

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΜΕΡΟΣ

3

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

ΣΤ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΜΕΡΟΣ 3



Συγγραφική ομάδα:

Δρ Αθανασίου Χρύσω

Δρ Δεληγιάννη Ελένη

Δρ Μονογυιού Αννίτα

Δρ Χειμωνή Μαρία

Ακαδημαϊκός υπεύθυνος:

Δρ Χρίστου Κωνσταντίνος, *Πανεπιστήμιο Κύπρου*

Επιστημονικοί συνεργάτες:

Δρ Πίττα - Πανταζή Δήμητρα, *Πανεπιστήμιο Κύπρου*

Δρ Πιττάλης Μάριος, *Πανεπιστήμιο Κύπρου*

Σύνδεσμος Επιθεωρήτρια:

Δρ Μιχαήλ Άντρη

Σχεδιασμός έκδοσης:

Θεοφυλάκτου Γλαύκος, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Γλωσσική επιμέλεια έκδοσης:

Βουνιώτη Στέλλα, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης:

Δρ Γεωργιάδης Πέτρος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Α΄ Έκδοση 2025

Ανατύπωση 2026

Εκτύπωση: Τυπογραφείο Κυπριακής Δημοκρατίας

© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ISBN: 978-9963-0-1784-3

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το Υπουργείο Παιδείας, Αθλητισμού και Νεολαίας οραματίζεται ένα σχολείο που θα διασφαλίζει υψηλής ποιότητας εκπαίδευση για κάθε μαθητή και μαθήτριά. Τα Μαθηματικά αποτελούν θεμελιώδες μέσο για την κατανόηση του κόσμου γύρω μας και έχουν καίρια σημασία στην καθημερινή ζωή των ανθρώπων, για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων, για την ανάπτυξη της κριτικής, δημιουργικής, λογικής και αναλυτικής σκέψης, καθώς και για την καλλιέργεια στάσεων και αξιών, όπως η ακρίβεια, η υπευθυνότητα και η μεθοδικότητα. Η νέα αυτή σειρά βασίζεται στο αναθεωρημένο και επικαιροποιημένο Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών και εναρμονίζεται πλήρως με διεθνή πρότυπα και πρακτικές, ενώ παράλληλα λαμβάνει υπόψη τις ιδιαιτερότητες του κυπριακού εκπαιδευτικού συστήματος και τη μετάβαση των παιδιών από τη Δημοτική στη Μέση Εκπαίδευση.

Η επικαιροποίηση των εγχειριδίων των Μαθηματικών εστιάζεται κυρίως στη μεθοδολογία διδασκαλίας των μαθηματικών εννοιών. Τα εγχειρίδια δίνουν έμφαση στην πιο συνεκτική προσέγγιση του περιεχομένου των Μαθηματικών, στην ανάπτυξη της κριτικής και δημιουργικής σκέψης, μέσω αναστοχαστικών δραστηριοτήτων, στην ανάπτυξη των δεξιοτήτων της έρευνας, της επικοινωνίας και της εφαρμογής των μαθηματικών ιδεών με τη χρήση της τεχνολογίας. Επικεντρώνονται στις προαπαιτούμενες γνώσεις, έτσι ώστε όλοι/ες οι μαθητές/μαθήτριες να οικοδομούν τις νέες έννοιες, δεξιότητες, στρατηγικές και στάσεις σε αυτά που ήδη γνωρίζουν.

Σημαντική καινοτομία των νέων εγχειριδίων είναι η ενσωμάτωση δραστηριοτήτων διαμορφωτικής αξιολόγησης, η διαβάθμιση των δραστηριοτήτων ανάλογα με το επίπεδο δυσκολίας τους, η χρήση πολλαπλών παραδειγμάτων και η συζήτηση θεμάτων σχετικών με παγκόσμια θέματα ή προβλήματα που αντιμετωπίζει η σύγχρονη κοινωνία.

Αυτή η νέα σειρά βιβλίων δεν αποτελεί απλώς ένα εκπαιδευτικό εργαλείο, αλλά ένα βήμα για τη δημιουργία μιας νέας κουλτούρας μάθησης, που ενσωματώνει τις σύγχρονες αντιλήψεις της εκπαίδευσης και εστιάζει στις αξίες της διαρκούς βελτίωσης. Με την πίστη μας στις δυνατότητες κάθε μαθητή/μαθήτριας, στηρίζουμε την ανάπτυξή του/της μέσα από τη γνώση, τη διαρκή ανατροφοδότηση και την ενίσχυση των δεξιοτήτων του/της, για την αντιμετώπιση του μέλλοντος.

Ευχόμαστε καλή επιτυχία στους μαθητές και στις μαθήτριάς μας στην πορεία τους με αυτά τα νέα βιβλία Μαθηματικών και προσβλέπουμε σε μια δημιουργική και παραγωγική μαθησιακή εμπειρία.

Δρ Στυλιανίδης Μάριος
Διευθυντής Δημοτικής Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Δομή Ενοτήτων

8	Λόγοι - Αναλογίες - Ποσοστά - Πιθανότητες	7
9	Άλγεβρα - Στατιστική	55
10	Γεωμετρία II	85

8**Λόγοι - Αναλογίες - Ποσοστά - Πιθανότητες**

Μάθημα 1:	Έννοια λόγου - Ίσοι λόγοι.....	9
Μάθημα 2:	Ιδιότητες αναλογιών.....	16
Μάθημα 3:	Επίλυση προβλημάτων αναλογίας	19
Μάθημα 4:	Έννοια ποσοστού - Μετατροπές - Υπολογισμός ποσοστού ως μέρος αριθμού.....	25
Μάθημα 5:	Επίλυση προβλημάτων με ποσοστά	34
Μάθημα 6:	Πιθανότητες - Πείραμα τύχης	39

9**Άλγεβρα - Στατιστική**

Μάθημα 1:	Μοτίβα.....	57
Μάθημα 2:	Γραφικές παραστάσεις.....	63
Μάθημα 3:	Μέτρα θέσης	68

10**Γεωμετρία II**

Μάθημα 1:	Στοιχεία κύκλου	87
Μάθημα 2:	Μήκος κύκλου	91
Μάθημα 3:	Διατεταγμένα ζεύγη	96
Μάθημα 4:	Μεταφορά	99
Μάθημα 5:	Συμμετρία ως προς άξονα	103



8

λόγοι, αναλογίες, ποσοστά, πιθανότητες

8

Λόγοι, αναλογίες, ποσοστά, πιθανότητες



Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε...

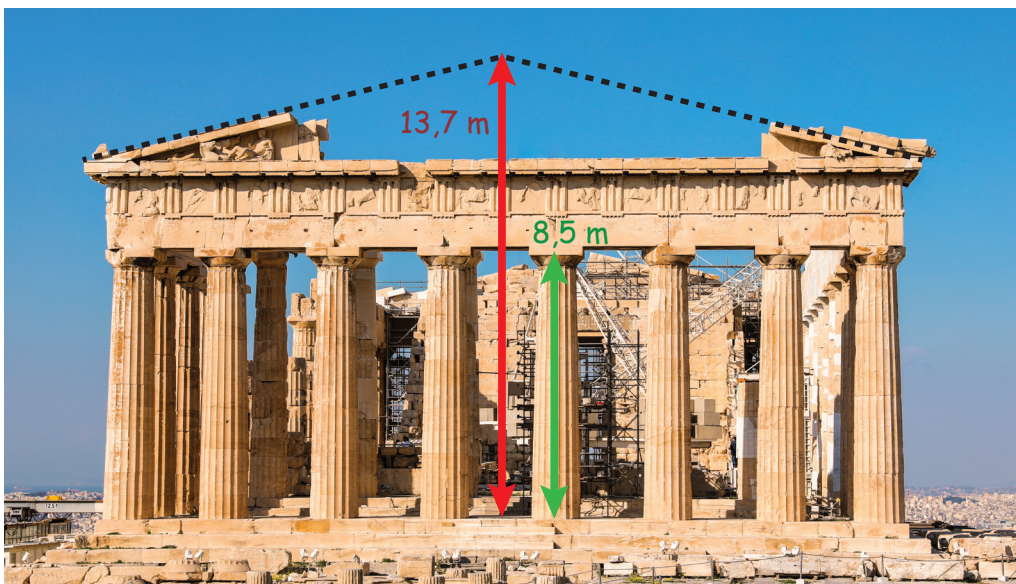
- Να διερευνούμε και να ορίζουμε τον λόγο δύο ποσών και να συγκρίνουμε λόγους.
- Να ορίζουμε την αναλογία και να εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των αναλογιών.
- Να επιλύουμε προβλήματα εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των αναλογιών.
- Να διερευνούμε την έννοια του ποσοστού ως λόγο.
- Να επιλύουμε προβλήματα ποσοστών.
- Να αναγνωρίζουμε τι είναι πείραμα τύχης και να υπολογίζουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου.



Τα Μαθηματικά στον κόσμο

Το 447 π.Χ., στην αρχαία Αθήνα, ο Περικλής ανέθεσε στον Ικτίνο και τον Καλλικράτη τον σχεδιασμό ενός μεγαλοπρεπούς ναού, του Παρθενώνα. Αυτός ο ναός είχε ως σκοπό να δείξει τη δύναμη και την ευημερία της πόλης, αλλά και να στεγάσει το λατρευτικό άγαλμα της θεάς Αθηνάς, έργο του μεγάλου γλύπτη Φειδία. Ο Φειδίας επέβλεψε την κατασκευή του ναού και επιδίωξε να δημιουργήσει κάτι τέλειο, που όταν οι άνθρωποι το αντικρίζουν, να αισθάνονται θαυμασμό και γαλήνη. Έτσι, χρησιμοποίησε έναν μαγικό αριθμό, γνωστό ως «Χρυσή Τομή», ο οποίος είναι περίπου ίσος με $\frac{8}{5}$ ή 1,6. Ο αριθμός αυτός συμβολίζεται με το γράμμα ϕ προς τιμήν του Φειδία.

Για παράδειγμα, το ύψος του ναού από τη βάση μέχρι την κορυφή (με κόκκινο χρώμα στην εικόνα) ως προς το ύψος από τη βάση μέχρι τους κίονες (με πράσινο χρώμα στην εικόνα) είναι περίπου ίσο με $\frac{8}{5}$ ή 1,6. Όταν η κατασκευή ολοκληρώθηκε το 432 π.Χ., ο Περικλής χαμογέλασε και είπε: «Η τέχνη και τα Μαθηματικά μαζί μπορούν να κάνουν θαύματα!».



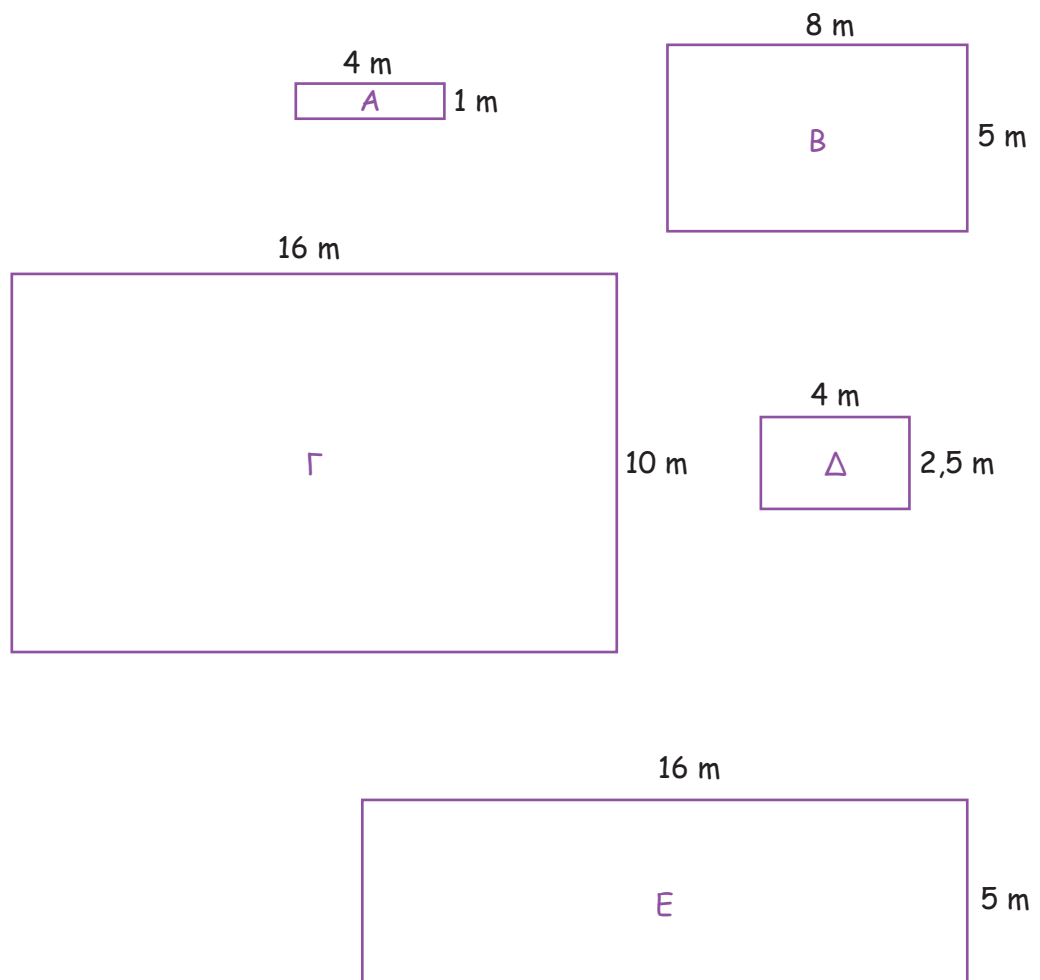
- Πώς αντιλαμβάνεστε τη φράση του Περικλή; Συμφωνείτε;



Εξερεύνηση

Ο **λόγος** στα Μαθηματικά είναι ένας τρόπος σύγκρισης διαφορετικών ποσοτήτων. Η «**Χρυσή Τομή**» που παρατηρήσαμε στις διαστάσεις του Παρθενώνα αποτελεί ένα παράδειγμα εφαρμογής της έννοιας του λόγου, καθώς αναφέρεται στη σύγκριση του μήκους δύο ευθύγραμμων τμημάτων. Ο λόγος $\frac{8}{5}$ είναι γνωστός και ως «**Χρυσός Λόγος**» και είναι δυνατό να εκφραστεί με τη μορφή 8 προς 5 ή $8 : 5$ ή $\frac{8}{5}$. Οι αριθμοί 8 και 5 ονομάζονται **όροι** του λόγου.

- (α) Σε ποια από τα πιο κάτω ορθογώνια ισχύει ο «Χρυσός Λόγος» μεταξύ του μήκους και του πλάτους; Να επεξηγήσετε.



- (β) Ποια ορθογώνια θα χαρακτηρίζατε ως πιο αρμονικά και όμορφα στο μάτι; Γιατί;



Διερεύνηση

Τεχνολογία



Πιο κάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα εφαρμογής της έννοιας του λόγου, που αναφέρεται στη σύγκριση της ποσότητας αντισηπτικού με την ποσότητα νερού σε ένα διάλυμα, ώστε να είναι αποτελεσματικό για την καταπολέμηση ιών και μικροβίων.



Ο λόγος **1 προς 4** ή $1 : 4$ ή $\frac{1}{4}$ δείχνει ότι για κάθε 1 μέρος αντισηπτικού χρησιμοποιούνται 4 μέρη νερού.

(α) Σε ποια από τα πιο κάτω διαλύματα η σχέση της ποσότητας αντισηπτικού προς την ποσότητα νερού εκφράζεται με τον λόγο 1 προς 4; Να επεξηγήσετε.

Διάλυμα 1

$$\frac{2}{5}$$

Διάλυμα 2

$$\frac{20}{80}$$

Διάλυμα 3

$$\frac{12}{3}$$

Διάλυμα 4

$$\frac{3}{12}$$

Διάλυμα 5

$$\frac{10}{40}$$

Διάλυμα 6

$$\frac{0,25}{1}$$

Διάλυμα 7

$$\frac{8}{24}$$

Διάλυμα 8

$$\frac{5}{20}$$

(β) Να γράψετε τρεις άλλους λόγους ίσους με τον λόγο $\frac{1}{4}$.

Δύο λόγοι είναι **ίσοι**, όταν εκφράζουν την ίδια σχέση μεταξύ των δύο ποσοτήτων.

(γ) Να περιγράψετε έναν τρόπο με τον οποίο εξετάζουμε κατά πόσο δύο λόγοι είναι ίσοι.



Δραστηριότητες 1

- 1.1. Η εικόνα παρουσιάζει τον λόγο των κίτρινων προς τα πράσινα μπαλόνια που χρησιμοποιούνται για την ετοιμασία μιας κατασκευής. Να συμπληρώσετε στον πίνακα τον λόγο που αντιστοιχεί σε κάθε σχέση με τρεις διαφορετικούς τρόπους, όπως στο παράδειγμα.



Σύγκριση		
Μέρος-Μέρος	Κίτρινα προς πράσινα μπαλόνια	2 προς 3 ή $2 : 3$ ή $\frac{2}{3}$
	Πράσινα προς κίτρινα μπαλόνια	
Μέρος-Σύνολο	Κίτρινα μπαλόνια προς σύνολο μπαλονιών	
	Πράσινα μπαλόνια προς σύνολο μπαλονιών	
Σύνολο-Μέρος	Σύνολο μπαλονιών προς κίτρινα μπαλόνια	
	Σύνολο μπαλονιών προς πράσινα μπαλόνια	

- 1.2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα, όπως στο παράδειγμα.

Εικόνα	Λεκτική έκφραση	Σύμβολα
	Για κάθε 3 φλιτζάνια ελαιόλαδο, αναμειγνύεται 1 φλιτζάνι λεμόνι	3 προς 1 $3 : 1$ $\frac{3}{1}$
	3 L μπλε μπογιάς αναμειγνύονται με 2 L κίτρινης μπογιάς	
		4 : 3
	Υπάρχουν 5 φράουλες σε σύνολο 7 φρούτων	
	Σε κάθε 3 μπλε χάντρες αντιστοιχούν 5 πράσινες χάντρες	



- 1.3. Στις πισίνες, για λόγους ασφαλείας, υπάρχουν κανονισμοί που καθορίζουν πόσα παιδιά θα έχει υπό την ευθύνη του ένας ενήλικας, όπως φαίνεται πιο κάτω.

ΚΑΝΟΝΙΣΜΟΙ ΕΠΙΒΛΕΨΗΣ ΠΑΙΔΙΩΝ ΣΤΗΝ ΠΙΣΙΝΑ

Ηλικία παιδιού	Κανονισμοί επίβλεψης (Παιδιά προς Ενήλικες)	Χρώμα περικαρπίου
5 χρονών και κάτω		Μπλε
6-8 χρονών		Πορτοκαλί
9-12 χρονών		Κόκκινο



Τι είναι δυνατόν να εκφράζει ο λόγος 3 : 1, με βάση τους πιο πάνω κανονισμούς;



Αναστοχασμός

Να αναφέρετε ένα παράδειγμα από την καθημερινή σας ζωή στο οποίο χρησιμοποιείτε την έννοια του λόγου.



Παράδειγμα 1

Να εξετάσετε κατά πόσο οι λόγοι $6 : 4$ και $12 : 8$ είναι ίσοι.

Λύση:

$$6 : 4 = \frac{6}{4} = \frac{6 \div 2}{4 \div 2} = \frac{3}{2} = 3 : 2$$

Απλοποιούμε τους λόγους $6 : 4$ και $12 : 8$.

$$12 : 8 = \frac{12}{8} = \frac{12 \div 4}{8 \div 4} = \frac{3}{2} = 3 : 2$$

Παρατηρούμε ότι η πιο απλή μορφή και των δύο λόγων είναι ο λόγος $3 : 2$. Άρα, οι λόγοι $6 : 4$ και $12 : 8$ είναι ίσοι.



Δραστηριότητες 2

2.1. Να γράψετε τρεις λόγους που να είναι ίσοι με καθένα από τους πιο κάτω λόγους. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(α) $3 : 4$

(β) $5 : 3$

(γ) $12 : 20$

(δ) $100 : 200$

2.2. Να εξετάσετε κατά πόσο οι λόγοι σε κάθε περίπτωση είναι ίσοι. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(α) $1 : 2$ και $4 : 8$

(β) $4 : 7$ και $16 : 21$

(γ) $6 : 9$ και $18 : 36$

(δ) $8 : 6$ και $12 : 9$

(ε) $42 : 24$ και $7 : 6$

(στ) $1,2 : 3$ και $2,4 : 6$



Αναστοχασμός

Γιατί οι λόγοι $\frac{3}{5}$ και $\frac{5}{3}$ δεν είναι ίσοι;



- 2.3. Ο λόγος των ποσοτήτων των συστατικών σε ένα ρόφημα είναι σημαντικός, για να πετύχουμε την επιθυμητή γεύση. Για παράδειγμα, ο λόγος της ποσότητας του νερού προς την ποσότητα του χυμού λεμονιού καθορίζει πόσο ξινό θα είναι ένα ρόφημα λεμονάδας.

Η Άννα ετοίμασε διάφορα μίγματα λεμονάδας, αναμειγνύοντας συμπυκνωμένο χυμό λεμονιού και νερού.

A

1 ποτήρι χυμό λεμονιού
3 ποτήρια νερού

B

3 ποτήρια χυμό λεμονιού
9 ποτήρια νερού

Γ

2 ποτήρια χυμό λεμονιού
4 ποτήρια νερού

Ποιο από τα πιο πάνω μίγματα έχει πιο έντονη γεύση λεμονιού; Να επεξηγήσετε.



Μικρή Επανάληψη

Να υπολογίσετε το αποτέλεσμα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(α) $1,8 + 4,5$

(β) $37 + 123,48$

(γ) $26,75 + 17,436$

(δ) $12,53 - 2,42$

(ε) $98 - 27,9$

(στ) $74,5 - 8,74$

(ζ) $\frac{4}{9} + \frac{2}{9}$

(η) $2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{3}$

(θ) $4\frac{3}{4} + 3\frac{2}{5}$

(ι) $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$

(ια) $5 - 2\frac{1}{5}$

(ιβ) $6\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4}$

ΜΑΘΗΜΑ 2



Διερεύνηση

Αναλογία ονομάζεται η ισότητα δύο λόγων. Πιο κάτω παρουσιάζεται μια αναλογία.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

Οι α και δ ονομάζονται **άκροι όροι** της αναλογίας.

Οι β και γ ονομάζονται **μέσοι όροι** της αναλογίας.

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω γινόμενα, όπως στο παράδειγμα.



Αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$	Γινόμενο άκρων όρων ($\alpha \cdot \delta$)	Γινόμενο μέσων όρων ($\beta \cdot \gamma$)
$\frac{1}{5} = \frac{6}{30}$	$1 \cdot 30 = 30$	$5 \cdot 6 = 30$
$\frac{1}{7} = \frac{4}{28}$		
$\frac{3}{10} = \frac{9}{30}$		
$\frac{4}{5} = \frac{20}{25}$		
$\frac{10}{15} = \frac{6}{9}$		
$\frac{24}{32} = \frac{9}{12}$		

Τι παρατηρείτε;



Παράδειγμα 1

Δίνεται η αναλογία $\frac{2}{10} = \frac{6}{x}$. Να υπολογίσετε την τιμή του x .

Λύση:

Α' τρόπος

$$2x = 10 \cdot 6$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{60}{2}$$

$$x = 30$$

Το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

Επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.

Β' τρόπος

$$\cdot 5 \left(\frac{2}{10} = \frac{6}{x} \right) \cdot 5$$

$$x = 30$$

Παρατηρούμε ότι το 10 είναι πενταπλάσιο του 2. Άρα, το x θα είναι πενταπλάσιο του 6.

Γ' τρόπος

$$\frac{2}{10} = \frac{6}{x}$$

$$x = 30$$

Παρατηρούμε ότι το 6 είναι τριπλάσιο του 2. Άρα, το x θα είναι τριπλάσιο του 10.



Δραστηριότητες 1

1.1. Να υπολογίσετε την τιμή του x σε κάθε αναλογία. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(α) $\frac{7}{9} = \frac{28}{x}$

(β) $\frac{3}{15} = \frac{x}{5}$

(γ) $\frac{16}{x} = \frac{24}{30}$

(δ) $\frac{8}{20} = \frac{x}{25}$



Αναστοχασμός

Να γράψετε μια αναλογία, χρησιμοποιώντας τους αριθμούς 2, 3, 4 και 6.

1.2. Να γράψετε μια αναλογία, χρησιμοποιώντας τέσσερις από τους αριθμούς που δίνονται σε κάθε περίπτωση.

(α) 5, 24, 10, 8, 16

(β) 36, 15, 3, 9, 12



1.3. Τα ροφήματα στις καφετέριες προσφέρονται σε διαφορετικά μεγέθη, για να καλύψουν τις προτιμήσεις των πελατών. Πιο κάτω παρουσιάζονται τα δύο μεγέθη ενός ροφήματος σοκολάτας. Η γεύση του ροφήματος είναι η ίδια και στα δύο μεγέθη.



Ο υπεύθυνος της καφετέριας θα προωθήσει ένα μεσαίου μεγέθους ρόφημα σοκολάτας. Πόση ποσότητα από κάθε υλικό θα χρησιμοποιήσει, ώστε η γεύση του ροφήματος να διατηρηθεί η ίδια; Να επεξηγήσετε.



Επίλυση προβλήματος

Πιο κάτω παρουσιάζεται ο τρόπος επίλυσης ενός προβλήματος αναλογίας.

Η Άννα κατασκευάζει ανθοδέσμες, χρησιμοποιώντας λευκούς και κίτρινους κρίνους. Σε κάθε ανθοδέσμη για κάθε 4 λευκούς κρίνους τοποθετεί 5 κίτρινους. Πόσους κίτρινους κρίνους θα περιέχει μια ανθοδέσμη με 12 λευκούς κρίνους;

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι:

- Ο λόγος των λευκών κρίνων προς τους κίτρινους είναι 4 : 5.
- Η ανθοδέσμη έχει 12 λευκούς κρίνους.

Μπορούμε να οργανώσουμε τα δεδομένα του προβλήματος στον πιο κάτω πίνακα:

Λευκοί κρίνοι	4	12
Κίτρινοι κρίνοι	5	x
Σύνολο	9	

1. Σχηματίζουμε την αναλογία.

$$\frac{4}{5} = \frac{12}{x}$$

2. Για τον υπολογισμό της τιμής του x , σχηματίζουμε την εξίσωση με βάση την ιδιότητα ότι σε μια αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων και την επιλύουμε.

$$4 \cdot x = 5 \cdot 12$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{60}{4}$$

$$x = 15$$

Άρα, οι κίτρινοι κρίνοι στην ανθοδέσμη θα είναι 15.

Να συζητήσετε τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος.



Δραστηριότητες 1

1.1. Να επιλύσετε τα προβλήματα.

Καραμέλες με γεύση λεμόνι	4	28
Καραμέλες με γεύση φράουλα	9	x
Σύνολο	13	

- (α) Σε μια συσκευασία με καραμέλες υπάρχουν 4 καραμέλες με γεύση λεμόνι για κάθε 9 καραμέλες με γεύση φράουλα. Πόσες είναι οι καραμέλες με γεύση φράουλα, αν οι καραμέλες με γεύση λεμόνι είναι 28;

Απάντηση: _____

Γκρίζες ψηφίδες	6	x
Λευκές ψηφίδες	8	12
Σύνολο	14	

- (β) Ο Άρης τοποθέτησε γκρίζες και λευκές ψηφίδες σε έναν πίνακα με λόγο 6 προς 8. Πόσες γκρίζες ψηφίδες τοποθέτησε, αν οι λευκές ψηφίδες ήταν 12;

Απάντηση: _____

Κόκκινη μπογιά	2	
Μπλε μπογιά	5	x
Σύνολο	7	42

- (γ) Ο Νίκος ανέμιξε 2 L κόκκινης μπογιάς και 5 L μπλε μπογιάς, ώστε να προκύψει μπογιά με μοβ χρώμα. Πόσα λίτρα μπλε μπογιάς χρησιμοποίησε, αν η συνολική ποσότητα μοβ μπογιάς ήταν 42 L;

Απάντηση: _____



Αναστοχασμός

Να βάλετε σε κύκλο τις αναλογίες που είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του προβλήματος.

Σε έναν βοτανικό κήπο φυτεύονται 3 λεβάντες για κάθε 4 δεντρολίβανα. Πόσα είναι τα δεντρολίβανα, αν οι λεβάντες είναι 15;

A. $\frac{3}{4} = \frac{15}{x}$

B. $\frac{3}{4} = \frac{x}{15}$

Γ. $\frac{3}{15} = \frac{x}{4}$

Δ. $\frac{3}{15} = \frac{4}{x}$

1.2. Να επιλύσετε τα προβλήματα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

- (α) Σε μια παιδική κατασκήνωση ο λόγος των ενήλικων συνοδών προς τα παιδιά είναι 2 προς 15. Πόσοι είναι οι ενήλικες συνοδοί, αν όλα τα παιδιά που συμμετέχουν στην κατασκήνωση είναι 45;
- (β) Σε έναν αγώνα καλαθόσφαιρας ο λόγος των οπαδών της Ομάδας Α προς τους οπαδούς της Ομάδας Β ήταν 3 προς 7. Πόσοι ήταν οι οπαδοί της Ομάδας Α, αν ο συνολικός αριθμός των οπαδών ήταν 1000;



Αναστοχασμός

Πώς θα εργαστείτε, για να επιλύσετε το πιο κάτω πρόβλημα; Να επεξηγήσετε.

Η Λάιλα ετοίμασε ένα αρωματικό μίγμα για το φαγητό, αναμειγνύοντας θυμάρι, ρίγανη και πιπέρι σε αναλογία 4 : 6 : 2. Πόσες κουταλιές ρίγανη χρειάστηκε, αν ο συνολικός αριθμός των κουταλιών που χρησιμοποίησε ήταν 36;



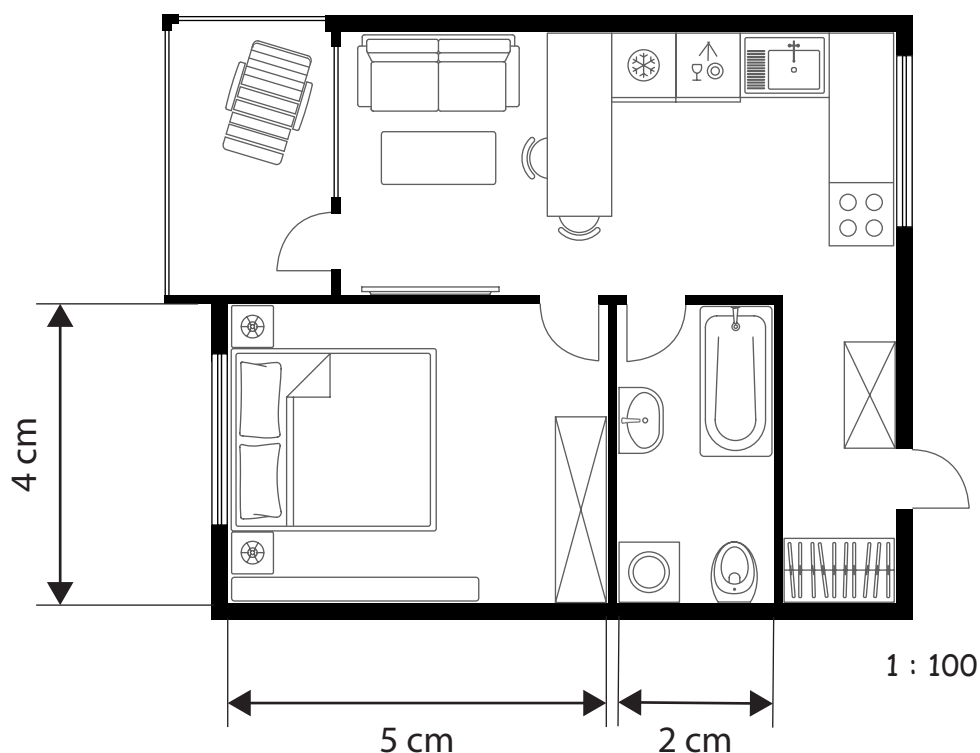
1.3. Να κατασκευάσετε ένα πρόβλημα με βάση τις πληροφορίες που παρουσιάζονται στον πιο κάτω πίνακα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

Ποτήρια άσπρης ζάχαρης	1	×
Ποτήρια καστανής ζάχαρης	3	9
Σύνολο	4	



- 1.4. Η κλίμακα είναι μία έννοια που χρησιμοποιείται στην κατασκευή χαρτών, αρχιτεκτονικών σχεδίων και μοντέλων. Μας επιτρέπει να αποτυπώσουμε μεγάλες περιοχές ή αντικείμενα σε μικρότερο μέγεθος, διατηρώντας τις αναλογίες τους.

- (α) Το πιο κάτω αρχιτεκτονικό σχέδιο παρουσιάζει την κάτοψη ενός διαμερίσματος με κλίμακα 1 : 100. Δηλαδή, κάθε 1 cm στο σχέδιο αντιστοιχεί σε 100 cm στην πραγματικότητα.



Να υπολογίσετε το πραγματικό μήκος και πλάτος του υπνοδωματίου και του μπάνιου του διαμερίσματος.

- (β) Να υπολογίσετε την πραγματική απόσταση (σε ευθεία γραμμή) μεταξύ των πόλεων Λάρνακας - Λευκωσίας και Λεμεσού - Πάφου με βάση την κλίμακα του πιο κάτω χάρτη.



- 1.5. Πολλές χώρες δεν χρησιμοποιούν το ευρώ, αλλά το δικό τους νόμισμα. Για παράδειγμα, στην Αμερική χρησιμοποιούν το δολάριο (\$), στην Αγγλία τη λίρα (£) και στην Ιαπωνία το γιεν (¥). Όταν πάμε ταξίδι σε αυτές τις χώρες, πρέπει να αλλάξουμε τα ευρώ με τα δικά τους χρήματα. Το πόσα χρήματα παίρνουμε όταν κάνουμε την αλλαγή, το καθορίζουν οι συναλλαγματικές ισοτιμίες. Για παράδειγμα, με βάση τις ισοτιμίες που παρουσιάζονται στον πιο κάτω πίνακα, με 1 ευρώ παίρνουμε 1,16 δολάρια Αμερικής ή 0,87 αγγλικές λίρες ή 174,82 ιαπωνικά γιέν.

	 \$ USD	 £ GBP	 ¥ JPY
1 ευρώ	1,16	0,87	174,82

Ένας μαγνήτης κοστίζει €5. Να υπολογίσετε πόσο κοστίζει ο μαγνήτης σε δολάρια Αμερικής, σε λίρες και σε γιεν. Να επεξηγήσετε.



Εφαρμογή



Διαμορφωτική Αξιολόγηση

1 Ποιοι από τους πιο κάτω λόγους είναι ίσοι;

(α) $1 : 5$ και $4 : 20$

(β) $3 : 6$ και $9 : 18$

(γ) $10 : 2$ και $30 : 5$

2 Να υπολογίσετε την τιμή του x στις πιο κάτω αναλογίες.

(α) $\frac{3}{7} = \frac{6}{x}$

(β) $\frac{12}{x} = \frac{8}{18}$

3 Να επιλύσετε το πρόβλημα.

Στον χώρο στάθμευσης μιας εταιρείας ο λόγος των εμπορικών αυτοκινήτων προς τα επιβατικά αυτοκίνητα είναι $2 : 5$. Πόσα επιβατικά αυτοκίνητα υπάρχουν στον χώρο στάθμευσης, αν ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων είναι 42;

Απάντηση: _____



Εφαρμογή

4 Σε ποια από τις πιο κάτω συνταγές θα είναι πιο έντονη η γεύση καρότου; Να επεξηγήσετε.

Συνταγή Α

2 φλιτζάνια χυμό καρότου
3 φλιτζάνια χυμό πορτοκαλιού



Συνταγή Β

4 φλιτζάνια χυμό καρότου
7 φλιτζάνια χυμό πορτοκαλιού



Τα Μαθηματικά στον κόσμο

- Να διαβάσετε το πιο κάτω άρθρο.

Το νερό είναι απαραίτητο για τη ζωή και την υγεία μας. Ωστόσο, περίπου 2 δισεκατομμύρια άνθρωποι, ένας αριθμός που αντιστοιχεί στο είκοσι πέντε τοις εκατό (25%) του παγκόσμιου πληθυσμού, δεν έχουν καθαρό πόσιμο νερό. Σε χώρες της Αφρικής και της Ασίας, μόλις 1 στους 3 κατοίκους έχουν καθαρό πόσιμο νερό. Επιπλέον, πενήντα τοις εκατό (50%) του παγκόσμιου πληθυσμού, δηλαδή 4 δισεκατομμύρια άνθρωποι, δεν έχουν κατάλληλες υπηρεσίες αποχέτευσης. Αυτή η έλλειψη οδηγεί σε πολλούς θανάτους κάθε χρόνο από ασθένειες σχετικές με το ακάθαρτο νερό.

Η κατάσταση γίνεται ακόμα πιο δύσκολη, λόγω της κλιματικής αλλαγής. Σε ορισμένες περιοχές παρατηρείται ξηρασία και σε άλλες πλημμύρες. Περίπου το $\frac{1}{10}$ του παγκόσμιου πληθυσμού ζει σε περιοχές στις οποίες τα αποθέματα καθαρού νερού δεν επαρκούν, για να καλύψουν τις ανάγκες των κατοίκων.



- Πώς αναδεικνύεται στο άρθρο ότι η πρόσβαση σε καθαρό νερό είναι ένα από τα σημαντικότερα παγκόσμια προβλήματα του 21^{ου} αιώνα;



Διερεύνηση 1



Τεχνολογία

Το ποσοστό εύστοχων βολών δείχνει πόσο συχνά ένας καλαθοσφαιριστής καταφέρνει να βάλει τη μπάλα στο καλάθι, όταν εκτελεί ελεύθερες βολές.

- (α) Να μελετήσετε τις πληροφορίες που δίνονται στον πιο κάτω πίνακα για τον καλαθοσφαιριστή Α και να επεξηγήσετε πώς προκύπτει το ποσοστό εύστοχων βολών του. Στη συνέχεια, να συμπληρώσετε τον πίνακα για τους καλαθοσφαιριστές Β, Γ, Δ και Ε.

Καλαθοσφαιριστής	Εύστοχες βολές: Συνολικός αριθμός βολών	Εύστοχες βολές	
		Κλάσμα	Ποσοστό
Α	5 10	$\frac{5}{10} = \frac{50}{100}$	50%
Β	5 20	$\frac{5}{20} =$	
Γ	3 5	$\frac{3}{5} =$	
Δ	8 20		
Ε	8 16		



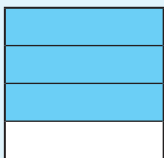
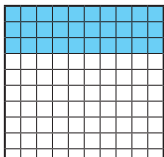
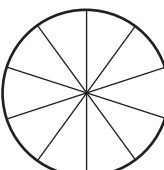
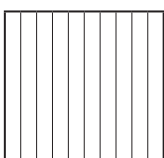
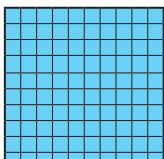
Το ποσοστό 50% διαβάζεται ως πενήντα τοις εκατό και εκφράζει τον λόγο $\frac{50}{100}$ ή $\frac{1}{2}$.

- (β) Γιατί είναι χρήσιμη η παρουσίαση των πιο πάνω δεδομένων σε ποσοστά;



Δραστηριότητες 1

1.1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα, όπως στο παράδειγμα.

Διάγραμμα	Λόγος	Κλάσμα	Δεκαδικός αριθμός	Ποσοστό
Παράδειγμα 	3 : 4	$\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$ · 25	0,75	75%
				
				10%
			0,2	
		$\frac{2}{5}$		
				

1.2. Να συμπληρώσετε, όπως στο παράδειγμα.

	Ποσοστό
Παράδειγμα: Στο σχολείο της Μαρίνας 7 στα 25 παιδιά έχουν κατοικίδιο ζώο.	$\frac{7}{25} = \frac{28}{100} = 28\%$
(α) Σε μια ορχήστρα τα $\frac{7}{10}$ των οργάνων είναι πνευστά.	
(β) Κατά τη διάρκεια μιας αγωνιστικής περιόδου, η Ελίζα σημείωσε τα 5 από τα 20 τέρματα που είχε σημειώσει συνολικά η ομάδα της.	
(γ) Σε έναν διαγωνισμό το $\frac{1}{5}$ των ατόμων που συμμετείχαν κέρδισαν δωροεπιταγές.	



Αναστοχασμός

Να περιγράψετε σε ένα φίλο σας, που δεν παρακολούθησε το μάθημα, μία μέθοδο για να μετατρέπει τα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς σε ποσοστά.



Παράδειγμα 1

Ποιος από τους πιο κάτω αριθμούς είναι ο μεγαλύτερος;

$$\frac{1}{4} \quad 20\%$$

Λύση:

Για να συγκρίνουμε τους αριθμούς, τους μετατρέπουμε στην ίδια μορφή.

Α' τρόπος

Μετατρέπουμε το κλάσμα σε ποσοστό και συγκρίνουμε τα ποσοστά μεταξύ τους.

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$

$$25\% > 20\%$$

Β' τρόπος

Μετατρέπουμε το ποσοστό σε κλάσμα και συγκρίνουμε τα κλάσματα μεταξύ τους.

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{4} > 20\%, \text{ γιατί } 25\% > 20\%$$

$$\frac{1}{4} > 20\%, \text{ γιατί } \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$$

1.3. Να συμπληρώσετε με τα σύμβολα $<$, $>$ ή $=$.

(α) $\frac{1}{2}$ 55%

(β) 22% $\frac{1}{4}$

(γ) 20% 0,12

(δ) 38% $\frac{19}{50}$

(ε) 0,3 3%

(στ) 78% $\frac{3}{5}$

1.4. Να βάλετε σε σειρά τους αριθμούς, ξεκινώντας από τον μεγαλύτερο.

(α) $\frac{3}{5}$ 0,45 70% $\frac{3}{4}$

(β) 52% 0,43 $\frac{1}{4}$ 0,60



Μικρή Επανάληψη

Να υπολογίσετε το αποτέλεσμα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(α) $4 \cdot 7,1$

(β) $3,5 \cdot 8,2$

(γ) $6,15 \cdot 3,2$

(δ) $95 \div 0,5$

(ε) $4,5 \div 0,15$

(στ) $65,79 \div 5,1$

(ζ) $\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{12}$

(η) $1\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10}$

(θ) $1\frac{1}{6} \cdot 2\frac{2}{3}$

(ι) $4 \div \frac{3}{4}$

(ια) $\frac{2}{3} \div \frac{5}{6}$

(ιβ) $2\frac{2}{3} \div \frac{5}{6}$



Διερεύνηση 2

Πιο κάτω παρουσιάζονται τρεις τρόποι υπολογισμού του 25% του 248.

Α' τρόπος

Μετατρέπουμε το ποσοστό σε κλάσμα:

$$25\% \text{ του } 248 = \frac{1}{4} \cdot \cancel{248}^{62} = 62$$

Β' τρόπος

Υπολογίζουμε το 50% του 248:

$$50\% \text{ του } 248 = \frac{1}{2} \cdot \cancel{248}^{124} = 124$$

Το 25% είναι το μισό του 50%.

Άρα, $124 \div 2 = 62$

Γ' τρόπος

Σχηματίζουμε αναλογία:

$$\frac{25}{100} = \frac{x}{248}$$

$$100x = 25 \cdot 248$$

$$\frac{100x}{100} = \frac{6200}{100}$$

$$x = 62$$

- (α) Να επεξηγήσετε κάθε τρόπο.
- (β) Ποιον τρόπο θα επιλέγατε, για τον υπολογισμό των πιο κάτω ποσοστών;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(i) 75% του 120

(ii) 28% του 350

(iii) 15% του 180



Δραστηριότητες 2

2.1. Να υπολογίσετε τα ποσοστά. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

- (α) 50% του 72 (β) 10% του 270 (γ) 5% του 800 (δ) 34% του 50
(ε) 80% του 900 (στ) 56% του 75 (ζ) 100% του 40 (η) 200% του 1200



Αναστοχασμός

Να επεξηγήσετε γιατί το 22% του 50 είναι ίσο με το 50% του 22.



Παράδειγμα 2

Σε μια έρευνα συμμετείχαν 250 άτομα. Το 70% απάντησε ότι χρησιμοποιεί τα μέσα κοινωνικής δικτύωσης. Πόσα άτομα απάντησαν ότι χρησιμοποιούν τα μέσα κοινωνικής δικτύωσης;

Λύση:

Σχηματίζουμε την αναλογία, με βάση τα δεδομένα του προβλήματος:

$$\frac{70}{100} = \frac{x}{250}$$

Άτομα που δεν χρησιμοποιούν τα Μ.Κ.Δ.	30	
Άτομα που χρησιμοποιούν τα Μ.Κ.Δ.	70	x
Σύνολο	100	250

$$100x = 70 \cdot 250$$

Σχηματίζουμε την εξίσωση και την επιλύουμε.

$$100x = 17\,500$$

$$\frac{100x}{100} = \frac{17\,500}{100}$$

$$x = 175$$

Τα άτομα που απάντησαν ότι χρησιμοποιούν τα μέσα κοινωνικής δικτύωσης είναι 175.

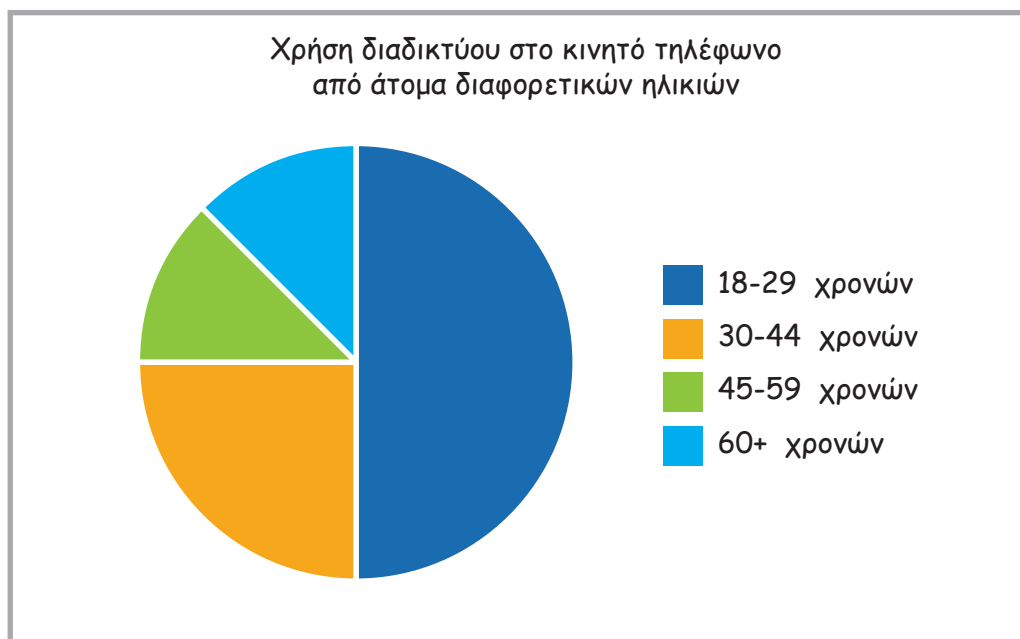
2.2. Να επιλύσετε τα προβλήματα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

- (α) Ο Χρίστος συμμετείχε σε έναν διαγωνισμό 20 ερωτήσεων. Απάντησε ορθά στο 40% των ερωτήσεων. Σε πόσες ερωτήσεις απάντησε ορθά ο Χρίστος;
- (β) Ένα βιβλίο έχει συνολικά 60 σελίδες. Η Άννα διάβασε το 75% των σελίδων του βιβλίου. Πόσες σελίδες διάβασε η Άννα;
- (γ) Ένα μπουκάλι περιείχε 200 ml οινόπνευμα. Το μπουκάλι παρέμεινε ανοικτό, με αποτέλεσμα να εξατμιστεί το 22% της ποσότητας του οινοπνεύματος που περιείχε. Πόση ποσότητα οινοπνεύματος εξατμίστηκε;



Επικοινωνία

2.3. Σε μια έρευνα, 2400 άτομα διαφορετικών ηλικιών απάντησαν ότι χρησιμοποιούν το διαδίκτυο στο κινητό τους τηλέφωνο. Η πιο κάτω κυκλική γραφική παράσταση παρουσιάζει τα αποτελέσματα.



Να παρουσιάσετε τα αποτελέσματα της πιο πάνω έρευνας, χρησιμοποιώντας ποσοστά.

2.4. Τι μπορείτε να συμπεράνετε από την πιο κάτω δήλωση;

- Ο Αντώνης πήρε αύξηση στον μισθό του 30%.
- Ο Βασίλης πήρε αύξηση στον μισθό του 25%.

Επικοινωνία 

2.5. Η Συνιστώμενη Ημερήσια Πρόσληψη (Σ.Η.Π.) είναι η ποσότητα των θρεπτικών ουσιών που χρειάζεται να προσλαμβάνει καθημερινά ο οργανισμός μας, για να είναι υγιής. Για αυτόν τον λόγο, στις συσκευασίες τροφίμων υπάρχουν διατροφικές πληροφορίες που μας δείχνουν την ποσότητα θρεπτικών ουσιών που μας παρέχει το τρόφιμο σε σχέση με την Σ.Η.Π.

Εφαρμογή 

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι διατροφικές πληροφορίες μιας μπάρας δημητριακών για παιδιά:



Πόσα γραμμάρια πρωτεϊνών, φυτικών ινών και λιπαρών χρειάζεται να προσλαμβάνει καθημερινά ένα παιδί, με βάση τις πληροφορίες της συσκευασίας; Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.



Αναστοχασμός

Είναι δυνατόν να υπάρξει ποσοστό μεγαλύτερο από 100%; Να επεξηγήσετε.

ΜΑΘΗΜΑ 5



Εξερεύνηση

Ένα ποσοστό είναι δυνατό να δηλώνει:

- την έκπτωση, δηλαδή τη μείωση στην αρχική τιμή ενός προϊόντος,
- τα κέρδη ή τις ζημιές από εμπορικές δραστηριότητες,
- τον Φόρο Προστιθέμενης Αξίας (Φ.Π.Α.), δηλαδή το ποσό που εισπράττεται από το κράτος και προστίθεται στην αρχική τιμή πώλησης αγαθών ή υπηρεσιών.

Να ερμηνεύσετε τα ποσοστά που παρουσιάζονται στις πιο κάτω εικόνες:

A.



B.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ	
Τραπεζάκι	€35,00
Καρέκλα	€65,00
Τιμή	€100,00
Φ.Π.Α. 19%	€19,00
Σύνολο	€119,00
ΕΥΧΑΡΙΣΤΟΥΜΕ	
	

ΑΠΟΔΕΙΞΗ	
Ψωμιά	€10,00
Τιμή	€10,00
Φ.Π.Α. 5%	€0,50
Σύνολο	€10,50
ΕΥΧΑΡΙΣΤΟΥΜΕ	
	



Παράδειγμα 1

Η τιμή ενός χαλιού χωρίς Φ.Π.Α. είναι €500. Ποια είναι η τιμή πώλησης του χαλιού με την επιβολή Φ.Π.Α. 19%;

Λύση:

Σχηματίζουμε την αναλογία, με βάση τα δεδομένα του προβλήματος:

$$\frac{19}{100} = \frac{x}{500}$$

Φ.Π.Α.	19	x
Αρχική τιμή (€)	100	500

$$100x = 19 \cdot 500$$

Σχηματίζουμε την εξίσωση και την επιλύουμε.

$$100x = 9500$$

$$\frac{100x}{100} = \frac{9500}{100}$$

$$x = 95$$

Ο Φ.Π.Α. ανέρχεται σε €95.

$$500 + 95 = 595$$

Προσθέτουμε τον Φ.Π.Α. στην αρχική τιμή του χαλιού, για να υπολογίσουμε την τιμή πώλησής του.

Η τιμή πώλησης του χαλιού μετά την επιβολή Φ.Π.Α. είναι €595.



Δραστηριότητες 1

- 1.1. Να επιλύσετε τα προβλήματα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.
 - (α) Η τιμή πώλησης μιας ρομποτικής σκούπας είναι €300. Κατά την περίοδο των εκπτώσεων, η σκούπα πωλείται με έκπτωση 15%. Ποια είναι η τιμή πώλησης της σκούπας μετά την έκπτωση;
 - (β) Μια εταιρεία αγόρασε εμπορεύματα, των οποίων η τιμή είναι €350 χωρίς Φ.Π.Α. Ποια ήταν η τιμή των εμπορευμάτων με την επιβολή Φ.Π.Α. 19%;
 - (γ) Ένας έμπορος αγόρασε εμπορεύματα με αρχική τιμή €5000. Θα τα πωλήσει με κέρδος 14%. Ποια θα είναι η τιμή πώλησης των εμπορευμάτων;

- 1.2. Να κατασκευάσετε ένα πρόβλημα, με βάση τις πληροφορίες που παρουσιάζονται στον πίνακα σε κάθε περίπτωση. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(α)

Έκπτωση (€)	30	x
Αρχική Τιμή (€)	100	42

(β)

Φ.Π.Α. (€)	19	x
Αρχική Τιμή (€)	100	400



Αναστοχασμός

Ένας υπολογιστής κόστιζε €300. Κατά τη διάρκεια των εκπτώσεων, η τιμή του υπολογιστή μειώθηκε κατά 10%. Μετά το τέλος των εκπτώσεων, η τιμή του αυξήθηκε κατά 10%.

Να επεξηγήσετε κατά πόσο η τιμή του υπολογιστή επανήλθε στην τιμή που είχε πριν από τις εκπτώσεις.



Μικρή Επανάληψη

1. Να υπολογίσετε το αποτέλεσμα.

(α) $6,25 \cdot 10 =$

(β) $100 \cdot 2,167 =$

(γ) $3,48 \cdot 1000 =$

(δ) $0,46 \cdot 10^2 =$

(ε) $10^3 \cdot 7,15 =$

(στ) $92,4 \div 10 =$

(ζ) $4,9 \div 100 =$

(η) $5438 \div 1000 =$

(θ) $182,3 \div 10^2 =$

2. Να επιλύσετε τα προβλήματα.

(α) Ο κύριος Γιάννης έβαλε στο αυτοκίνητό του 18 L βενζίνη. Η τιμή της ήταν €1,35 ανά λίτρο. Πόσα πλήρωσε;

(β) Η Μαρίνα έχει μια κορδέλα με μήκος 12 m. Την έκοψε σε μικρότερα ίσα κομμάτια, που το καθένα έχει μήκος 0,25 m. Πόσα κομμάτια κορδέλας έχει η Μαρίνα;



Διαμορφωτική Αξιολόγηση

1

Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Κλάσμα	Δεκαδικός	Ποσοστό
$\frac{2}{5}$		
		30%
	0,75	

2

Να υπολογίσετε τα ποσοστά.

(α) 25% του 600

(β) 40% του 250

(γ) 35% του 140

3 Να συμπληρώσετε με τα σύμβολα $<$, $>$ ή $=$.

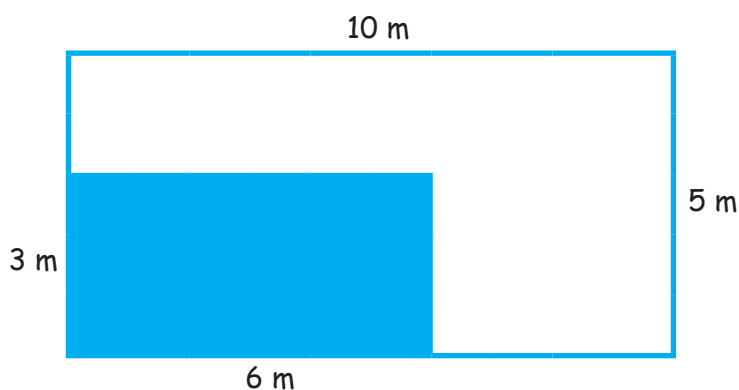
(α) 80% $\frac{3}{4}$

(β) $0,395$ 42%

(γ) $\frac{1}{100}$ 100%

4 Η εφηβική ομάδα καλαθόσφαιρας ενός δήμου κέρδισε το 60% των παιχνιδιών που συμμετείχε μέχρι τώρα. Πόσα παιχνίδια κέρδισε η ομάδα, αν συμμετείχε σε 25 παιχνίδια μέχρι τώρα;

5 Να υπολογίσετε το ποσοστό της σκιασμένης επιφάνειας του πιο κάτω σχήματος.



ΜΑΘΗΜΑ 6



Διερεύνηση 1

Στην καθημερινότητά μας συχνά κάνουμε προβλέψεις για γεγονότα που είναι **πιο πιθανό** ή **λιγότερο πιθανό** να συμβούν. Για παράδειγμα, λέμε «αύριο ίσως βρέξει» ή «θα κερδίσει η ομάδα Α το παιχνίδι», αλλά δεν γνωρίζουμε το αποτέλεσμα με απόλυτη βεβαιότητα. Το ίδιο ισχύει και σε ένα πείραμα τύχης.

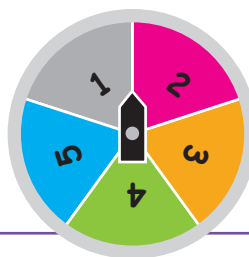
Πείραμα τύχης ονομάζεται μια διαδικασία που εκτελείται κάτω από ορισμένες συνθήκες, χωρίς να είναι δυνατό να γνωρίζουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμά της. Ωστόσο, μπορούμε να γνωρίζουμε το **σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων**. Για παράδειγμα, όταν ρίξουμε ένα κανονικό ζάρι, το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5, ή 6 (σύνολο 6 αριθμοί).

Ποιο είναι το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων σε καθένα από τα πιο κάτω πειράματα τύχης;

Α. Ρίχνουμε ένα νόμισμα του 1 ευρώ.



Β. Γυρίζουμε τον τροχό τύχης.



Γ. Επιλέγουμε τυχαία έναν βόλο από το σακούλι.

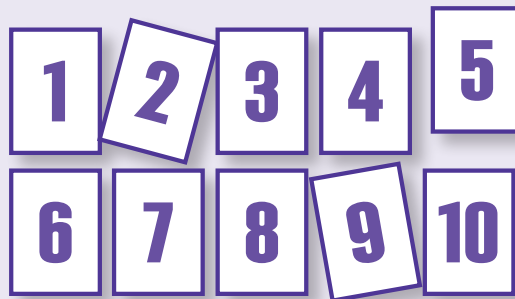




Διερεύνηση 2

Πιο κάτω παρουσιάζεται ένα πείραμα τύχης.

Ανακατεύουμε τις πιο κάτω κάρτες και τις τοποθετούμε ανάποδα. Έπειτα, επιλέγουμε τυχαία μία κάρτα.



- (α) Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα ο αριθμός στην κάρτα που θα επιλέξουμε να είναι άρτιος, εργαζόμαστε όπως πιο κάτω:

$$P(\text{άρτιος αριθμός}) = \frac{\text{Σύνολο άρτιων αριθμών}}{\text{Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Άρα, η πιθανότητα να επιλέξουμε άρτιο αριθμό είναι $\frac{1}{2}$ ή 50%.

- (β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα:

A. Ο αριθμός που θα επιλεγεί να είναι περιττός.

B. Ο αριθμός που θα επιλεγεί να είναι διψήφιος.

Γ. Ο αριθμός που θα επιλεγεί να είναι πολλαπλάσιος του 5.

Δ. Ο αριθμός που θα επιλεγεί να είναι πολλαπλάσιος του 11.



Στα Μαθηματικά η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A συμβολίζεται με $P(A)$, από το πρώτο γράμμα της αγγλικής λέξης Probability.



Παράδειγμα 1

Η Άννα θα επιλέξει τυχαία ένα βόλο από το διπλανό σακούλι.
Να υπολογίσετε την πιθανότητα η Άννα να επιλέξει:

- (α) κόκκινο βόλο
(β) κίτρινο ή μπλε βόλο

Λύση:

Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων είναι 10.

$$(α) P(\text{κόκκινος βόλος}) = \frac{2}{10} = \frac{20}{100} = 20\%$$

Οι βόλοι με κόκκινο χρώμα είναι 2.

$$(β) P(\text{κίτρινο ή μπλε}) = \frac{6}{10} = \frac{60}{100} = 60\%$$

Το σύνολο των βόλων που είναι κίτρινοι ή μπλε είναι 6 (4 + 2).



Δραστηριότητες 1

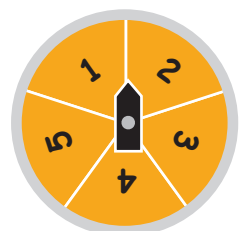
- 1.1. (α) Επιλέγουμε τυχαία έναν βόλο από το δοχείο.
Ποια είναι η πιθανότητα ο βόλος να έχει:

- (i) Μπλε χρώμα _____
(ii) Μαύρο χρώμα _____
(iii) Κόκκινο ή πράσινο χρώμα _____
(iv) Κόκκινο ή πράσινο ή κίτρινο ή μπλε χρώμα _____

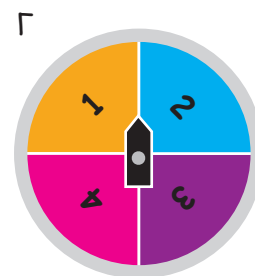
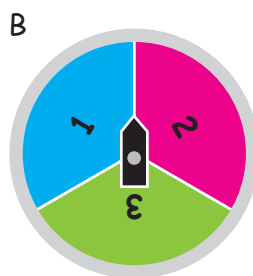
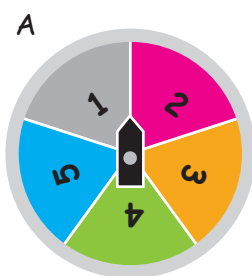


- (β) Γυρίζουμε το βέλος στον τροχό τύχης. Ποια είναι η πιθανότητα το βέλος να δείξει:

- (i) Περιττό αριθμό _____
(ii) Αριθμό που είναι πολλαπλάσιος του 2 _____
(iii) Αριθμό μεγαλύτερο από το 5 _____
(iv) Πρώτο αριθμό _____



1.2. Πιο κάτω παρουσιάζονται τρεις τροχοί τύχης.



Σε ποιον από τους πιο πάνω τροχούς τύχης η πιθανότητα το βέλος να σταματήσει στον αριθμό 3 είναι ίση με:

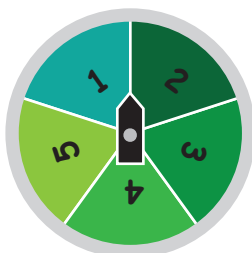
(α) 20% _____

(β) 25% _____



Αναστοχασμός

Ο κάθε παίκτης, σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι, επιλέγει έναν αριθμό από το 1 μέχρι το 5 και γυρίζει τον πιο κάτω τροχό τύχης. Αν η ένδειξη του τροχού είναι ο αριθμός που επέλεξε, τότε κερδίζει ένα δώρο.



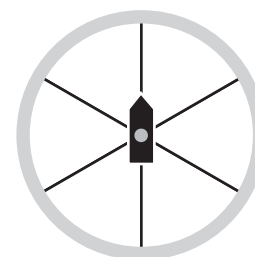
Τις προηγούμενες τέσσερις φορές, η ένδειξη του τροχού δεν ήταν ο αριθμός 5. Σίγουρα θα κερδίσω, αν επιλέξω τον αριθμό 5.



Να σχολιάσετε τη σκέψη του Νίκου.

1.3. Ο πιο κάτω τροχός τύχης είναι χωρισμένος σε 6 ίσα μέρη. Να συμπληρώσετε έναν αριθμό σε κάθε μέρος του τροχού, με βάση τις πληροφορίες.

- Η πιθανότητα το βέλος να σταματήσει στον αριθμό 4 να είναι ίση με $\frac{1}{3}$.
- Η πιθανότητα το βέλος να σταματήσει στον αριθμό 2 να είναι ίση με $\frac{1}{6}$.
- Η πιθανότητα το βέλος να σταματήσει σε παράγοντα του 15 είναι $\frac{1}{2}$.
- Το άθροισμα όλων των περιττών αριθμών στον τροχό να είναι 23.





Περίληψη Ενότητας

Λόγος

- Ο **Λόγος** εκφράζει σύγκριση δύο ποσοτήτων του ίδιου είδους, δηλαδή πόσες φορές είναι μεγαλύτερη η μία ποσότητα από την άλλη. Ο λόγος των αριθμών α και β γράφεται ως $\frac{\alpha}{\beta}$ ή $\alpha : \beta$ και διαβάζεται **α προς β** .

Παράδειγμα:

Για την παρασκευή χυμού μήλου, για κάθε ένα πράσινο μήλο χρησιμοποιούνται 2 κόκκινα μήλα.



Ο λόγος του αριθμού των πράσινων μήλων προς τον αριθμό των κόκκινων είναι $\frac{1}{2}$ ή $1 : 2$ και διαβάζεται 1 προς 2.

Αναλογία

- Αναλογία** ονομάζεται η ισότητα δύο λόγων.

Παράδειγμα:

Ο λόγος $\frac{1}{4}$ είναι ίσος με τον λόγο $\frac{2}{8}$, γιατί αν απλοποιήσουμε τον λόγο $\frac{2}{8}$ προκύπτει ο λόγος $\frac{1}{4}$.

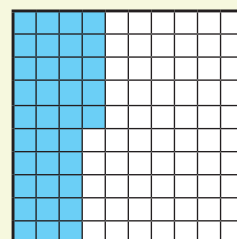
$$\frac{2}{8} = \frac{2 \div 2}{8 \div 2} = \frac{1}{4}$$

Ποσοστά

- Το **ποσοστό** είναι ένας αριθμός που εκφράζει το μέρος σε σχέση με το όλο, όταν το όλο είναι πάντα το 100. Συμβολίζεται με το σύμβολο %, και διαβάζεται «**τοις εκατό**».

Παράδειγμα:

Η διπλανή εικόνα αποτελείται από 100 συνολικά τετράγωνα. Τριάντα πέντε από τα τετράγωνα έχουν γαλάζιο χρώμα.



Άρα, το ποσοστό των γαλάζιων τετραγώνων είναι $\frac{35}{100} = 35\%$.

Πιθανότητες

- Ένα **πείραμα τύχης** είναι μία διαδικασία, την οποία εκτελούμε κάτω από ορισμένες συνθήκες χωρίς να μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα της. Όλα τα πιθανά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης ονομάζονται **δυνατά αποτελέσματα**.

Παράδειγμα:

Όταν ρίχνουμε ένα κανονικό ζάρι υπάρχουν 6 αριθμοί που μπορεί να εμφανιστούν. Άρα, υπάρχουν 6 δυνατά αποτελέσματα: οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5 και 6.

- Ένα ή περισσότερα από τα πιθανά αποτελέσματα που μπορεί να συμβούν, όταν κάνουμε ένα πείραμα τύχης, ονομάζεται **δυνατό ενδεχόμενο**.

Παράδειγμα:

Στη ρίψη ενός συνηθισμένου ζαριού, το ενδεχόμενο «Η ένδειξη να είναι άρτιος αριθμός», περιλαμβάνει τα αποτελέσματα 2, 4 και 6.

- Υπολογισμός πιθανότητας ενός ενδεχομένου σε ένα πείραμα τύχης.

Παράδειγμα:

Στη ρίψη ενός συνηθισμένου ζαριού, η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου «Η ένδειξη να είναι άρτιος αριθμός» είναι:

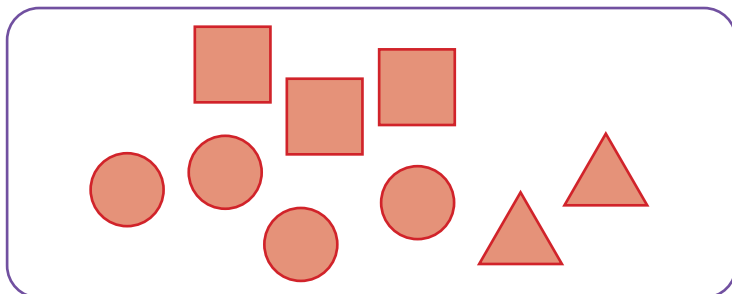
$$P(\text{άρτιος αριθμός}) = \frac{\text{Σύνολο άρτιων αριθμών}}{\text{Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$



Επιπρόσθετες Δραστηριότητες

Έννοια λόγου – Ίσοι λόγοι – Αναλογίες – Επίλυση προβλήματος

1



(α) Να γράψετε συμβολικά τον κάθε λόγο, με βάση την εικόνα.

(i) Αριθμός τριγώνων προς αριθμό κύκλων _____

(ii) Αριθμός τετραγώνων προς συνολικό αριθμό σχημάτων _____

(iii) Συνολικός αριθμός σχημάτων προς αριθμό ευθύγραμμων σχημάτων _____

(β) Να περιγράψετε τη σχέση που παρουσιάζει κάθε λόγος, με βάση την εικόνα.

(i) 3 προς 2 _____

(ii) $\frac{4}{9}$ _____

(iii) 9 : 2 _____

2

Να αντιστοιχίσετε τους ίσους λόγους.

2 : 3

3 : 5

18 : 9

35 : 15

45 : 10

6 : 7

21 : 35

36 : 42

8 : 12

4 : 2

9 : 2

7 : 3

3

Να υπολογίσετε την τιμή του v σε κάθε αναλογία. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(α) $\frac{5}{4} = \frac{v}{100}$

(β) $\frac{2}{16} = \frac{5}{v}$

(γ) $\frac{v}{20} = \frac{6}{15}$

(δ) $\frac{12}{v} = \frac{4}{9}$



1 km = 1000 m

1 m = 100 cm

4 Να επιλύσετε τα προβλήματα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

- (α) Το αρχιτεκτονικό σχέδιο ενός σπιτιού κατασκευάστηκε με κλίμακα 1 : 50.
- (i) Το μήκος της κουζίνας στο σχέδιο είναι 6 cm. Ποιο είναι το πραγματικό μήκος της κουζίνας;
- (ii) Το πραγματικό μήκος του μπάνιου είναι 2 m. Πόσο είναι το μήκος του μπάνιου στο σχέδιο;
- (β) Η κλίμακα ενός χάρτη είναι 1 : 100 000. Η απόσταση δύο πόλεων σε ευθεία γραμμή στον χάρτη είναι 9 cm. Πόση είναι η πραγματική απόσταση σε χιλιόμετρα των δύο αυτών πόλεων;



5 Δύο σχεδιαστές μόδας θα επιλέξουν την απόχρωση των τζιν παντελονιών της καινούριας τους συλλογής. Πιο κάτω παρουσιάζονται οι ποσότητες άσπρης και μπλε μπογιάς που θα αναμειχθούν σε δύο διαφορετικά μίγματα.



Μίγμα Α



Μίγμα Β



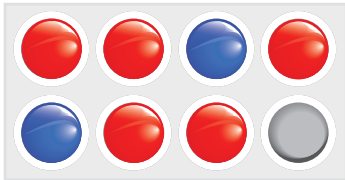
- (α) Σε ποιο από τα δύο μίγματα θα προκύψει πιο σκούρο μπλε χρώμα; Να εξηγήσετε.

- (β) Να εισηγηθείτε τις ποσότητες της άσπρης και της μπλε μπογιάς σε ένα άλλο μίγμα, ώστε να προκύψει πιο ανοιχτό μπλε χρώμα σε σχέση με το Μίγμα Α. Να εξηγήσετε.

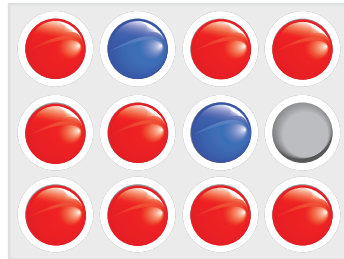
6

(α) Να προσθέσετε τον βόλο που λείπει σε κάθε δίσκο, ώστε ο λόγος των κόκκινων προς τους μπλε βόλους να είναι 3 : 1.

(i)

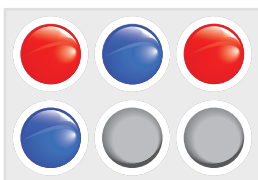


(ii)

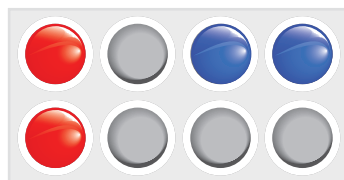


(β) Να προσθέσετε μπλε και κόκκινους βόλους σε κάθε δίσκο, ώστε ο λόγος των κόκκινων προς τους μπλε βόλους να είναι:

(i) 1 : 2



(ii) 3 : 1



7

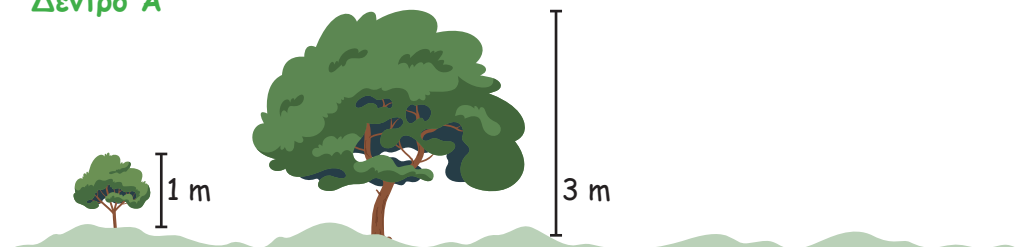
Να κατασκευάσετε ένα πρόβλημα, με βάση τις πληροφορίες που παρουσιάζονται στον πιο κάτω πίνακα.

Κόκκινες χάντρες	4	x
Μπλε χάντρες	9	
Σύνολο	13	26

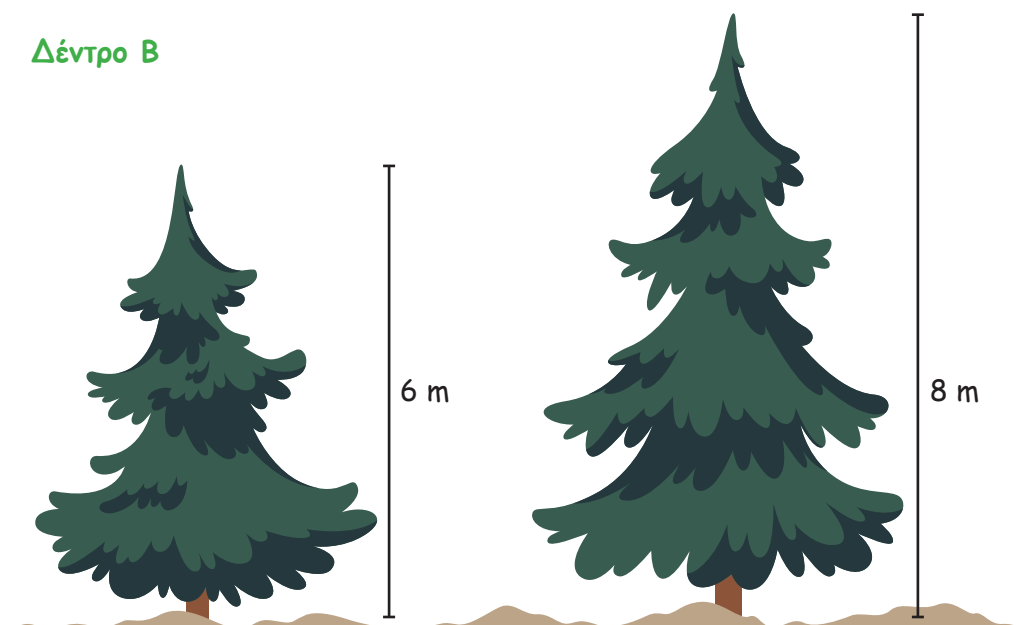


- 8 Οι πιο κάτω εικόνες παρουσιάζουν την ανάπτυξη δύο δέντρων κατά τη διάρκεια ενός έτους. Ποιο δέντρο είχε μεγαλύτερο ρυθμό ανάπτυξης; Να επεξηγήσετε.

Δέντρο Α



Δέντρο Β



Ποσοστά

9 Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Λόγος	Κλάσμα	Δεκαδικός	Ποσοστό
1 : 2			
		0,3	
	$\frac{7}{50}$		
			10%
		0,75	
	$\frac{100}{100}$		

10 Να υπολογίσετε τα ποσοστά. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(α) 20% του 150

(β) 75% του 280

(γ) 32% του 250

(δ) 60% του 50

(ε) 48% του 25

(στ) 84% του 75

11 Να συμπληρώσετε.

(α)

Το 50% του 24 είναι _____

Άρα,

το 25% του 24 είναι _____

το 75% του 24 είναι _____

(β)

Το 10% του 40 είναι _____

Άρα,

το 20% του 40 είναι _____

το 5% του 40 είναι _____

(γ)

Το 10% του 120 είναι _____

Άρα,

Το 5% του 120 είναι _____

Το 60% του 120 είναι _____

(δ)

Το 25% του 48 είναι _____

Άρα,

Το 75% του 48 είναι _____

Το 12,5% του 48 είναι _____

12 Να συμπληρώσετε με τα σύμβολα $<$, $>$ ή $=$.

(α) 2% $\frac{2}{10}$

(β) $0,415$ 40%

(γ) 150% $1,5$

13 Να επιλύσετε τα προβλήματα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(α) Ο Νίκος αγόρασε ένα ποδήλατο αρχικής αξίας €180 με έκπτωση 30%. Πόσα αγόρασε το ποδήλατο ο Νίκος;

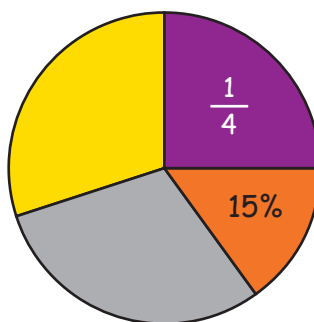
(β) Ο συντελεστής Φ.Π.Α. σε μια χώρα είναι 15%. Ποια είναι η τιμή πώλησης ενός παιχνιδιού, αν η τιμή του χωρίς Φ.Π.Α. είναι €48;

(γ) Ο μηνιαίος μισθός ενός υπαλλήλου είναι €900. Θα πάρει αύξηση 10% στον μισθό του. Με πόσα θα αμείβεται, ύστερα από την αύξηση στον μισθό του;



Επικοινωνία

14 Τι ποσοστό της κυκλικής γραφικής παράστασης αποτελεί ο κίτρινος κυκλικός τομέας, αν ο γκρίζος και ο κίτρινος κυκλικός τομέας είναι ίσοι; Να εξηγήσετε.



15 Η Μαρίνα έγραψε στο τετράδιό της τους 10 πρώτους τετράγωνους αριθμούς.

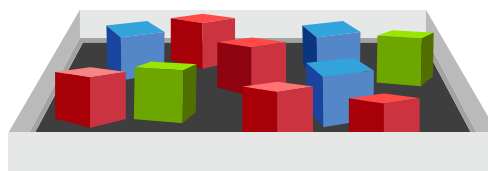
(α) Τι ποσοστό από τους αριθμούς αυτούς είναι άρτιοι;

(β) Τι ποσοστό από τους αριθμούς αυτούς είναι πολλαπλάσια του 5;

Πιθανότητες

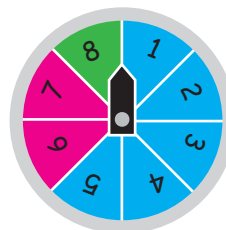
16 Να υπολογίσετε την πιθανότητα να συμβούν τα πιο κάτω ενδεχόμενα.

(α) Ο Στεφάν επιλέγει τυχαία έναν κύβο από το πιο κάτω κουτί. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να επιλέξει έναν πράσινο κύβο.



$$P(\text{πράσινος κύβος}) = \frac{\text{Σύνολο πράσινων κύβων}}{\text{Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{} \%$$

(β) Η Ελίζα γυρίζει το βέλος στον τροχό τύχης. Να υπολογίσετε την πιθανότητα το βέλος να σταματήσει σε περιττό αριθμό.



$$P(\text{περιττός αριθμός}) = \frac{\text{Σύνολο περιττών αριθμών}}{\text{Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{} \%$$

(γ) Ο Άρης ρίχνει ένα συνηθισμένο ζάρι. Να υπολογίσετε την πιθανότητα η ένδειξη του ζαριού να είναι πρώτος αριθμός.



$$P(\text{πρώτος αριθμός}) = \frac{\text{Σύνολο πρώτων αριθμών}}{\text{Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{} \%$$

- 17 Μια συσκευασία δώρου περιέχει σοκολατάκια τριών ειδών. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό από το κάθε είδος που περιέχει η συσκευασία.

Είδος σοκολάτας	Αριθμός
Μαύρη	4
Γάλακτος	10
Λευκή	6

Επιλέγουμε τυχαία ένα σοκολατάκι από τη συσκευασία.

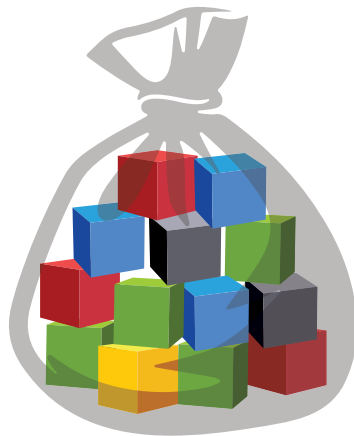
(α) Ποια είναι η πιθανότητα η σοκολάτα να είναι λευκή;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα η σοκολάτα να είναι γάλακτος;

(γ) Ποια η πιθανότητα η σοκολάτα να μην είναι μαύρη;



- 18 Ο Νίκος θα επιλέξει στην τύχη έναν κύβο από το πιο κάτω σακούλι.



Να προσθέσετε ή να αφαιρέσετε κύβους στο σακούλι, ώστε:

(α) η πιθανότητα επιλογής κόκκινου κύβου να είναι $\frac{1}{3}$

(β) η πιθανότητα επιλογής μαύρου κύβου να είναι 10%





9

άλγεβρα & στατιστική



άλγεβρα & στατιστική



Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε...

- Να περιγράφουμε λεκτικά τον κανόνα ενός μοτίβου και να εκφράζουμε τον νιοστό όρο σε συμβολική μορφή.
- Να ερμηνεύουμε γραφικές παραστάσεις (ραβδόγραμμα, εικονόγραμμα, κυκλική γραφική παράσταση, γραμμική γραφική παράσταση).
- Να αξιολογούμε διάφορους τρόπους παρουσίασης δεδομένων σε σχέση με την αποτελεσματικότητα και τη συνέπειά τους.
- Να περιγράφουμε και να συγκρίνουμε σύνολα δεδομένων, χρησιμοποιώντας τις έννοιες του μέσου όρου, της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής.

ΜΑΘΗΜΑ 1

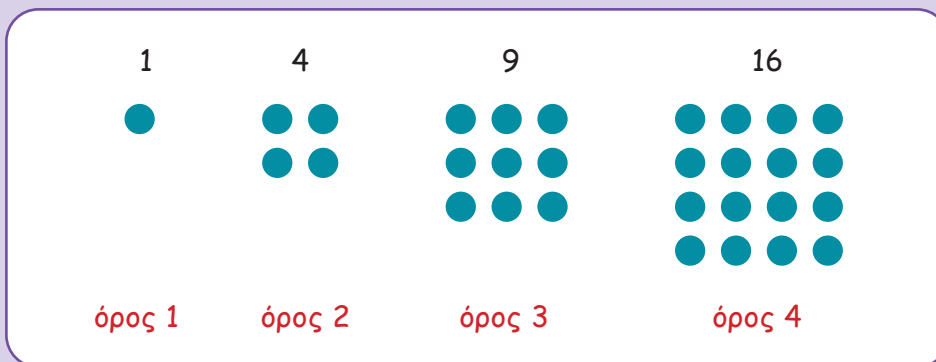


Τα Μαθηματικά στον κόσμο

Ο **Πυθαγόρας** ήταν Έλληνας φιλόσοφος από τη Σάμο (περίπου 580 π.Χ. - 500 π.Χ.). Αφιέρωσε μεγάλο μέρος της ζωής του στη μελέτη των αριθμών. Οι Πυθαγόρειοι, όπως ονομάζονταν οι μαθητές και οι οπαδοί του, χρησιμοποιούσαν μικρές πέτρες ή κουκκίδες, τις λεγόμενες ψήφους, τις οποίες τοποθετούσαν σε διάφορες διατάξεις, ώστε να δώσουν μορφή στους αριθμούς και να παρατηρήσουν τα μοτίβα που δημιουργούνται. Η εργασία τους επικεντρώθηκε στους **σχηματικούς αριθμούς**, αναδεικνύοντας ότι τα σχήματα συνδέονται με τους αριθμούς. Πιο κάτω παρουσιάζονται δύο παραδείγματα.

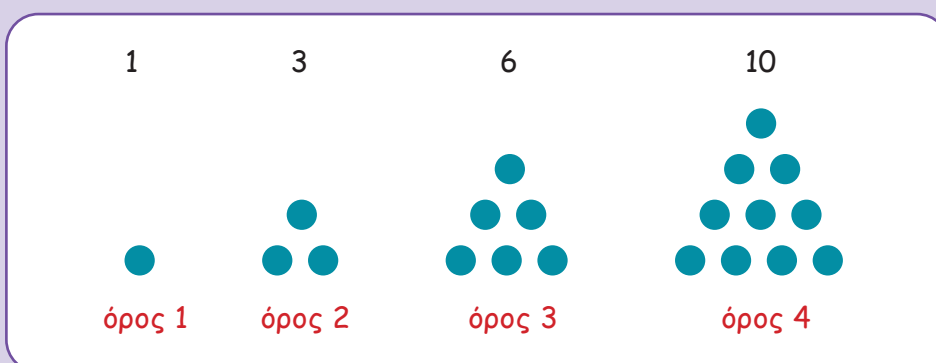


Τετράγωνοι αριθμοί



Κάθε αριθμός ή σχήμα σε ένα μοτίβο ονομάζεται όρος. Για παράδειγμα, στο μοτίβο των τετράγωνων αριθμών το 1 είναι ο 1ος όρος, το 4 είναι ο 2ος όρος κ.ο.κ.

Τρίγωνοι αριθμοί



- Ποια σχήματα παρατηρείτε στα πιο πάνω μοτίβα;
- Πώς η σχηματική αναπαράσταση των όρων μάς βοηθά να υπολογίσουμε τον 5^ο όρο σε κάθε μοτίβο;



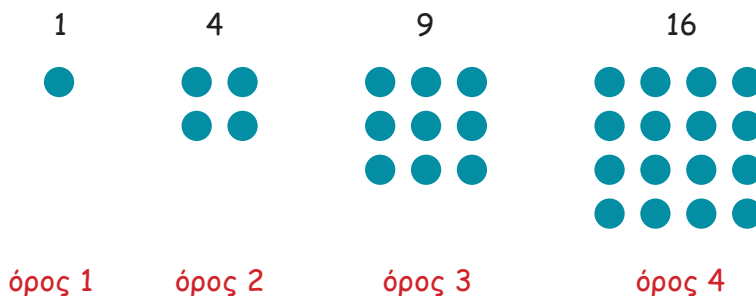
Διερεύνηση



Τεχνολογία



(α) Ο Άρης μελετά το μοτίβο των τετράγωνων αριθμών.



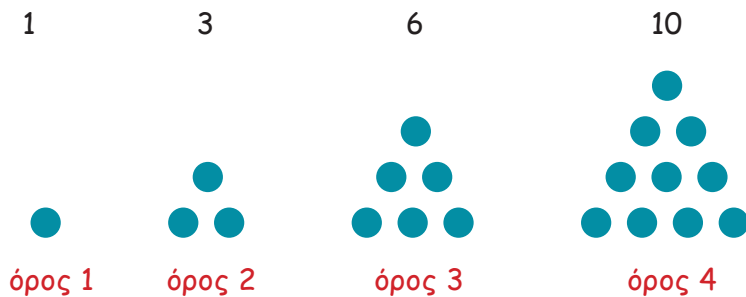
(i) Κατασκεύασε έναν πίνακα, για να διερευνήσει τον τρόπο υπολογισμού των κουκκίδων σε κάθε όρο του μοτίβου, όπως φαίνεται πιο κάτω. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Όρος	Υπολογισμός	Αριθμός κουκκίδων
1	$1 \cdot 1$	1
2	$2 \cdot 2$	4
3	$3 \cdot 3$	9
4	$4 \cdot 4$	16
5		
6		
10		
100		
n		

(ii) Τι αναπαριστά το n ;

(iii) Ποιος είναι ο γενικός κανόνας που ακολουθεί το μοτίβο των τετράγωνων αριθμών; Να τον εκφράσετε λεκτικά.

(β) Η Ελίζα μελετά το μοτίβο των τριγωνων αριθμών.



Κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ο γενικός κανόνας που ακολουθεί το μοτίβο εκφράζεται από την πιο κάτω αλγεβρική παράσταση:

$$\frac{v(v+1)}{2}$$

Να εξετάσετε κατά πόσο είναι ορθό το συμπέρασμα της Ελίζας.

(γ) Να εξηγήσετε σε τι μας βοηθά η έκφραση ενός γενικού κανόνα σε ένα μοτίβο.



Αναστοχασμός

Να εργαστείτε όπως οι Πυθαγόρειοι, για να διερευνήσετε το μοτίβο των άρτιων και των περιττών αριθμών. Ποιος είναι ο γενικός κανόνας που περιγράφει κάθε μοτίβο;



Παράδειγμα 1

- (α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα και να εκφράσετε λεκτικά τον γενικό κανόνα που ακολουθεί το πιο κάτω μοτίβο.



όρος 1



όρος 2



όρος 3

- (β) Πόσες κουκκίδες θα έχει ο 50^{ος} όρος του μοτίβου;

Λύση:

(α)

Όρος	Αριθμός κουκκίδων
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20
n	$4n$

Αν πολλαπλασιάσουμε τη θέση του όρου επί 4, τότε προκύπτει ο αριθμός των κουκκίδων στο σχήμα.

$$1 \cdot 4$$

$$2 \cdot 4$$

$$3 \cdot 4$$

$$4 \cdot 4$$

$$5 \cdot 4$$

$$n \cdot 4$$

Κανόνας: Πολλαπλασιάζω τη θέση του όρου επί 4.

(β) $4 \cdot 50 = 200$

Αντικαθιστούμε το n με το 50 στην αλγεβρική παράσταση $4n$ και υπολογίζουμε το γινόμενο.

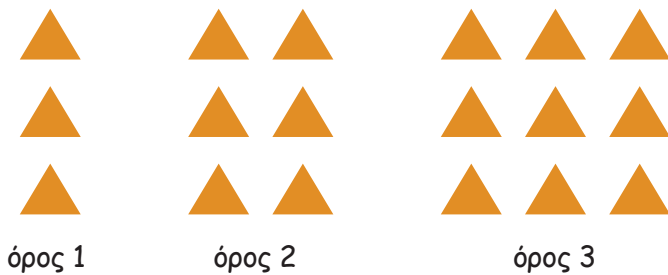
Ο 50^{ος} όρος του μοτίβου θα έχει 200 κουκκίδες.



Δραστηριότητες 1

1.1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα και να εκφράσετε λεκτικά τον κανόνα που ακολουθεί κάθε μοτίβο.

(α)



Κανόνας: _____

Όρος	Αριθμός τριγώνων
1	
2	
3	
4	
5	
10	
50	
x	

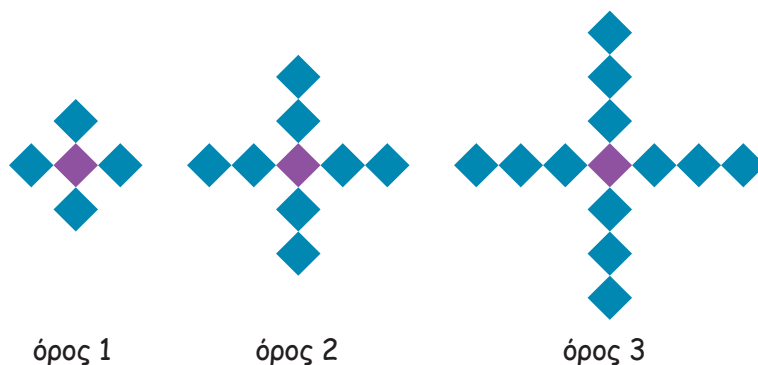
(β)



Κανόνας: _____

Όρος	Αριθμός πράσινων τραπεζίων	Αριθμός κόκκινων τραπεζίων	Συνολικός αριθμός τραπεζίων
1			
2			
3			
4			
5			
8			
75			
ψ			

(γ)



Κανόνας: _____

Όρος	Αριθμός μπλε τετραγώνων	Αριθμός μοβ τετραγώνων	Συνολικός αριθμός τετραγώνων
1			
2			
3			
4			
5			
13			
100			
z			



Επικοινωνία

1.2. Πιο κάτω παρουσιάζεται ένα μοτίβο.



Ο Νίκος και η Άννα περιγράφουν τον κανόνα για τον υπολογισμό του συνολικού αριθμού κύκλων σε έναν όρο του μοτίβου.



Προσθέτω 2 κύκλους
κάθε φορά.

Πολλαπλασιάζω τη
θέση του όρου επί 2
και προσθέτω 1.



Σε ποια περίπτωση είναι πιο χρήσιμος ο κανόνας κάθε παιδιού;



Αναστοχασμός

Ο γενικός κανόνας που ακολουθεί ένα μοτίβο εκφράζεται από την πιο κάτω αλγεβρική παράσταση.

$$3n + 2$$

(α) Να κατασκευάσετε πίνακα, για να αναπαραστήσετε τους πρώτους 5 όρους του μοτίβου.

(β) Ποιος είναι 100^{ος} όρος του μοτίβου;

1.3. Ο γενικός κανόνας που ακολουθεί ένα μοτίβο εκφράζεται από την αλγεβρική παράσταση $2x + 1$. Είναι δυνατόν ο αριθμός 56 να είναι ένας από τους όρους του μοτίβου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΜΑΘΗΜΑ 2

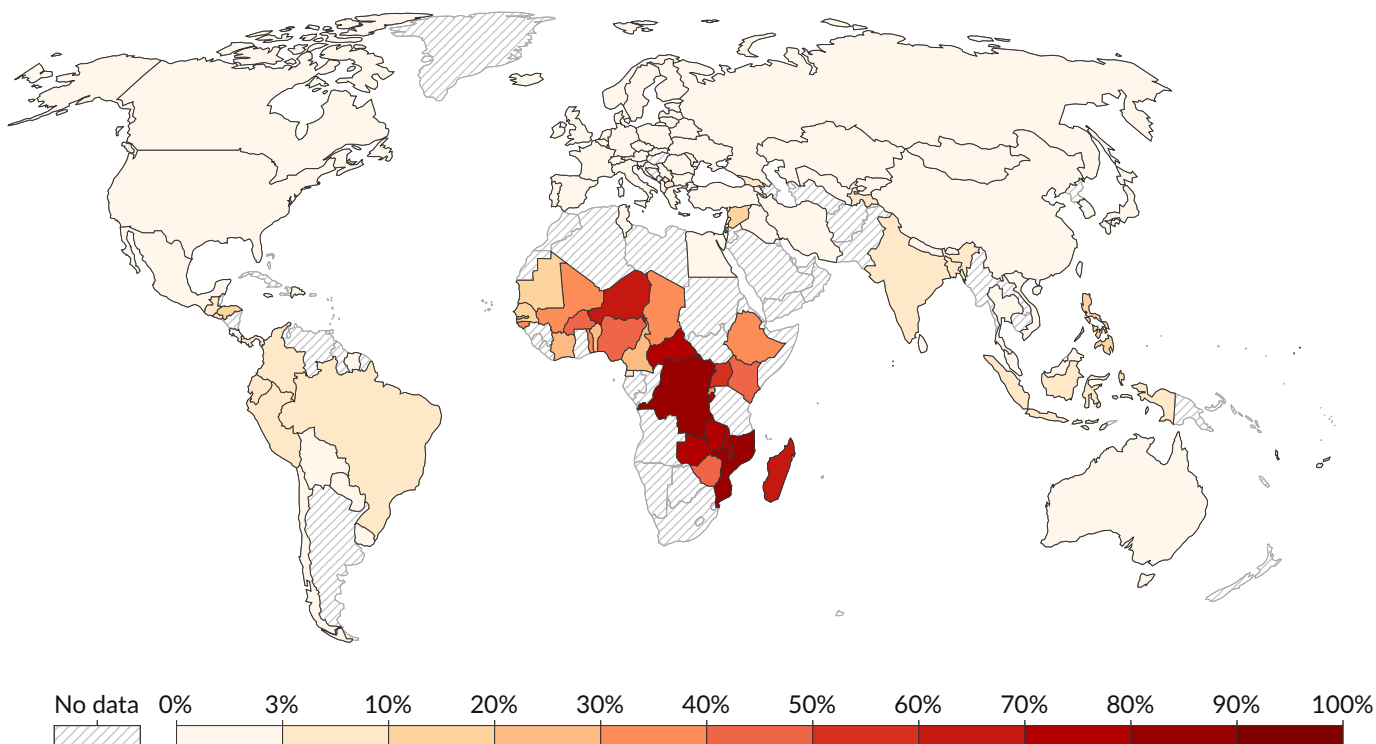


Τα Μαθηματικά στον κόσμο

Σε πολλές χώρες του κόσμου, εκατομμύρια άνθρωποι ζουν σε ακραία φτώχεια, δηλαδή δεν έχουν αρκετά χρήματα, για να καλύψουν τις βασικές τους ανάγκες, όπως τροφή, καθαρό νερό, στέγη, ρούχα και ιατρική φροντίδα.

- Να μελετήσετε τον πιο κάτω χάρτη.

Ποσοστά φτώχειας στον κόσμο



Πηγή: <https://ourworldindata.org/poverty>

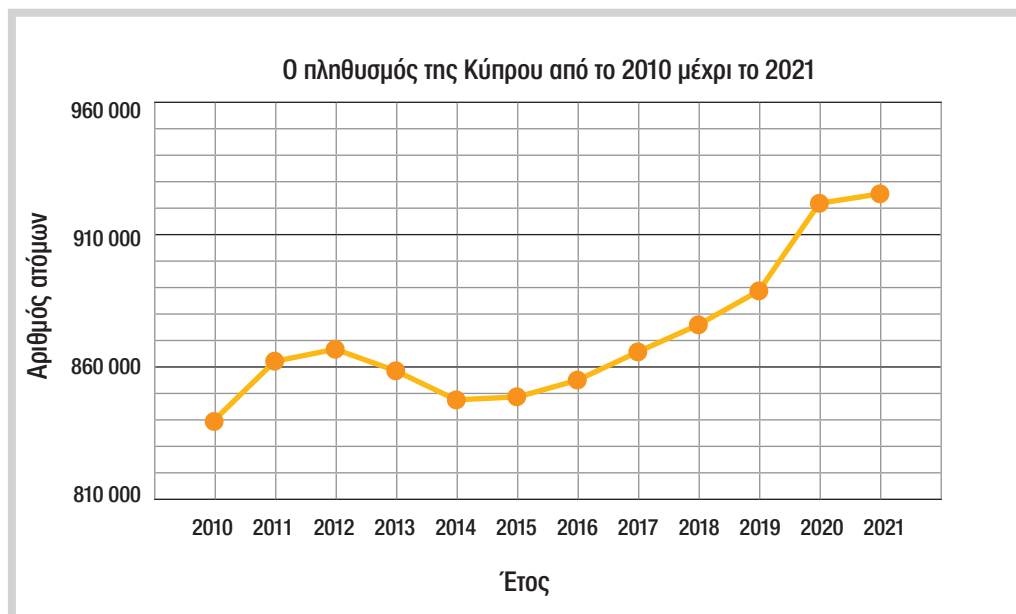
- Σε ποια ήπειρο υπάρχουν χώρες, στις οποίες το ποσοστό των ανθρώπων που ζουν σε συνθήκες ακραίας φτώχειας είναι μεγαλύτερο του 50%;
- Να αναφέρετε ένα πλεονέκτημα και ένα μειονέκτημα που έχει ο χάρτης, ως μέσο αναπαράστασης δεδομένων.



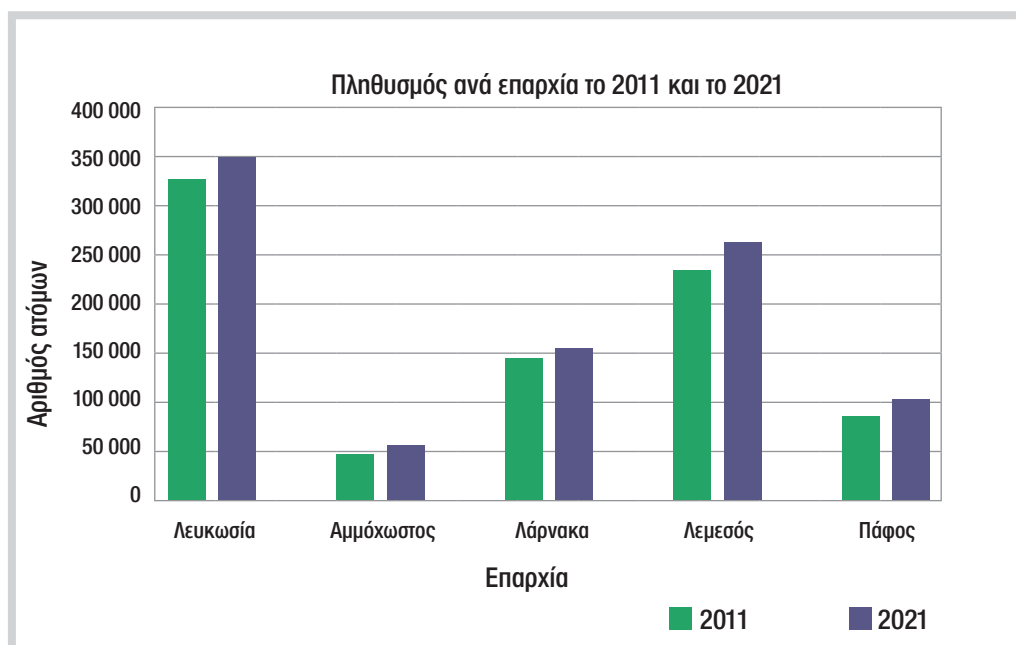
Διερεύνηση

Πιο κάτω παρουσιάζονται δύο γραφικές παραστάσεις (μία γραμμική γραφική παράσταση και ένα ραβδόγραμμα) σχετικά με τον πληθυσμό της Κύπρου.

Α.



Β.



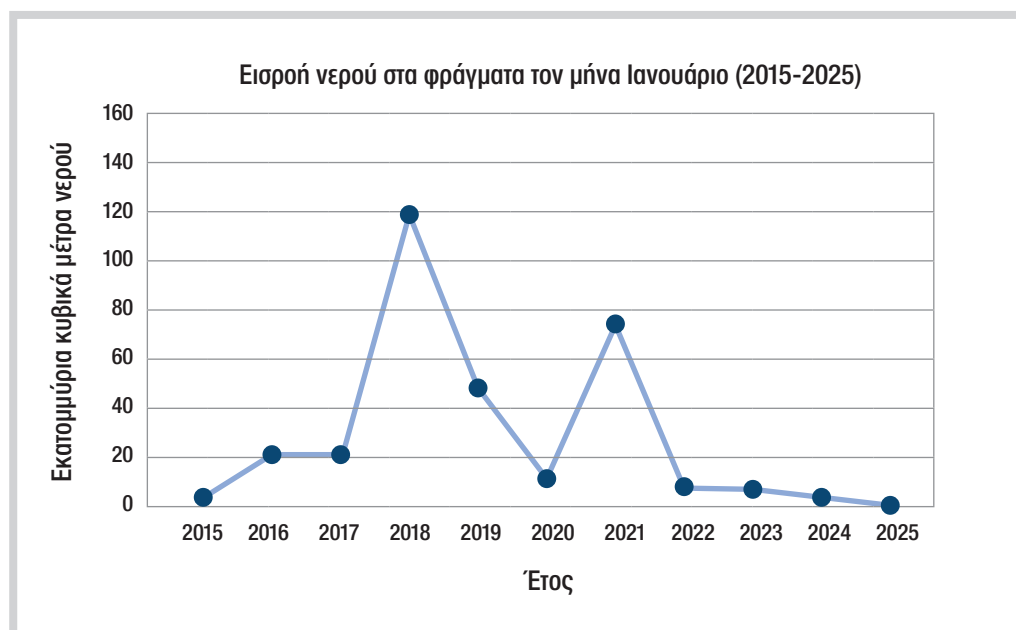
- (α) Να διατυπώσετε ένα συμπέρασμα που προκύπτει από τα δεδομένα κάθε γραφικής παράστασης.
- (β) Σε ποιες περιπτώσεις είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε γραμμική γραφική παράσταση και σε ποιες ραβδόγραμμα, για την παρουσίαση ενός συνόλου δεδομένων;



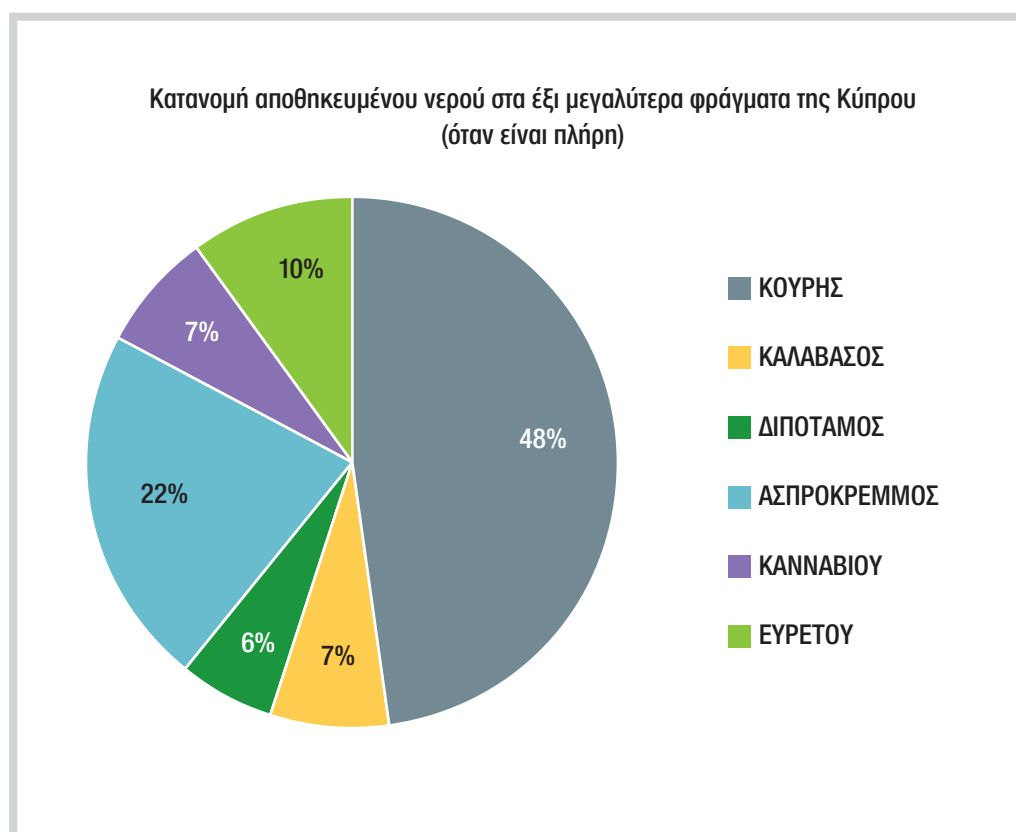
Δραστηριότητες 1

- 1.1. (α) Να μελετήσετε τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις, οι οποίες αναφέρονται στην ποσότητα νερού στα φράγματα της Κύπρου.

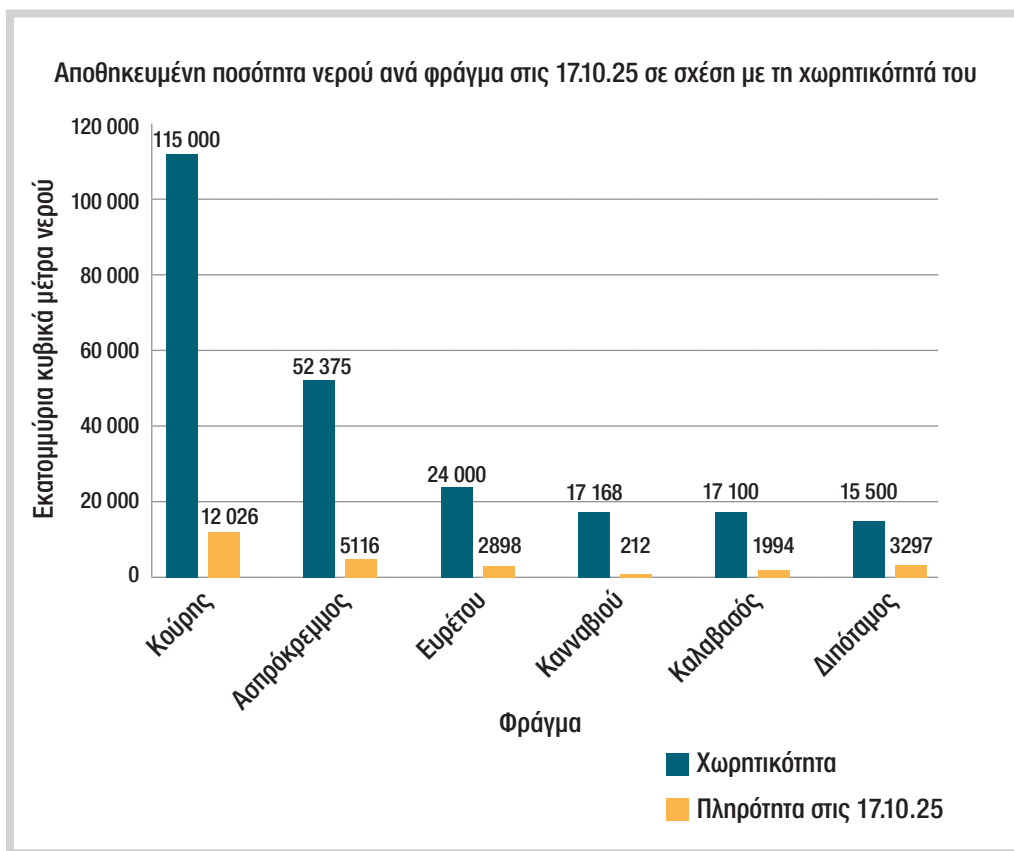
A.



B.



Γ.



(β) Να απαντήσετε στα ερωτήματα:

(i) Ποιο είναι το μεγαλύτερο σε χωρητικότητα φράγμα της Κύπρου;

(ii) Πότε σημειώθηκε η μεγαλύτερη εισροή νερού τον Ιανουάριο στα φράγματα;

(iii) Πόση ήταν η συνολική ποσότητα νερού που ήταν αποθηκευμένη στα έξι μεγαλύτερα φράγματα της Κύπρου στις 17 Οκτωβρίου 2025;



Επικοινωνία

(γ) Τον Ιούνιο του 2025 η Κυπριακή Κυβέρνηση αποφάσισε την επιβολή προστίμου σε όσους χρησιμοποιούν το τρεχούμενο νερό για καθαρισμό εξωτερικών χώρων. Να κρίνετε την απόφαση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα που παρουσιάζονται στις γραφικές παραστάσεις.



Αναστοχασμός

Πιο κάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα μιας έρευνας σχετικά με τον αριθμό μηνυμάτων που αποστέλλει ένας χρήστης κινητού τηλεφώνου την ημέρα.

Αριθμός μηνυμάτων που αποστέλλονται σε μια μέρα	Έφηβοι	Ενήλικες
0	2%	9%
1-10	22%	51%
11-20	11%	13%
21-50	18%	12%
51-100	18%	7%
101 και άνω	29%	8%



Ποιο είδος γραφικής παράστασης θα χρησιμοποιούσατε, για να παρουσιάσετε τα πιο πάνω δεδομένα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Μικρή Επανάληψη

1. Να εξετάσετε κατά πόσο οι λόγοι είναι ίσοι.

(α) $\frac{2}{16}$ και $\frac{3}{24}$

(β) $\frac{8}{9}$ και $\frac{72}{81}$

(γ) $\frac{4}{3}$ και $\frac{10}{8}$

2. Να υπολογίσετε την τιμή του x στις πιο κάτω αναλογίες.

(α) $\frac{16}{20} = \frac{x}{5}$

(β) $\frac{9}{12} = \frac{6}{x}$

(γ) $\frac{7}{21} = \frac{5}{x}$

ΜΑΘΗΜΑ 3



Τα Μαθηματικά στον κόσμο

Όταν πάμε στον κινηματογράφο ή ανοίγουμε μια πλατφόρμα στην τηλεόρασή μας, χρειάζεται να διαλέξουμε ποια ταινία θα δούμε. Συχνά, η επιλογή μας βασίζεται στις κριτικές που είναι διαθέσιμες για κάθε ταινία. Οι κριτές ταινιών είναι άτομα που βλέπουν τις ταινίες πριν από εμάς και προσέχουν πολλά στοιχεία, όπως το σενάριο, την ερμηνεία των ηθοποιών και τη σκηνοθεσία. Έπειτα, γράφουν τη γνώμη τους σε εφημερίδες, περιοδικά ή στο διαδίκτυο και δίνουν μία βαθμολογία που δείχνει πόσο τους άρεσε η ταινία. Συνήθως η βαθμολογία αποδίδεται με αστέρια: από 0 που δείχνει ότι η ταινία δεν τους άρεσε καθόλου έως 5 που δείχνει ότι τη θεωρούν εξαιρετική.



Πιο κάτω παρουσιάζονται οι βαθμολογίες που έδωσαν τρεις κριτές σε δύο ταινίες μιας πλατφόρμας.

	Κριτής 1	Κριτής 2	Κριτής 3
Ταινία Α	2	3	4
Ταινία Β	1	3	5

- Ποια από τις δύο ταινίες θα επιλέγατε να δείτε;
- Στην πλατφόρμα θα συμπεριληφθεί μία και μοναδική βαθμολογία για κάθε ταινία, λαμβάνοντας υπόψη τις βαθμολογίες που έδωσαν όλοι οι κριτές. Ποια βαθμολογία είναι καλύτερα να συμπεριληφθεί σε κάθε περίπτωση;



Εξερεύνηση



Ο Νίκος βρίσκεται σε ένα θεματικό πάρκο. Περιμένει στην ουρά, για να ανέβει στο τρενάκι. Ταυτόχρονα, ενημερώνεται, μέσω μιας εφαρμογής στο κινητό του τηλέφωνο, για τον μέσο χρόνο αναμονής σε κάθε παιχνίδι, όπως φαίνεται πιο κάτω.

Μέσος χρόνος αναμονής	
Καρουζέλ 25 λεπτά	Τρενάκι 35 λεπτά
Ρόδα 15 λεπτά	Αιώρα 40 λεπτά
Τροχαλία 22 λεπτά	Βάρκες 10 λεπτά

Μα περιμένω για περισσότερο από 35 λεπτά για το τρενάκι!

Πώς εξηγείται το γεγονός ότι ο Νίκος περιμένει για πάνω από 35 λεπτά, για να ανέβει στο τρενάκι;





Τεχνολογία



Διερεύνηση

Για να περιγράψουμε ένα σύνολο τιμών, χρησιμοποιούμε ορισμένες τιμές, όπως η **ελάχιστη τιμή**, η **μέγιστη τιμή**, το **εύρος** και ο **μέσος όρος**.

Παράδειγμα:

Ένα σύνολο αποτελείται από τις τιμές 2, 2, 3 και 5.

- Η **ελάχιστη τιμή**, δηλαδή η μικρότερη τιμή του συνόλου, είναι το 2.
- Η **μέγιστη τιμή**, δηλαδή η μεγαλύτερη τιμή του συνόλου, είναι το 5.
- Το **εύρος** υπολογίζεται ως εξής:

Αφαιρούμε την ελάχιστη τιμή από τη μέγιστη τιμή: $5 - 2 = 3$

- Ο **μέσος όρος** υπολογίζεται ως εξής:

Προσθέτουμε όλες τις τιμές του συνόλου $2 + 2 + 3 + 5 = 12$

Μετράμε το πλήθος των τιμών: Υπάρχουν 4 τιμές

Διαιρούμε το άθροισμα που βρήκαμε διά το πλήθος των τιμών: $\frac{12}{4} = 3$



- (α) Η Άννα βρίσκεται στο ίδιο θεματικό πάρκο με τον Νίκο. Θέλει να παίξει στο παιχνίδι «Βάρκες». Παρατηρεί τους χρόνους αναμονής διαφορετικών ατόμων που επισκέφθηκαν το θεματικό πάρκο την προηγούμενη μέρα.

10, 16, 20, 12, 12, 10, 20, 18, 12, 10

- (i) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή;

- (ii) Ποια είναι η μέγιστη τιμή;

- (iii) Πόσο είναι το εύρος των τιμών;

- (iv) Πόσος είναι ο μέσος όρος των τιμών;



- (β) Ποια από τις πιο πάνω τιμές θα βοηθήσει την Άννα να εκτιμήσει πόσο χρόνο περίπου θα χρειαστεί να περιμένει, για να παίξει στο παιχνίδι; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Παράδειγμα 1

Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των βιβλίων που δανείστηκε η Άννα από τη Δημοτική Βιβλιοθήκη για έξι συνεχόμενους μήνες. Να υπολογίσετε τον μέσο όρο των βιβλίων που δανείζεται η Άννα κάθε μήνα.

Μήνας	Αριθμός βιβλίων
Ιανουάριος	6
Φεβρουάριος	8
Μάρτιος	7
Απρίλιος	3
Μάιος	4
Ιούνιος	2

Λύση:

$$\frac{6 + 8 + 7 + 3 + 4 + 2}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

Προσθέτουμε όλες τις τιμές και διαιρούμε διά το πλήθος τους, δηλαδή διά 6.

Ο μέσος όρος των βιβλίων που δανείζεται η Άννα κάθε μήνα είναι 5 βιβλία.



Δραστηριότητες 1

- 1.1. Να υπολογίσετε τον μέσο όρο των βαθμολογιών που πήρε κάθε παιδί στους 4 γύρους ενός ηλεκτρονικού παιχνιδιού. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(α) Άρης: 20, 18, 18, 24

(β) Λάιλα: 18, 18, 20, 20

(γ) Χρίστος: 15, 17, 16, 18

(δ) Ελίζα: 19, 16, 14, 18



Αναστοχασμός

Το πλήθος ενός συνόλου δεδομένων είναι 4 και ο μέσος όρος τους είναι 3. Ποιες είναι οι τιμές του συνόλου; Να δώσετε 2 διαφορετικές απαντήσεις.



Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε την τιμή του x , ώστε ο μέσος όρος του πιο κάτω συνόλου τιμών να ισούται με 4.

2, x , 5, 3, 6

Λύση:

$$\frac{2 + x + 5 + 3 + 6}{5} = 4$$

$$\frac{x + 16}{5} = 4$$

$$\frac{x + 16}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5} = 4 \cdot 5$$

$$x + 16 = 20$$

$$x + \cancel{16} - \cancel{16} = 20 - 16$$

$$x = 4$$

Σχηματίζουμε εξίσωση με βάση τον τρόπο υπολογισμού του μέσου όρου και την επιλύουμε.



Δραστηριότητες 2



2.1. Να υπολογίσετε την τιμή του x .

(α) 20, 19, 21, 24, 16, x

Μέσος όρος: 19

(β) 490, 420, 410, x , 510

Μέσος όρος: 460



- 2.2. Στην καλαθόσφαιρα, η απόδοση ενός παίκτη μπορεί να περιγραφεί με απλούς αριθμούς, όπως ο μέσος όρος των πόντων του σε ένα σύνολο αγώνων, οι λιγότεροι πόντοι που έχει πετύχει (ελάχιστη τιμή), οι περισσότεροι πόντοι που έχει πετύχει (μέγιστη τιμή) και η διαφορά μεταξύ των περισσότερων και των λιγότερων πόντων (εύρος).

- (α) Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τους πόντους που πέτυχαν στο EuroBasket 2025 δύο κορυφαίοι καλαθοσφαιριστές. Να συμπληρώσετε τις τελευταίες γραμμές του πίνακα.

Αγώνας	Denis Schroder (Εθνική Γερμανίας)	Lauri Markkanen (Εθνική Φινλανδίας)
1	21	28
2	23	43
3	26	26
4	19	19
5	16	11
6	16	29
7	20	17
8	26	16
9	16	19
Μέσος όρος		
Ελάχιστη τιμή		
Μέγιστη τιμή		
Εύρος		



- (β) Ποιος από τους δύο παίκτες είχε την πιο σταθερή απόδοση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Αναστοχασμός



Σε ένα παιχνίδι με μέγιστη βαθμολογία το 10, τέσσερα παιδιά πήραν τις εξής βαθμολογίες: 5, 5, 8, 10.

Να προσθέσετε τη βαθμολογία ενός πέμπτου παιδιού στο σύνολο, ώστε ο νέος μέσος όρος των βαθμολογιών των παιδιών να είναι:

(α) Μεγαλύτερος από τον αρχικό μέσο όρο.

(β) Μικρότερος από τον αρχικό μέσο όρο.



Μικρή Επανάληψη

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ποσοστά.

(α) 50% του 350

(β) 25% του 280

(γ) 36% του 50

2. Να επιλύσετε τα προβλήματα.

(α) Η αρχική τιμή πώλησης μιας τηλεόρασης ήταν €1200. Στις εκπτώσεις πωλήθηκε με έκπτωση 30%. Πόση ήταν η τιμή πώλησης της τηλεόρασης στις εκπτώσεις;

(β) Ο Γιάννης αγόρασε από το φαρμακείο προϊόντα αξίας €50. Ποιο ήταν το τελικό ποσό που πλήρωσε, αν στα προϊόντα αυτά επιβάλλεται ΦΠΑ 3%;

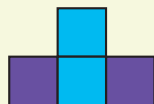


Περίληψη Ενότητας

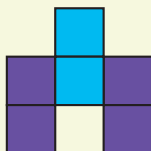
Μοτίβα

- Για να υπολογίσουμε οποιονδήποτε όρο ενός μοτίβου, εκφράζουμε έναν γενικό κανόνα που περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσεται το μοτίβο.

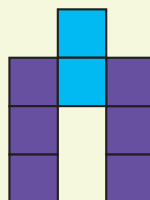
Παράδειγμα:



όρος 1



όρος 2



όρος 3

Παρατηρούμε ότι σε κάθε όρο, ο αριθμός των γαλάζιων τετραγώνων είναι 2, ενώ ο αριθμός των μοβ τετραγώνων είναι διπλάσιος από τη θέση του όρου.

Όρος	Αριθμός μοβ τετραγώνων	Αριθμός γαλάζιων τετραγώνων	Συνολικός αριθμός τετραγώνων
1	$2 \cdot 1$	2	$2 \cdot 1 + 2 = 4$
2	$2 \cdot 2$	2	$2 \cdot 2 + 2 = 6$
3	$2 \cdot 3$	2	$2 \cdot 3 + 2 = 8$
n	$2 \cdot n$	2	$2n + 2$

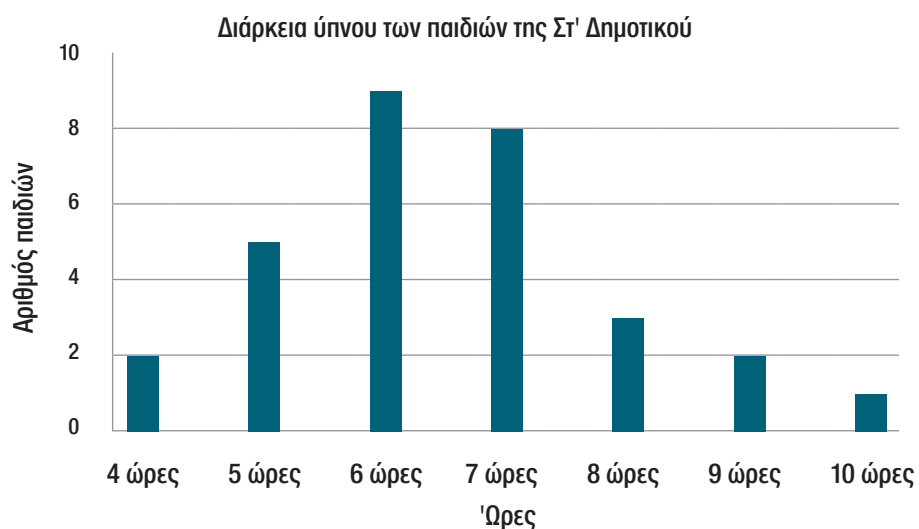
Γενικός κανόνας: Για να υπολογίσουμε τον αριθμό των τετραγώνων σε οποιονδήποτε όρο του μοτίβου, διπλασιάζουμε τη θέση του όρου και προσθέτουμε 2.

Γραφικές παραστάσεις

Για την παρουσίαση ενός συνόλου δεδομένων είναι δυνατόν να αξιοποιηθούν διάφοροι τύποι διαγραμμάτων:

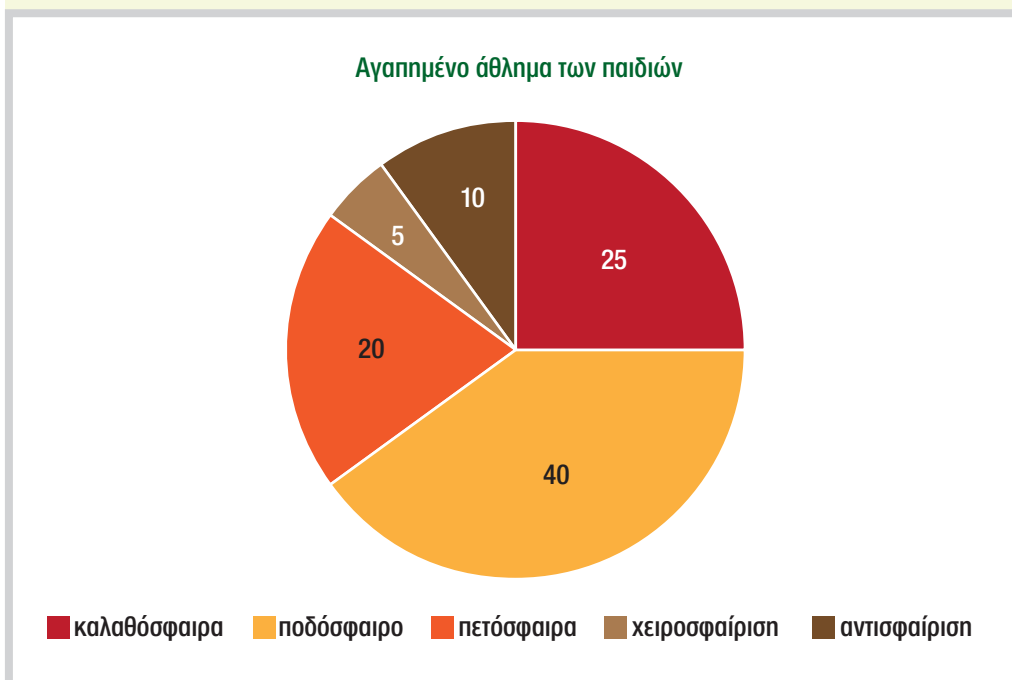
- Στο **ραβδόγραμμα**, η αναπαράσταση δεδομένων γίνεται με τη χρήση ράβδων.

Παράδειγμα:



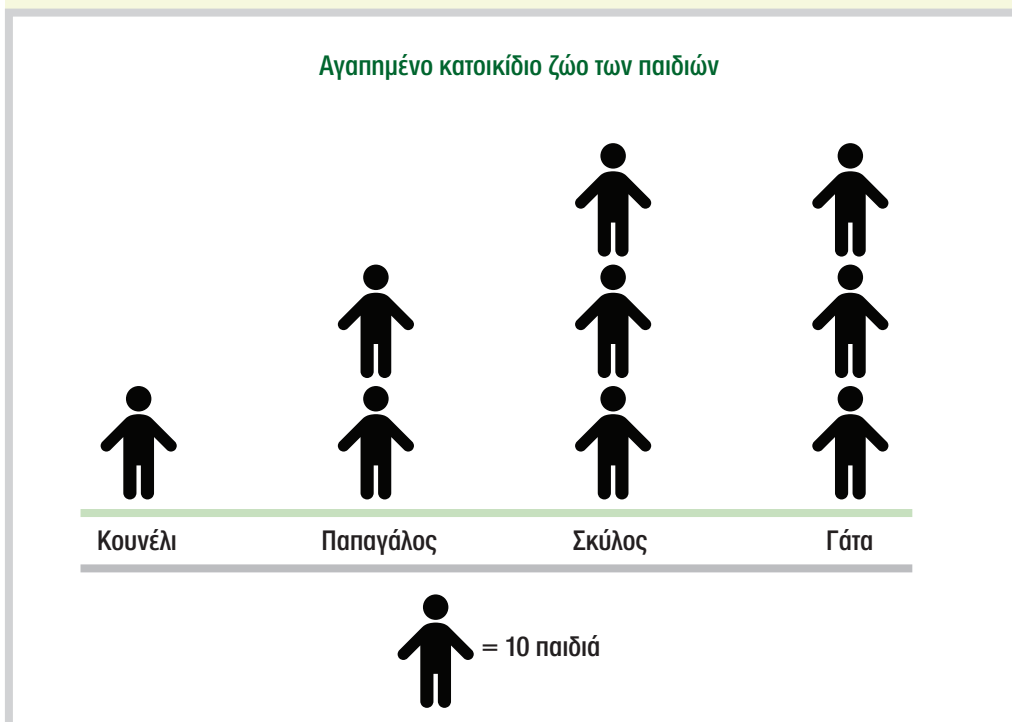
- Στο **κυκλικό διάγραμμα** παρουσιάζεται η σχέση του μέρους προς το σύνολο των δεδομένων.

Παράδειγμα:



- Στο **εικονόγραμμα** η αναπαράσταση δεδομένων γίνεται με τη χρήση εικόνων.

Παράδειγμα:



- Στη γραμμική γραφική παράσταση παρουσιάζεται η μεταβολή ενός μεγέθους σε σχέση με ένα άλλο μέγεθος.

Παράδειγμα:



- **Μέτρα Θέσης**
Σε ένα σύνολο δεδομένων:
 - **Ελάχιστη τιμή** ονομάζεται η μικρότερη τιμή που εμφανίζεται στο σύνολο.
 - **Μέγιστη τιμή** ονομάζεται η μεγαλύτερη τιμή που εμφανίζεται στο σύνολο.
 - **Εύρος** είναι η διαφορά της μέγιστης από την ελάχιστη τιμή στο σύνολο.
 - **Μέσος όρος** είναι το πηλίκο που προκύπτει, όταν προσθέσουμε όλες τις τιμές ενός συνόλου και διαιρέσουμε το άθροισμα διά το πλήθος των τιμών.

Παράδειγμα:

Οι βαθμοί που πήραν τα παιδιά σε ένα παιχνίδι γνώσεων:

20, 25, 23, 22, 21, 24

Ελάχιστη τιμή: 20

Μέγιστη τιμή: 25

Εύρος τιμών: $25 - 20 = 5$

Μέσος όρος: $\frac{20 + 25 + 23 + 22 + 21 + 24}{6} = 22,5$



Επιπρόσθετες Δραστηριότητες

Μοτίβα

- 1 Να συμπληρώσετε τον πίνακα και να εκφράσετε λεκτικά τον γενικό κανόνα που ακολουθεί κάθε μοτίβο.



όρος 1



όρος 2



όρος 3

Όρος	Αριθμός κύκλων
1	
2	
3	
4	
5	
50	
a	

Κανόνας: _____

Εφαρμογή

2

Τα Χειλόποδα είναι μια ομάδα αρθρόποδων που έχουν μακρύ και λεπτό σώμα. Το σώμα τους αποτελείται από ένα κεφάλι με δύο κεραίες και πολλά επαναλαμβανόμενα τμήματα, καθένα από τα οποία έχει ένα ζεύγος ποδιών. Ο αριθμός των ποδιών τους μπορεί να είναι λίγες δεκάδες μέχρι και αρκετές εκατοντάδες, ανάλογα με το είδος. Αξιοσημείωτο είναι ότι ο αριθμός των τμημάτων στο σώμα τους είναι πάντα περιττός.

Είναι δυνατόν ένα χειλόποδο να έχει 150 πόδια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3

Να μελετήσετε το πιο κάτω μοτίβο και να απαντήσετε στις ερωτήσεις. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.



όρος 1



όρος 2



όρος 3



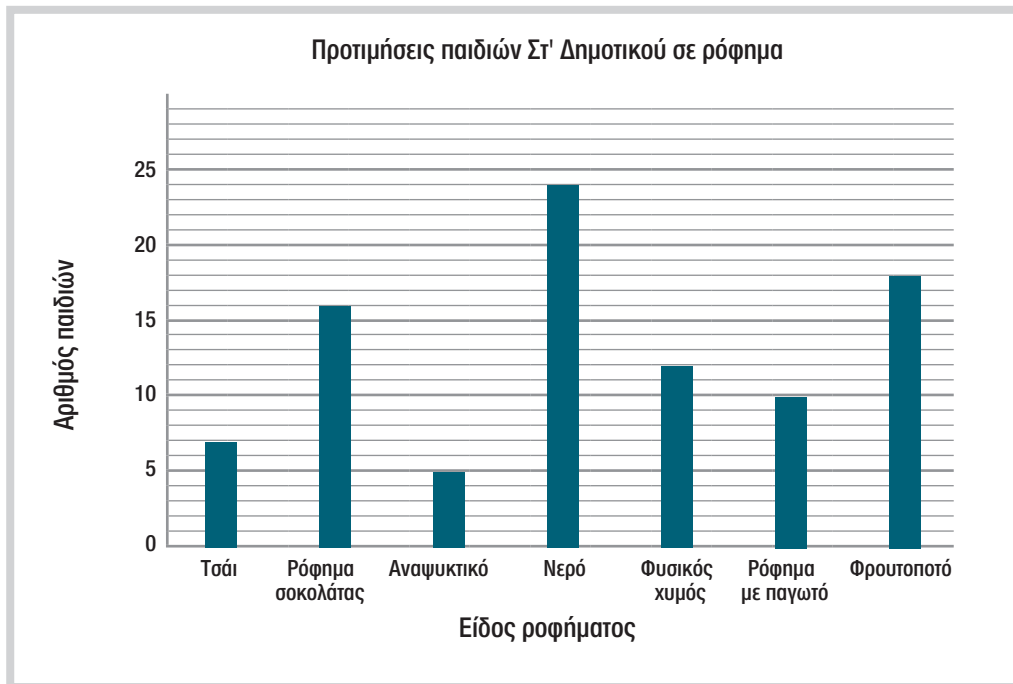
όρος 4

(α) Πόσους κύκλους έχει ο 50^{ος} όρος στο πιο κάτω μοτίβο;

(β) Ποιος όρος του μοτίβου έχει 139 κύκλους;

Γραφικές παραστάσεις

- 4 Η πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει τα αποτελέσματα έρευνας σχετικά με το ρόφημα που προτιμούν τα παιδιά της Στ' τάξης. Κάθε παιδί που συμμετείχε στην έρευνα επέλεξε μόνο ένα είδος ροφήματος.



Να απαντήσετε στις ερωτήσεις.

(α) Ποιο είναι το πιο δημοφιλές ρόφημα;

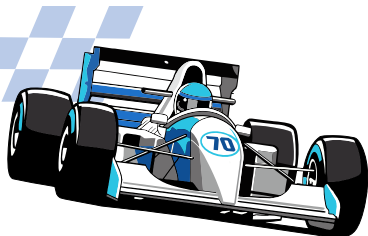
(β) Πόσα παιδιά προτιμούν τον φυσικό χυμό;

(γ) Πόσα παιδιά συμμετείχαν στην έρευνα;

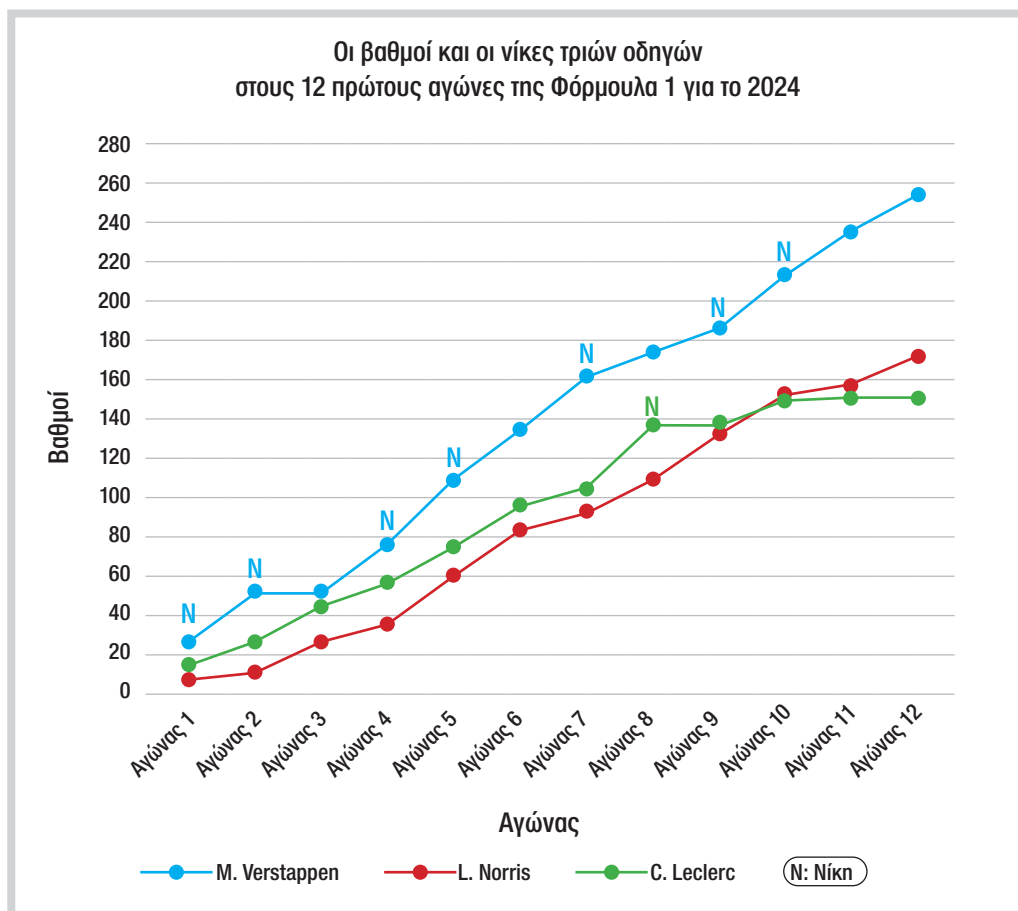


5

Η Φόρμουλα 1 είναι ένα συναρπαστικό άθλημα που το παρακολουθούν εκατομμύρια άνθρωποι στον κόσμο. Σε κάθε αγώνα, οι οδηγοί λαμβάνουν βαθμούς ανάλογα με τη θέση τους στην εκκίνηση, αν έχουν πετύχει τους ταχύτερους γύρους, αν έχουν ποινές λόγω παραπτώματων στην οδήγησή τους, αν εγκατέλειψαν τον αγώνα ή αν έχουν πετύχει νίκη.



Η πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει τους βαθμούς που συγκέντρωσαν τρεις κορυφαίοι οδηγοί (Max Verstappen, Lando Norris και Charles Leclerc) στους 12 πρώτους αγώνες του πρωταθλήματος το 2024. Επιπρόσθετα, σημειώνεται το γράμμα N, αν ο οδηγός πέτυχε νίκη σε έναν συγκεκριμένο αγώνα.



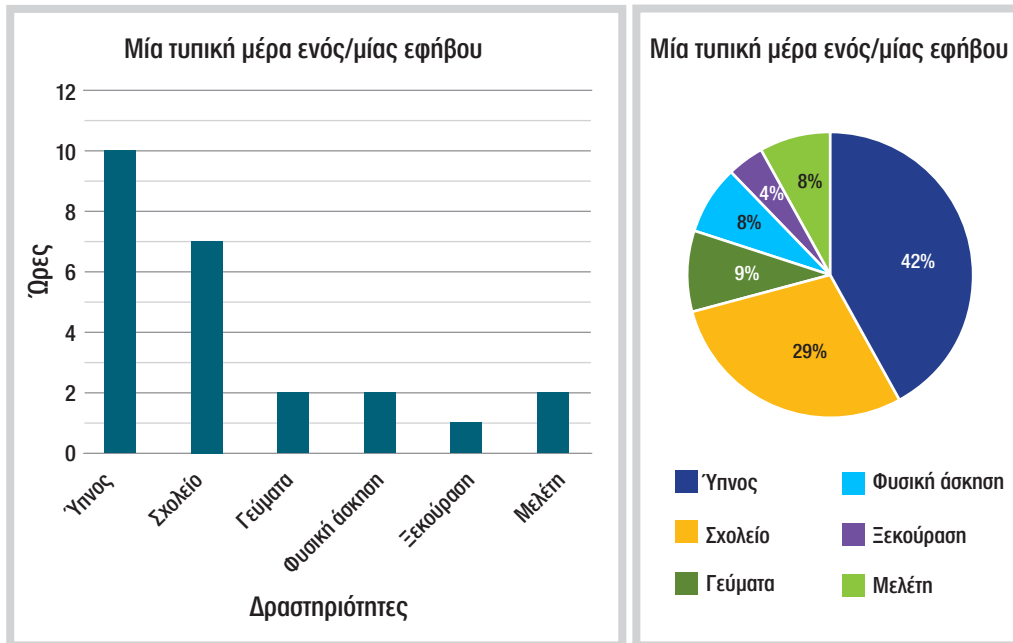
(α) Ποιο χρώμα έχει η γραμμή που αντιστοιχεί στον Max Verstappen;

(β) Πόσες νίκες πέτυχε ο κάθε οδηγός μέχρι και τον 12ο αγώνα;

(γ) Σε ποιον αγώνα ο Lando Norris ξεπέρασε για πρώτη φορά τον Charles Leclerc στους συνολικούς βαθμούς;

6

Πιο κάτω παρουσιάζονται δεδομένα σχετικά με τις ώρες που αφιερώνει ένας έφηβος/μία έφηβη σε διάφορες δραστηριότητες κατά τη διάρκεια μιας τυπικής μέρας.



(α) Με ποια δραστηριότητα ασχολείται τον λιγότερο χρόνο ένας έφηβος/μία έφηβη σε μια τυπική μέρα;

(β) Πόσες ώρες της μέρας αφιερώνουν οι έφηβοι/έφηβες στη μελέτη;

(γ) Να συγκρίνετε τους δύο τύπους γραφικών παραστάσεων. Σε τι εξυπηρετεί η μία και σε τι η άλλη, σε σχέση με την παρουσίαση των δεδομένων;



Μέτρα Θέσης

- 7 Πιο κάτω παρουσιάζονται τα λεπτά ομιλίας ανά μήνα στο κινητό τηλέφωνο της Άννας κατά το πρώτο εξάμηνο του έτους.

450, 502, 486, 590, 478, 494

- (α) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή, την ελάχιστη τιμή και το εύρος στο πιο πάνω σύνολο δεδομένων.

- (β) Να υπολογίσετε τον μέσο όρο λεπτών ομιλίας της Άννας, με βάση τα πιο πάνω δεδομένα.



- 8 Να υπολογίσετε τον μέσο όρο σε κάθε σύνολο δεδομένων. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

- (α) Πωλήσεις εφημερίδων από ένα περίπτερο σε 5 εβδομάδες:

180, 150, 175, 160, 190

- (β) Οι βαθμοί του Άρη σε 8 γύρους ενός παιχνιδιού:

86, 100, 98, 85, 87, 92, 98, 74



- 9 Να υπολογίσετε την τιμή του n σε κάθε σύνολο δεδομένων. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

- (α) 7, 8, 8, n

Μέσος όρος: 8

- (β) 1, 1, 2, 4, 5, n , 10, 10

Μέσος όρος: 14

- 10 Ο μέσος όρος 5 διαδοχικών αριθμών είναι 100. Ποιοι είναι οι αριθμοί;







10

γεωμετρία II



10

γεωμετρία II



Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε...

- Να ορίζουμε τον κύκλο και τα στοιχεία του.
- Να υπολογίζουμε το μήκος κύκλου και την περίμετρο μικτόγραμμων σχημάτων.
- Να ορίζουμε και να περιγράφουμε μετασχηματισμούς (μεταφορά, συμμετρία).



Τα Μαθηματικά στον κόσμο

Στην καθημερινότητά μας, συχνά χρησιμοποιούμε φράσεις, όπως «σε ακτίνα...» ή «το επίκεντρο...». Για παράδειγμα:

«Το εστιατόριο κάνει παραδόσεις σε **ακτίνα 3 χιλιομέτρων**...»

«Οι δρόμοι θα είναι κλειστοί σε **ακτίνα 2 χιλιομέτρων** από το σημείο της εκδήλωσης...»

«Το **επίκεντρο** του σεισμού ήταν η Αγία Μαρίνα Κελοκεδάρων στην επαρχία Πάφου...»

Με αυτές τις φράσεις αναφερόμαστε σε μια περιοχή γύρω από ένα σημείο, με συγκεκριμένη απόσταση. Αν σχεδιάζαμε την περιοχή αυτή θα είχε σχήμα κύκλου.

Το πιο κάτω σχεδιάγραμμα δείχνει τις ζώνες στις οποίες έχει τη δυνατότητα να παραδίει φαγητό ένα εστιατόριο, το οποίο βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου και σημειώνεται με κόκκινο χρώμα.



- Τι χρειάζεται να προσέξει ένας καταναλωτής, πριν παραγγείλει από το συγκεκριμένο εστιατόριο;



Διερεύνηση

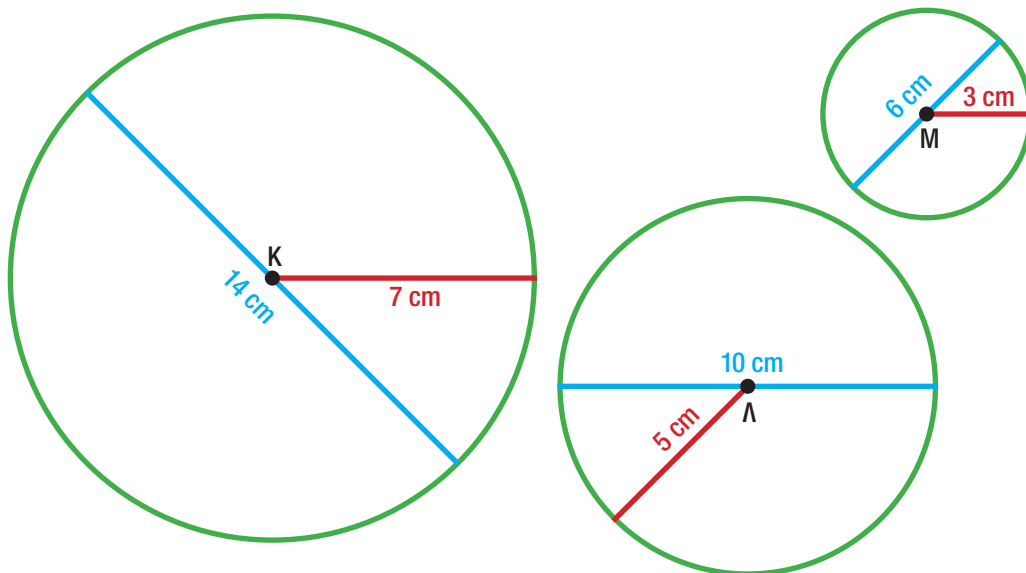
Ο **κύκλος** ορίζεται ως το σύνολο όλων των σημείων που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο, το οποίο λέγεται **κέντρο**. Η απόσταση αυτή ονομάζεται **ακτίνα**.

Διάμετρος ενός κύκλου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου (O) και καταλήγει σε δύο σημεία που βρίσκονται στην περιφέρειά του.



Τεχνολογία

(α) Να υπολογίσετε τον λόγο του μήκους της διαμέτρου προς την ακτίνα.



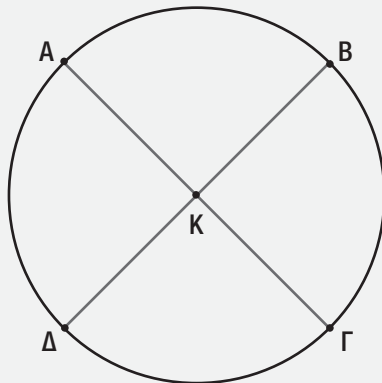
Κύκλος με κέντρο	Μήκος διαμέτρου	Μήκος ακτίνας	$\frac{\text{Μήκος διαμέτρου}}{\text{Μήκος ακτίνας}}$
Κ			
Λ			
Μ			

(β) Ποια σχέση συνδέει τη διάμετρο με την ακτίνα ενός κύκλου;



Παράδειγμα 1

Να συμπληρώσετε τον πίνακα.



Λύση:

Κύκλος με κέντρο K	Ονομασία
ευθύγραμμο τμήμα AK	ακτίνα
ευθύγραμμο τμήμα AΓ	διάμετρος
ευθύγραμμο τμήμα BΔ	διάμετρος

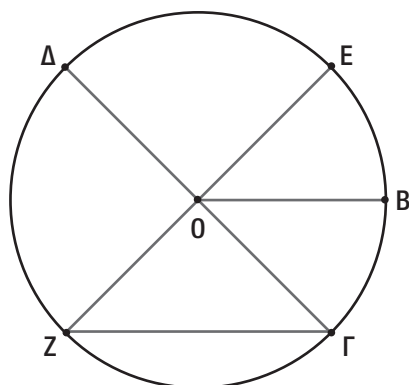
Το ευθύγραμμο τμήμα AK ενώνει το κέντρο με ένα σημείο στην περιφέρεια του κύκλου.

Τα ευθύγραμμα τμήματα AΓ και BΔ διέρχονται από το κέντρο του κύκλου. Τα σημεία A, B, Γ και Δ βρίσκονται στην περιφέρεια του κύκλου.



Δραστηριότητες 1

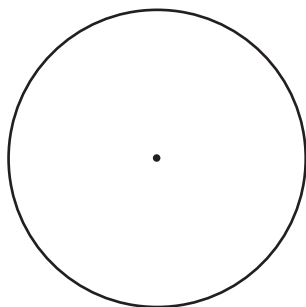
1.1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.



Κύκλος με κέντρο O	Ονομασία
ευθύγραμμο τμήμα ΔΓ	
ευθύγραμμο τμήμα OB	
ευθύγραμμο τμήμα EZ	
ευθύγραμμο τμήμα OE	

- 1.2. Να χρησιμοποιήσετε τον χάρακά σας, για να κατασκευάσετε σε κάθε κύκλο μία ακτίνα με κόκκινο χρώμα και μία διάμετρο με μπλε χρώμα. Στη συνέχεια, να μετρήσετε με τον χάρακά σας το μήκος τους και να το συμπληρώσετε πιο κάτω.

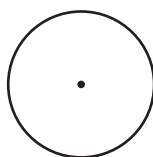
(α)



Ακτίνα _____

Διάμετρος _____

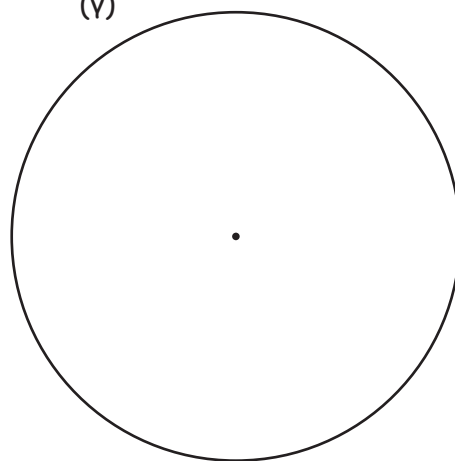
(β)



Ακτίνα _____

Διάμετρος _____

(γ)



Ακτίνα _____

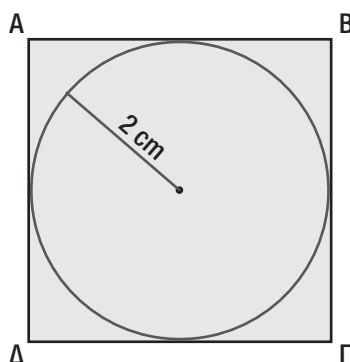
Διάμετρος _____



Αναστοχασμός

Πόσες ακτίνες και πόσες διαμέτρους είναι δυνατόν να έχει ένας κύκλος;

- 1.3. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ, αν η ακτίνα του κύκλου έχει μήκος 2 cm.



ΜΑΘΗΜΑ 2

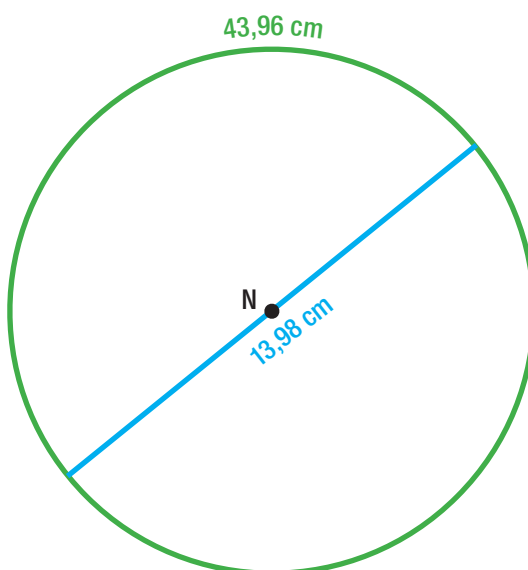
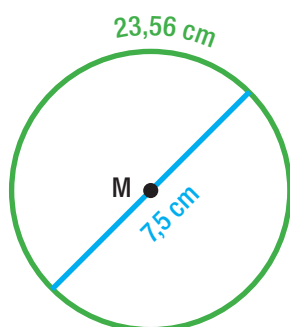
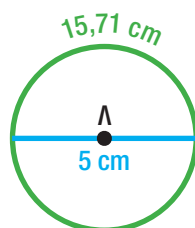
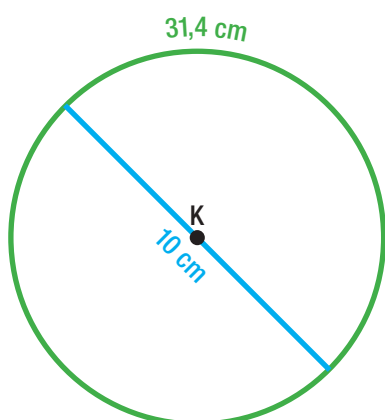


Διερεύνηση

Η περίμετρος ενός κύκλου ονομάζεται **περιφέρεια** ή **μήκος κύκλου** (Γ).

(α) Να υπολογίσετε τον λόγο του μήκους κάθε κύκλου προς το μήκος της διαμέτρου του.

Τεχνολογία



Κύκλος με κέντρο	Μήκος κύκλου	Μήκος διαμέτρου	$\frac{\text{Μήκος κύκλου}}{\text{Μήκος διαμέτρου}}$
Κ			
Λ			
Μ			
Ν			

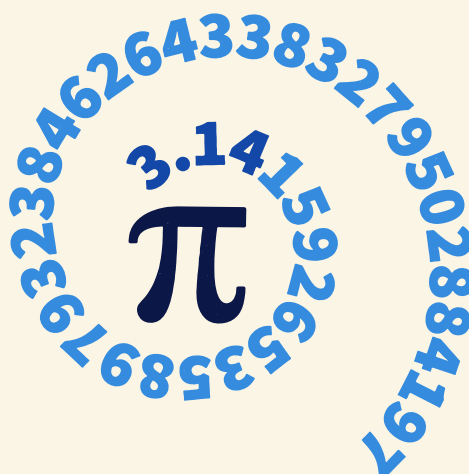
Τι παρατηρείτε;

- (β) Ο λόγος του μήκους ενός κύκλου προς το μήκος της διαμέτρου του είναι πάντα σταθερός και συμβολίζεται με το γράμμα π . Δηλαδή:

$$\pi = \frac{\text{Μήκος κύκλου}}{\text{μήκος διαμέτρου κύκλου}} = 3,141592...$$

Το π είναι ένας αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Σήμερα, χάρη στους υπολογιστές, έχουν βρεθεί τρισεκατομμύρια ψηφία του π . Στην πράξη όμως, τις περισσότερες φορές χρησιμοποιούμε μόνο τα πρώτα τρία ψηφία του π , δηλαδή το 3,14. Χρησιμοποιείται επίσης το κλάσμα $\frac{22}{7}$.

Ο αριθμός π γιορτάζεται κάθε χρόνο στις 14 Μαρτίου (3/14).



Να εκφράσετε με δικά σας λόγια πώς υπολογίζουμε το μήκος ενός κύκλου (Γ) με ακτίνα R , χρησιμοποιώντας τους πιο κάτω τύπους.

$$\Gamma = \pi \cdot \text{Διάμετρος}$$

ή

$$\Gamma = 2 \pi R$$



Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το μήκος κύκλου με διάμετρο 12 cm.

Λύση:

$$\Gamma = \text{Διάμετρος} \cdot \pi = 12\pi \\ \approx 37,68 \text{ cm}$$

Αντικαθιστούμε το μήκος της διαμέτρου στον τύπο $\Gamma = \text{Διάμετρος} \cdot \pi$.



Δραστηριότητες 1

1.1. Να υπολογίσετε το μήκος κύκλου με:

(α) ακτίνα 5 cm

(β) ακτίνα 9 cm



(γ) διάμετρο 8 cm

(δ) διάμετρο 11 cm

1.2. Να υπολογίσετε:

(α) την ακτίνα κύκλου
με μήκος 50,24 cm

(β) τη διάμετρο κύκλου
με μήκος 75,36 cm





- 1.3. Σε έναν κυκλικό χώρο πρασίνου με ακτίνα 4 m, θα τοποθετηθεί περιμετρικά περίφραξη.



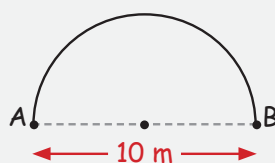
- (α) Να υπολογίσετε το μήκος της περίφραξης.

- (β) Να υπολογίσετε πόσο θα στοιχίσει η περίφραξη, αν κοστίζει €25 το μέτρο.



Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το μήκος του ημικυκλίου AB.

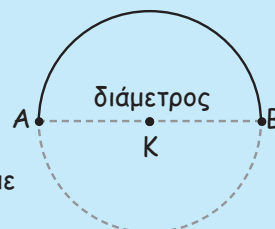


Λύση:

$$\Gamma = \text{Διάμετρος} \cdot \pi = 10\pi \\ \cong 31,4 \text{ m}$$

Το μήκος του ημικυκλίου είναι το μισό του μήκους του κύκλου.

Πρώτα, υπολογίζουμε το μήκος του κύκλου με διάμετρο 10 m.



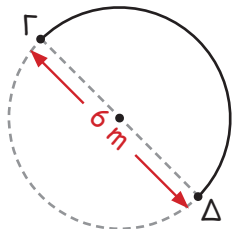
$$\text{Μήκος ημικυκλίου AB} = 31,4 \div 2 \\ \cong 15,7 \text{ m}$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το μήκος του ημικυκλίου, διαιρώντας διά 2.



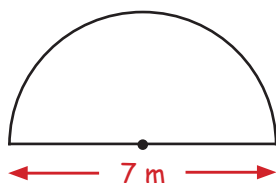
Δραστηριότητες 2

2.1. (α) Να υπολογίσετε το μήκος του ημικυκλίου ΓΔ.

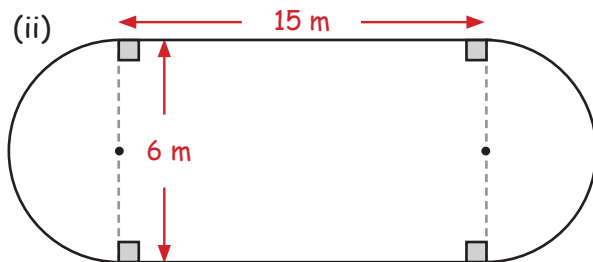


(β) Να υπολογίσετε την περίμετρο των σχημάτων.

(i)



(ii)



Μικρή Επανάληψη

1. Να υπολογίσετε τον μέσο όρο σε κάθε σύνολο δεδομένων.
Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(α) Γεννήσεις παιδιών μιας κλινικής σε 6 μήνες:
125, 95, 82, 76, 100, 122

(β) Ύψος μιας παρέας 5 παιδιών:
141 cm, 142 cm, 138 cm, 139 cm, 145 cm

2. Να υπολογίσετε την τιμή του ν σε κάθε σύνολο δεδομένων.
Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(α) 12, ν , 17
Μέσος όρος: 14

(β) 76, 77, 77, ν , 86, 88, 91
Μέσος όρος: 82

ΜΑΘΗΜΑ 3

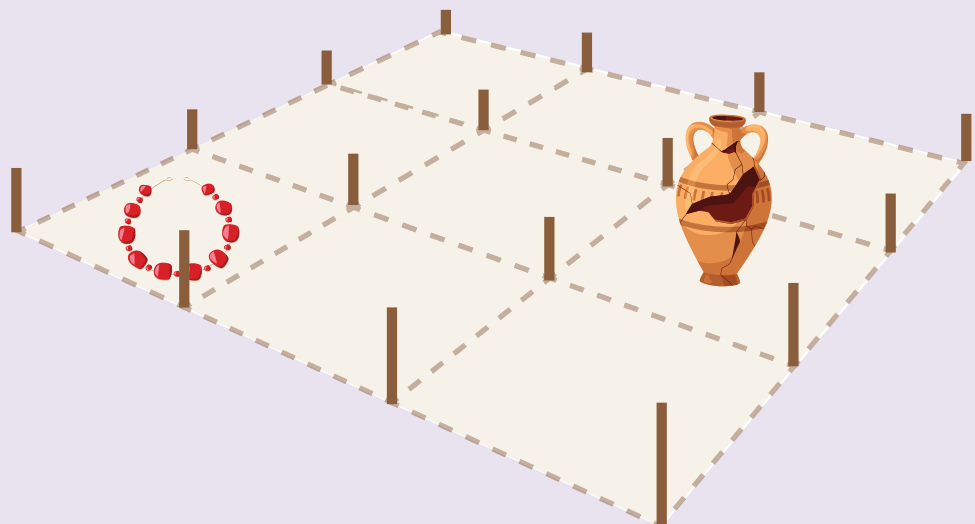


Τα Μαθηματικά στον κόσμο

Η ανασκαφή είναι μία οργανωμένη έρευνα που κάνουν οι αρχαιολόγοι, σκάβοντας το χώμα με μεγάλη προσοχή και ακρίβεια. Πριν από την έναρξη κάθε ανασκαφής, ο αρχαιολογικός χώρος χωρίζεται σε τετράγωνα, δημιουργώντας ένα πλέγμα, όπως φαίνεται στις πιο κάτω εικόνες.



Στο πιο κάτω πλέγμα σημειώνονται δύο από τα ευρήματα που βρέθηκαν σε μία ανασκαφή. Το περιδέραιο βρέθηκε στο τετράγωνο Α1 και το αγγείο στο τετράγωνο Γ2.



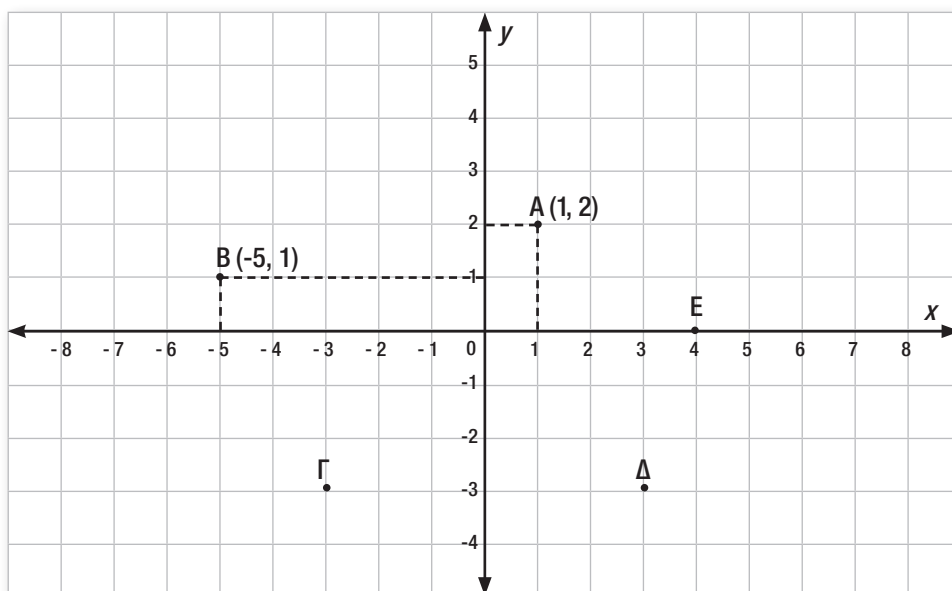
- Πόσο χρήσιμη είναι για τους αρχαιολόγους η πιο πάνω διαδικασία;



Δραστηριότητες 1

- 1.1. Στα Μαθηματικά χρησιμοποιούμε διατεταγμένα ζεύγη αριθμών, τις **συντεταγμένες**, για να καθορίσουμε τη θέση ενός σημείου στο επίπεδο. Τα σημεία τοποθετούνται στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, το οποίο αποτελείται από έναν οριζόντιο και έναν κατακόρυφο άξονα. Για παράδειγμα, το σημείο Α έχει συντεταγμένες $A(1, 2)$ και το σημείο Β έχει συντεταγμένες $B(-5, 1)$.

Να γράψετε τις συντεταγμένες των σημείων Γ, Δ και Ε.

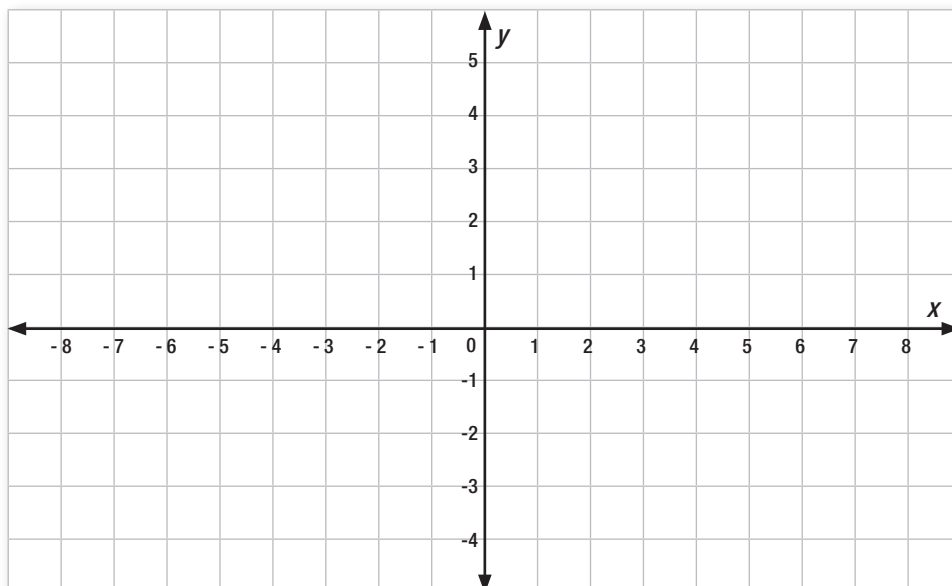


- 1.2. Να κατασκευάσετε το τρίγωνο ΖΗΘ με κορυφές τα σημεία:

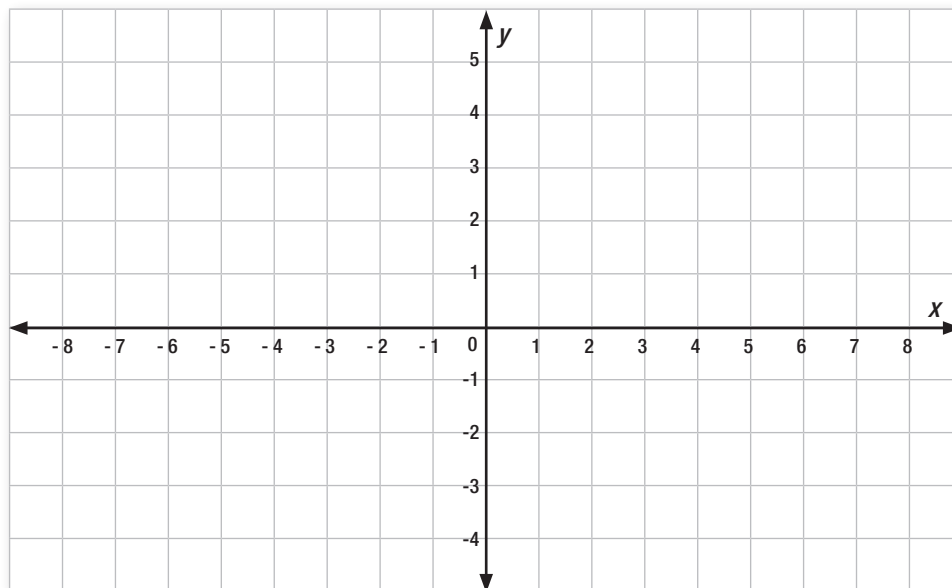
Ζ (2, 1)

Η (4, 3)

Θ (4, -3)



1.3. (α) Να τοποθετήσετε τα σημεία: $K(1, 1)$, $\Lambda(1, 5)$, $M(5, 5)$.

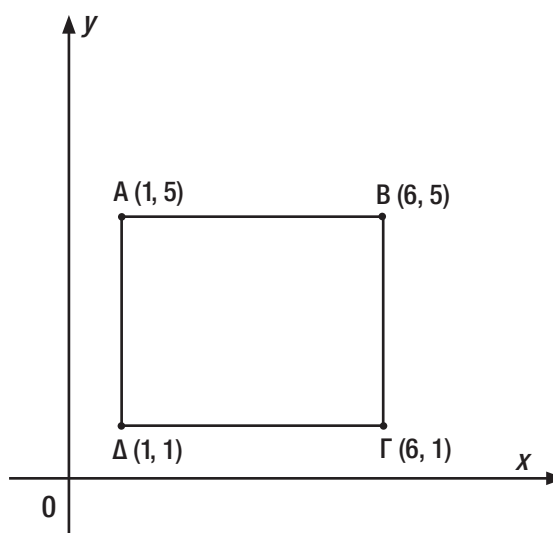


(β) Να γράψετε τις συντεταγμένες της κορυφής N , ώστε το $K\Lambda MN$ να είναι τετράγωνο.



Αναστοχασμός

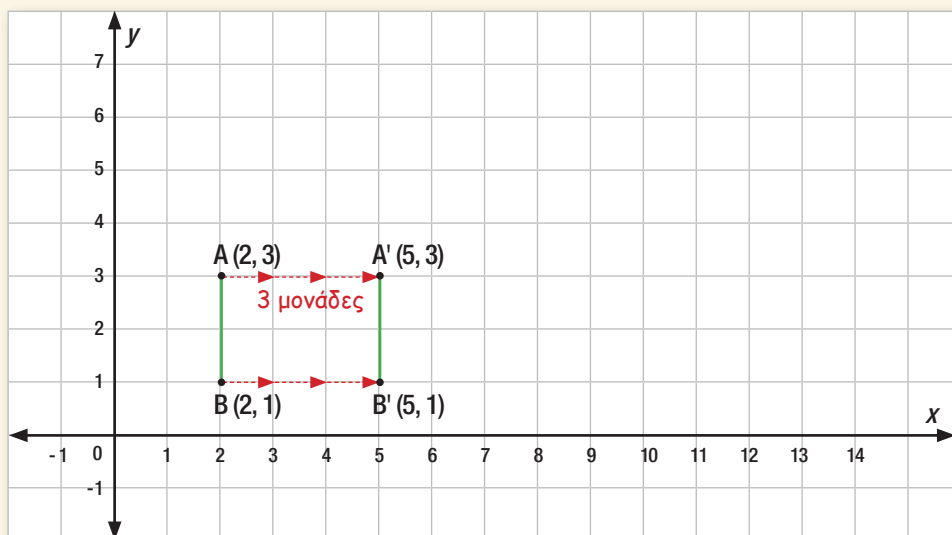
Ποιο είναι το μήκος και το πλάτος του πιο κάτω ορθογωνίου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.





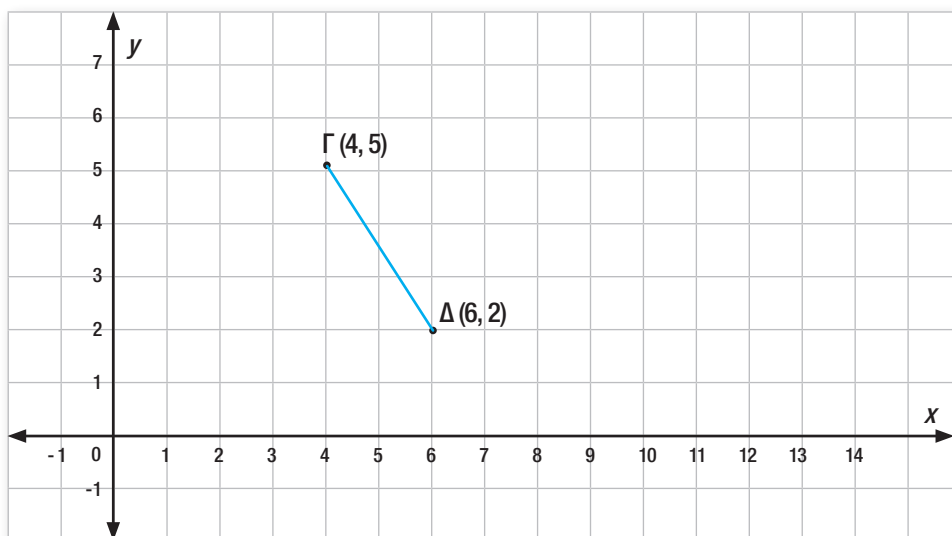
Διερεύνηση

Πιο κάτω παρουσιάζεται η μεταφορά του ευθύγραμμου τμήματος AB 3 μονάδες δεξιά. Από τη μεταφορά προκύπτει το ευθύγραμμο τμήμα $A'B'$.



Να μεταφέρετε 2 μονάδες αριστερά το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ και να κατασκευάσετε το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma'\Delta'$. Στη συνέχεια, να γράψετε τις συντεταγμένες των σημείων Γ' και Δ' .

Τεχνολογία



Ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$	$\Gamma (4, 5)$	$\Delta (6, 2)$
Ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma'\Delta'$	$\Gamma' (_ , _)$	$\Delta' (_ , _)$

Τι παρατηρείτε;

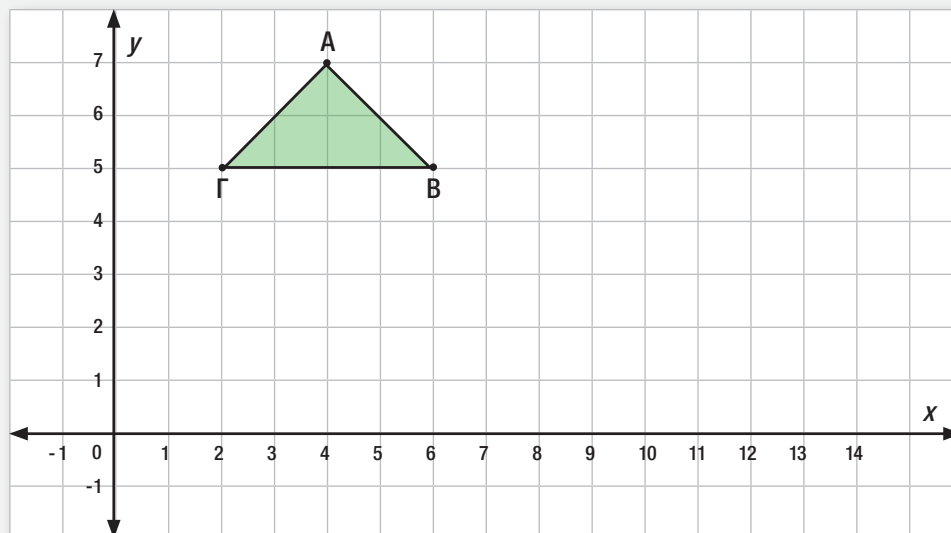


Παράδειγμα 1

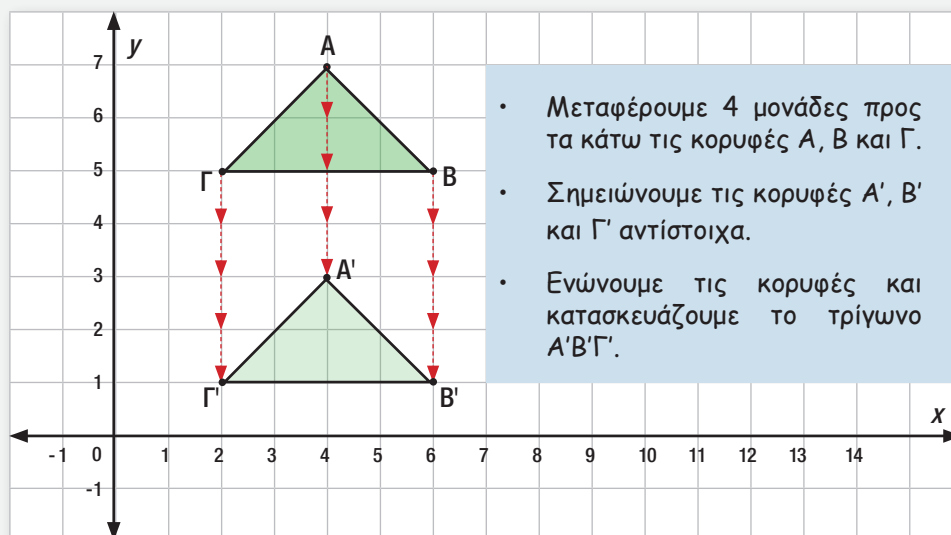
Να μεταφέρετε 4 μονάδες προς τα κάτω το τρίγωνο $AB\Gamma$ και να κατασκευάσετε το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$. Στη συνέχεια, να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου $A'B'\Gamma'$.



Για ευκολία, μεταφέρουμε τις κορυφές του σχήματος. Στη συνέχεια, με βάση αυτές, κατασκευάζουμε το σχήμα.



Λύση:



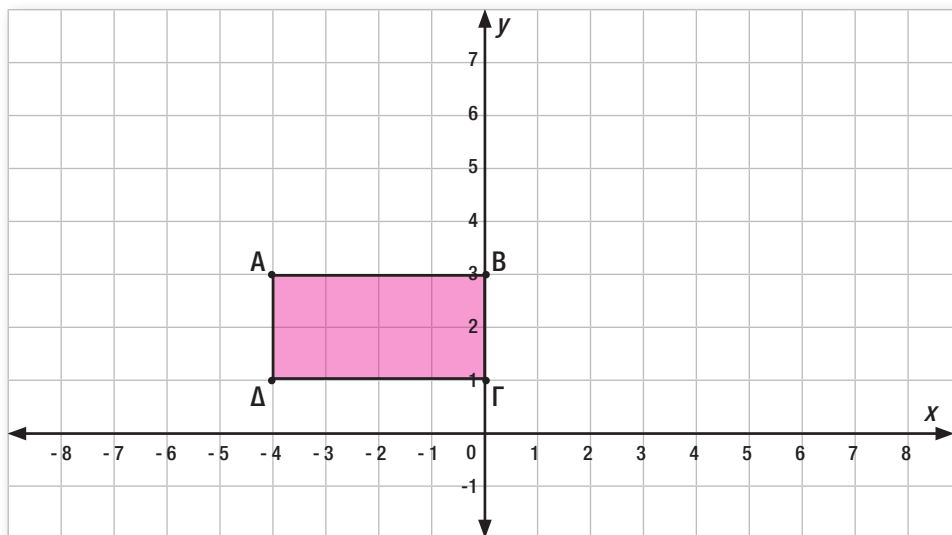
- Μεταφέρουμε 4 μονάδες προς τα κάτω τις κορυφές A , B και Γ .
- Σημειώνουμε τις κορυφές A' , B' και Γ' αντίστοιχα.
- Ενώνουμε τις κορυφές και κατασκευάζουμε το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$.

Τρίγωνο $AB\Gamma$	$A(4, 7)$	$B(6, 5)$	$\Gamma(2, 5)$
Τρίγωνο $A'B'\Gamma'$	$A'(4, 3)$	$B'(6, 1)$	$\Gamma'(2, 1)$



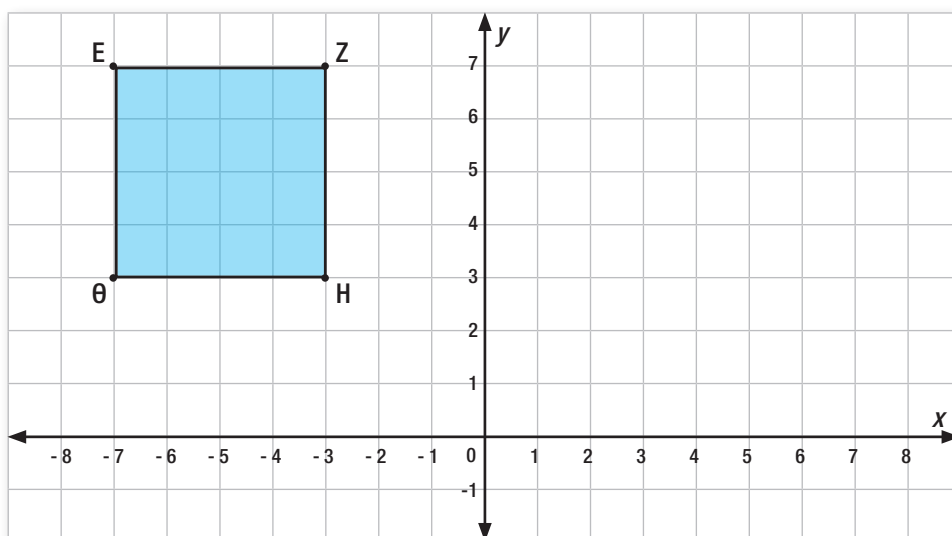
Δραστηριότητες 1

- 1.1. Να μεταφέρετε 4 μονάδες προς τα πάνω το ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ και να κατασκευάσετε το ορθογώνιο $Α'Β'Γ'Δ'$. Να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών του ορθογωνίου $Α'Β'Γ'Δ'$.



Ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$	$A (-4, 3)$	$B (0, 3)$	$\Gamma (0, 1)$	$\Delta (-4, 1)$
Ορθογώνιο $Α'Β'Γ'Δ'$	$A' (_, _)$	$B' (_, _)$	$\Gamma' (_, _)$	$\Delta' (_, _)$

- 1.2. Να μεταφέρετε 7 μονάδες προς τα δεξιά το τετράγωνο $ΕΖΗΘ$ και να κατασκευάσετε το τετράγωνο $Ε'Ζ'Η'Θ'$. Να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών του τετραγώνου $Ε'Ζ'Η'Θ'$.

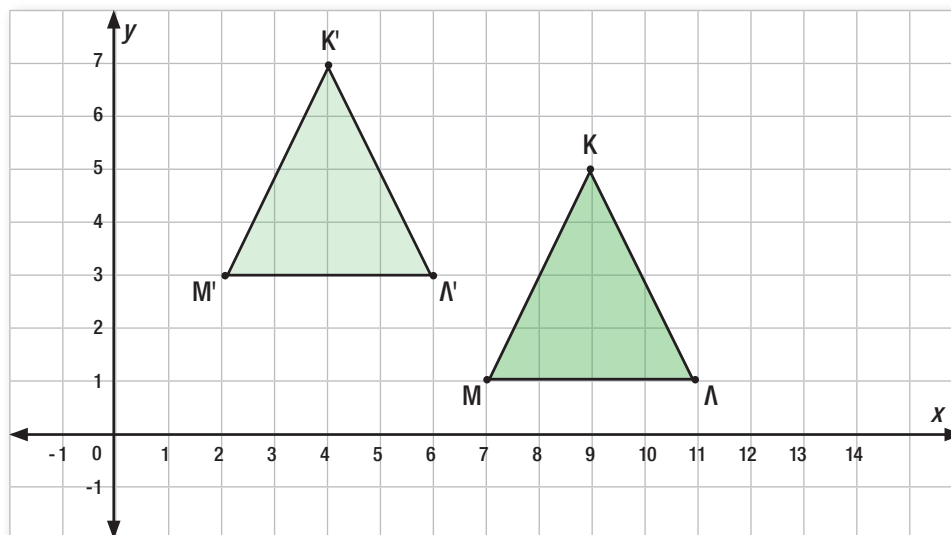


Τετράγωνο $ΕΖΗΘ$	$E (-7, 7)$	$Z (-3, 7)$	$H (-3, 3)$	$\Theta (-7, 3)$
Τετράγωνο $Ε'Ζ'Η'Θ'$	$E' (_, _)$	$Z' (_, _)$	$H' (_, _)$	$\Theta' (_, _)$



Αναστοχασμός

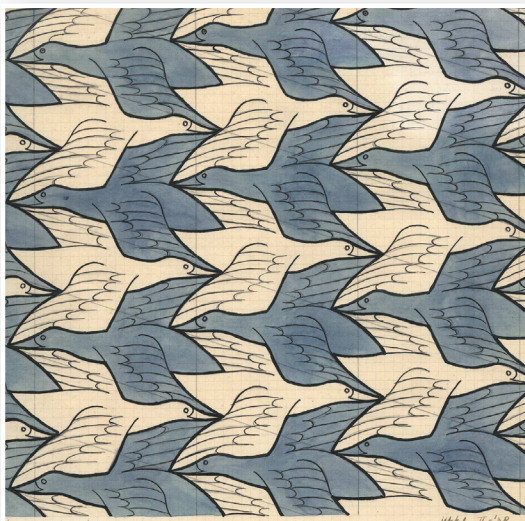
Πώς είναι δυνατόν το τρίγωνο ΚΛΜ να μεταφερθεί, ώστε να προκύψει το τρίγωνο Κ'Λ'Μ';



Εφαρμογή

- 1.3. Ο M.C. Escher (1898-1972 μ.Χ.) ήταν ένας Ολλανδός καλλιτέχνης που ξεχώρισε για την ικανότητα να συνδυάζει την τέχνη με τη γεωμετρία. Στα έργα του χρησιμοποιούσε συχνά επαναλαμβανόμενα μοτίβα με παραστάσεις ανθρώπων, ζώων ή αντικειμένων.

Πώς ο Escher χρησιμοποίησε την έννοια της μεταφοράς, για να δημιουργήσει τον πίνακα «Τα δύο πουλιά»;



M.C. Escher, Τα δύο πουλιά (1938)

<https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/two-birds>



Τα Μαθηματικά στον κόσμο

Η συμμετρία συναντάται παντού στον φυσικό κόσμο. Ορισμένα παραδείγματα παρουσιάζονται στις πιο κάτω εικόνες.

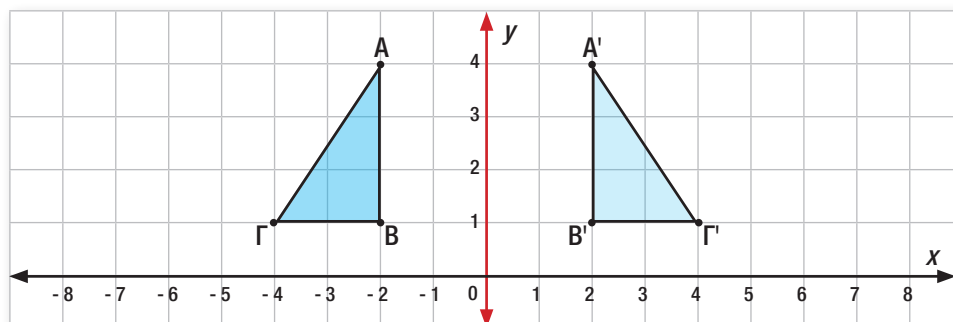


- Πώς η συμμετρία συνδέεται με την καλαισθησία και την ομορφιά;



Διερεύνηση

- (α) Ο Νίκος κατασκεύασε το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$, ώστε να είναι συμμετρικό του τριγώνου $AB\Gamma$, με άξονα συμμετρίας τον **κατακόρυφο άξονα** (κόκκινο χρώμα).



Να γράψετε την απόσταση των πιο κάτω σημείων από τον άξονα συμμετρίας.

A

A'

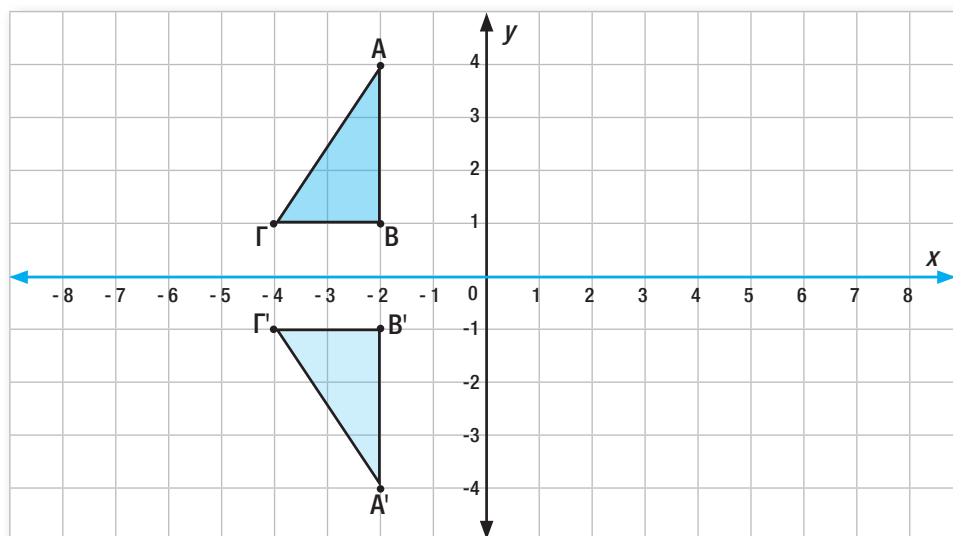
B

B'

Γ

Γ'

- (β) Η Άννα κατασκεύασε το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$, ώστε να είναι συμμετρικό του τριγώνου $AB\Gamma$, με άξονα συμμετρίας τον **οριζόντιο άξονα** (γαλάζιο χρώμα).



Να γράψετε την απόσταση των πιο κάτω σημείων από τον άξονα συμμετρίας.

A

A'

B

B'

Γ

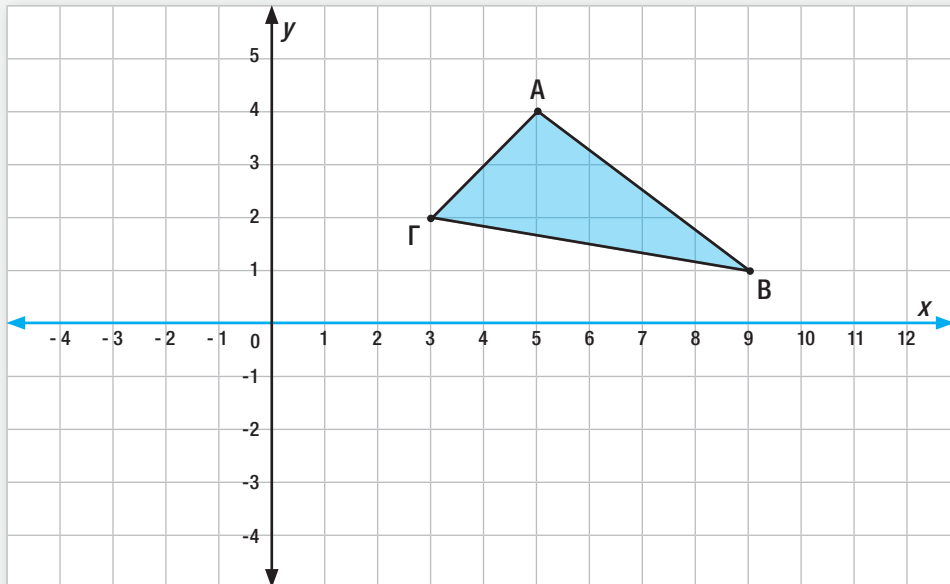
Γ'

- (γ) Να εκφράσετε την έννοια της συμμετρίας, με βάση την εργασία σας στα πιο πάνω ερωτήματα.

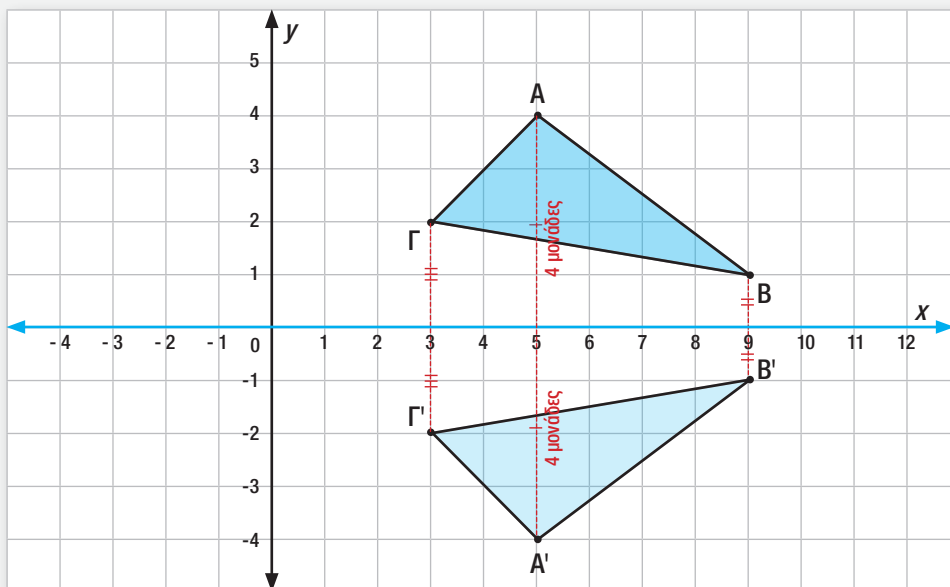


Παράδειγμα 1

Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του τριγώνου $AB\Gamma$, με άξονα συμμετρίας τον οριζόντιο άξονα.



Λύση:



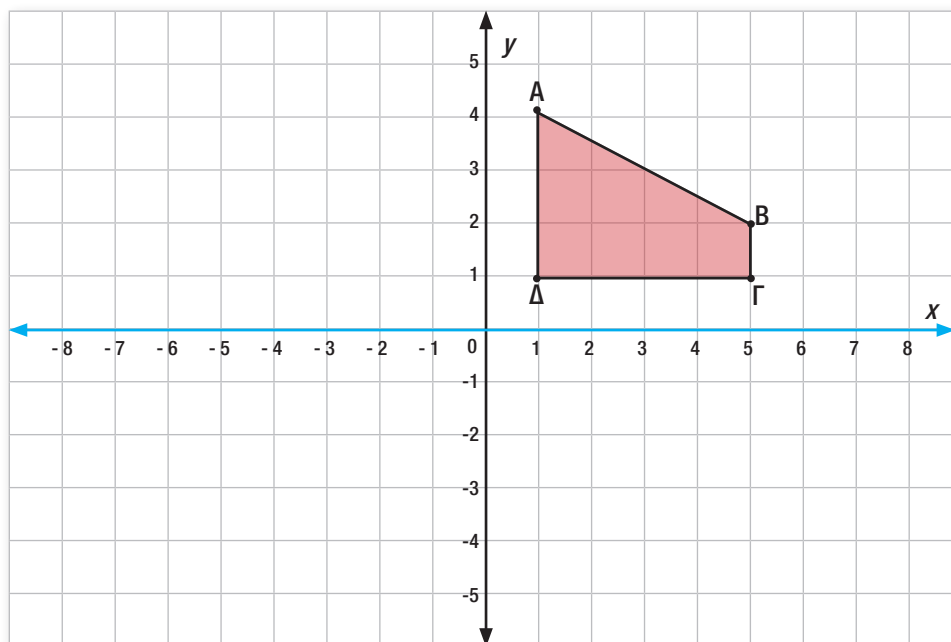
- Η κορυφή A απέχει 4 μονάδες από τον άξονα συμμετρίας.
- Κατασκευάζουμε τη συμμετρική κορυφή A' , ώστε να απέχει 4 μονάδες από τον άξονα συμμετρίας.
- Αντίστοιχα, βρίσκουμε πόσο απέχουν οι κορυφές B και Γ από τον άξονα συμμετρίας και κατασκευάζουμε τις συμμετρικές κορυφές B' και Γ' .
- Ενώνουμε τις κορυφές και κατασκευάζουμε το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$.



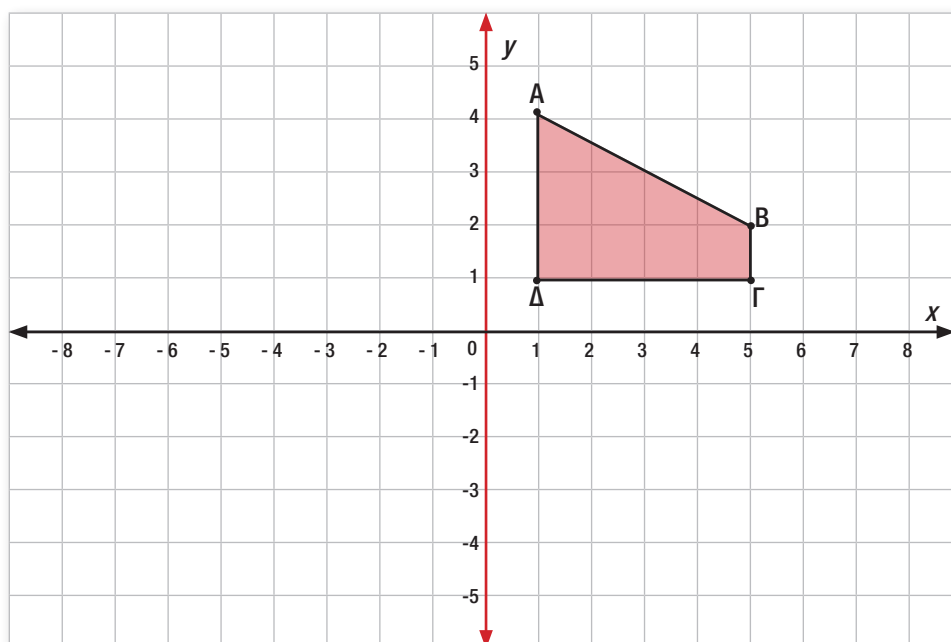
Δραστηριότητες 1

1.1. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ με άξονα συμμετρίας:

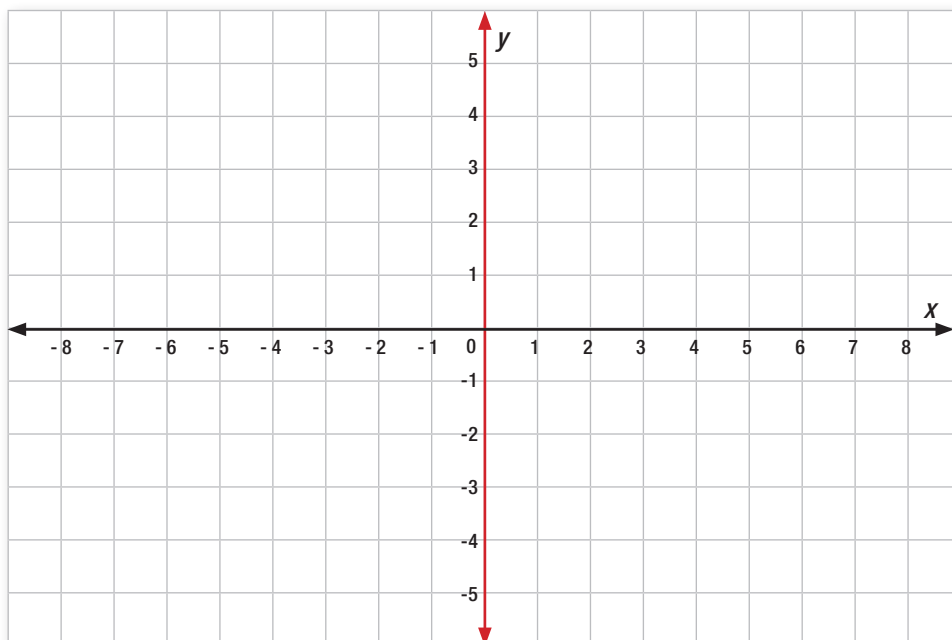
(α) τον οριζόντιο άξονα



(β) τον κατακόρυφο άξονα

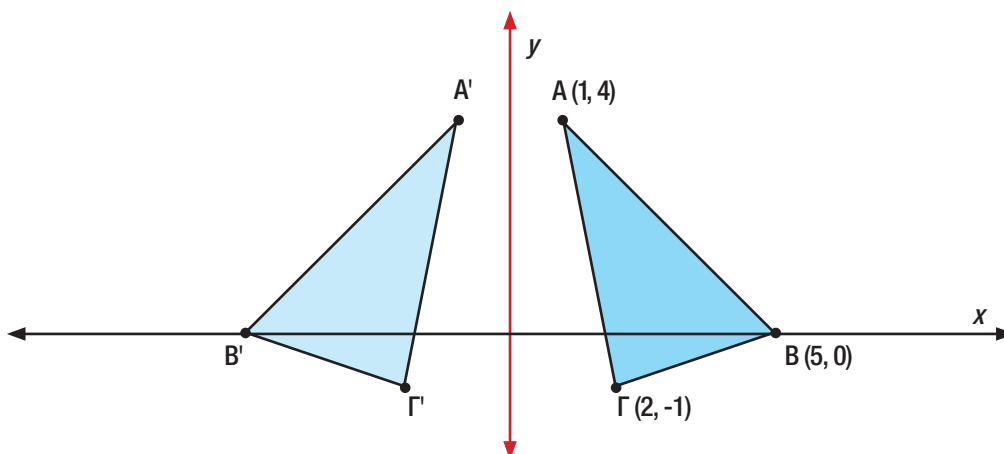


- 1.2. Να κατασκευάσετε το τρίγωνο ΕΖΗ, ώστε οι κορυφές του να έχουν τις συντεταγμένες που παρουσιάζονται στον πίνακα. Στη συνέχεια, να κατασκευάσετε το συμμετρικό τρίγωνο Ε'Ζ'Η', με άξονα συμμετρίας τον κατακόρυφο άξονα και να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών του.



Τρίγωνο ΕΖΗ	Ε (2 , 3)	Ζ (5 , 4)	Η (4 , -2)
Τρίγωνο Ε'Ζ'Η'	Ε' (__ , __)	Ζ' (__ , __)	Η' (__ , __)

- 1.3. Το τρίγωνο Α'Β'Γ' είναι συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ με άξονα συμμετρίας τον κατακόρυφο άξονα. Να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου Α'Β'Γ'.

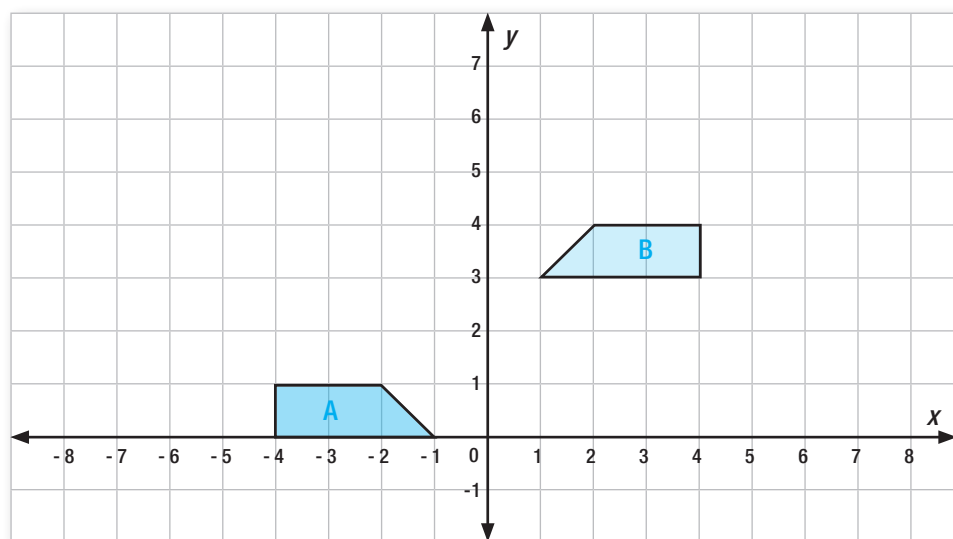


Τρίγωνο ΑΒΓ	Α (1 , 4)	Β (5 , 0)	Γ (2 , -1)
Τρίγωνο Α'Β'Γ'	Α' (__ , __)	Β' (__ , __)	Γ' (__ , __)



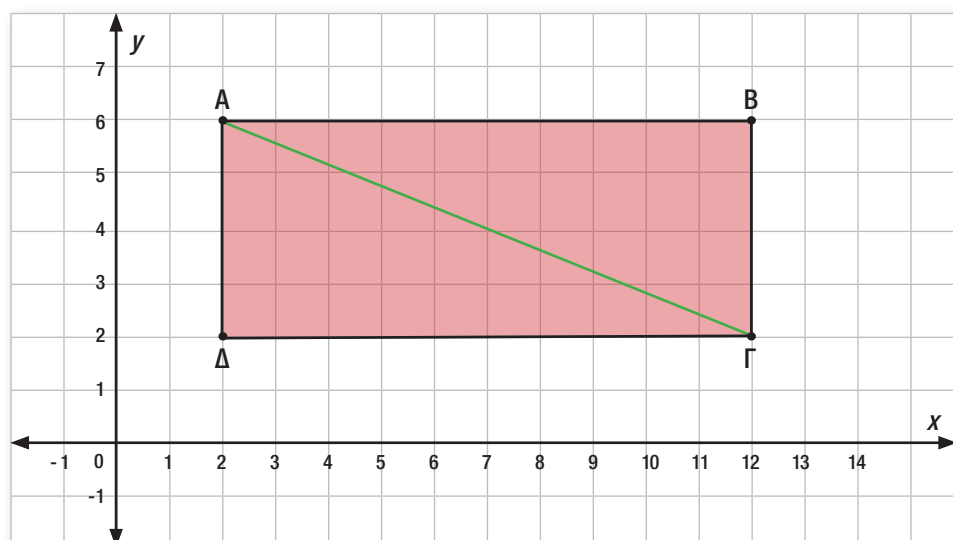
Επικοινωνία

1.4. Να περιγράψετε πώς προκύπτει το τραπέζιο Β από το τραπέζιο Α.



Αναστοχασμός

Γιατί η διαγώνιος ΑΓ δεν είναι άξονας συμμετρίας του ορθογωνίου ΑΒΓΔ;





Περίληψη Ενότητας

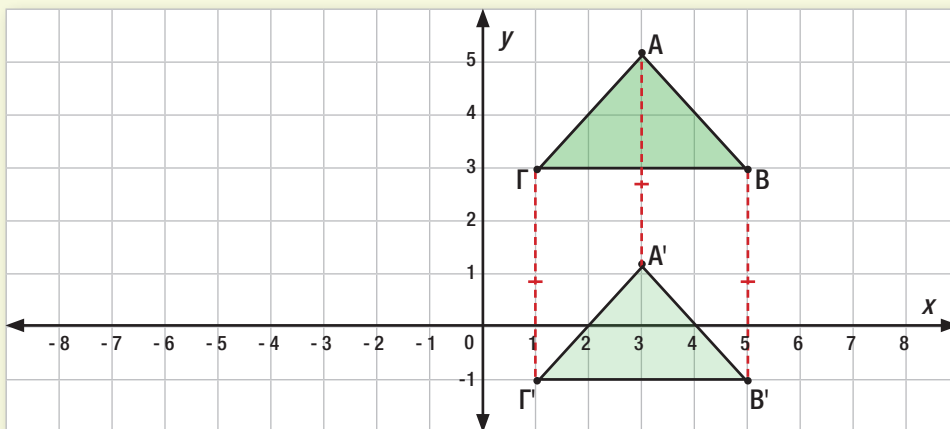
Κύκλος

- Ο **κύκλος** ορίζεται ως το σύνολο όλων των σημείων που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο, το οποίο λέγεται **κέντρο**. Η απόσταση αυτή ονομάζεται **ακτίνα**.
- **Διάμετρος** ενός κύκλου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου (O) και καταλήγει σε δύο σημεία που βρίσκονται στην περιφέρειά του.
- Η διάμετρος του κύκλου έχει μήκος διπλάσιο από την ακτίνα (R) του κύκλου.
- Ο τύπος υπολογισμού του μήκους του κύκλου (Γ) με ακτίνα R είναι:
 $\Gamma = \pi \cdot \text{Διάμετρος} = 2\pi R$.



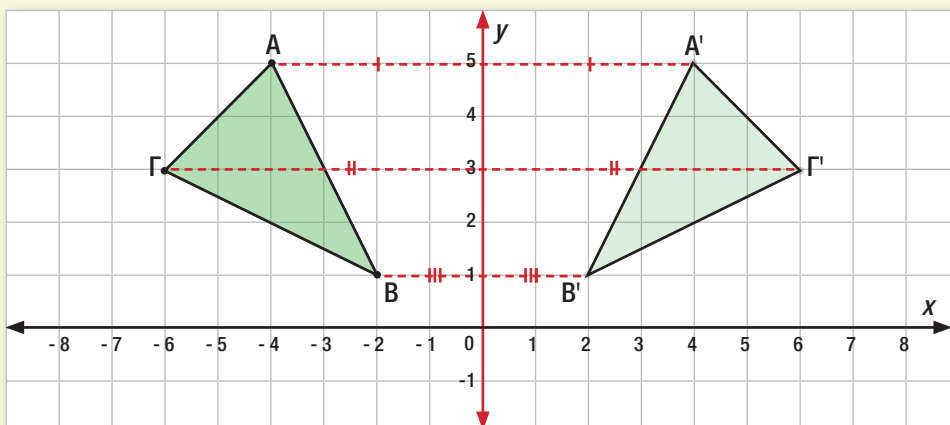
Μεταφορά

- Κάθε σημείο του σχήματος μετακινείται προς την ίδια κατεύθυνση και σε ίση απόσταση. Τα δύο σχήματα είναι ίσα μεταξύ τους.



Συμμετρία

- Κάθε σημείο των δύο σχημάτων βρίσκεται σε ίση απόσταση από τον άξονα συμμετρίας.

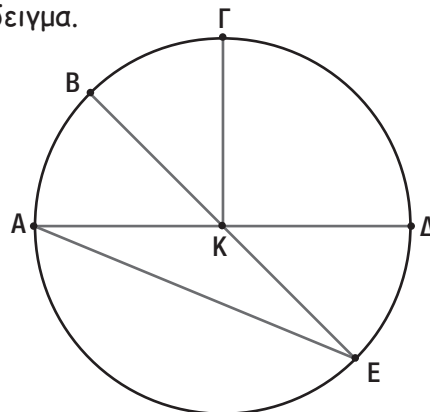




Επιπρόσθετες Δραστηριότητες

Κύκλος

- 1 Να αντιστοιχίσετε, όπως στο παράδειγμα.



Ακτίνα κύκλου

Διαμέτρος κύκλου

Ευθύγραμμο τμήμα ΚΓ

Ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ

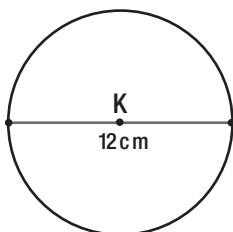
Ευθύγραμμο τμήμα ΚΒ

Ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ

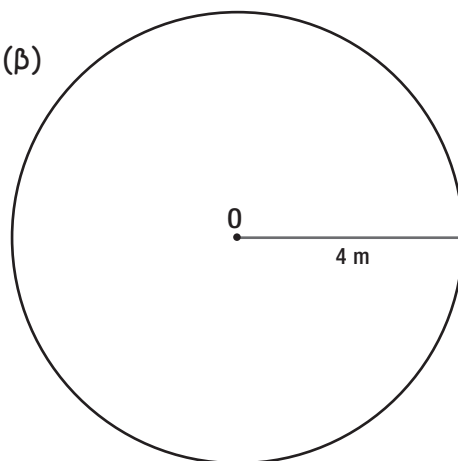
Ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ

- 2 Να υπολογίσετε το μήκος των πιο κάτω κύκλων.

(α)



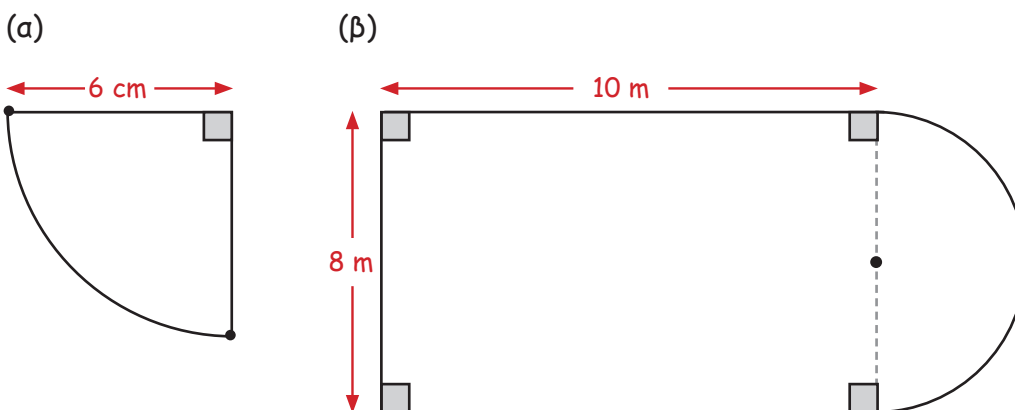
(β)



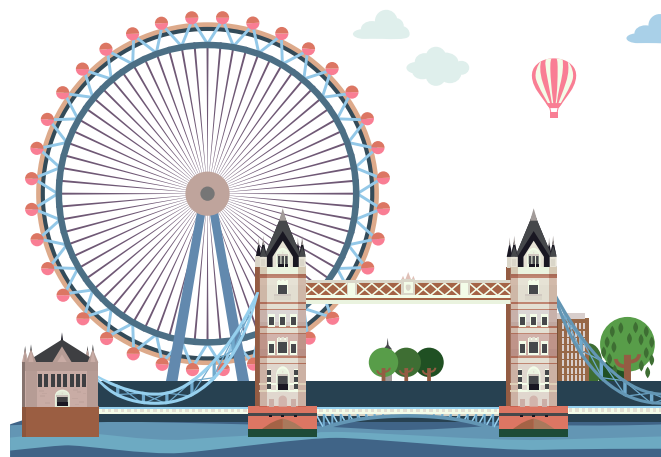
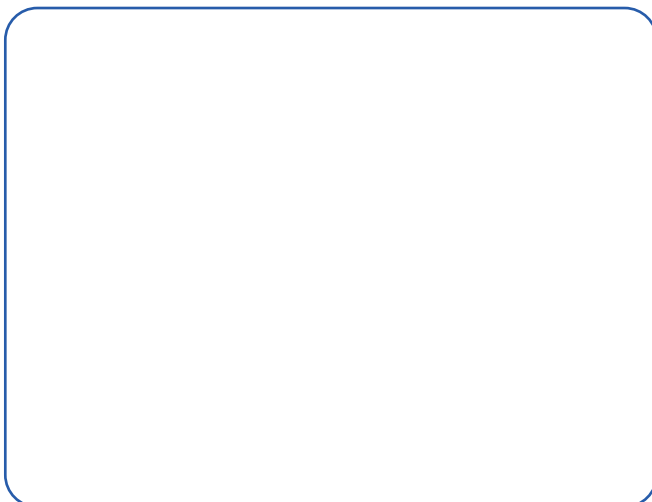
- 3 Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

Αντικείμενο σε σχήμα κύκλου	Ακτίνα	Διάμετρος	Μήκος κύκλου
Ρολόι τοίχου	10 cm		
Ρολόι χειριού		40 mm	
Χαλί	75 cm		
Τροχός ποδηλάτου			94,2 cm

- 4 Να υπολογίσετε την περίμετρο των πιο κάτω σχημάτων. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.



- 5 Η ρόδα London Eye στο Λονδίνο έχει διάμετρο 120 m. Να υπολογίσετε την απόσταση που καλύπτει ένα βαγόνι, ύστερα από μία πλήρη περιστροφή του.

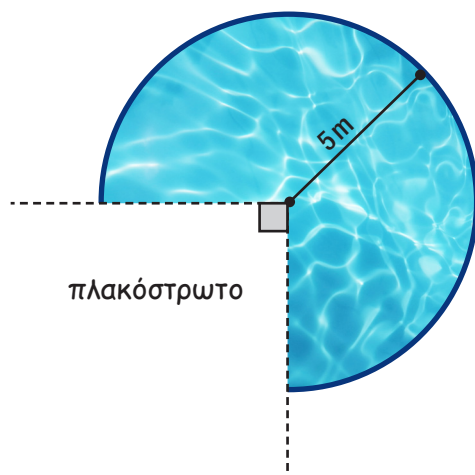




Εφαρμογή

6

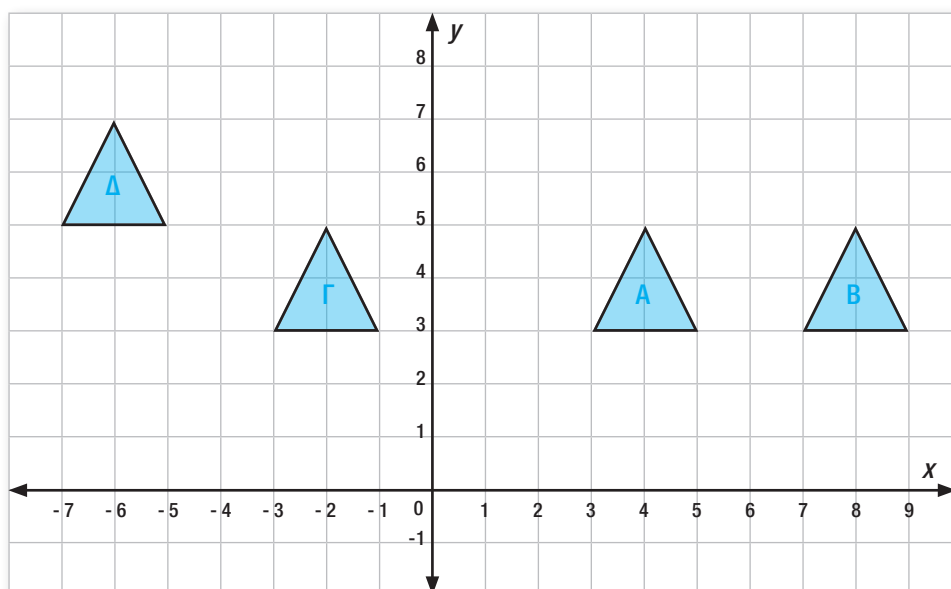
Να υπολογίσετε την περίμετρο της πιο κάτω πισίνας.



Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

7

Να περιγράψετε τη μεταφορά του τριγώνου:



(α) από τη θέση Α στη Β _____

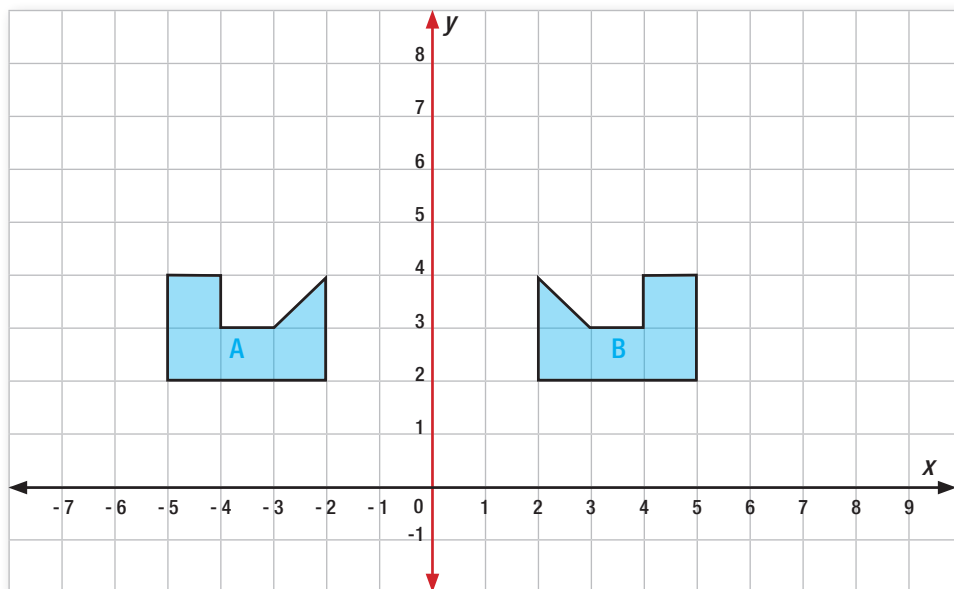
(β) από τη θέση Β στη Γ _____

(γ) από τη θέση Γ στη Δ _____

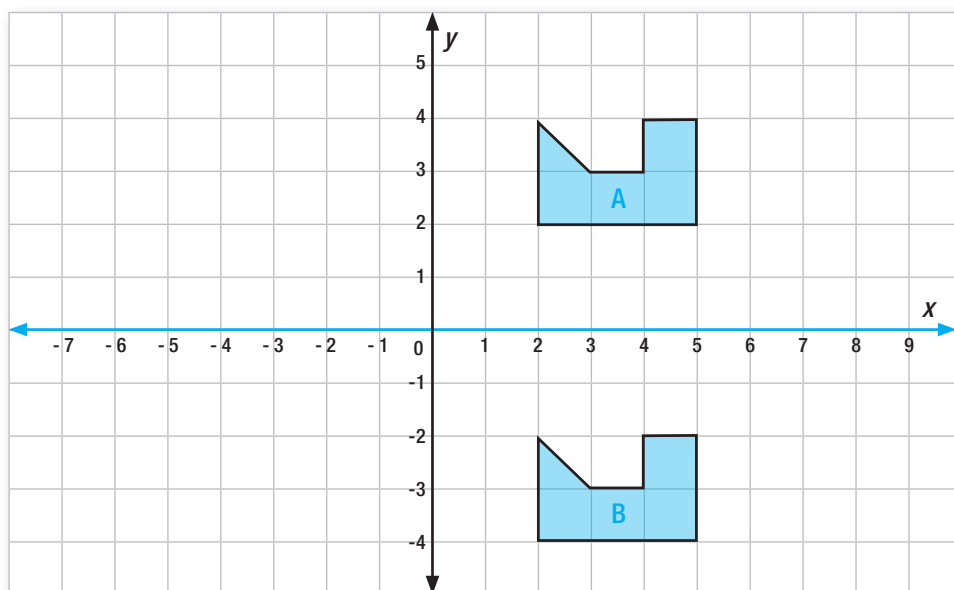
8

Να εξετάσετε κατά πόσο το σχήμα Β είναι συμμετρικό του σχήματος Α σε κάθε περίπτωση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)

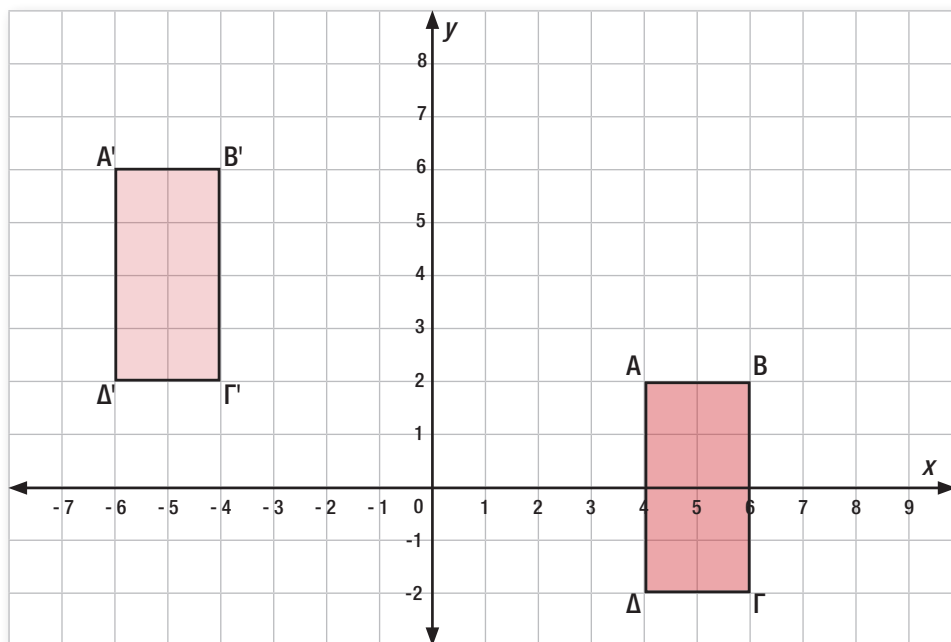


(β)



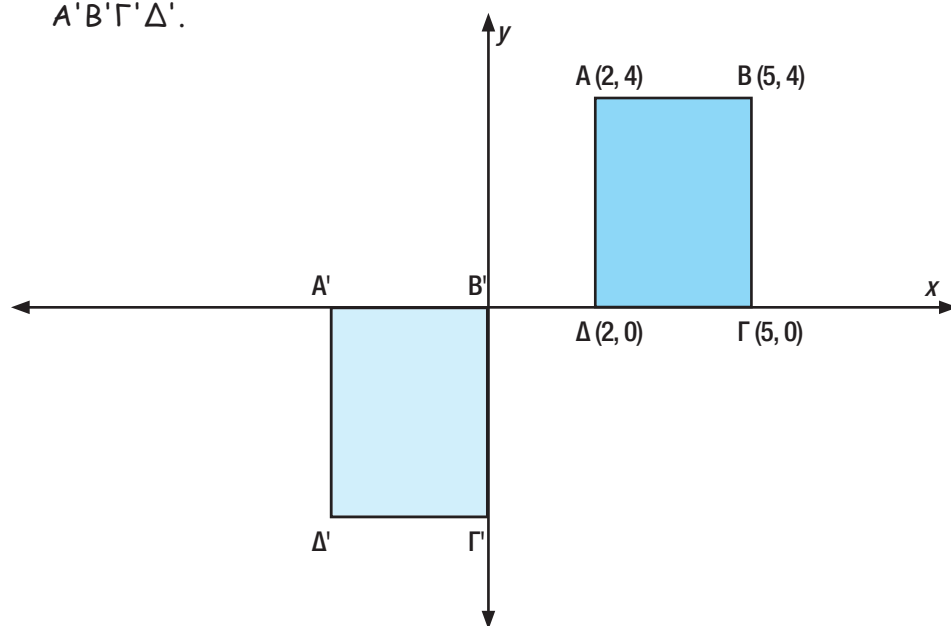
9

Να περιγράψετε πώς προκύπτει το ορθογώνιο $A'B'\Gamma'\Delta'$ από το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$.



10

Το ορθογώνιο $A'B'\Gamma'\Delta'$ προέκυψε από τη μεταφορά του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$. Να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών του ορθογωνίου $A'B'\Gamma'\Delta'$.



Ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$	$A(2, 4)$	$B(5, 4)$	$\Gamma(5, 0)$	$\Delta(2, 0)$
Ορθογώνιο $A'B'\Gamma'\Delta'$	$A'(_, _)$	$B'(0, 0)$	$\Gamma'(_, _)$	$\Delta'(_, _)$

