}{4}) \\
 &= 6 + \frac{9}{4} \\
 &= 6 + 2\frac{1}{4} \\
 &= 8\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Γιάννης

$$\begin{aligned}
 3 \cdot 2\frac{3}{4} &= 3 \cdot \frac{11}{4} \\
 &= (\frac{3 \cdot 11}{4}) \\
 &= \frac{33}{4} \\
 &= 8\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Έλενα

$$\begin{aligned}
 3 \cdot 2\frac{3}{4} &= 2\frac{3}{4} + 2\frac{3}{4} + 2\frac{3}{4} \\
 &= 6 + \frac{9}{4} \\
 &= 6 + 2\frac{1}{4} \\
 &= 8\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Νικολέτα

Υπολογισμός γινομένου ακεραίου επί μικό με διαφορετικούς τρόπους - Έμφαση στη διαδικαστική επάρκεια, π.χ.,

$$3 \cdot 2\frac{1}{8} = 3 \cdot (2 + \frac{1}{8})$$

(α) Ο Παύλος έχει 3 πίτσες και θα τις κόψει σε ίσα κομμάτια. Να δείξετε και να υπολογίσετε πόσα κομμάτια θα πάρει, αν κάθε πίτσα την κόψει σε κομμάτια:

(i) του $\frac{1}{2}$ της πίτσας



(ii) του $\frac{1}{3}$ της πίτσας



(iii) του $\frac{1}{4}$ της πίτσας



Μαθηματική πρόταση και απάντηση

(β) Να δείξετε και να υπολογίσετε πόσα κομμάτια θα πάρει, αν κάθε πίτσα την κόψει σε κομμάτια:

(i) του $\frac{1}{8}$ της πίτσας



(ii) των $\frac{2}{8}$ της πίτσας



Μαθηματική πρόταση και απάντηση

Εννοιολογική κατανόηση
 διαίρεσης ακεραίου διά κλάσμα -
 εξαγωγή κανόνα

$$3 \div \frac{1}{2} = 6$$

$$3 \div \frac{1}{8} = \frac{24}{8} \div \frac{1}{8} = 24$$

$$3 \div \frac{1}{3} = 9$$

$$3 \div \frac{2}{8} = \frac{24}{8} \div \frac{2}{8} = 12$$

(γ) Με βάση τον τρόπο που εργαστήκατε στα ερωτήματα (α) και (β), να υπολογίσετε τα πιο κάτω πηλίκα.

$$3 \div \frac{1}{4} =$$

$$3 \div \frac{2}{4} =$$

$$3 \div \frac{3}{4} =$$

$$4 \div \frac{1}{5} =$$

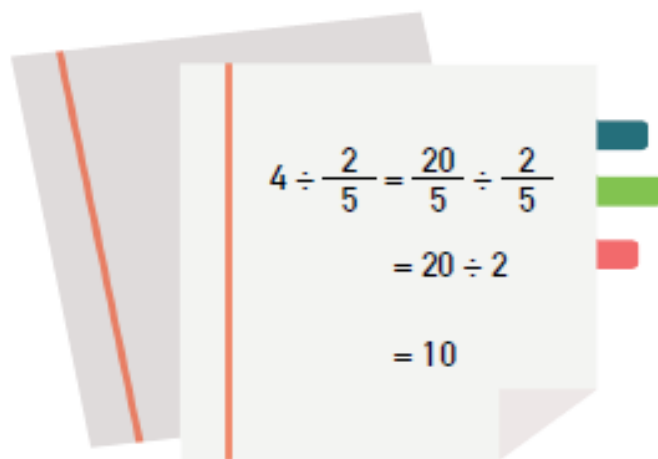
$$4 \div \frac{2}{5} =$$

$$4 \div \frac{4}{5} =$$

(δ) Να επεξηγήσετε γιατί $8 \div \frac{1}{3} = 24$ και $8 \div \frac{2}{3} = 12$.

Διερεύνηση 2

Ο Σωτήρης χρησιμοποίησε τον πιο κάτω τρόπο, για να υπολογίσει το πηλίκο $4 \div \frac{2}{5}$.



The image shows a stack of papers. The top paper is white and contains the following mathematical steps:

$$\begin{aligned}4 \div \frac{2}{5} &= \frac{20}{5} \div \frac{2}{5} \\ &= 20 \div 2 \\ &= 10\end{aligned}$$



(α) Να περιγράψετε τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκε ο Σωτήρης.

(β) Να χρησιμοποιήσετε τον τρόπο του Σωτήρη, για να υπολογίσετε τα πιο κάτω πηλίκα.

$$2 \div \frac{4}{6} =$$

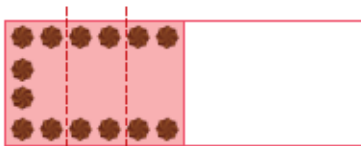
$$8 \div \frac{2}{3} =$$

$$3 \div \frac{4}{5} =$$

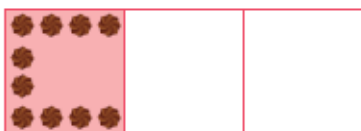
(γ) Να περιγράψετε έναν τρόπο υπολογισμού του πηλίκου ενός ακέραιου αριθμού με έναν κλασματικό αριθμό.

(α) Η κυρία Αντιγόνη θα μοιράσει ένα κομμάτι τούρτας σε 3 παιδιά. Να δείξετε και να υπολογίσετε την ποσότητα που θα πάρει το κάθε παιδί, αν η κυρία Αντιγόνη έχει στη διάθεσή της:

(i) το $\frac{1}{2}$ της τούρτας



(ii) το $\frac{1}{3}$ της τούρτας



(iii) το $\frac{1}{4}$ της τούρτας

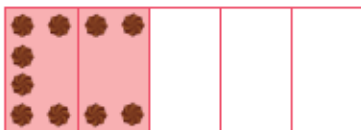


(β) Να δείξετε και να υπολογίσετε το μέρος της τούρτας που θα πάρει το κάθε παιδί, αν Αντιγόνη έχει στη διάθεσή της:

(i) το $\frac{1}{5}$ της τούρτας



(ii) τα $\frac{2}{5}$ της τούρτας



**Μαθηματική πρόταση
και απάντηση**

$$\frac{1}{2} \div 3 = \frac{3}{6} \div 3 = \frac{1}{6}$$

Εννοιολογική κατανόηση
διαίρεσης κλάσμα δια
ακέραιο - εξαγωγή κανόνα

$$\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{5} \div 3 = \frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{5} \div 3 = \frac{2}{15}$$

(γ) Με βάση τον τρόπο που εργαστήκατε στα ερωτήματα (α) και (β), να υπολογίσετε τα πιο κάτω πηλίκα.

$$\frac{1}{4} \div 2 =$$

$$\frac{1}{6} \div 3 =$$

$$\frac{2}{4} \div 2 =$$

$$\frac{2}{6} \div 3 =$$

$$\frac{3}{4} \div 2 =$$

$$\frac{4}{6} \div 3 =$$

**Μαθηματική πρόταση
και απάντηση**

(δ) Να περιγράψετε έναν τρόπο υπολογισμού του πηλίκου ενός κλασματικού αριθμού με έναν ακέραιο αριθμό.

Νέες Έννοιες

Διαίρεση ακέραιου αριθμού με κλάσμα

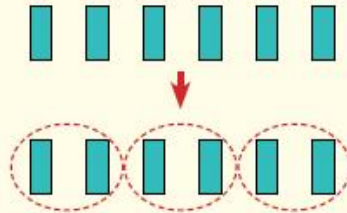
- Ένας τρόπος να ερμηνεύσουμε τη διαίρεση $6 \div 2$ είναι να υπολογίσουμε πόσες δυάδες έχει το 6.

$$6 \div 2$$

Πόσες δυάδες έχει το 6;

$$6 \div 2 = 3$$

Το 6 έχει 3 δυάδες.



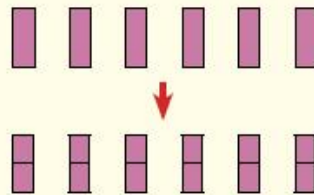
Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ερμηνεύσουμε και τη διαίρεση $6 \div \frac{1}{2}$.

$$6 \div \frac{1}{2}$$

Πόσα μισά έχει το 6;

$$6 \div \frac{1}{2} = \frac{12}{2} \div \frac{1}{2} = 12 \div 1 = 12$$

Το 6 έχει 12 μισά.



- Για να διαιρέσουμε έναν ακέραιο αριθμό με ένα κλάσμα:

- Γράφουμε τον ακέραιο αριθμό ως κλάσμα, ώστε ο διαιρετέος και ο διαιρέτης να είναι ομώνυμα κλάσματα. Στη συνέχεια, διαιρούμε τους αριθμητές.

- ή
- Αντιστρέφουμε το δεύτερο κλάσμα και κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Παράδειγμα:

$$6 \div \frac{2}{3}$$

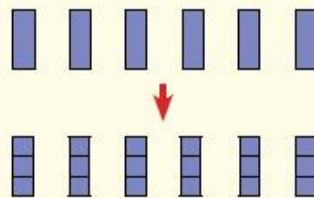
Πόσα κομμάτια των $\frac{2}{3}$ έχει το 6;

$$6 \div \frac{2}{3} = \frac{18}{3} \div \frac{2}{3} = 18 \div 2 = 9$$

Το 6 έχει 9 κομμάτια των $\frac{2}{3}$.

ή

$$6 \div \frac{2}{3} = \frac{6}{1} \div \frac{2}{3} = \frac{6}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 3}{1 \cdot 1} = \frac{9}{1} = 9$$



Νέες Έννοιες

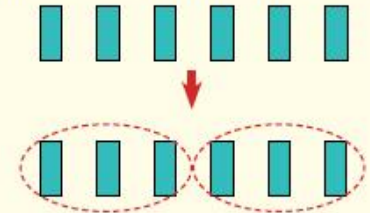
Διαίρεση κλάσματος με ακέραιο αριθμό

- Ένας άλλος τρόπος να ερμηνεύσουμε τη διαίρεση $6 \div 2$ είναι να μοιράσουμε το 6 σε δύο ίσες ομάδες.

$$6 \div 2$$

$$6 \div 2 = 3$$

Το 6 μοιράζεται σε 2 ίσες ομάδες των 3.

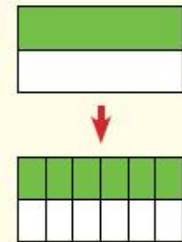


Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ερμηνεύσουμε και τη διαίρεση $\frac{1}{2} \div 6$.

$$\frac{1}{2} \div 6$$

Το $\frac{1}{2}$ είναι ισοδύναμο κλάσμα με τα $\frac{6}{12}$.

$$\frac{1}{2} \div 6 = \frac{6}{12} \div 6 = \frac{1}{12}$$



- Για να διαιρέσουμε ένα κλάσμα με έναν ακέραιο αριθμό:

- Μετατρέπουμε το κλάσμα σε ένα ισοδύναμο κλάσμα, ώστε ο αριθμητής να είναι πολλαπλάσιο του διαιρέτη. Στη συνέχεια, διαιρούμε τον αριθμητή του κλάσματος με τον διαιρέτη.

- ή
- Αντιστρέφουμε το δεύτερο κλάσμα και κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Παράδειγμα:

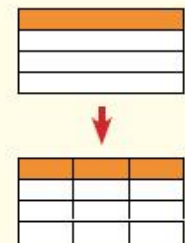
$$\frac{1}{4} \div 3$$

Το $\frac{1}{4}$ είναι ισοδύναμο κλάσμα με τα $\frac{3}{12}$.

$$\text{Άρα, } \frac{1}{4} \div 3 = \frac{3}{12} \div 3 = \frac{1}{12}$$

ή

$$\frac{1}{4} \div 3 = \frac{1}{4} \div \frac{3}{1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$



Ο Παντελής, η Φιλοθέη και ο Φώτης εργάστηκαν με διαφορετικούς τρόπους, για να υπολογίσουν το πηλίκο $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{6} \div \frac{2}{6} = 3 \div 2 = \frac{3}{2}$$

Παντελής

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{6}{12} \div \frac{4}{12} = 6 \div 4 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Φιλοθέη

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{9}{18} \div \frac{6}{18} = 9 \div 6 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Ηλίας

(α) Να εξηγήσετε τον τρόπο που εργάστηκε το κάθε παιδί.

(β) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω πηλίκα.

(i) $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4} =$

(ii) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5} =$

(iii) $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} =$

(γ) Να περιγράψετε έναν τρόπο υπολογισμού του πηλίκου δύο κλασμάτων.

Μετατροπή σε ομώνυμα κλάσματα – Μεταφορά γνώσης από πρόσθεση/αφαίρεση ετερόνυμων κλασμάτων
Ισοδύναμες μορφές

(α) Να υπολογίσετε.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
$1 \div \frac{1}{6} = \frac{6}{6} \div \frac{1}{6} = 6 \div 1 = 6$	$1 \cdot \frac{6}{1} = \frac{1 \cdot 6}{1} = \frac{6}{1} = 6$
$2 \div \frac{1}{4} = \frac{8}{4} \div \frac{1}{4} = 8 \div 1 = \square$	$2 \cdot \frac{4}{1} = \frac{2 \cdot 4}{1} = \frac{8}{1} = \square$
$3 \div \frac{6}{8} = \underline{\hspace{2cm}} = \square$	$3 \cdot \frac{8}{6} = \underline{\hspace{2cm}} = \square$
$\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = \underline{\hspace{2cm}} = \square$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{1} = \underline{\hspace{2cm}} = \square$
$\frac{1}{2} \div \frac{2}{5} = \underline{\hspace{2cm}} = \square$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \underline{\hspace{2cm}} = \square$
$\frac{6}{8} \div \frac{2}{3} = \underline{\hspace{2cm}} = \square$	$\frac{6}{8} \cdot \frac{3}{2} = \underline{\hspace{2cm}} = \square$

(β) Τι παρατηρείτε στον πιο πάνω πίνακα;

(γ) Με βάση τις παρατηρήσεις σας, ποιος είναι ένας εύκολος τρόπος για τον υπολογισμό των πιο κάτω πηλίκων;

$$\frac{2}{5} \div \frac{1}{3} =$$

$$\frac{3}{8} \div \frac{1}{12} =$$

Νέες Έννοιες

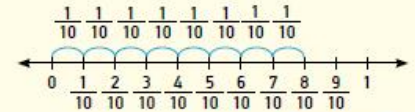
Διαίρεση κλάσματος με κλάσμα

- Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα:
 - μετατρέπουμε τα δύο κλάσματα σε ομώνυμα και διαιρούμε τους αριθμητές ή
 - αντιστρέφουμε το δεύτερο κλάσμα και κάνουμε πολλαπλασιασμό

Παράδειγμα:

$$\frac{4}{5} \div \frac{1}{10}$$

$$\frac{4}{5} \div \frac{1}{10} = \frac{8}{10} \div \frac{1}{10} = 8 \div 1 = 8$$



ή

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$$

$$\frac{4}{5} \div \frac{1}{10} = \frac{4}{5} \cdot \frac{10}{1} = \frac{4 \cdot 2}{1 \cdot 1} = \frac{8}{1} = 8$$

Ενότητα 9_ Πολλαπλασιασμός & διαίρεση δεκαδικών

- Πολλαπλασιασμός και διαίρεση δεκαδικών με δυνάμεις του 10
- Πολλαπλασιασμός δεκαδικού επί ακέραιο
- Πολλαπλασιασμός δεκαδικού επί δεκαδικό
- Διαίρεση δεκαδικού αριθμού με ακέραιο
- Διαίρεση δεκαδικών
- Διαίρεση ως πηλίκο



(α) Να χρησιμοποιήσετε υπολογιστική μηχανή, για να συμπληρώσετε.

Στήλη Α

Στήλη Β

$2.485 \cdot 1 =$	$543.7 \div 1 =$
$2.485 \cdot 10 =$	$543.7 \div 10 =$
$2.485 \cdot 100 =$	$543.7 \div 100 =$
$2.485 \cdot 1000 =$	$543.7 \div 1000 =$




Εξαγωγή κανόνα για
πολλαπλασιασμό και
διαίρεση με δυνάμεις του
10 – έμφαση στην
εννοιολογική επεξήγηση

(β) Ποιο μοτίβο παρατηρείτε σε κάθε στήλη;

$$72,35 \cdot 10 = 723,5$$

Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	,	Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά
		7	2	,	3	5	
	7	2	3	.	5		

 · 10

$$64,25 \div 10 = 6,425$$

Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	,	Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά
		6	4	,	2	5	
			6	.	4	2	5

 ÷ 10

Σάββας διαβάζει το πιο κάτω άρθρο στο περιοδικό «Επιστήμη».

Πόσο θα είναι το βάρος ενός αντικειμένου σε έναν άλλο πλανήτη;

Η βαρύτητα είναι η δύναμη, με την οποία η Γη έλκει ένα σώμα στην επιφάνειά της, ώστε να μην αιωρείται. Κάθε πλανήτης του ηλιακού μας συστήματος έχει διαφορετική βαρύτητα, με αποτέλεσμα ένα σώμα να έχει διαφορετικό βάρος από πλανήτη σε πλανήτη.

Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει με ποιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το βάρος ενός αντικειμένου, το οποίο στη Γη ζυγίζει 3 kg, σε διάφορους πλανήτες.

Ερμής	$0,38 \cdot 3$
Αφροδίτη	$0,68 \cdot 3$
Γη	$1 \cdot 3$
Άρης	$0,38 \cdot 3$
Δίας	$2,53 \cdot 3$
Κρόνος	$1,19 \cdot 3$
Ουρανός	$0,91 \cdot 3$
Πλούτωνας	$0,06 \cdot 3$



Σημαντική παράμετρος στις πράξεις με δεκαδικούς η αξιοποίηση της εκτίμησης της απάντησης

Να μελετήσετε τον πίνακα και να εκτιμήσετε σε ποιους πλανήτες το βάρος του αντικειμένου θα είναι μεγαλύτερο και σε ποιους μικρότερο σε σχέση με τη Γη. Να स्पεξηγήσετε.

Ο Θάνος και η Έλλη χρησιμοποίησαν διαφορετικούς τρόπους, για να υπολογίσουν το γινόμενο $2,8 \cdot 0,9$.

(α) Να μελετήσετε και να περιγράψετε τον τρόπο που χρησιμοποίησε κάθε παιδί.

$$\begin{aligned}
 2,8 \cdot 0,9 &= 2 \frac{8}{10} \cdot \frac{9}{10} \\
 &= \frac{28}{10} \cdot \frac{9}{10} \\
 &= \frac{28 \cdot 9}{10 \cdot 10} \\
 &= \frac{252}{100} = 2 \frac{52}{100} \\
 &= 2,52
 \end{aligned}$$

$$2,8 \cdot 0,9 \approx 3 \cdot 1 = 3$$

$$\begin{array}{r}
 28 \\
 \times 9 \\
 \hline
 252
 \end{array}$$

Με βάση την εκτίμηση, το γινόμενο είναι περίπου 3.

Άρα, $2,8 \cdot 0,9 = 2,52$

Αξιοποίηση εκτίμησης γινομένου και κυρίως της μετατροπής σε κλάσμα για εννοιολογική κατανόηση της θέσης της υποδιαστολής στο γινόμενο

$$\begin{array}{r}
 2,1 \\
 \times 1,1 \\
 \hline
 21 \\
 21 \\
 \hline
 2,31
 \end{array}$$

\leftarrow 1 δεκαδική θέση, γιατί $2,1 = \frac{21}{10}$
 \leftarrow + 1 δεκαδική θέση, γιατί $1,1 = \frac{11}{10}$
 \leftarrow 2 δεκαδικές θέσεις, γιατί $\frac{21}{10} \cdot \frac{11}{10} = \frac{231}{100}$

(α) Να υπολογίσετε το πηλίκο των πιο κάτω διαιρέσεων.

$$2.25 \div 0.05 =$$

$$22.5 \div 0.5 =$$

$$225 \div 5 =$$

$$2250 \div 50 =$$

$$22500 \div 500 =$$



Αξιοποίηση ισοδύναμων
μορφών για κατανόηση
της θέσης της
υποδιαστολής στο
πηλίκο

Τι παρατηρείτε; Γιατί συμβαίνει αυτό;



Ο Λουκάς, η Φοίβη, ο Ευγένιος και η Έλενα χρησιμοποίησαν διαφορετικές στρατηγικές, για να υπολογίσουν το πηλίκο $40,8 \div 4$.

$$40,8 \div 4 \approx 40 \div 4 = 10$$

$$\begin{array}{r|l} 408 & 4 \\ -4 & 102 \\ \hline 008 & \\ -8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Το 10,2 είναι μια λογική απάντηση, με βάση την εκτίμησή μου.

Λουκάς

$$\begin{array}{r|l} 40,8 & 4 \\ -40 & 10,2 \\ \hline 08 & \\ -8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ευγένιος

$$\begin{aligned} 40,8 \div 4 &= (40 + 0,8) \div 4 \\ &= (40 \div 4) + (0,8 \div 4) \\ &= 10 + 0,2 \\ &= 10,2 \end{aligned}$$

Φοίβη

$$40,8 \div 4 = 408 \div 40$$

$$\begin{array}{r|l} 408 & 40 \\ -40 & 10,2 \\ \hline 080 & \\ -80 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$408 \div 40 = 10,2$$

$$\text{Άρα, } 40,8 \div 4 = 10,2$$

Έλενα

Διερεύνηση και διασύνδεση διαφορετικών τρόπων υπολογισμού – Βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση

- Πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο και τον διαιρέτη με την κατάλληλη δύναμη του 10, ώστε ο διαιρετέος να γίνει ακέραιος αριθμός. Στη συνέχεια εκτελούμε τη διαίρεση.

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{l} 12,36 \div 4 \\ \downarrow \cdot 100 \quad \downarrow \cdot 100 \\ 1236 \div 400 \end{array}$$

Οι διαιρέσεις $12,36 \div 4$ και $1236 \div 400$ είναι ισοδύναμες.

Αξιοποίηση ισοδύναμων αριθμητικών παραστάσεων για υπολογισμό τιμής πηλίκου

$$\begin{array}{r|l} 1236 & 400 \\ -1200 & 3 \\ \hline 36 & \end{array}$$

Εκτελούμε κατακόρυφα τη διαίρεση $1236 \div 400$. Το πηλίκο είναι 3 και το υπόλοιπο 36.



$$\begin{array}{r|l} 1236 & 400 \\ -1200 & \text{Μ, δέκατα εκατοστά} \\ \hline 3600 & 3,09 \\ -3600 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Συνεχίζουμε τη διαίρεση, τοποθετώντας υποδιαστολή στο πηλίκο και προσθέτοντας μηδενικά στο δεκαδικό μέρος του 1236.

8. Η Θάλεια και ο Στέφανος υπολόγισαν το πηλίκο $15 \div 4$.

(α) Να επεξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκε κάθε παιδί.



15 | 4
-12 | 3

3

$15 \div 4 = 3 \frac{3}{4}$

Θάλεια

15.00 | 4
-12 | 3.75

30
-28

20
-20

0

Στέφανος



Διασύνδεση με κλάσμα
ως πηλίκο

Με ποιο τρόπο είναι δυνατόν να υπολογίσετε το πηλίκο $3,2 \div 0,7$; Να εισηγηθείτε διαφορετικούς τρόπους.

Αξιοποίηση ισοδύναμων αριθμητικών παραστάσεων για ελεύθερη ανάδυση στρατηγικών των μαθητών

Ενδεικτικά:

$$3,2 \div 0,7 = 32 \div 7$$

$$3,2 \div 0,7 = 32 \div 7 = (28 \div 7) + (4 \div 7)$$

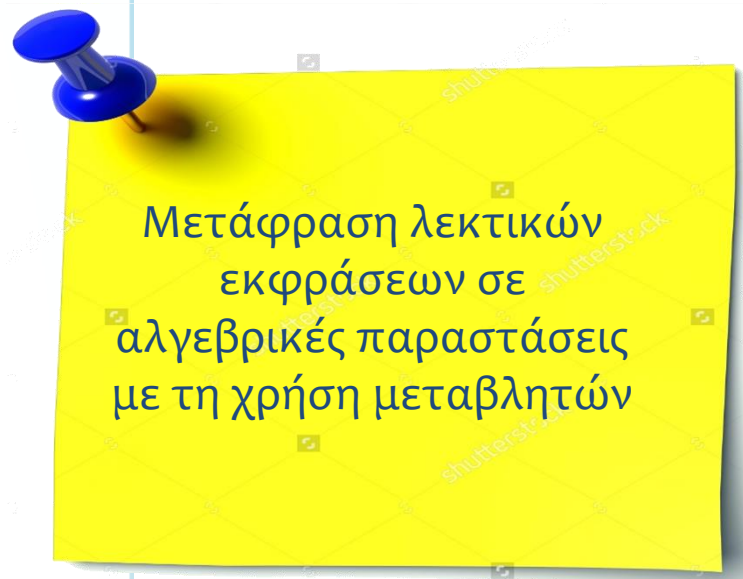
$$3,2 \div 0,7 = 32 \div 7 = (2,8 \div 0,7) + (0,4 \div 0,7)$$

- Αλγεβρική παράσταση
- Ισότητα, ιδιότητες ισοτήτων
- Επίλυση απλών εξισώσεων
- Σχέσεις μεταξύ μεταβλητών
- Μοτίβα

(α) (i) Να συμπληρώσετε τον πίνακα, αν ο Χάρης είναι 3 χρόνια μεγαλύτερος από τη Μαρίλια.



Ηλικία Μαρίλιας	Ηλικία Χάρη
1	
2	
3	
4	
5	
6	



(ii) Ποια θα είναι η ηλικία του Χάρη, όταν η Μαρίλια θα είναι:

12 χρονών: _____ χ χρονών: _____

(iii) Ποια θα είναι η ηλικία της Μαρίλιας, όταν ο Χάρης θα είναι:

17 χρονών: _____ ψ χρονών: _____

(β) Ο Γιάννης είναι n χρονών. Ποια αλγεβρική παράσταση αναπαριστά την ηλικία της Έλενας, αν η Έλενα είναι 4 χρόνια μεγαλύτερη από τον Γιάννη;

ΝΕΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

- Για να αναπαραστήσουμε ποσότητες που μεταβάλλονται, χρησιμοποιούμε γράμματα (ή σύμβολα), τα οποία ονομάζονται **μεταβλητές**. Μια μαθηματική έκφραση που περιλαμβάνει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές ονομάζεται **αλγεβρική παράσταση**.

Παραδείγματα:

Το άθροισμα του 3 και του x είναι $3 + x$

Το μισό του αθροίσματος του ψ και του 5 είναι $(\psi + 5) \div 2$ ή $\frac{\psi+5}{2}$

- Συνήθως, δεν γράφουμε το σύμβολο του πολλαπλασιασμού (\cdot) μεταξύ των αριθμών και των μεταβλητών ή μεταξύ των μεταβλητών.

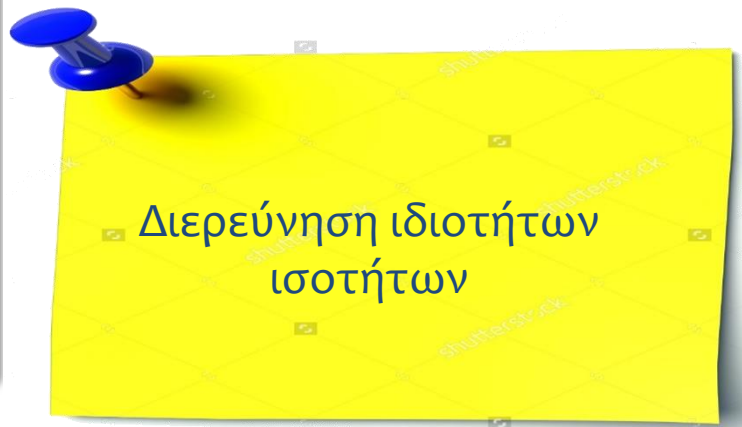
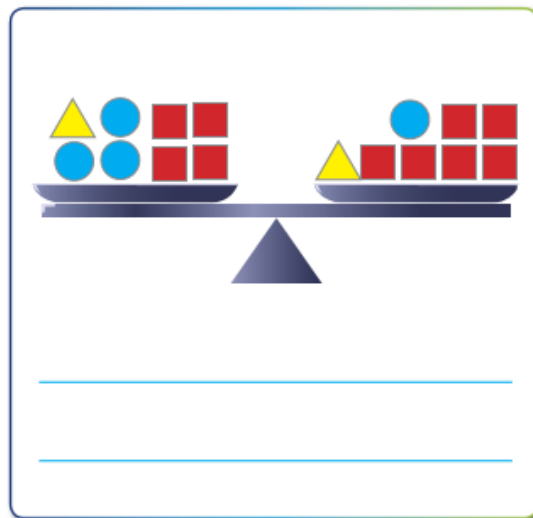
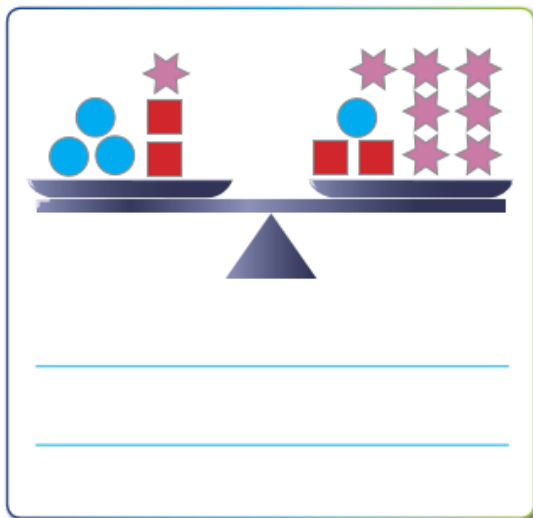
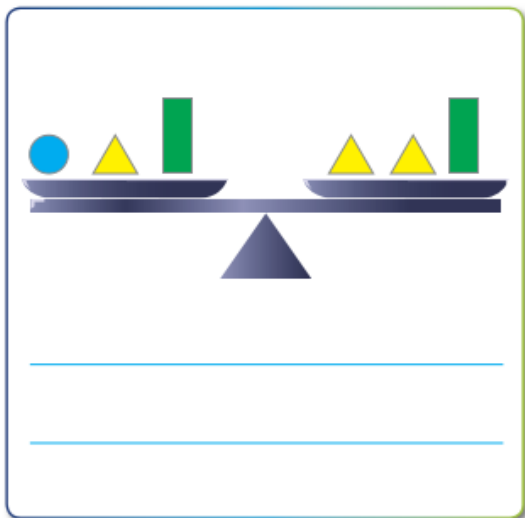
Παραδείγματα:

$$5 \cdot x = 5x$$

$$4 \cdot x \cdot \psi = 4x\psi$$

Οι πιο κάτω ζυγαριές ισορροπούν.

(α) Να αφαιρέσετε όσο το δυνατόν περισσότερα σχήματα από κάθε ζυγαριά, ώστε η ζυγαριά να συνεχίσει να ισορροπεί. Να γράψετε ποιες σχέσεις προκύπτουν από κάθε ζυγαριά.



Να επιλύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις. Να περιγράψετε τη στρατηγική που χρησιμοποιήσατε σε κάθε περίπτωση.

$$(α) x + 5 = 12$$

$$x =$$

$$(β) x - 8 = 7$$

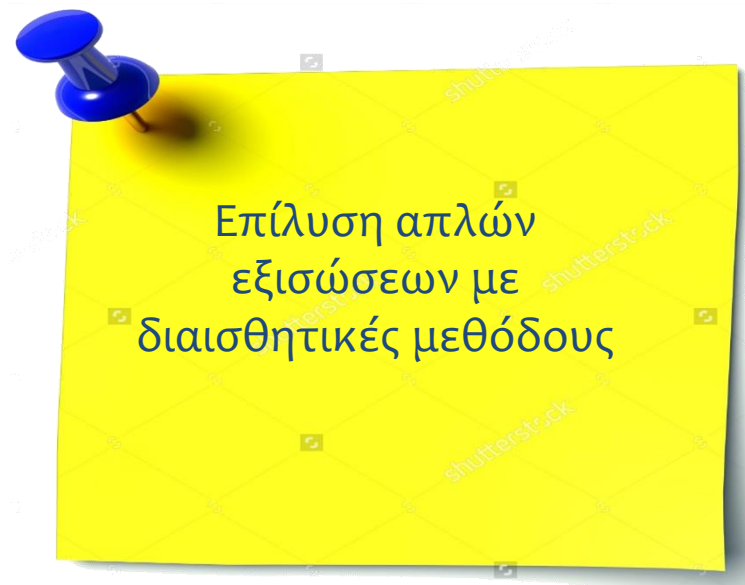
$$x =$$

$$(γ) 7x = 42$$

$$x =$$

$$(δ) x \div 5 = 8$$

$$x =$$



- **Επίλυση εξίσωσης** είναι η διαδικασία που εφαρμόζουμε, για να βρούμε τη λύση της εξίσωσης. Αν αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή μιας εξίσωσης με έναν αριθμό και προκύπτει ισότητα, τότε λέμε ότι ο αριθμός αυτός **επαληθεύει** την εξίσωση και ονομάζεται **λύση** της εξίσωσης.

Παραδείγματα:

$$\alpha - 15 = 40$$

Α' τρόπος:

Όταν αφαιρέσω 15 από το α , η διαφορά ισούται με 40.

$$\alpha = 55, \text{ γιατί } 55 - 15 = 40.$$

Άρα, το $\alpha = 55$ είναι λύση της εξίσωσης.

Β' τρόπος:

$$\alpha - 15 = 40$$

$$\alpha - \cancel{15} + \cancel{15} = 40 + 15$$

$$\alpha = 55$$

Άρα, το $\alpha = 55$ είναι λύση της εξίσωσης.

Στις πιο κάτω ζυγαριές, το κάθε δοχείο περιέχει x αριθμό βόλων.

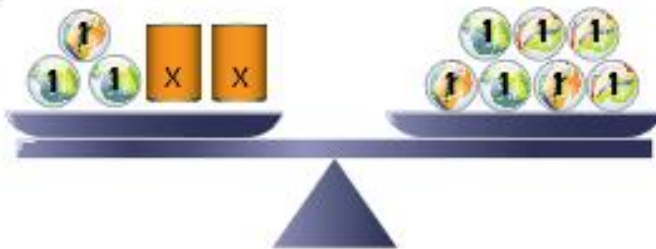
Να γράψετε την εξίσωση που αναπαριστά η ζυγαριά σε κάθε περίπτωση και να υπολογίσετε την τιμή του x . Να περιγράψετε τη διαδικασία που ακολουθήσατε.

(α)



$x =$ _____

(β)



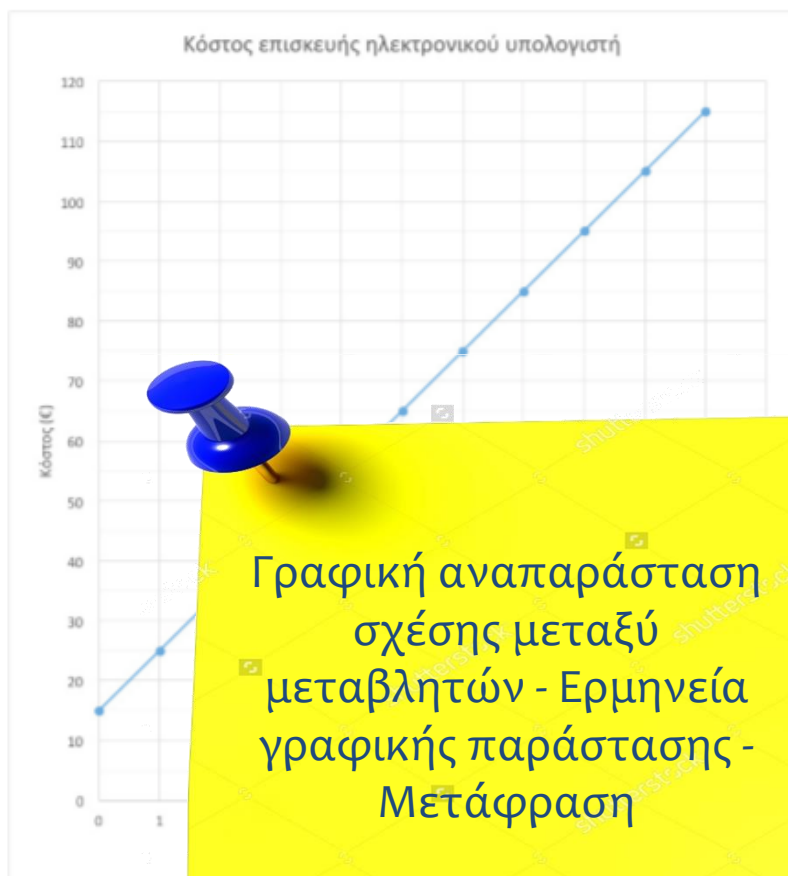
$x =$ _____

Αξιοποίηση ζυγαριάς για
 γραφή εξίσωσης
 Η μεταβλητή ως
 άγνωστη ποσότητα και
 ως αντικείμενο

Μια εταιρεία παρέχει υπηρεσίες τεχνικής υποστήριξης ηλεκτρονικών υπολογιστών. Για κάθε επίσκεψη τεχνικού στον χώρο του πελάτη, υπάρχει ελάχιστη χρέωση €15 και €10 για κάθε ώρα εργασίας.

Η πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο η εταιρεία υπολογίζει το κόστος για κάθε επίσκεψη.

(α) Να περιγράψετε τη γραφική παράσταση.



(β) Να χρησιμοποιήσετε τις πληροφορίες της γραφικής παράστασης, για να υπολογίσετε πόσο είναι το κόστος επίσκεψης ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή, αν η διάρκεια της επίσκεψης του τεχνικού είναι:

(i) 2 ώρες

(ii) 5 ώρες

(iii) μισή ώρα

(γ) Πόση είναι η διάρκεια της επίσκεψης του τεχνικού, αν το κόστος επίσκεψης ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι:

(i) €55

(ii) €105

(δ) Ο τεχνικός της εταιρείας χρειάστηκε συνολικά 15 ώρες, για να επισκευάσει έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Πόσο ήταν το κόστος της επίσκεψης; Να επεξηγήσετε.

(ε) Γιατί η γραφική παράσταση δεν περνά από το σημείο (0,0);

Η Αντιγόνη και ο Παύλος μελετούν τη διπλανή προσφορά σχετικά με την ενοικίαση κανό.

Ενοικίαση κανό

Χρέωση κατά την παραλαβή: €20

Χρέωση ανά ώρα: €40

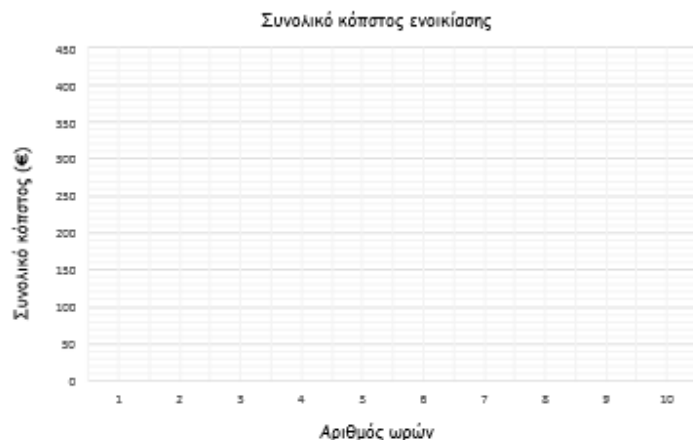


(α) Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

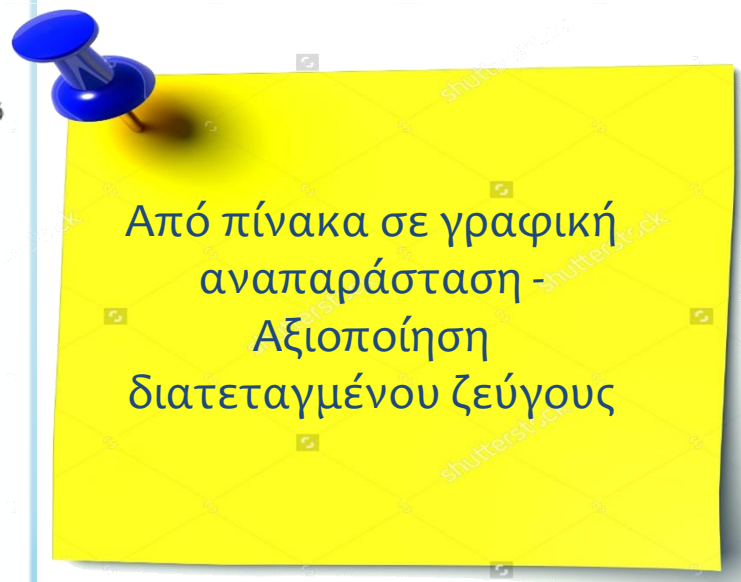
Αριθμός ωρών	Συνολικό κόστος ενοικίασης	Διατεταγμένο ζεύγος
1	$(1 \cdot 40) + 20 = 60$	(1,60)
2		
3		
4		
5		
10		
n		

(β) Να εκφράσετε έναν κανόνα, για τον υπολογισμό του κόστους ενοικίασης του κανό για οποιονδήποτε αριθμό ωρών.

(γ) Να αναπαραστήσετε στη γραφική παράσταση τα διατεταγμένα ζεύγη, για να δείξετε το συνολικό κόστος ενοικίασης του κανό για 1 έως 10 ώρες.



(δ) Να περιγράψετε τη γραφική παράσταση.



(γ) Να δείξετε στη γραφική παράσταση το συνολικό κόστος ενοικίασης μοτοποδηλάτου για 1 έως 10 ημέρες, χρησιμοποιώντας διαφορετικό χρώμα για κάθε εταιρεία.

Ο Στέφανος θα ενοικιάσει μοτοποδήλατο κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών του διακοπών. Για το σκοπό αυτό ζήτησε προσφορές από δύο εταιρείες.

Εταιρεία Α
Χρέωση ανά ημέρα: €25



Εταιρεία Β
Χρέωση κατά την παραλαβή: €30
Χρέωση ανά ημέρα: €20



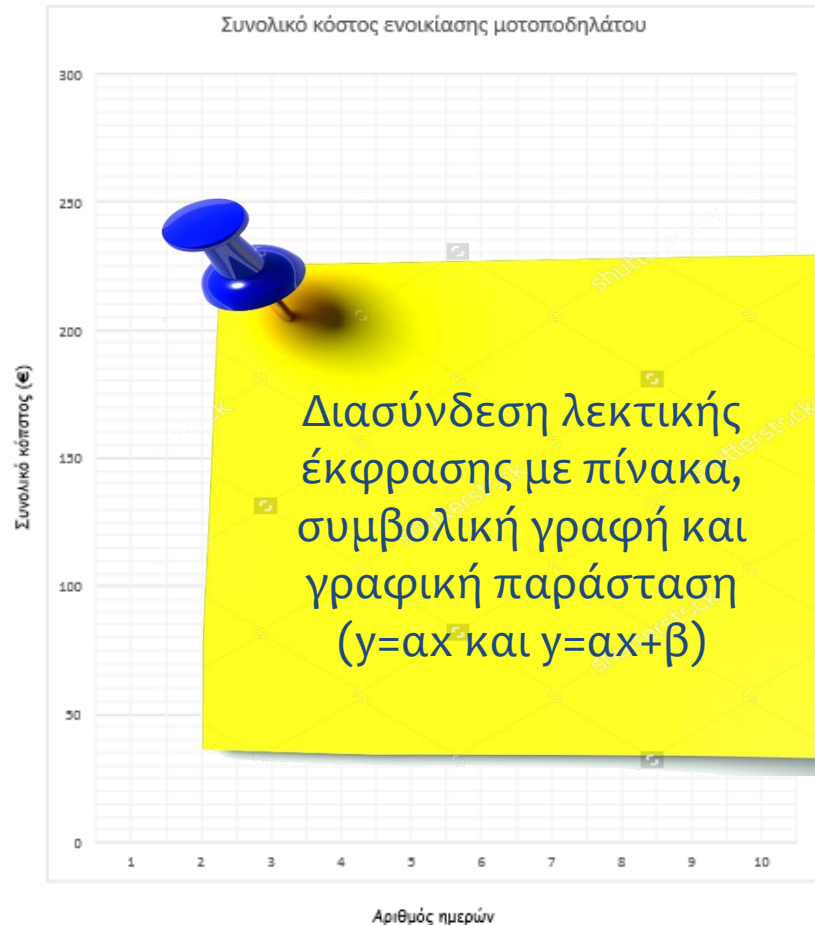
(α) Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

Αριθμός ημερών	Συνολικό κόστος ενοικίασης μοτοποδηλάτου	
	Εταιρεία Α	Εταιρεία Β
1	$1 \cdot 25 = 25$	$(1 \cdot 20) + 30 = 50$
2		
3		
4		
5		
6		
7		
10		
15		
v		

(β) Να γράψετε έναν κανόνα για τον υπολογισμό του κόστους ενοικίασης του μοτοποδηλάτου για οποιονδήποτε αριθμό ημερών:

i. Στην εταιρεία Α _____

ii. Στην εταιρεία Β _____



(δ) Να επεξηγήσετε ποια είναι η πιο συμφέρουσα προσφορά για τον Στέφανο, με βάση τη γραφική παράσταση.

Ο Ηλίας κατασκεύασε το πιο κάτω μοτίβο, χρησιμοποιώντας χρωματιστές ψηφίδες.



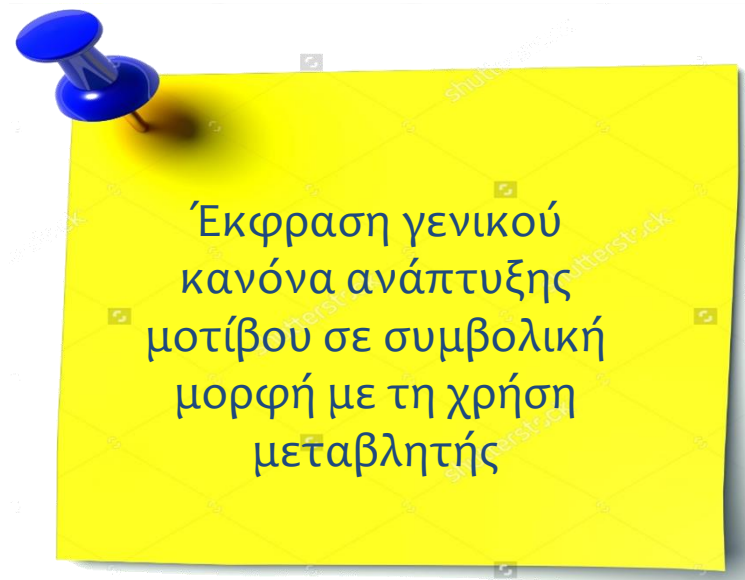
(α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Αριθμός Σχήματος	Αριθμός κόκκινων ψηφίδων	Αριθμός μπλε ψηφίδων	Συνολικός αριθμός ψηφίδων
1	1	$3 \cdot 1 = 3$	$1 + (3 \cdot 1) = 4$
2	1	$3 \cdot 2 = 6$	$1 + (3 \cdot 2) = 7$
3			
4			
5			
.....		
n			

(β) Τι παρατηρείτε για τον αριθμό των κόκκινων και των μπλε ψηφίδων στο πιο πάνω μοτίβο;

(γ) Να υπολογίσετε τον συνολικό αριθμό των ψηφίδων στο Σχήμα 10 και στο Σχήμα 25 του μοτίβου. Να επεξηγήσετε.

(δ) Ποια είναι η διαφορά στον συνολικό αριθμό ψηφίδων μεταξύ του Σχήματος 30 και του Σχήματος 33; Να επεξηγήσετε.



- Στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων αναλογίας
- Επίλυση προβλημάτων με ποσοστά
- Γραφική αναπαράσταση προβλημάτων αναλογίας
- Προβλήματα ρυθμού μεταβολής
- Πιθανότητες

ΕΞΕΡΕΥΝΗΣΗ

Ο διευθυντής τροφοδοσίας ενός εστιατορίου μελετά τις προσφορές δύο εταιρειών για την προμήθεια αραβόσιτου σε κονσέρβα. Οι προσφορές αφορούν κονσέρβες ίδιας ποσότητας και ποιότητας.




ΕΤΑΙΡΕΙΑ Α

5 κονσέρβες προς €2

ΕΤΑΙΡΕΙΑ Β

7 κονσέρβες προς €3

Ποια προσφορά είναι η πιο συμφέρουσα; Να επεξηγήσετε.




Ανάδυση στρατηγικών
μαθητών στην
επίλυση προβλημάτων
αναλογίας

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ 2

(α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα, όπως στο παράδειγμα.

	Λόγοι $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$	Σχηματίζεται αναλογία;	Γινόμενο $\alpha \cdot \delta$	Γινόμενο $\beta \cdot \gamma$
A	$\frac{3}{9}$ και $\frac{4}{12}$	✓	$3 \cdot 12 = 36$	$4 \cdot 9 = 36$
B	$\frac{1}{4}$ και $\frac{2}{9}$			
Γ	$\frac{1}{6}$ και $\frac{5}{30}$			
Δ	$\frac{4}{20}$ και $\frac{5}{25}$			
Ε	$\frac{10}{15}$ και $\frac{6}{8}$			

(β) Τι παρατηρείτε;



Ιδιότητα αναλογίας –
γινόμενο άκρων και
μέσων όρων –
αξιοποίηση στην επίλυση
προβλημάτων

Τα 3 m ύφασμα κοστίζουν €12. Πόσο κοστίζουν τα 9 m ύφασμα;

Ύφασμα (m)	Κόστος (€)
3	12
9	36

$$\frac{3}{12} = \frac{3 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{9}{36}$$

ή

Ύφασμα (m)	Κόστος (€)
3	12
9	36

$$\frac{3}{9} = \frac{3 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{12}{36}$$

ή

$$\frac{3}{9} = \frac{12}{x}$$

$$3x = 9 \cdot 12$$

$$3x = 108$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{108}{3}$$

$$x = 36$$

ή

Αν 3 m ύφασμα → €12

Τότε 1 m ύφασμα → €4

Άρα, 9 m ύφασμα → €36 (9 · 4 = 36)



Σε μια αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

Κάνουμε αναγωγή στην ακέραια μονάδα.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ 1

Η εθνική ομάδα των ΗΠΑ πέτυχε στους Ολυμπιακούς Αγώνες του Ρίο 2016 το 75% των 224 ελεύθερων βολών που επιχείρησε.

Τα παιδιά χρησιμοποίησαν διαφορετικές στρατηγικές, για να υπολογίσουν τον αριθμό των ελεύθερων βολών που πέτυχε η συγκεκριμένη ομάδα.

$$\frac{75}{100} = \frac{x}{224}$$

Επιτυχημένες ελεύθερες βολές	75	x
Συνολικός αριθμός προσπαθειών	100	224

$$100x = 75 \cdot 224$$

$$100x = 16\ 800$$

$$\frac{100x}{100} = \frac{16\ 800}{100}$$

$$x = 168$$

Άγγελος



Το 50% του 224 είναι το 112.

Το 25% του 224 είναι το 56.

$$112 + 56 = 168$$

Άρα, το 75% του 224 είναι το 168.

Παύλος

$$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{3}{4} \cdot 224 = 168$$

Βάνια


ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ 2

(α) Να επιλύσετε τα προβλήματα και να επεξηγήσετε τον τρόπο σκέψης σας.

A. Το 40% των παιδιών μιας τάξης έχει κατοικίδιο ζώο. Πόσα παιδιά έχουν κατοικίδιο ζώο, αν ο συνολικός αριθμός των παιδιών στην τάξη είναι 20;

B. Η Βάνα απάντησε ορθά στο 40% των ερωτήσεων ενός διαγωνισμού. Ποιος ήταν ο συνολικός αριθμός των ερωτήσεων του διαγωνισμού, απάντησε ορθά σε 20 ερωτήσεις;

Γ. Ο Τάσος διάβασε τις 20 από τις 40 σελίδες ενός βιβλίου. Ποιο ήταν το ποσοστό των σελίδων του βιβλίου που διάβασε ο Τάσος;



Διαφορετικά είδη
προβλημάτων –
Υπολογισμός ποσοστού,
όλου και τιμής ποσοστού

ΕΞΕΡΕΥΝΗΣΗ


Οι πιο κάτω προσφορές αφορούν το ίδιο προϊόν.

Αγόρασε δύο και πλήρωσε μόνο το ένα.

Αγόρασε ένα και πάρε το δεύτερο με έκπτωση 25%.

Αγόρασε ένα και πάρε το δεύτερο με έκπτωση 50%.

Αγόρασε δύο και πάρε το καθένα με έκπτωση 25%.



Υπολογισμός ποσοστού
αλλαγής – Percent of
change

(α) Ποια από τις πιο πάνω προσφορές δίνει τη μεγαλύτερη ποσοστιαία μείωση τιμής; Να επεξηγήσετε.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ


1. Ένα κατάστημα αθλητικών ειδών αλλάζει τις τιμές των προϊόντων του για τις εκπτώσεις. Να συμπληρώσετε στον πίνακα την τελική τιμή κάθε προϊόντος.

Είδος	Αρχική τιμή	Ποσοστό έκπτωσης	Ποσό έκπτωσης	Τελική τιμή
	€58	20%		
	€32	25%		
	€12	10%		
	€24	15%		

Εφαρμογές σε
προβλήματα
καταναλωτή,
υπολογισμός έκπτωσης
και Φ.Π.Α.

2. Να υπολογίσετε την τελική τιμή των προϊόντων, μετά την επιβολή του Φ.Π.Α.

(α)

	€	
Αξία	175,00	
Φ.Π.Α. (19%)	_____	
Τιμή με Φ.Π.Α.	_____	

(β)

	€	
Αξία	246,00	
Φ.Π.Α. (19%)	_____	
Τιμή με Φ.Π.Α.	_____	

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

Η πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει την απόδοση μιας μηχανής που κατασκευάζει πλαστικά δοχεία.



Προβλήματα ρυθμού μεταβολής, έννοια ευθέως ανάλογων ποσών, γραφική αναπαράσταση/πίνακας

(α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα, με βάση τη γραφική παράσταση.

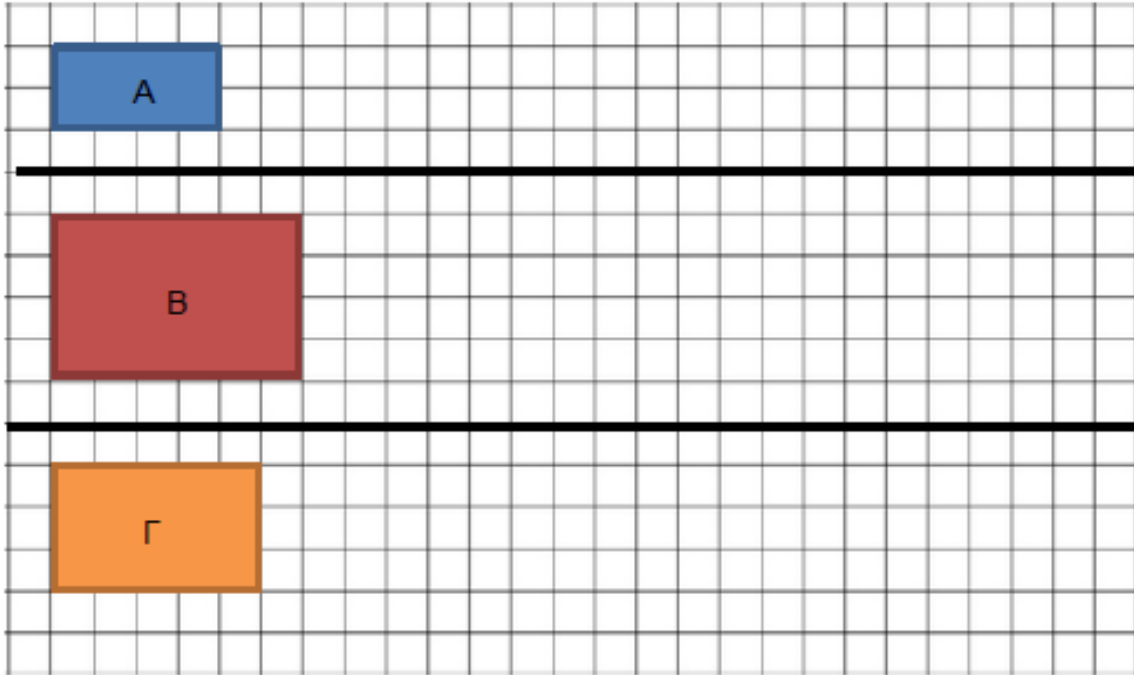
ΑΠΟΔΟΣΗ ΜΗΧΑΝΗΣ								
Χρόνος (ώρες)	1	2	3	4	5	6	7	8
Αριθμός δοχείων								
$\frac{\text{Αριθμός δοχείων}}{\text{Χρόνος}}$								

Ενότητα 12_Γεωμετρία

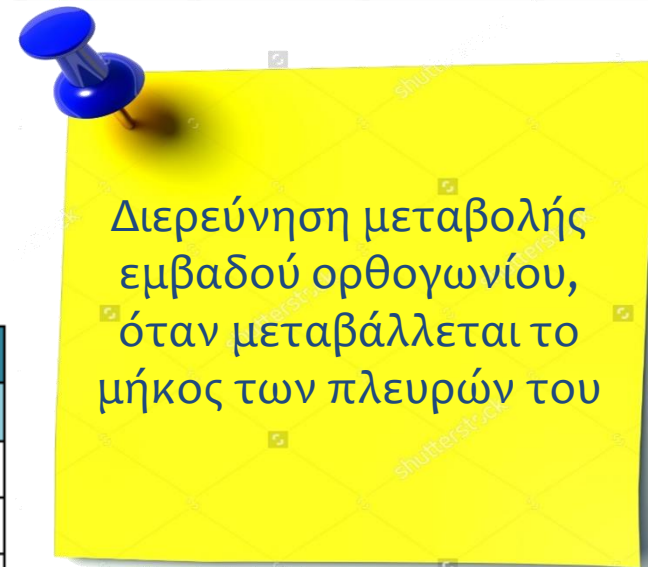
- Προβλήματα μέτρησης εμβαδού και περιμέτρου ευθύγραμμων σχημάτων
- Βασικά στοιχεία κύκλου
- Προσέγγιση περιφέρειας κύκλου
- Σχέσεις μεταξύ στερεών
- Αναπτύγματα
- Υπολογισμός όγκου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

(α) (i) Να κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο με διπλάσιο μήκος από το αρχικό σχήμα σε κάθε περίπτωση και να συμπληρώσετε τον πίνακα.



Σχήμα	Αρχικό Ορθογώνιο			Ορθογώνιο με διπλάσιο μήκος		
	Μήκος	Πλάτος	Εμβαδόν	Μήκος	Πλάτος	Εμβαδόν
A						
B						
Γ						



ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

(i) Να βρείτε όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 24 m (οι διαστάσεις των ορθογωνίων να είναι ακέραιοι αριθμοί) και να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

Μήκος (m)	Πλάτος (m)	Περίμετρος (m)	Εμβαδόν (m ²)

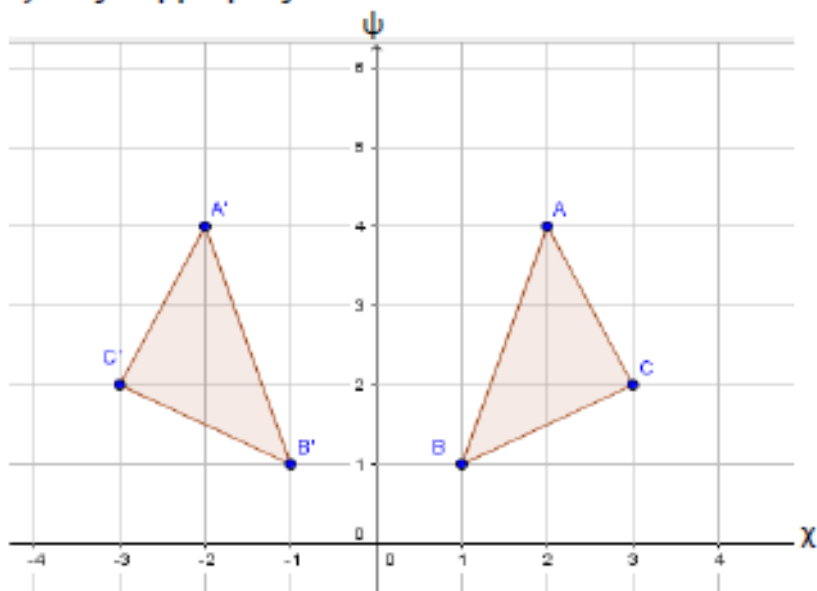
(ii) Ποιο από τα πιο πάνω ορθογώνια έχει το μικρότερο εμβαδόν;



Διερεύνηση σχέσης
μεταξύ εμβαδού και
περιμέτρου στο
ορθογώνιο, όταν το ένα
από τα δύο μεγέθη
παραμένει σταθερό

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ 1

Ο Τάσος και η Νίκη εργάζονται στο πιο κάτω εφαρμογίδιο. Ο κατακόρυφος άξονας είναι ο άξονας συμμετρίας.



(α) (i) Να σημειώσετε τις συντεταγμένες των κορυφών των σχημάτων $\Delta B\Gamma$ και $\Delta B'\Gamma'$. Τι παρατηρείτε;

A(____, ____) B(____, ____) Γ (____, ____)

A'(____, ____) B'(____, ____) Γ' (____, ____)



Επαναφορά βασικών γεωμετρικών μετασχηματισμών και διασύνδεση με αναπαράσταση σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (Συμμετρία, περιστροφή, μεταφορά, γεωμετρία της χελώνας)

Μαθηματικές Πρακτικές



We're taking teaching and learning Above & Beyond

Today's students are moving beyond the basics and embracing the 4C's — "super skills" for the 21st century!



Communication

Sharing thoughts, questions, ideas, and solutions.



Collaboration

Working together to reach a goal — putting talent, expertise, and smarts to work.



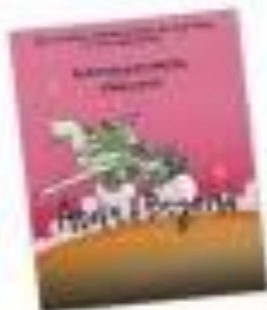
Critical Thinking

Looking at problems in a new way, linking learning across subjects & disciplines.



Creativity

Trying new approaches to get things done equals innovation & invention.



For more 4C resources from the Partnership for 21st Century Skills, including the animated film ABOVE & BEYOND by Peter H. Reynolds & PableVision, journey to www.p21.org/4Cs

<http://www.youtube.com/watch?v=7KMM387HNQk>

- Η επιφανειακή εκμάθηση πολλών εννοιών δεν οδηγεί πουθενά.
- Η ουσιαστική πρόκληση για την εκπαίδευση δεν είναι ποιες έννοιες θα μελετηθούν, αλλά η ανάπτυξη τρόπων σκέψης.
- Για να αλλάξει ο τρόπος σκέψης των μαθητών, πρέπει να αλλάξει πρώτα ο τρόπος που διδάσκουμε.

Μαθηματικές Πρακτικές

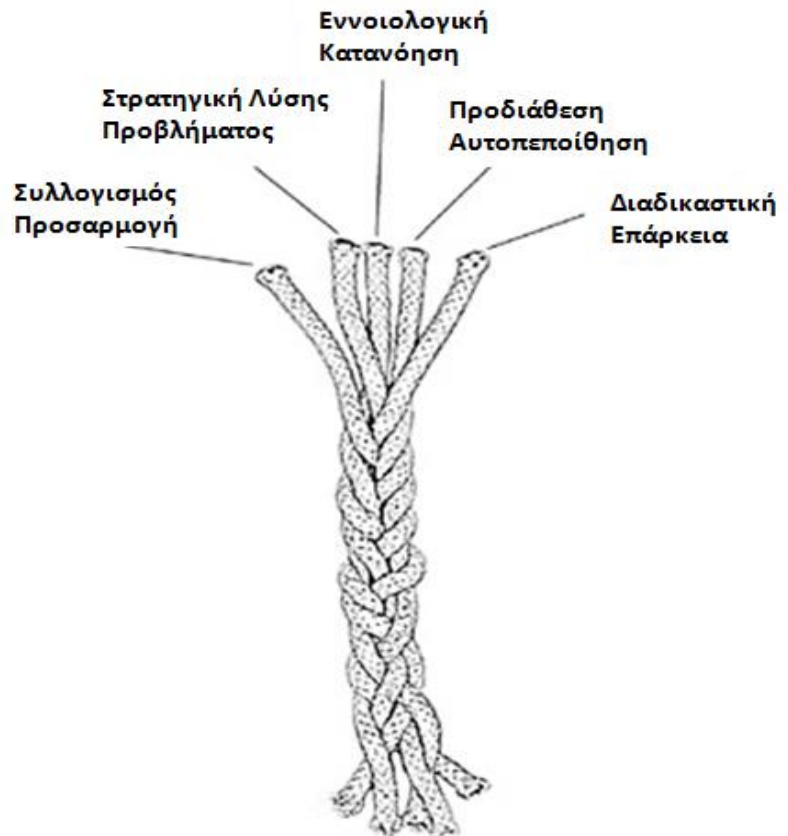
Οι μαθηματικές πρακτικές περιγράφουν **ικανότητες** που οι εκπαιδευτικοί σε όλες τις βαθμίδες πρέπει να επιδιώξουν να αναπτύξουν οι μαθητές/τριες τους. Αυτές οι μαθηματικές πρακτικές αναφέρονται σε σημαντικές «διαδικασίες και ικανότητες» με διαχρονική σημασία στη μαθηματική εκπαίδευση.



Θεωρητικό Υπόβαθρο

5 Διαδικασίες

- Επίλυση Προβλήματος
- Συλλογισμός και Απόδειξη
- Επικοινωνία
- Συνδέσεις
- Αναπαραστάσεις



Αναλυτικά Προγράμματα και Μαθηματικές Πρακτικές

Τα Αναλυτικά Προγράμματα περιγράφουν τα μαθηματικά τα οποία αναμένουμε οι μαθητές να κατανοήσουν και να κάνουν, ενώ οι μαθηματικές πρακτικές περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές θα επεξεργαστούν τις μαθηματικές έννοιες και ικανότητες.

Αναλυτικά Προγράμματα και Μαθηματικές Πρακτικές

Οι μαθηματικές πρακτικές περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές θα επεξεργαστούν τις μαθηματικές έννοιες και ικανότητες.

- Η έμφαση στις μαθηματικές πρακτικές οδηγεί στη συστηματική ανάπτυξη δεξιοτήτων οι οποίες είναι απαραίτητες στην ενήλικη ζωή.
- Οι μαθηματικές πρακτικές μπορούν να συμβάλλουν στην ανάπτυξη, μέσω των Μαθηματικών, των ικανοτήτων (key

Μαθηματικές Πρακτικές στην Τάξη

- Με ποιο τρόπο αναπτύσσεται μια πρακτική στην τάξη;
 - Τι κάνουν οι μαθητές...
 - Τι κάνουν οι εκπαιδευτικοί...



**1. Κατανόηση μέσω προβλήματος και
επιμονή στη λύση προβλήματος
6. Ακρίβεια**

**2. Ποσοτική και αφηρημένη
σκέψη**

**3. Ανάπτυξη ισχυρισμών και
κρίση του συλλογισμού άλλων**

Συλλογισμός
και Επεξήγηση

4. Μοντελοποίηση

5. Στρατηγική χρήση εργαλείων

Μοντελοποίηση
και χρήση
εργαλείων

7. Δομή των Μαθηματικών

**8. Κανονικότητα σε
επαναλαμβανόμενο συλλογισμό**

Αναζήτηση
δομής και
γενίκευσης

Διδάσκονται οι Μαθηματικές Πρακτικές;

- Δεν διδάσκονται αυτόνομα, αλλά διαχέονται μέσω της διδασκαλίας των εννοιών
- Διαφοροποιούνται από άτομο σε άτομο και δεν εξαντλούνται σε μια λίστα καταγραφής
- Είναι κυρίως τρόπος σκέψης
- Αναπτύσσονται σε βάθος χρόνου (από το νηπιαγωγείο μέχρι το Πανεπιστήμιο)

Διδάσκονται οι Μαθηματικές Πρακτικές;

- Η εμπλοκή των μαθητών σε μη-τυπικές μαθηματικές καταστάσεις (μικροέρευνες, ερμηνεία δεδομένων από εφημερίδες) συμβάλλει στην ανάπτυξη των μαθηματικών πρακτικών
- Οι μαθηματικές πρακτικές αναπτύσσονται κυρίως μέσω της εμπλοκής των μαθητών σε εξερευνητικές και διερευνητικές. Σε αυτές τις δραστηριότητες συνήθως εμπλέκονται

Διδάσκονται οι Μαθηματικές Πρακτικές;

- Δεν διδάσκονται αυτόνομα, αλλά διαχέονται μέσω της διδασκαλίας των εννοιών
- Είναι κυρίως τρόπος σκέψης
- Αναπτύσσονται σε βάθος χρόνου (από το νηπιαγωγείο μέχρι το Πανεπιστήμιο)
- Οι μαθηματικές πρακτικές αναπτύσσονται κυρίως μέσω της εμπλοκής των μαθητών σε ερευνητικές και διδασκασιακές δραστηριότητες. Σε αυτές τις

Οι μαθητές /τριες κατανοούν την ερώτηση και υιοθετούν πολλαπλές στρατηγικές και εργαλεία στην επίλυση προβλημάτων.

1. Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος

- Οι εκπαιδευτικοί :
 - Διευκολύνουν τη συζήτηση ώστε να κατανοήσουν τις στρατηγικές άλλων.
 - Δίνουν ευκαιρίες στους/στις μαθητές/τριες να συνδέσουν τις έννοιες με «τον κόσμο τους».
 - Δίνουν χρόνο στους/στις μαθητές/τριες για να σκεφτούν και να επιλύσουν με «υπομονή και επιμονή» προβλήματα.
 - Ενθαρρύνουν τους/τις μαθητές/τριες να ελέγχουν τις απαντήσεις τους με διαφορετικούς τρόπους.
 - Δίνουν προβλήματα μέσα από τα οποία οι μαθητές/τριες έχουν την ευκαιρία να ανακαλύψουν σχέσεις και να κάνουν γενικεύσεις.

1. Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος

Οι μαθητές/τριες:

- Επεξηγούν στον εαυτό τους και σε άλλους/ες το νόημα του προβλήματος.
- Αναλύουν σχέσεις και στόχους του προβλήματος.
- Κάνουν υποθέσεις για το νόημα της απάντησης και σχεδιάζουν τρόπους επίλυσης.
- Αξιολογούν την πρόοδό τους.
- Αντιστοιχούν εξισώσεις με περιγραφές του προβλήματος, πίνακες, γραφικές παραστάσεις και αναζητούν κανονικότητες.
- Ελέγχουν την απάντησή τους.
- Κατανοούν τις λύσεις άλλων μαθητών/τριών.



Όταν επιλύω ένα πρόβλημα, κάνω ένα σχέδιο, εκτελώ το σχέδιο και ελέγχω την απάντησή μου.

ΠΡΙΝ

Σκέφτομαι το πρόβλημα

Ποια **στρατηγική** θα χρησιμοποιήσω;

Ποια **πορεία επίλυσης** θα ακολουθήσω;



ΚΑΤΑ

Δείχνω **επιμονή**

Έχει **νόημα** αυτό που κάνω;

Αλλάζω στρατηγική στην περίπτωση που δεν οδηγούμαι κάπου



ΜΕΤΑ

Ελέγχω την εργασία μου



Ρωτώ τον εαυτό μου, «Υπάρχει άλλος τρόπος επίλυσης;»

Στρατηγικές που ενθαρρύνουν οι εκπαιδευτικοί

Στρατηγική	Ενέργειες
Επιλογή πράξης	Εννοιολογική κατανόηση πράξεων Κατασκευή μαθηματικών προτάσεων
Κάνω σχέδιο	Οπτικοποίηση προβλήματος Χρήση μοντέλου για αναπαράσταση προβλήματος Ανάλυση μοντέλων για κατανόηση προβλήματος
Βρίσκω μοτίβο	Αναγνώριση και χρήση μοτίβων για επίλυση του προβλήματος
Κάνω Πίνακα	Οργάνωση δεδομένων προβλήματος σε μορφή πίνακα
Δοκιμή και έλεγχος	Αναπροσαρμογή δεδομένων με βάση τις δοκιμές

Στρατηγική	Ενέργειες
Οργανωμένος κατάλογος	Επιλογή σημείου εκκίνησης και συστηματική καταγραφή όλων των δυνατών λύσεων Δημιουργία μοντέλου (οργανωμένη λίστα, δεντροδιάγραμμα, κτλ)
Λογική Σκέψη	Οργάνωση δεδομένων για απλοποίηση προβλήματος Εξαγωγή συμπερασμάτων με βάση τα δεδομένα Αναγνώριση σχέσεων αιτίας/αποτελέσματος
Ανάδρομη πορεία	Από το τέλος στην αρχή (αντίθετες και αντίστροφες πράξεις) Αναγνώριση γνωστών και άγνωστων δεδομένων

Διατύπωση ανοικτών ερωτήσεων για ανάπτυξη της επίλυσης προβλήματος

- Πριν
 - Ποια είναι η ερώτηση;
 - Ποια δεδομένα είναι χρήσιμα για την επίλυση του προβλήματος;
 - Πώς θα ξεκινήσεις να εργάζεσαι;
 - Το πρόβλημα αυτό σου θυμίζει κάποιο άλλο πρόβλημα που έχεις λύσει ξανά; Η πορεία εργασίας που είχες εφαρμόσει σε άλλο πρόβλημα θα δουλέψει σε αυτή την περίπτωση;

Διατύπωση ανοικτών ερωτήσεων για ανάπτυξη της επίλυσης προβλήματος

- Κατά
 - Έχεις κολλήσει; Μήπως θα ήταν καλή ιδέα να δοκιμάσεις κάποια άλλη προσέγγιση;
 - Η απάντησή σου έχει νόημα; Αν δεν έχει νόημα, τι μπορείς να κάνεις;
- Μετά
 - Πώς έλυσες το πρόβλημα; Γιατί επέλεξες αυτό τον τρόπο; Ήταν εύκολη/δύσκολη η διαδικασία;
 - Τι έκανες όταν κόλλησες σε κάποιο σημείο; Με ποιο τρόπο ξεπέρασες το πρόβλημα;
 - Μπορείς να περιγράψεις κάποιον άλλο τρόπο επίλυσης του προβλήματος;
 - Υπάρχει κάποια άλλη απάντηση;

Τι κάνω στην τάξη;

- Δίνω συστηματικά την ευκαιρία στους μαθητές μου να μοιραστούν τον τρόπο επίλυσης ενός προβλήματος με τους συμμαθητές τους ή να παρουσιάσουν τη λύση τους στην ολομέλεια της τάξης;
 - Οι μαθητές χρειάζονται ένα ασφαλές περιβάλλον, για να παρουσιάσουν τις απαντήσεις τους στους συμμαθητές τους.
- Δείχνω στους μαθητές μου ότι εκτιμώ τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος πέρα από την εύρεση της ορθής απάντησης;
- Διατυπώνω προβλήματα που χρειάζονται επιμονή; Χρησιμοποιώ κατάλληλες ερωτήσεις, για να καθοδηγήσω και να ενθαρρύνω τους μαθητές, όταν δυσκολεύονται να επιλύσουν ένα πρόβλημα;

Πώς μπορώ να βοηθήσω έναν μαθητή να επιμείνει στην επίλυση ενός προβλήματος;

- Τι μπορώ να κάνω όταν ένας μαθητής «κολλήσει» σε ένα πρόβλημα ή όταν υποστηρίζει ότι «δεν το καταλαβαίνει»;

3. Να επιλύσετε τα προβλήματα.

(α) Μια έρευνα έδειξε ότι τα $\frac{2}{3}$ των καταναλωτών αγοράζουν το προϊόν Α και το $\frac{1}{3}$ των καταναλωτών αγοράζουν το προϊόν Β. Μετά από μια διαφημιστική εκστρατεία για το προϊόν Β, μια νέα έρευνα έδειξε ότι το $\frac{1}{4}$ των καταναλωτών που αγόραζαν το προϊόν Α, αγοράζουν τώρα το προϊόν Β. Τι μέρος των καταναλωτών αγοράζει το προϊόν Α και τι μέρος το προϊόν Β, σύμφωνα με την νέα έρευνα;

Πριν την επίλυση:

Ποια τα πιθανά στοιχεία που θα δυσκολέψουν την κατανόηση του προβλήματος;

Κατά την επίλυση:

Σε ποιο σημείο είναι πιο πιθανόν να γίνουν λάθη;

2. Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη

Οι μαθητές/τριες χρησιμοποιούν αφηρημένη σκέψη και αναπαριστούν συμβολικά ποσότητες και σχέσεις – κατανοούν την έννοια και όχι πώς να κάνουν πράξεις.

2. Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη

- Οι εκπαιδευτικοί
 - Δίνουν πληθώρα αναπαραστάσεων μαθηματικών καταστάσεων και ενθαρρύνουν διαφορετικές στρατηγικές.
 - Δίνουν ευκαιρίες στους/στις μαθητές/τριες να αντιληφθούν την έννοια ποσοτήτων και τη σχέση τους σε ένα πρόβλημα.
 - Δίνουν έμφαση στη δημιουργία αναπαραστάσεων, στις ιδιότητες των πράξεων και των αντικειμένων και όχι μόνο στο πώς γίνεται ο υπολογισμός και ποιοι είναι οι κανόνες.

2. Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη

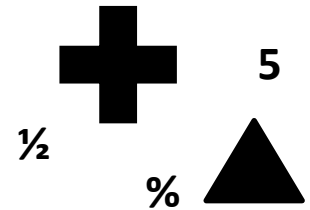
Οι μαθητές/τριες:

- Αναπτύσσουν την ικανότητα να υπερβαίνουν συγκεκριμένες καταστάσεις και να τις εκφράζουν αφηρημένα.
- Συγκεκριμενοποιούν καταστάσεις.
- Αναπαριστούν ολοκληρωμένα και γενικά το πρόβλημα.

Αποπλαισιοποίηση

Αναπαράσταση προβλήματος με τη χρήση συμβόλων,
μεταφορά κατάστασης στο αφηρημένο επίπεδο

Μαθηματικό
Πρόβλημα



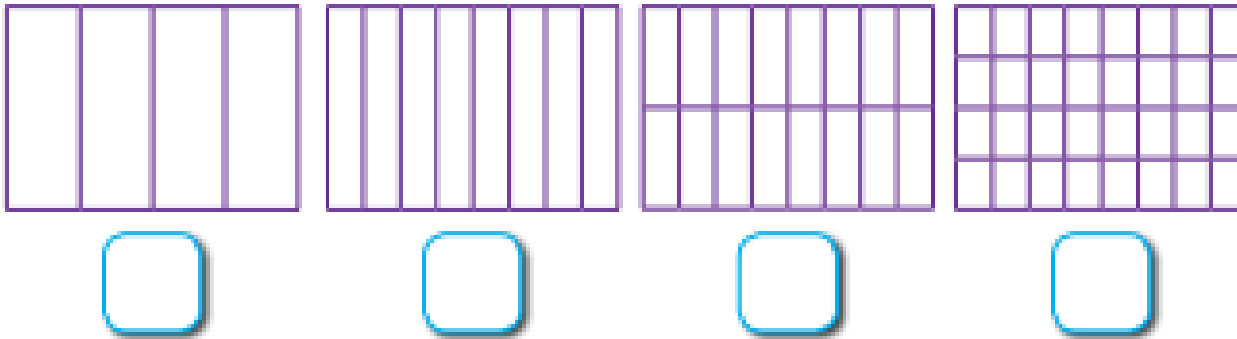
Πλαισιοποίηση

Έλεγχος λογικότητας απάντησης στο ρεαλιστικό πλαίσιο

x x x x

Παράδειγμα: Ισοδυναμία κλασμάτων – Δ' Δημοτικού

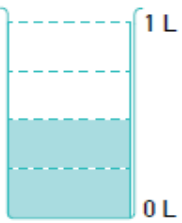
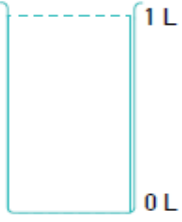
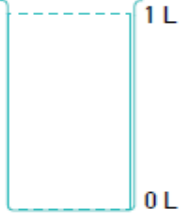

4. (α) Να χρησιμοποιήσεις τα πιο κάτω πλαίσια, για να βρεις 4 διαφορετικά ισοδύναμα κλάσματα με το $\frac{1}{4}$.



(β) Υπάρχουν και άλλα ισοδύναμα κλάσματα με το $\frac{1}{4}$; Να εξηγήσεις.

Με ποιο τρόπο αναπτύσσεται η μετάβαση από την ποσοτική στην αφηρημένη σκέψη;

Ο Δημήτρης χρειάζεται $\frac{1}{4}$ L χυμό βατόμουρο για την ετοιμασία μιας δόσης γρανίτας. Να συμπληρώσετε τον πίνακα, για να υπολογίσετε την ποσότητα του χυμού που χρειάζεται ο Δημήτρης σε κάθε περίπτωση.

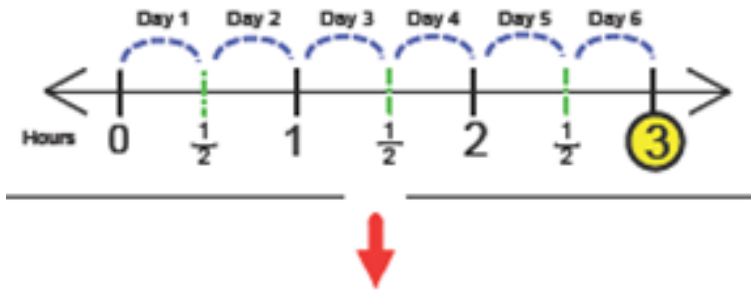
	Λεκτική έκφραση	Αναπαράσταση	Μαθηματική πρόταση
διπλάσια δόση	2 φορές το $\frac{1}{4}$		$2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{4} = \frac{2}{4}$
1 δόση			
$\frac{1}{2}$ της δόσης			
$\frac{1}{4}$ της δόσης			

(α) Τι παρατηρείτε;

Στ' τάξη
Πολλαπλασιασμός
κλασμάτων

Από λέξεις στους αριθμούς

Η Μαρία έκανε εξάσκηση στο πιάνο μισή ώρα κάθε μέρα για 6 μέρες. Πόσες ώρες έκανε εξάσκηση συνολικά;

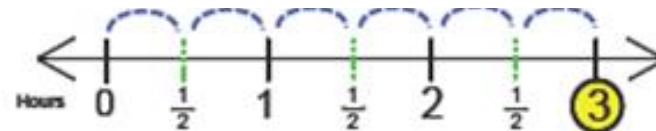


$$6 \times \frac{1}{2} = 3$$

Από αριθμούς στις λέξεις

$$6 \times \frac{1}{2} = 3$$

Η Μαρία έκανε εξάσκηση στο πιάνο μισή ώρα κάθε μέρα για 6 μέρες. Πόσες ώρες έκανε εξάσκηση συνολικά;



4. Να επιλέξετε το πρόβλημα που ταιριάζει σε κάθε μαθηματική πρόταση.

$$(α) \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = ν$$

(i) Τα $\frac{3}{5}$ των φυτών στον κήπο του σχολείου είναι λεβάντες και τα $\frac{2}{3}$ των φυτών είναι δεντρολίβανα. Τι μέρος των φυτών αποτελούν οι λεβάντες και τα δεντρολίβανα;

(ii) Ο Βαγγέλης είχε ένα κομμάτι ύφασμα με μήκος $\frac{3}{5}$ m. Έκοψε ένα κομμάτι με μήκος $\frac{2}{3}$ m, για να κατασκευάσει μια κούκλα. Πόσα μέτρα υφάσματος περίσισσαν;

(iii) Τα $\frac{3}{5}$ των παιδιών ενός σχολείου θα πάνε στον κινηματογράφο. Τα $\frac{2}{3}$ των παιδιών αυτών θέλουν να παρακολουθήσουν ταινία δράσης. Τι μέρος των παιδιών του σχολείου θέλουν να παρακολουθήσουν ταινία δράσης;

$$(β) \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = ν$$

(i) Ο Χρύσης χρησιμοποίησε $\frac{3}{4}$ kg άσπρη ζάχαρη και $\frac{1}{8}$ kg καφέ ζάχαρη, για την παρασκευή ενός γλυκού. Πόση ζάχαρη χρησιμοποίησε συνολικά;

(ii) Τα $\frac{3}{4}$ της σελίδας ενός περιοδικού χρησιμοποιήθηκαν για την παρουσίαση των ειδήσεων, το $\frac{1}{8}$ για αγγελίες και το υπόλοιπο μέρος για διαφημίσεις. Τι μέρος της σελίδας χρησιμοποιήθηκε για διαφημίσεις;

(iii) Τα $\frac{3}{4}$ των μαθητών στο σχολείο της Δανάης παρακολουθούν μαθήματα μουσικής. Το $\frac{1}{8}$ των μαθητών αυτών παρακολουθούν μαθήματα κιθάρας. Τι μέρος των μαθητών του σχολείου παρακολουθούν μαθήματα κιθάρας;

5. Να γράψετε ένα πρόβλημα για καθεμιά από τις πιο κάτω μαθηματικές προτάσεις. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

$$(α) \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}$$

$$(β) 4 \cdot \frac{2}{3}$$

$$(γ) \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2}$$

(α) (i) Να συμπληρώσετε τον πίνακα, αν ο Χάρης είναι 3 χρόνια μεγαλύτερος από τη Μαρίλια.



Ηλικία Μαρίλιας	Ηλικία Χάρη
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Στ' τάξη
Αλγεβρικές
παραστάσεις

(ii) Ποια θα είναι η ηλικία του Χάρη, όταν η Μαρίλια θα είναι:

12 χρονών; _____ x χρονών; _____

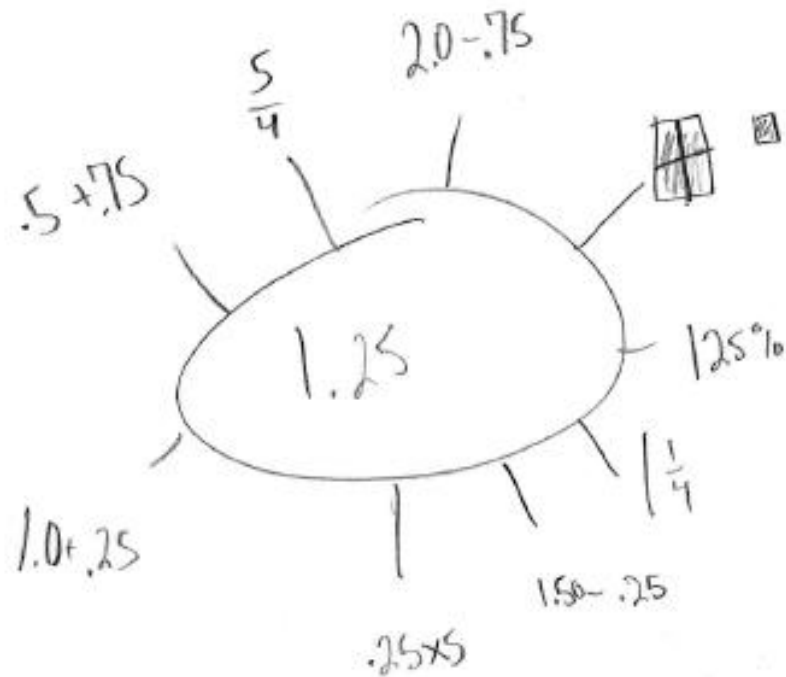
(iii) Ποια θα είναι η ηλικία της Μαρίλιας, όταν ο Χάρης θα είναι:

17 χρονών; _____ ψ χρονών; _____

(β) Ο Γιάννης είναι ν χρονών. Ποια αλγεβρική παράσταση αναπαριστά την ηλικία της Έλενας, αν η Έλενα είναι 4 χρόνια μεγαλύτερη από τον Γιάννη;

Πρακτικές εφαρμογές

- Εννοιολογικοί χάρτες



3. Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων

- Οι μαθητές/τριες υπερασπίζονται τις ιδέες τους και αναλύουν τον τρόπο σκέψης των συμμαθητών/τριών τους.

3. Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων

- Οι εκπαιδευτικοί:
 - Δίνουν την ευκαιρία σε όλους/ες τους/τις μαθητές/τριες να κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν υποθέσεις, ορισμούς και προηγούμενες γνώσεις για να οικοδομήσουν επιχειρήματα.
 - Δίνουν χρόνο στους/στις μαθητές/τριες για να διατυπώσουν υποθέσεις και να οικοδομήσουν λογικούς ισχυρισμούς και να διερευνήσουν υποθέσεις.
 - Δίνουν ευκαιρίες στους/στις μαθητές/τριες να οικοδομήσουν επιχειρήματα και να κρίνουν τα επιχειρήματα των συμμαθητών/τριών τους.
 - Ενθαρρύνουν τους/τις μαθητές/τριες να αναγνωρίζουν και να δημιουργούν αντιπαραδείγματα.
 - Κάνουν ερωτήσεις ώστε οι μαθητές/τριες να αναγκάζονται να δίνουν πιο ξεκάθαρα και βελτιωμένα επιχειρήματα.

3. Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων

- Οι μαθητές/τριες:
 - Κατανοούν και χρησιμοποιούν προϋποθέσεις και ορισμούς στην κατασκευή δικών τους προτάσεων.
 - Ακολουθούν λογική σειρά στην κατασκευή δικών τους ισχυρισμών και αιτιολογήσεων.
 - Χρησιμοποιούν αντιπαραδείγματα.
 - Συγκρίνουν επιχειρήματα.
 - Αξιολογούν ισχυρισμούς άλλων.

ΜΠ 3: Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων



**στρατηγική τους με τη
στρατηγική των
συμμαθητών τους**

- Ακούοντας
- Υποβάλλοντας ερωτήσεις
- Συνδέοντας τον τρόπο σκέψης τους με τον τρόπο σκέψης των συμμαθητών τους

**να εξηγήσουν τη
στρατηγική τους
χρησιμοποιώντας**

- Αντικείμενα
- Σχέδιο
- Δράσεις
- Παραδείγματα και αντιπαραδείγματα
- Συγκεκριμένο πλαίσιο

Διαχείριση Συζήτησης

Ποιες οι ενέργειες του εκπαιδευτικού, όταν ο μαθητής δίνει λανθασμένη απάντηση;

- Μην προσπαθήσεις να διορθώσεις τα «μαθηματικά», προσπάθησε να εργαστείς με τον «μαθηματικό».
- Το σημαντικό στοιχείο δεν είναι η διόρθωση του λάθους ή να πείσεις όλους τους μαθητές να συμφωνήσουν μαζί σου, αλλά η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών.
- Προκάλεσέ τους να σκεφτούν.
- Δώσε τους την ευκαιρία να αναστοχαστούν για απαντήσεις που δεν είναι λογικές.
- «Προσπάθησε να προβληματιστείς» μαζί τους για μοτίβα που προκύπτουν (ΜΠ 7).

Συζήτηση στην ολομέλεια

- Όχι απλά παρουσίαση σε όλη την τάξη.
 - Δεν υπάρχει πολυτέλεια σε κάθε μάθημα να παρουσιάζουν όλοι οι μαθητές.
- Πολλές στρατηγικές είναι στην ουσία ίδιες.
- Οι δυναμικές συζητήσεις στην ολομέλεια είναι δομημένες, ώστε να ενισχύσουν την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης της τάξης.
 - Προσεκτική επιλογή της εργασίας που αξίζει να παρουσιαστεί, καθώς και της σειράς της παρουσίασης.

- Καθώς γίνεται παρουσίαση μιας εργασίας, εστιάστε την προσοχή της συζήτησης στη βασική ιδέα και προωθήστε την ανάγκη για γενίκευση με ερωτήσεις όπως:
 - Συμφωνείτε ότι η στρατηγική αυτή μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες τις περιπτώσεις;
 - Γιατί συμβαίνει αυτό;
 - Μπορούμε να το αποδείξουμε;
 - Πότε είναι χρήσιμη; Πότε δεν είναι;



Τα παιδιά χρησιμοποίησαν διαφορετικές στρατηγικές, για να εκτιμήσουν το πιο κάτω άθροισμα.

$$6,33 + 5,98 + 3,75$$

$$6 + 5 + 3 = 14$$

$$14 + 2 = 16$$



Μάρκος

$$6 + 6 + 4 = 16$$



Φάνης

$$7 + 6 + 4 = 17$$

$$17 - 1 = 16$$



Αλεξία

Στ' τάξη
Στρατηγικές
εκτίμησης
αθροίσματος

Να περιγράψετε τις στρατηγικές που χρησιμοποίησε κάθε παιδί.

Πρακτικές στην τάξη

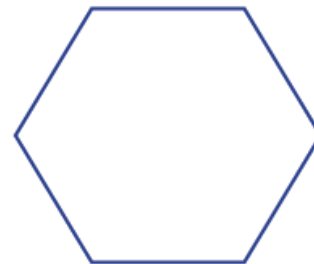
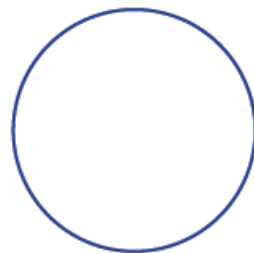
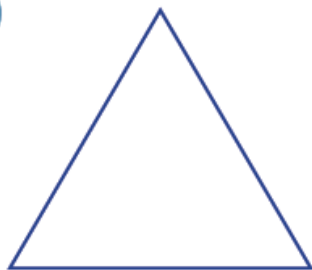
- Ποιος αριθμός/σχήμα δεν ταιριάζει;

8	2
5	10

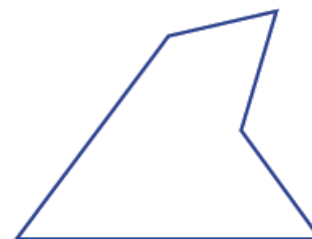
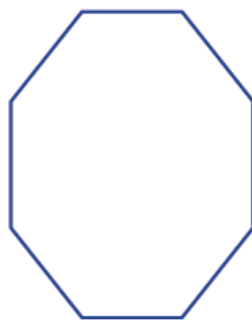
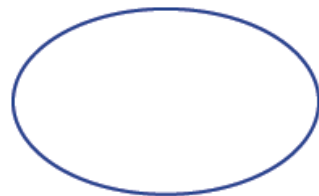


1. Ένα από τα σχήματα σε κάθε σειρά δεν ταιριάζει με τα υπόλοιπα. Να το διαγράψεις και να αιτιολογήσεις την επιλογή σου.

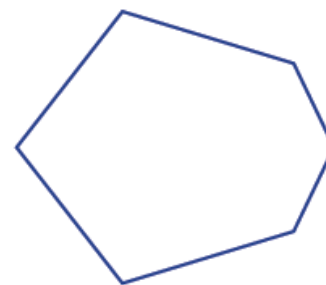
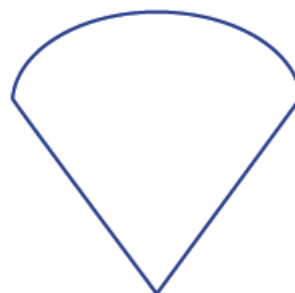
(α)



(β)



(γ)

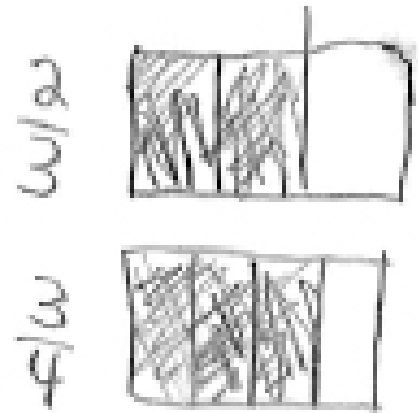


75% είναι περισσότερο από $\frac{2}{3}$;

Να εξηγήσεις.

Συμφωνώ ότι το 75% είναι μεγαλύτερο από τα $\frac{2}{3}$.

75% είναι το ίδιο με τα $\frac{3}{4}$ γιατί 4 φορές το 25 κάνει 100, και 75% είναι 3 φορές το 25, επομένως τα $\frac{3}{4}$ είναι μεγαλύτερο από τα $\frac{2}{3}$




4. Μοντελοποίηση

- Εφαρμόζουν τα μαθηματικά στη λύση προβλημάτων με χρήση διαγραμμάτων, πινάκων, γραφικών παραστάσεων και αναλύουν σχέσεις για να φτάσουν σε συμπεράσματα.

Μοντελοποίηση

- Οι εκπαιδευτικοί:
 - Παρουσιάζουν προβλήματα που αφορούν στην καθημερινή ζωή.
 - Δίνουν πλούσια σενάρια στα οποία δίνεται η ευκαιρία στους/στις μαθητές/τριες να αναπτύξουν εννοιολογική κατανόηση και να εστιαστούν σε σχέσεις.

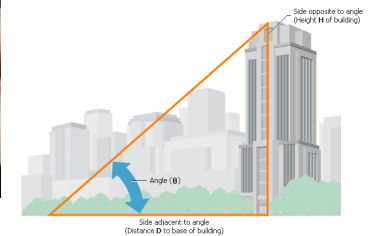
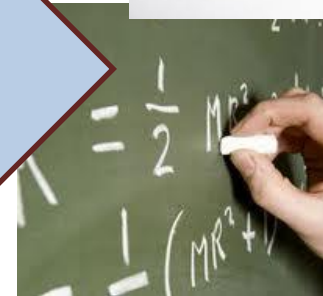
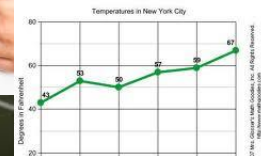
- Οι μαθητές/τριες:
 - Εφαρμόζουν τα μαθηματικά που γνωρίζουν σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής, κοινωνίας ή του χώρου εργασίας.
 - Εκφράζουν με μαθηματικές πράξεις κάποιες καταστάσεις.
 - Είναι ικανοί/ες να κάνουν υποθέσεις και να απλοποιούν περίπλοκες καταστάσεις.
 - Αναλύουν σχέσεις και καταλήγουν σε συμπεράσματα.



Προβλήματα της
καθημερινής ζωής...

...επεξηγούνται με τη χρήση
μαθηματικών μοντέλων

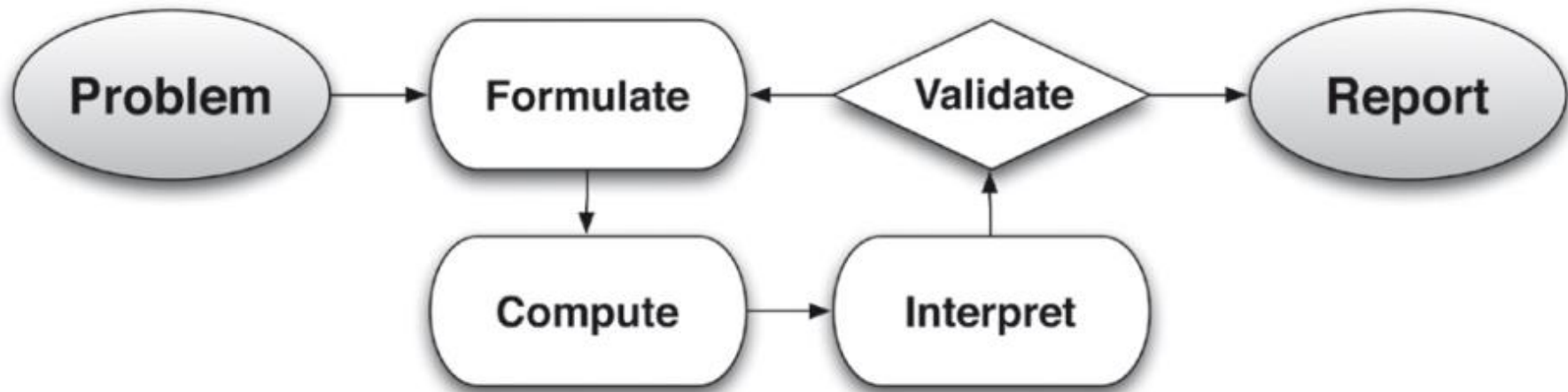

$$4 + 4 = 8$$

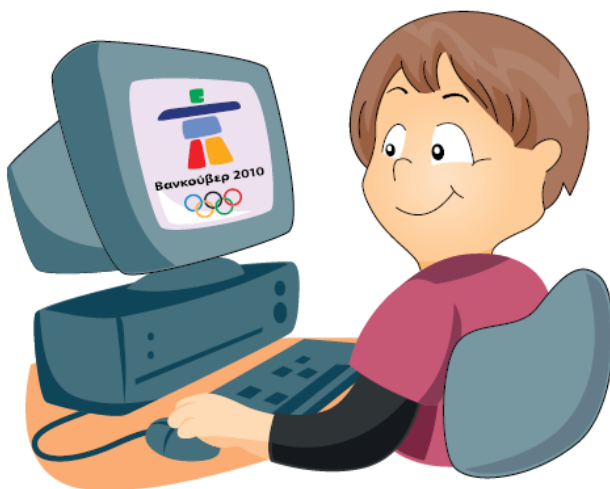


Οι μαθητές:

- διατυπώνουν υποθέσεις για να απλοποιήσουν μια κατάσταση, συνειδητοποιώντας ότι το μοντέλο τους μπορεί να χρειαστεί επαναξιολόγηση στη συνέχεια

- ερμηνεύουν μαθηματικά αποτελέσματα στο πλαίσιο μιας ρεαλιστικής κατάστασης και αναστοχάζονται για τη λογικότητα της απάντησης





Β' Δημοτικού

Ο Αντώνης βρήκε στο διαδίκτυο την κατανομή των μεταλλίων στους Χειμερινούς Ολυμπιακούς Αγώνες του 2010 στο Βανκούβερ του Καναδά.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΛΛΙΩΝ				
Κατάταξη	Χώρα	Χρυσό	Αργυρό	Χάλκινο
	Γερμανία	10	13	7
	Η.Π.Α.	9	15	13
	Καναδάς	14	7	5
	Νορβηγία	9	8	6
	Νότια Κορέα	6	6	2

Με ποιο τρόπο ο/η εκπαιδευτικός μπορεί βοηθήσει τους μαθητές να προτείνουν διαφορετικά μοντέλα;

Να εισηγηθείς έναν τρόπο κατάταξης των χωρών.

8. Η Βασιλική σκέφτεται να αγοράσει ένα διαμέρισμα. Μελετά τις πιο κάτω αγγελίες.

ΠΩΛΕΙΤΑΙ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΑ		ΠΩΛΕΙΤΑΙ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΑ	
• Εμβαδόν: 60 m ²	• 2 υπνοδωμάτια	• Εμβαδόν: 80 m ²	• 2 υπνοδωμάτια
• Έτος κατασκευής: 2008	• 400 m από το κέντρο της πόλης	• Έτος κατασκευής: 2012	• 2 km από το κέντρο της πόλης
• Σαλόνι και κουζίνα	• Άνετος χώρος στάθμευσης	• Σαλόνι και κουζίνα	• Άνετος χώρος στάθμευσης
<p>Κτηματομεσιτικό γραφείο "Επένδυση" τηλ.333 333 333</p> 	<p>Κτηματομεσιτικό γραφείο "Επένδυση" τηλ.333 333 333</p> 	<p>€185 000</p>	<p>€210 000</p>

Η Βασιλική ζήτησε την άποψη ενός εκτιμητή ακινήτων σχετικά με τις τιμές πώλησης των διαμερισμάτων. Ο εκτιμητής υπολογίζει ότι το κόστος των διαμερισμάτων είναι €2000 ανά m². Επιπρόσθετα, χρησιμοποιεί τα πιο κάτω κριτήρια, για να υπολογίσει την τελική τιμή ενός διαμερίσματος:

Στ' Δημοτικού

Έτος κατασκευής	Απόσταση από το κέντρο της πόλης	Χώρος στάθμευσης
Πάνω από 15 χρονών: + €0	Περισσότερα από 10 km: + €0	Όχι: + €0
Από 5 μέχρι 15 χρονών: + €5000	Από 5 μέχρι 10 km: + €10 000	Ναι: + €30 000
Από 0 μέχρι 5 χρονών: + €10 000	Από 0,5 μέχρι 5 km: + €15 000	
	Λιγότερο από 0,5 km: + €20 000	

(α) Να γράψετε τη μαθηματική πρόταση που θα χρησιμοποιήσει ο εκτιμητής, για να υπολογίσει μια ενδεικτική τιμή για κάθε διαμέρισμα. Να χρησιμοποιήσετε παρενθέσεις μόνο εάν είναι απαραίτητο.



ΕΞΕΡΕΥΝΗΣΗ

Ένας δήμος θα αρχίσει την κατασκευή καινούριων έργων. Μελετά τις πιο κάτω πληροφορίες.

ΠΡΟΫΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

Διάθεσιμο ποσό για κατασκευαστικά έργα
€900 000

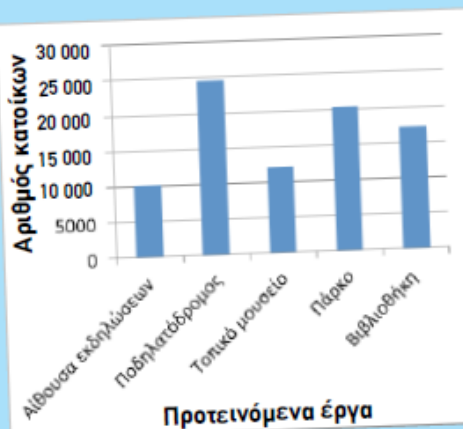
Προτεινόμενα έργα	Κόστος
1. Αίθουσα εκδηλώσεων	€650 000
2. Ποδηλατόδρομος	€475 000
3. Τοπικό μουσείο	€584 000
4. Πάρκο	€527 500
5. Βιβλιοθήκη	€348 500



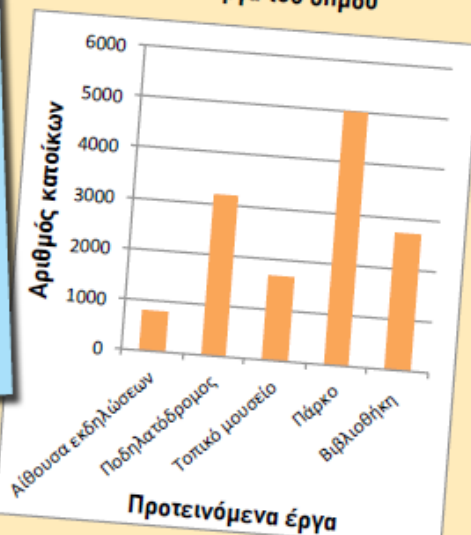
(α) Να εισηγηθείς ποια έργα είναι δυνατόν να επιλέξει ο δήμος. Να ετοιμάσεις δύο διαφορετικές εισηγήσεις και να καταγράψεις τα επιχειρήματά σου.

Δ' Δημοτικού

Οι προτιμήσεις των ενήλικων κατοίκων για τα έργα του δήμου



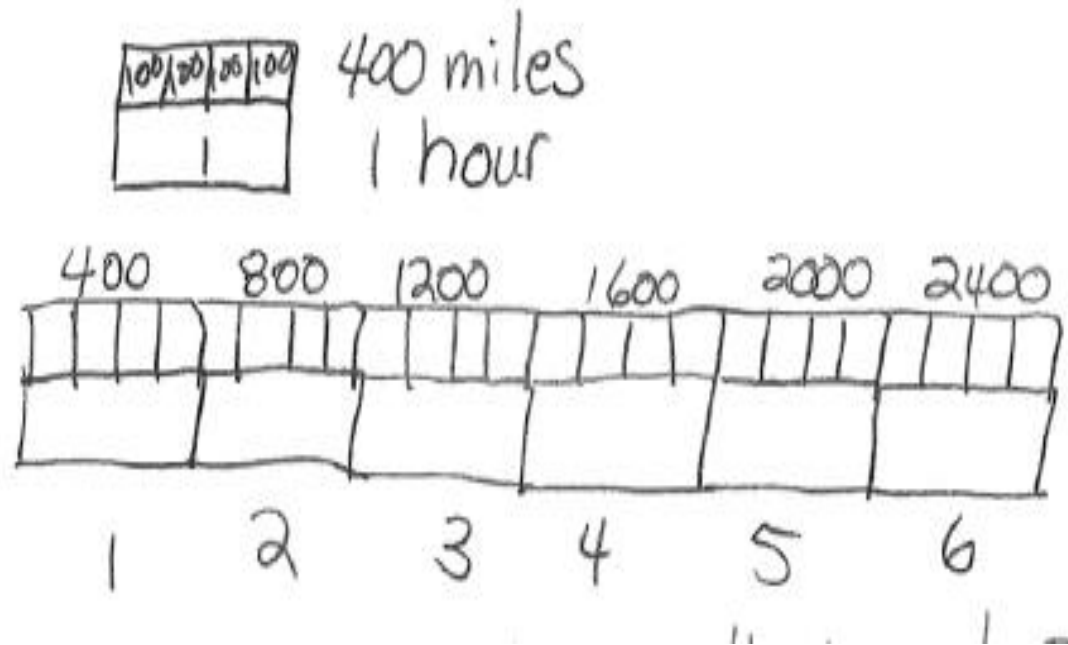
Οι προτιμήσεις των μαθητών για τα έργα του δήμου



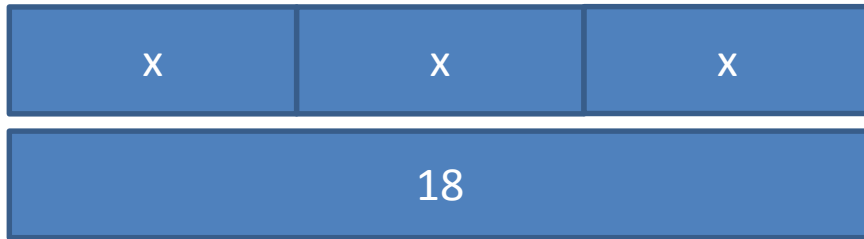
(β) Το Δημοτικό Συμβούλιο αποφάσισε να κατασκευάσει μια αίθουσα εκδηλώσεων. Να αξιολογήσεις την απόφαση αυτή.

Πρακτικές: Κατασκευή απλών μοντέλων

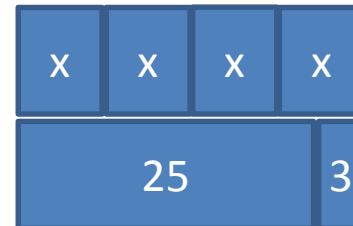
Ένα αεροπλάνο ταξιδεύει με ταχύτητα 400 μίλια την ώρα. Πόση απόσταση θα διανύσει σε 6 ώρες; Να κατασκευάσεις κατάλληλο διάγραμμα, για να τεκμηριώσεις την απάντησή σου.



$$18 \div 3 = \chi$$



$$4\chi - 3 = 25$$



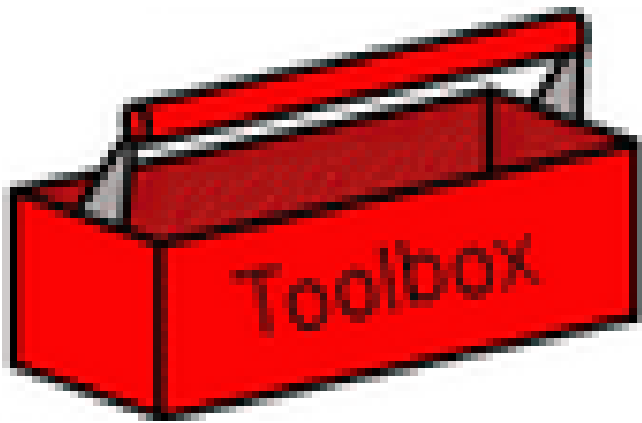
5. Στρατηγική χρήση εργαλείων

- Οι μαθητές/τριες χρησιμοποιούν διάφορα υλικά-μέσα και την τεχνολογία με ευέλικτο τρόπο για να επιλύσουν προβλήματα.

- Οι εκπαιδευτικοί

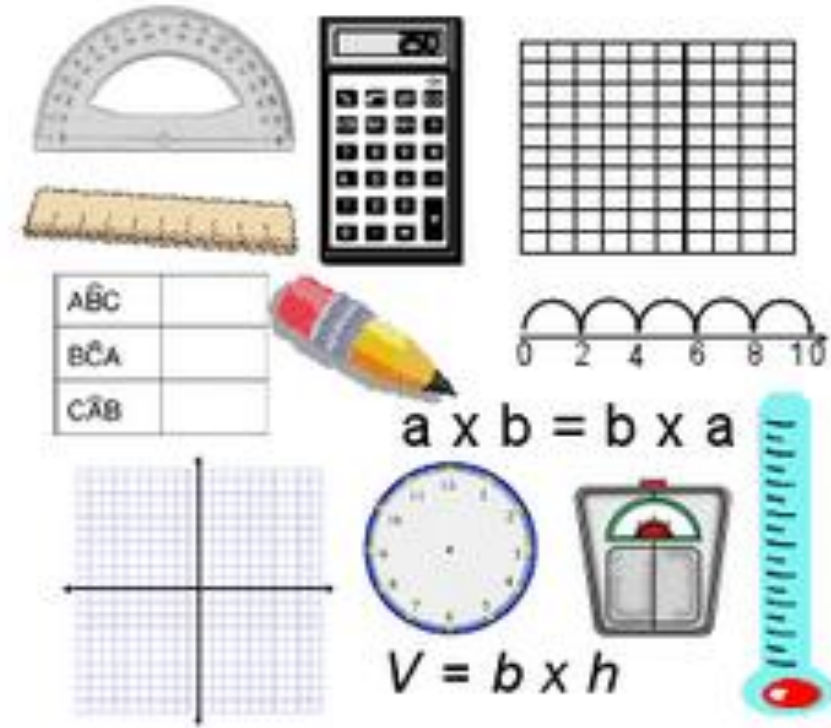
- Προσφέρουν στους μαθητές ποικιλία εποπτικών και τεχνολογικών εργαλείων για να εμβαθύνουν την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.
- Δίνουν προβλήματα, στα οποία γίνεται ξεκάθαρο στους/στις μαθητές/τριες γιατί η χρήση ενός εργαλείου θα τους/τις βοηθήσει στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος.

- Οι μαθητές/τριες:
 - Διερευνούν και συλλογίζονται για το ποιο είναι το καταλληλότερο μέσο για την επίλυση του προβλήματος που τους/τις απασχολεί.
 - Επιδεικνύουν την απαραίτητη επάρκεια στη χρήση των εργαλείων και λαμβάνουν κατάλληλες αποφάσεις για τον τρόπο αξιοποίησης κάθε εργαλείου με βάση τα πλεονεκτήματά του και τους περιορισμούς του.

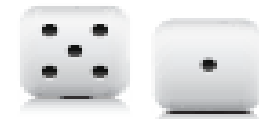
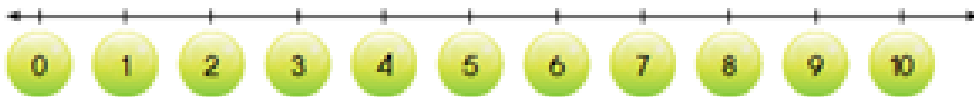
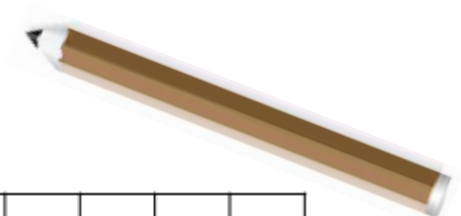
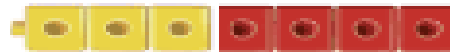
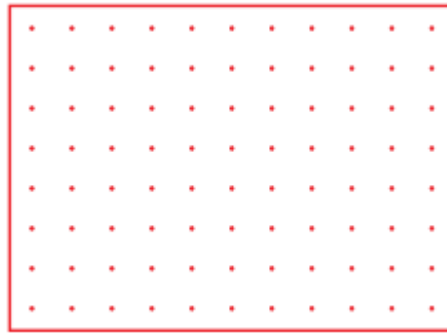



Εργαλειοθήκη Μαθηματικών

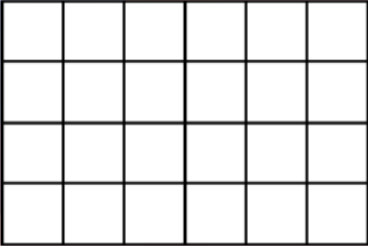
- Γνωρίζω **πώς** να χρησιμοποιώ τα εργαλεία
- Γνωρίζω **πότε** να χρησιμοποιώ εργαλεία
- Μπορώ να αναστοχαστώ για το κατά πόσον τα εργαλεία με βοήθησαν να φτάσω σε μια λογική απάντηση




1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

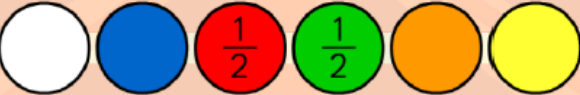


 Main

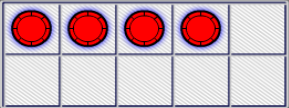


 Finished

Design a flag that is.....



How many are empty? next





Games

- How many?
- Build
- Fill
- Add
- Play all


0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pattern Blocks


Copy Clear Help

Sod supply



Sod used: 36


Fence supply



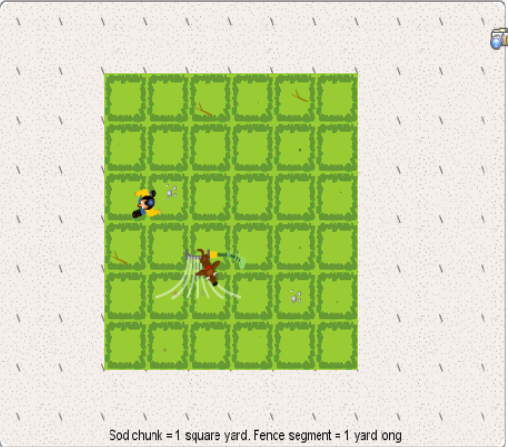
Fence used: 0

Auto fence

Prebuilt lawns



Area = 36 square yards



Sod chunk = 1 square yard. Fence segment = 1 yard long

Clear sod Clear fence

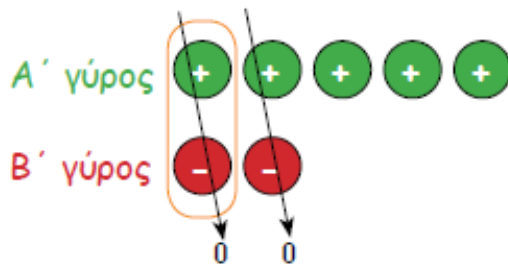
Διερεύνηση 2

Τα παιδιά παίζουν ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι. Ο νικητής καθορίζεται με βάση το σύνολο της βαθμολογίας που συγκεντρώνει στους δύο γύρους του παιχνιδιού.

Ο Νίκος συγκέντρωσε στον πρώτο γύρο (+5) βαθμούς και στον δεύτερο γύρο (-2) βαθμούς. Πιο κάτω παρουσιάζονται δύο μέθοδοι για τον υπολογισμό της συνολικής του βαθμολογίας.

Μέθοδος Α

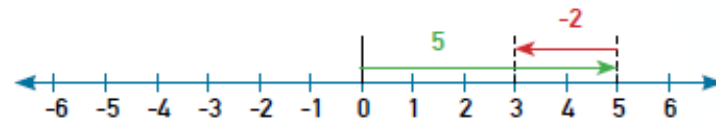
Κάθε πράσινο πλακίδιο αναπαριστά έναν θετικό βαθμό και κάθε κόκκινο πλακίδιο έναν αρνητικό βαθμό.



$$(+5) + (-2) = +3$$

Μέθοδος Β

Α' γύρος:  Β' γύρος: 



$$(+5) + (-2) = +3$$

(α) Να επεξηγήσετε τις δύο μεθόδους.

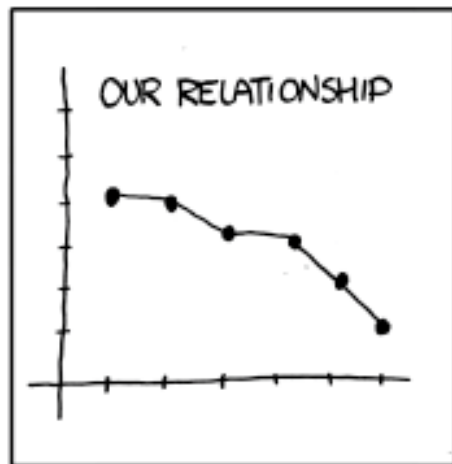
Στ' Δημοτικού

- ✓ Τι μαθηματικά εργαλεία θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε για να οπτικοποιήσουμε και να αναπαραστήσουμε μια κατάσταση;
- ✓ Τι πληροφορίες έχεις;
- ✓ Τι γνωρίζεις το οποίο δεν αναφέρεται στο πρόβλημα;
- ✓ Ποια προσέγγιση σκέφτεσαι να δοκιμάσεις πρώτα;
- ✓ Ποια εκτίμηση έκανες για να βρεις τη λύση;
- ✓ Θα ήταν χρήσιμο σε αυτή την περίπτωση να χρησιμοποιήσουμε γραφική παράσταση, αριθμητική γραμμή, ρίγα, διάγραμμα, υπολογιστική μηχανή, εφαρμογίδιο;
- ✓ Γιατί θα ήταν χρήσιμο να χρησιμοποιήσουμε
- ✓ Τι μπορεί να μας δείξει το χρησιμοποιώντας το που δεν θα μπορούσε το
- ✓ Σε ποιες περιπτώσεις θα ήταν πιο βοηθητικό να χρησιμοποιήσουμε

6. Ακρίβεια

- Ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί ορθή και σαφή ορολογία και απαιτεί από τους/τις μαθητές/τριες να είναι ακριβείς στη μαθηματική επικοινωνία.

- Οι εκπαιδευτικοί
 - Δίνουν έμφαση στην ακρίβεια και στη σαφήνεια κατά τη διαδικασία επίλυσης και στην απάντηση στη λύση προβλήματος.
 - Ενθαρρύνουν τους/τις μαθητές/τριες να αξιολογήσουν κατά πόσο οι απαντήσεις των συμμαθητών/τριών τους είναι πάντοτε ορθές ή έχουν περιορισμούς.



Πρόσθεση:
Ενώνω

Ισότητα:
Ίσο με

3 μήλα + 4 αχλάδια = 7 φρούτα

Ονομασία μονάδων

Πρακτικές

- Μετάφραση σε συμβολική γλώσσα (σύνδεση με Πρακτική 2)
 - Διπλασίασε έναν αριθμό και πρόσθεσε 6
 - Το ένα τέταρτο του 16 είναι το 4
 - Τέσσερα ευρώ και 10 σεντς είναι περισσότερα από τέσσερα ευρώ και 5 σεντς

Να επεξηγήσετε το σκεπτικό κάθε παιδιού.

Το γινόμενο της μαθηματικής πρότασης $\frac{7}{8} \cdot 2\frac{2}{3}$ είναι μικρότερο από το $2\frac{2}{3}$.



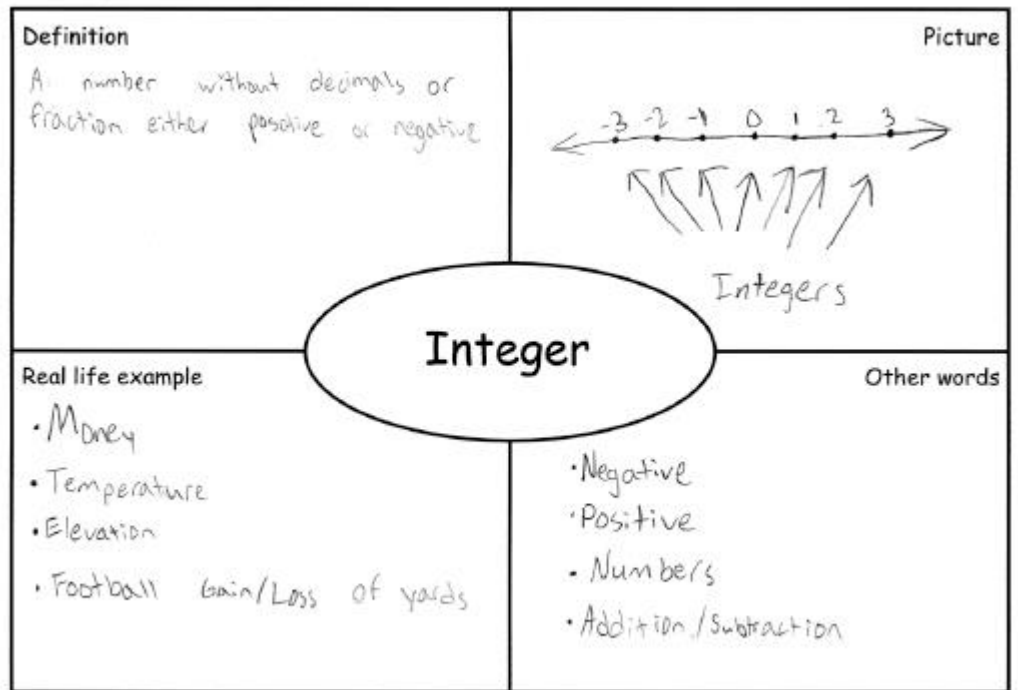
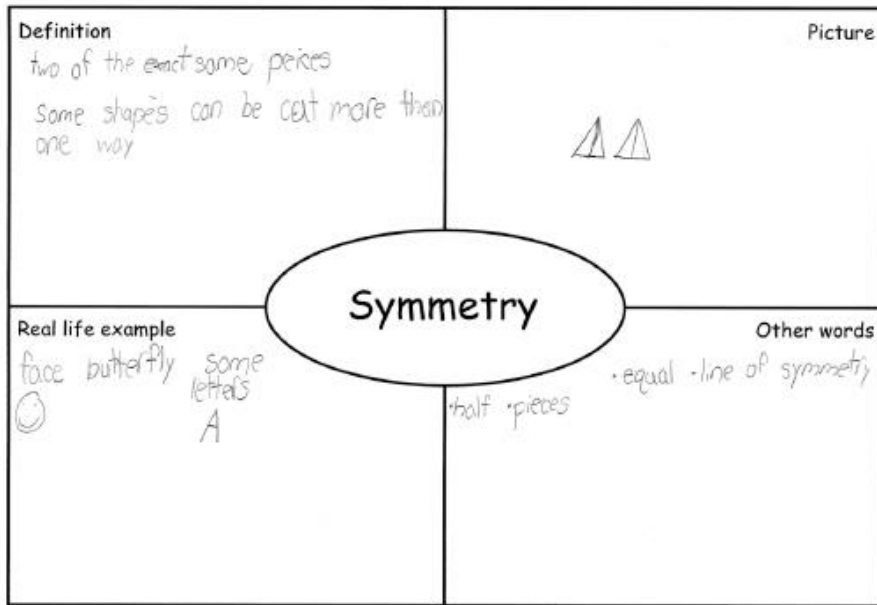
Άρης

Το γινόμενο της μαθηματικής πρότασης $\frac{8}{7} \cdot 2\frac{2}{3}$ είναι μεγαλύτερο από το $2\frac{2}{3}$.



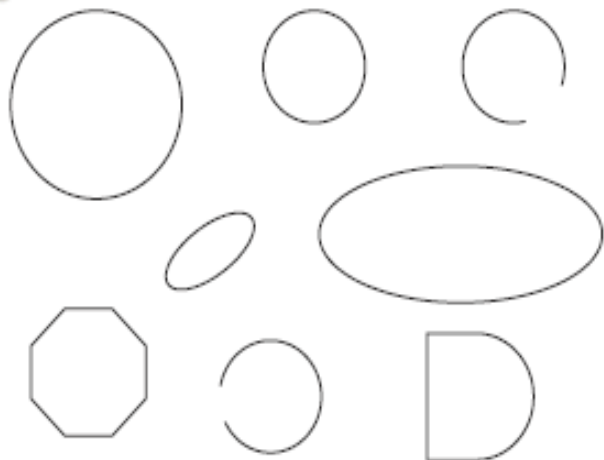
Φαίδρα

Στ' Δημοτικού

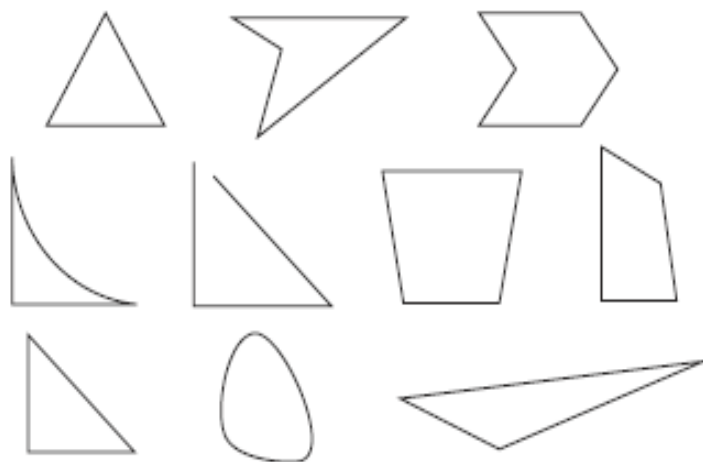




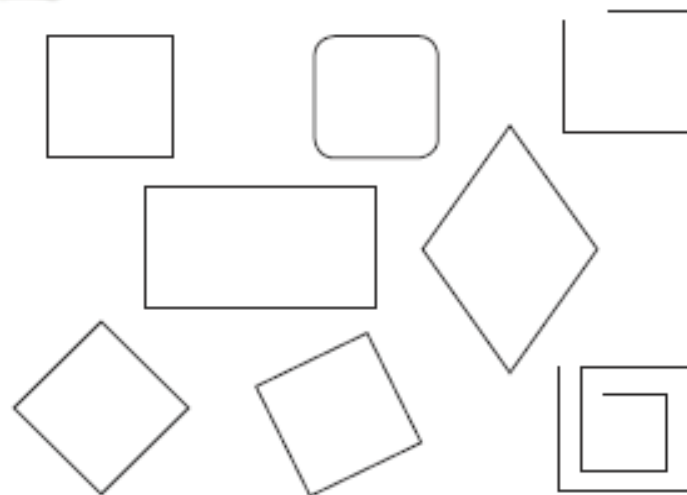
2. Να σημειώσεις τους κύκλους.



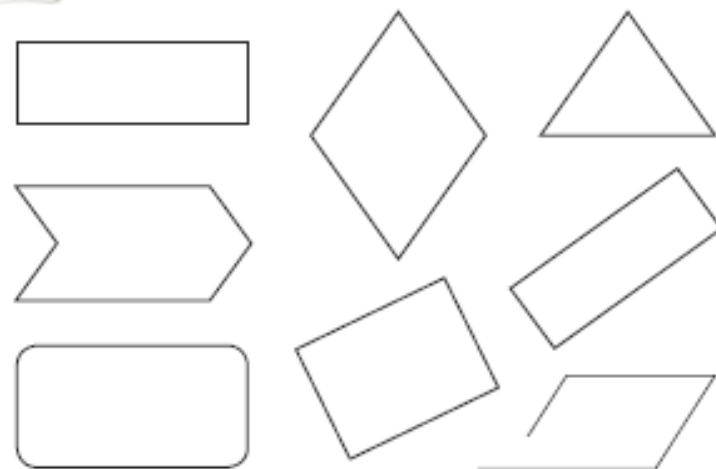
3. Να σημειώσεις τα τρίγωνα.



4. Να σημειώσεις τα τετράγωνα.



5. Να σημειώσεις τα ορθογώνια.



Α' Δημοτικού

7. Δομή των μαθηματικών

- Οι μαθητές/τριες αναγνωρίζουν και χρησιμοποιούν τη δομή των μαθηματικών στη λύση προβλημάτων.

- Οι εκπαιδευτικοί
 - Δίνουν ευκαιρίες στους/στις μαθητές/τριες να διερευνήσουν σχέσεις για να επιλύσουν προβλήματα.
 - Βοηθούν τους/τις μαθητές/τριες να εντοπίσουν και να αξιολογήσουν κατάλληλες στρατηγικές για την επίλυση ενός προβλήματος και όχι στο να ακολουθούν τυφλά βήμα προς βήμα κάποιες διαδικασίες.

Οι μαθητές

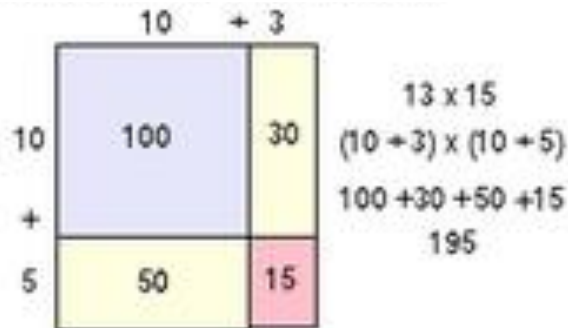
- Προσπαθούν να αναγνωρίσουν μοτίβα ή δομές.
- Αναστοχάζονται για να μελετήσουν μια έννοια με διαφορετικούς τρόπους.
- Αντιμετωπίζουν πολύπλοκα πράγματα ως σύνθεση μεμονωμένων αντικειμένων.
- Χρησιμοποιούν γνωστές δομές, για να διερευνήσουν κάτι με διαφορετικό τρόπο

Δομή των Μαθηματικών

Κατανοώ τον τρόπο με τον οποίο οι αριθμοί και τα σχήματα είναι οργανωμένα ως μεμονωμένα αντικείμενα και ως σύνολο

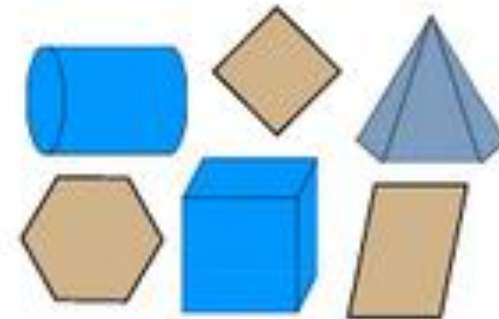
ΑΡΙΘΜΟΙ

- Δεκαδικό σύστημα
- Ιδιότητες, πράξεις
- Όροι, συντελεστές, δυνάμεις



ΣΧΗΜΑΤΑ

- Διαστάσεις
- Ιδιότητες
- Μετασχηματισμοί



(α) Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο, για να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

<https://www.geogebra.org/m/ZD2Es8JV>

		ΝΑΙ	ΟΧΙ
1	Είναι δυνατόν να κατασκευάσετε ορθογώνιο, χρησιμοποιώντας το εικονίδιο κατασκευής παραλληλογράμμου;		
2	Είναι δυνατόν να κατασκευάσετε τετράγωνο, χρησιμοποιώντας το εικονίδιο κατασκευής ορθογωνίου;		
3	Είναι δυνατόν να κατασκευάσετε ρόμβο, χρησιμοποιώντας το εικονίδιο κατασκευής παραλληλογράμμου;		

(β) Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(γ) Ο Μάνος υποστηρίζει ότι δεν είναι δυνατόν να κατασκευάσει τετράγωνο, χρησιμοποιώντας το εικονίδιο του ρόμβου. Συμφωνείτε με τον Μάνο; Να επεξηγήσετε και στη συνέχεια να ελέγξετε την απάντησή σας, χρησιμοποιώντας το εφαρμογίδιο.



Στ' Δημοτικού

Διερεύνηση 2

(α) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω γινόμενα. Να γράψετε την απάντηση στην πιο απλή μορφή.

ΣΤΗΛΗ Α

ΣΤΗΛΗ Β

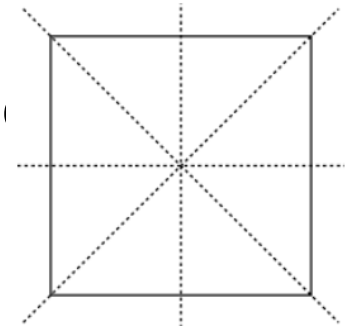
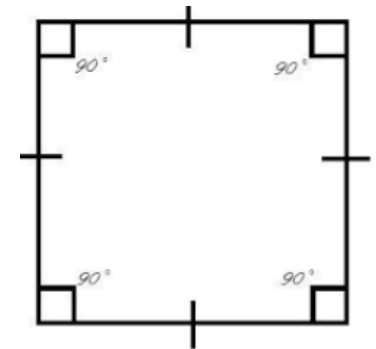
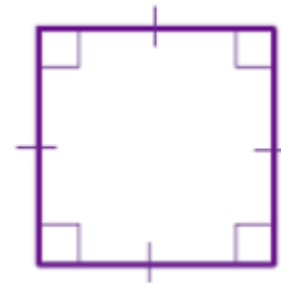
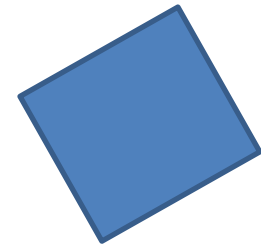
$4 \cdot 2 =$	$2 \cdot 4 =$
$4 \cdot 1 =$	$1 \cdot 4 =$
$4 \cdot \frac{1}{2} =$	$\frac{1}{2} \cdot 4 =$
$4 \cdot \frac{1}{4} =$	$\frac{1}{4} \cdot 4 =$
$4 \cdot \frac{1}{8} =$	$\frac{1}{8} \cdot 4 =$
$4 \cdot \frac{1}{16} =$	$\frac{1}{16} \cdot 4 =$

Στ' Δημοτικού

(β) Ποια μοτίβα παρατηρείτε στον πίνακα;

Ανάπτυξη έννοιας τετραγώνου

- Αναγνώριση σχήματος
- Τετράπλευρο
- Ίσες γωνίες, ίσες πλευρές
- Ορθές γωνίες
- Παραλληλόγραμμο
- Τετράγωνο ορθογώνιο
- Τετράγωνο ρόμβος
- Συμμετρικό
- Παραλληλόγραμμο με 4 άξονες συμμετρίας



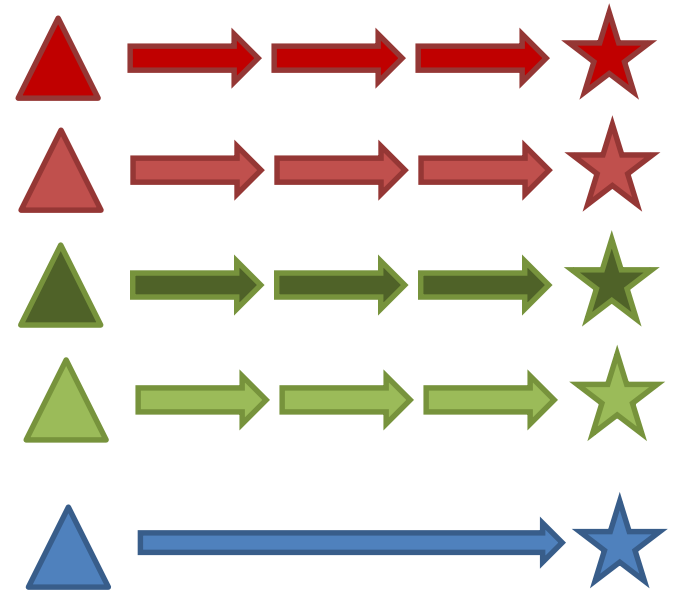
8. Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό

- Οι μαθητές/τριες παρατηρούν επαναλήψεις σε υπολογισμούς και αναζητούν γενικές μεθόδους και συντομεύσεις.

- Οι εκπαιδευτικοί

- Αξιολογούν προσεκτικά τις απαντήσεις των μαθητών/τριών και αναζητούν τις σημαντικές ιδέες σε αυτά που εκφράζουν ώστε να γίνουν οι κατάλληλες γενικεύσεις και συντομεύσεις.
- Δημιουργούν τις συνθήκες ώστε οι μαθητές/τριες να αντιληφθούν τη σημασία της αναζήτησης κανονικοτήτων σε συλλογισμούς.

- Οι μαθητές/τριες:
 - Παρατηρούν πότε οι υπολογισμοί είναι επαναλαμβανόμενοι και ψάχνουν για γενικές μεθόδους ή συντομεύσεις.
 - Εστιάζονται στο γενικό αποτέλεσμα μιας επαναλαμβανόμενης διαδικασίας.
 - Παρατηρούν την κανονικότητα και τη χρησιμοποιούν για να επιλύσουν προβλήματα.
 - Επαναξιολογούν τη λογικότητα των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων μιας διαδικασίας.





Παρατηρώ πότε υπολογισμοί ή σχήματα επαναλαμβάνονται με σκοπό να χρησιμοποιήσω το μοτίβο, για να συντομεύσω τη διαδικασία

Πώς αξιοποιώ το αναπτυσσόμενο μοτίβο;



Πάνω 1,
2 περισσότερα



2 περισσότερα από
την προηγούμενη
σειρά



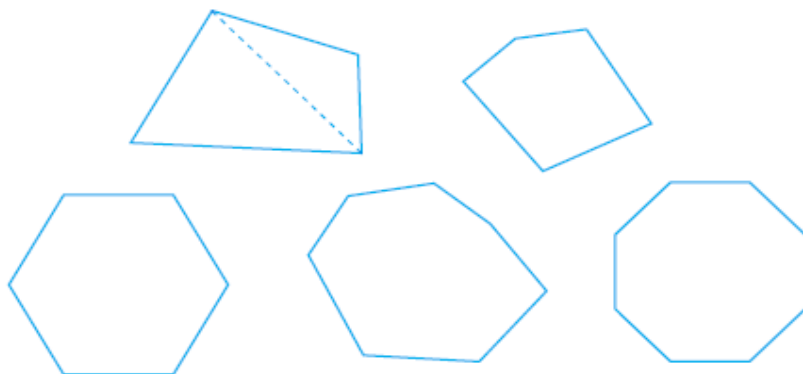
2 περισσότερα κάθε
σειρά και 1 στην κορυφή

**Υπάρχει μοτίβο;
Πώς μπορώ να γενικεύσω το μοτίβο;
Μπορώ να κάνω πρόβλεψη για έναν όρο
του μοτίβου;**

+5, +7, ... άθροισμα διαδοχικών περιττών αριθμών
Μοτίβο τετράγωνων αριθμών 4, 9, 16, ...

Σκέφτομαι συντομεύσεις...

(α) Να χωρίσετε το κάθε πολύγωνο σε τρίγωνα που δεν επικαλύπτουν το ένα το άλλο, φέρνοντας όλες τις διαγωνίους από μια κορυφή του σχήματος.



(β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

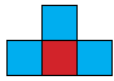
Πολύγωνο	Αριθμός πλευρών πολυγώνου	Αριθμός τριγώνων που διαχωρίζεται το πολύγωνο	Άθροισμα γωνιών πολυγώνου
Τετράπλευρο	4	2	$2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$
Πεντάγωνο			
Εξάγωνο			
Επτάγωνο			
Οκτάγωνο			
Δεκάγωνο			
n-γωνο			

(γ) Να συγκρίνετε τον αριθμό των πλευρών ενός πολυγώνου με τον αριθμό των τριγώνων που διαχωρίζεται το πολύγωνο. Τι παρατηρείτε;

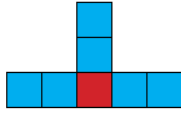
(δ) Πώς μπορείτε να υπολογίσετε το άθροισμα των γωνιών ενός πολυγώνου; Να γράψετε έναν γενικό κανόνα.

Στ' Δημοτικού

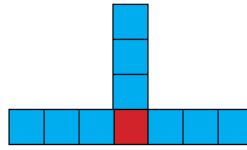
Ο Ηλίας κατασκεύασε το πιο κάτω μοτίβο, χρησιμοποιώντας χρωματιστές ψηφίδες.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

(α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Αριθμός Σχήματος	Αριθμός κόκκινων ψηφίδων	Αριθμός μπλε ψηφίδων	Συνολικός αριθμός ψηφίδων
1	1	$3 \cdot 1 = 3$	$1 + (3 \cdot 1) = 4$
2	1	$3 \cdot 2 = 6$	$1 + (3 \cdot 2) = 7$
3			
4			
5			
.....		
n			

(β) Τι παρατηρείτε για τον αριθμό των κόκκινων και των μπλε ψηφίδων στο πιο πάνω μοτίβο;

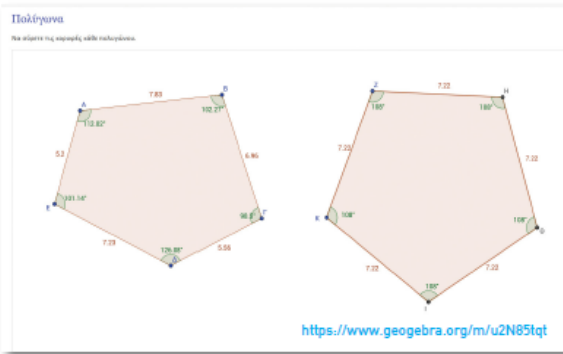
(γ) Να υπολογίσετε τον συνολικό αριθμό των ψηφίδων στο Σχήμα 10 και στο Σχήμα 25 του μοτίβου. Να εξηγήσετε.

(δ) Ποια είναι η διαφορά στον συνολικό αριθμό ψηφίδων μεταξύ του Σχήματος 30 και του Σχήματος 33; Να εξηγήσετε.

Στ' Δημοτικού

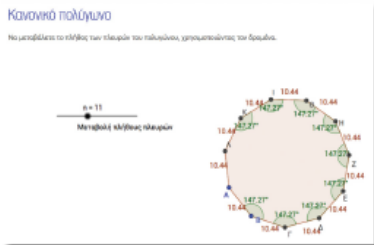
Διερεύνηση

Ο Νίκος κατασκεύασε στο εφαρμογίδιο ένα κανονικό και ένα μη κανονικό πολύγωνο.



(α) Να σύρετε τις κορυφές του κάθε πολυγώνου. Τι παρατηρείτε;

(β) Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο <https://www.geogebra.org/m/γ3ym4Ebk>. Να μεταβάλετε το πλήθος των πλευρών των πολυγώνων, χρησιμοποιώντας τον δρομέα. Τι παρατηρείτε;



(γ) Με βάση τις παρατηρήσεις σας, να περιγράψετε τα κανονικά πολύγωνα.

Διερεύνηση 1

(α) Να υπολογίσετε τα γινόμενα.

$$12 \cdot 3 =$$

$$12 \cdot 0,3 =$$

$$12 \cdot 0,03 =$$

$$12 \cdot 0,003 =$$

$$1,2 \cdot 3 =$$

$$1,2 \cdot 0,3 =$$

$$1,2 \cdot 0,03 =$$

$$1,2 \cdot 0,003 =$$

$$0,12 \cdot 3 =$$

$$0,12 \cdot 0,3 =$$

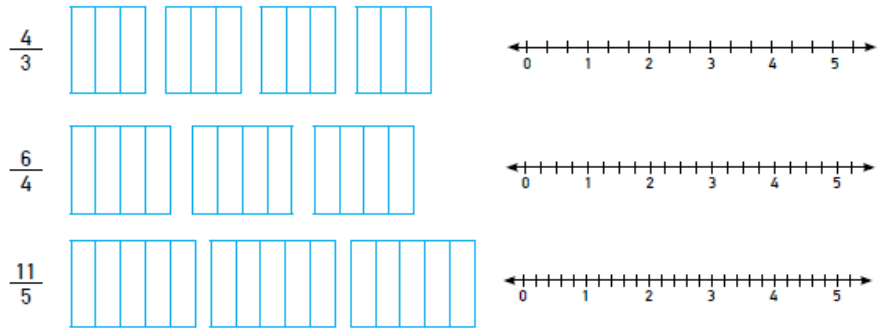
$$0,12 \cdot 0,03 =$$

$$0,12 \cdot 0,003 =$$

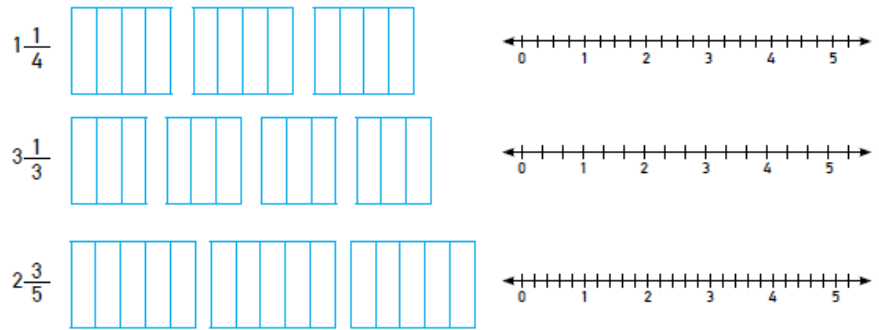
Ποια μοτίβα παρατηρείτε;

(β) Ποια σχέση παρατηρείτε μεταξύ του αριθμού των δεκαδικών ψηφίων στο γινόμενο και του αριθμού των δεκαδικών ψηφίων στους παράγοντες;

(α) Να χρησιμοποιήσετε τα σχήματα και την αριθμητική γραμμή, για να αναπαραστήσετε τα πιο κάτω καταχρηστικά κλάσματα και να τα γράψετε ως μικτούς αριθμούς.



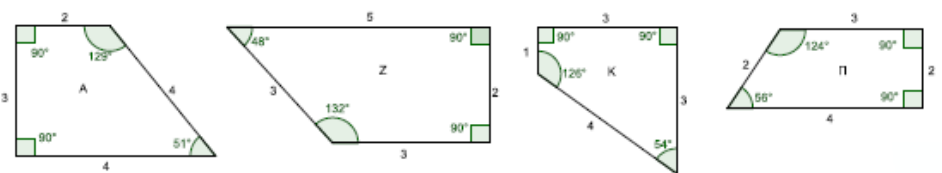
(β) Να χρησιμοποιήσετε τα σχήματα και την αριθμητική γραμμή, για να αναπαραστήσετε τους πιο κάτω μικτούς αριθμούς και να τους γράψετε ως καταχρηστικά κλάσματα.



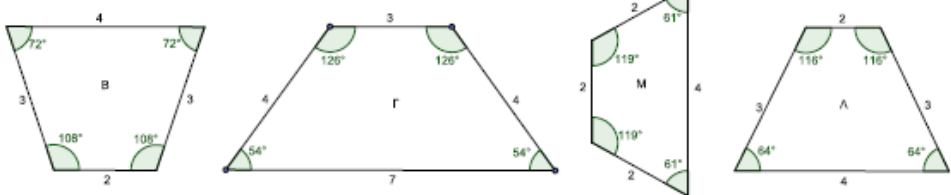
Διερεύνηση 2

Ο Φάνης ταξινόμησε τα τραπέζια σε τρεις ομάδες. Να επεξηγήσετε το σκεπτικό της ταξινόμησής του.

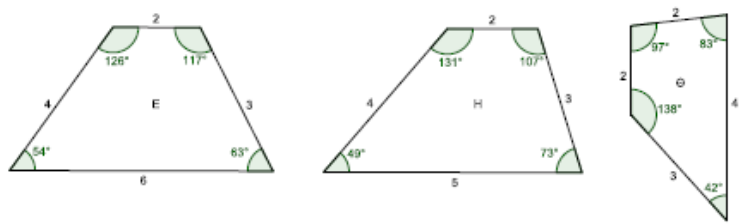
Ομάδα Α



Ομάδα Β



Ομάδα Γ



Διερεύνηση 3

Ο Στέφανος θα ενοικιάσει μοτοποδήλατο κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών του διακοπών. Για το σκοπό αυτό ζήτησε προσφορές από δύο εταιρείες.

Εταιρεία Α

Χρέωση ανά ημέρα: €25



Εταιρεία Β

Χρέωση κατά την παραλαβή: €30

Χρέωση ανά ημέρα: €20



(α) Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

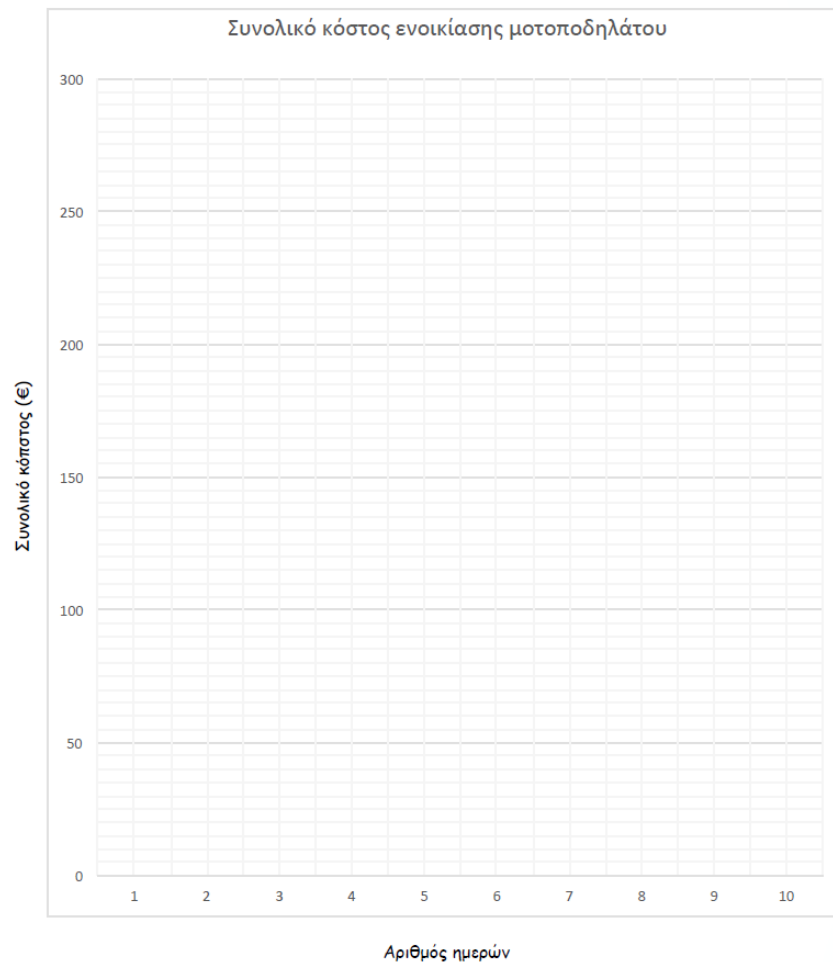
Αριθμός ημερών	Συνολικό κόστος ενοικίασης μοτοποδήλατου	
	Εταιρεία Α	Εταιρεία Β
1	$1 \cdot 25 = 25$	$(1 \cdot 20) + 30 = 50$
2		
3		
4		
5		
6		
7		
10		
15		
ν		

(β) Να γράψετε έναν κανόνα για τον υπολογισμό του κόστους ενοικίασης του μοτοποδήλατου για οποιονδήποτε αριθμό ημερών:

i. Στην εταιρεία Α _____

ii. Στην εταιρεία Β _____

(γ) Να δείξετε στη γραφική παράσταση το συνολικό κόστος ενοικίασης μοτοποδήλατου για 1 έως 10 ημέρες, χρησιμοποιώντας διαφορετικό χρώμα για κάθε εταιρεία.



(δ) Να επεξηγήσετε ποια είναι η πιο συμφέρουσα προσφορά για τον Στέφανο, με βάση τη γραφική παράσταση.