

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Β΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2022–23

Β΄ ΤΑΞΗΣ ΤΕΣΕΚ

Παρασκευή 19 Μαΐου 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 3-ΩΡΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (Α΄ ΣΕΙΡΑ)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Β0043

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90΄ ΛΕΠΤΑ

Προτεινόμενες λύσεις – οδηγός διόρθωσης

ΜΕΡΟΣ Α΄:

A1.	Να υπολογίσετε το μήκος ενός κύκλου, με ακτίνα ίση με 5 cm . <u>Λύση:</u> $\Gamma = 2\pi R \Rightarrow \Gamma = 2\pi \cdot 5 \Rightarrow \Gamma = 10\pi\text{ cm}$	(10) Σωστός τύπος 5μ Αντικατάσταση 3μ Αποτέλεσμα 2μ (Παράλειψη του π -1μ)
A2.	Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων: (α) $f(x) = x + 3, x \in \mathbb{R}$ (β) $g(x) = 2x^6, x \in \mathbb{R}$ <u>Λύση:</u> (α) $f(x) = x + 3, x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow f'(x) = 1, x \in \mathbb{R}$ (β) $g(x) = 2x^6, x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow g'(x) = 12x^5, x \in \mathbb{R}$	(5,5) (α) Παράγωγος του x 2,5μ Παράγωγος του 3 2,5μ (β) Συντελεστής 2,5μ Εκθέτης 2,5μ

A3.	<p>Το μήκος της ακτίνας ενός κύκλου είναι 3 cm. Να υπολογίσετε:</p> <p>(α) το εμβαδόν του κύκλου, (β) το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 120°.</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $E = \pi R^2 \Rightarrow E = \pi \cdot 3^2 \Rightarrow E = 9\pi\text{ cm}^2$</p> <p>(β) $\gamma = \frac{2\pi R\mu^\circ}{360^\circ} \Rightarrow \gamma = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 120^\circ}{360^\circ} \Rightarrow \gamma = 2\pi\text{ cm}$</p>	<p>(5,5)</p> <p>(α)</p> <p>Σωστός τύπος 3μ Αντικατάσταση 1μ Αποτέλεσμα 1μ</p> <p>(β)</p> <p>Σωστός τύπος 3μ Αντικατάσταση 1μ Αποτέλεσμα 1μ</p>
A4.	<p>Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:</p> <p>(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + x^3 + 5x - 2)$ (4 μονάδες)</p> <p>(β) $\lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{x^2 - 9x}{x - 9} \right)$ (6 μονάδες)</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + x^3 + 5x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4$ $= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x \right)^4 = (+\infty)^4 = +\infty$</p> <p>(β) $\lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{x^2 - 9x}{x - 9} \right)$</p> <p>Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 9x}{x - 9}, x \neq 9$ είναι ρητή και ο παρονομαστής της μηδενίζεται στο 9.</p> <p>Επομένως, απλοποιούμε τη συνάρτηση ως ακολούθως:</p> $f(x) = \frac{x^2 - 9x}{x - 9} = \frac{x(x - 9)}{(x - 9)} = x, \quad x \neq 9$ <p>Άρα $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9} x = 9$</p>	<p>(4,6)</p> <p>(α)</p> <p>Εφαρμογή της πρότασης για όριο πολυωνυμικής συνάρτησης στο $+\infty$ 2μ Αποτέλεσμα 2μ</p> <p>(β)</p> <p>Κοινός παράγοντας 3μ</p> <p>Απλοποίηση 1μ</p> <p>Όριο απλοποιημένης συνάρτησης 2μ</p>

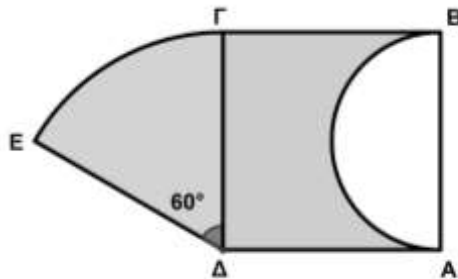
<p>A5.</p>	<p>Στο διπλανό σχήμα, δίνεται κυκλικός τομέας KAB ακτίνας $R = 4\text{ cm}$, με γωνία $\widehat{AKB} = 90^\circ$ και η χορδή AB.</p> <p>Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που αντιστοιχεί στη γωνία \widehat{AKB}.</p> <p>Λύση:</p> <p>Ο κυκλικός τομέας έχει ακτίνα $R = 4\text{ cm}$ και $\widehat{AKB} = 90^\circ$</p> $E_{\text{κυκλικού τμήματος}} = E_{\text{κυκλικού τομέα}(AKB)} - E_{\text{τριγώνου}(AKB)}$ $E_{\text{κυκλικού τομέα}} = \frac{\pi R^2 \mu^\circ}{360^\circ}$ $\Rightarrow E_{\text{κυκλικού τομέα}(AKB)} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = 4\pi\text{ cm}^2$ $E_{\text{τριγώνου}} = \frac{\beta \cdot \nu}{2}$ $\Rightarrow E_{\text{τριγώνου}(AKB)} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8\text{ cm}^2$ $\Rightarrow E_{\text{κυκλικού τμήματος}} = (4\pi - 8)\text{ cm}^2$	<p>(10)</p> <p>Σχέση $E_{\text{κυκλ. τμήμ.}}$ 3μ</p> <p>Τύπος $E_{\text{κυκλ. τομέα}}$ 2μ</p> <p>Αντικατάσταση 1μ</p> <p>Υπολογισμός 1μ</p> <p>Τύπος $E_{\text{τριγώνου}}$ 1μ</p> <p>Αντικατάσταση 0,5μ</p> <p>Υπολογισμός 0,5μ</p> <p>Αποτέλεσμα 1μ (Παράλειψη του π -1μ)</p>
<p>A6.</p>	<p>Τα πλευρικά όρια της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο $x = 2$ είναι $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2\beta - 6$ και $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \beta + 4$.</p> <p>(α) Να υπολογίσετε την τιμή του β, $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (6 μονάδες)</p> <p>(β) Αν $\beta = 10$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. (4 μονάδες)</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) Το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ υπάρχει αν και μόνον αν υπάρχουν τα δύο πλευρικά όρια της συνάρτησης f στο 2 και είναι ίσα.</p> <p>Δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$</p> $\Rightarrow 2\beta - 6 = \beta + 4 \Rightarrow 2\beta - \beta = 6 + 4 \Rightarrow \beta = 10$	<p>(6,4)</p> <p>(α)</p> <p>Ισότητα πλευρικών ορίων 3μ</p> <p>Σχηματισμός εξίσωσης 2μ</p> <p>Απάντηση 1μ</p>

<p>(β) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \beta + 4 = 10 + 4 = 14$</p> <p>άρα $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 14$</p> <p>$A = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$</p> <p>$= 3 \cdot 14 = 42$</p>	<p>(β)</p> <p>Υπολογισμός κάθε ορίου 3x1μ</p> <p>Υπολογισμός του αθροίσματος 1μ</p>
---	--

ΜΕΡΟΣ Β΄:

<p>B1. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f</p> <p>(α) Να βρείτε τα πιο κάτω όρια:</p> <p>(i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$</p> <p>(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$</p> <p>(iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$</p> <p>(iv) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$</p> <p>(v) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$</p> <p>(vi) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$</p> <div data-bbox="532 655 1125 1087" data-label="Figure"> </div> <p style="text-align: right;">(12 μονάδες)</p> <p>(β) Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (3 μονάδες)</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) (i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$</p> <p>(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$</p> <p>(iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$</p> <p>(iv) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -2$</p> <p>(v) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$</p> <p>(vi) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$</p>	<p>(12, 3)</p> <p>(α)</p> <p>Για κάθε όριο με σωστή απάντηση 2μ</p>
--	--

	<p>(β) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$</p> <p>επομένως, το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ δεν υπάρχει</p> <p>εφόσον $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$</p>	<p>(β)</p> <p>Μη ύπαρξη του ορίου 2μ</p> <p>Ορθή αιτιολόγηση 1μ</p>
<p>B2.</p>	<p>Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x + x^{-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.</p> <p>(α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f. (4 μονάδες)</p> <p>(β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση $xf(x) - x^2f'(x) - 2 = 0$. (6 μονάδες)</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $f(x) = x + x^{-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\Rightarrow f'(x) = 1 - x^{-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$</p> <p>(β) $xf(x) - x^2f'(x) - 2 =$ $= x(x + x^{-1}) - x^2(1 - x^{-2}) - 2$ $= x^2 + x \cdot x^{-1} - x^2 + x^2 \cdot x^{-2} - 2$ $= 1 + 1 - 2$ $= 0$</p>	<p>(4, 6)</p> <p>(α)</p> <p>Παράγωγος του x 2μ</p> <p>Παράγωγος του x^{-1} 2μ</p> <p>(β)</p> <p>Αντικατάσταση 2μ</p> <p>Επιμεριστική ιδιότητα 4x0,5μ</p> <p>Πράξεις 1μ</p> <p>Αποτέλεσμα 1μ</p>
<p>B3.</p>	<p>Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με μήκος πλευράς 6 cm. Με διάμετρο την πλευρά AB γράφουμε ημικύκλιο εντός του τετραγώνου. Με κέντρο την κορυφή Δ και ακτίνα την πλευρά $\Delta\Gamma$ γράφουμε τόξο γωνίας 60° εκτός του τετραγώνου. Να υπολογίσετε:</p> <p>(α) το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου, (8 μονάδες)</p> <p>(β) την περίμετρο του σκιασμένου χωρίου. (7 μονάδες)</p>	



Λύση:**(α)** Το μήκος της πλευράς του τετραγώνου $ABΓΔ$ είναι 6 cm συνεπώς, ο κυκλικός τομέας $ΔΕΓ$ έχει ακτίνα $R = ΔΓ = 6\text{ cm}$ και το ημικύκλιο με διάμετρο την AB έχει ακτίνα $\rho = \frac{R}{2} = 3\text{ cm}$

$$E_{\text{σκιασμένου χωρίου}} = E_{\text{τετραγώνου}} + E_{\text{κυκλικού τομέα}} - E_{\text{ημικυκλίου}}$$

$$E_{\text{τετραγώνου}} = R^2 \Rightarrow E_{\text{τετραγώνου}} = 6^2 = 36\text{ cm}^2$$

$$E_{\text{κυκλικού τομέα}} = \frac{\pi R^2 \mu^\circ}{360^\circ} \Rightarrow E_{\text{κυκλικού τομέα}} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = 6\pi\text{ cm}^2$$

$$E_{\text{ημικυκλίου}} = \frac{\pi \cdot \rho^2}{2} \Rightarrow E_{\text{ημικυκλίου}} = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2}\text{ cm}^2$$

$$E_{\text{σκιασμένου χωρίου}} = 36 + 6\pi - \frac{9\pi}{2} = \left(36 + \frac{3\pi}{2}\right)\text{ cm}^2$$

$$\text{(β)} \quad \Pi_{\text{σκιασμένου χωρίου}} = (BΓ) + (AΔ) + (EΔ) + \gamma_{\widehat{AB}} + \gamma_{\widehat{EΓ}}$$

$$(BΓ) = (AΔ) = (EΔ) = R = 6\text{ cm}$$

$$\gamma_{\text{ημικ.}} = \frac{2\pi\rho}{2} \Rightarrow \gamma_{\widehat{AB}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3}{2} = 3\pi\text{ cm}$$

$$\gamma = \frac{2\pi R \mu^\circ}{360^\circ} \Rightarrow \gamma_{\widehat{EΓ}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = 2\pi\text{ cm}$$

$$\Pi_{\text{σκιασμένου χωρίου}} = 3 \cdot 6 + 2\pi + 3\pi = (18 + 5\pi)\text{ cm}$$

(8, 7)**(α)**Ακτίνα κυκλικού
τομέα **0,5μ**Υπολογισμός ακτίνας
ημικυκλίου **0,5μ**Σχέση $E_{\text{σκιασμένου}}$
1,5μΤύπος $E_{\text{τετρ.}}$ **0,5μ**Αντικατάσταση **0,5μ**Υπολογισμός **0,5μ**Τύπος $E_{\text{κ.τομέα}}$ **0,5μ**Αντικατάσταση **0,5μ**Υπολογισμός **0,5μ**Τύπος $E_{\text{ημικ.}}$ **0,5μ**Αντικατάσταση **0,5μ**Υπολογισμός **0,5μ**Αποτέλεσμα **1μ****(β)**Σχέση $\Pi_{\text{σκιασμένου}}$ **1μ** $(BΓ) = (AΔ) = (EΔ) = R$
1μΤύπος $\gamma_{\text{ημικ.}}$ **1μ**Αντικατάσταση **0,5μ**Υπολογισμός **0,5μ**Τύπος γ **1μ**Αντικατάσταση **0,5μ**Υπολογισμός **0,5μ**Αποτέλεσμα **1μ**
(Παράλειψη του π -1μ)**ΤΕΛΟΣ ΟΔΗΓΟΥ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ**