ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ – ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ – Α΄ ΣΕΙΡΑ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>: Αποτελείται από 6 ασκήσεις και βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

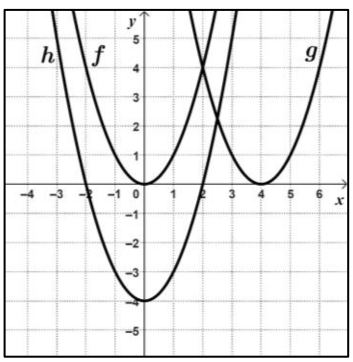
Α1. Να εξετάσετε αν η παραβολή με εξίσωση $f(x) = 3x^2 + 5,\ x \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή. Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

ΛΥΣΗ:

8μ 2μ

Η παραβολή παρουσιάζει ελάχιστη τιμή εφόσον $\alpha = 3 > 0$

Α2. Στο πιο κάτω διάγραμμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και h. Η συναρτηση f έχει τύπο $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$, και οι συναρτησεις g και h είναι μετατοπίσεις της f. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, με το κατάλληλο γράμμα, αντιστοιχίζοντας σε κάθε εξίσωση τη σωστή γραφική παράσταση.



ΛΥΣΗ:

Εξίσωση	Γραφική παράσταση	
$y = x^2 - 4$	$\boldsymbol{h}$	5μ
$y = (x - 4)^2$	$\boldsymbol{g}$	5μ

Α3. Να λύσετε την ανίσωση: $(x-3)(x+4) < 0$

ΛΥΣΗ:

2μ 2μ

$(x-3)(x+4) = 0 \ \Rightarrow\ x = 3$ ή $x = -4$

Πίνακας προσήμου του τριωνύμου $(x-3)(x+4)$

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$	1,5μ
$(x-3)(x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$		1,5μ

Επομένως, έχουμε ότι $(x-3)(x+4) < 0$, όταν $x \in (-4\,, 3\,)$ 3μ

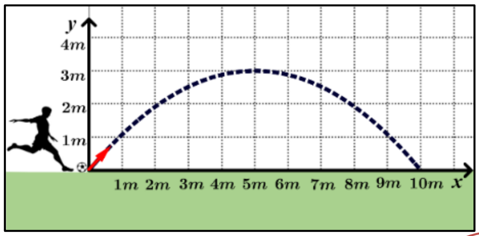
(αν ο μαθητής γράψει $x \in [-4\,, 3\,]$ αφαιρούμε 1 μονάδα)

Α4. Ένας ποδοσφαιριστής κλωτσά μια μπάλα, η οποία διαγράφει παραβολική τροχιά και χτυπά στο έδαφος σε απόσταση $10m$ από αυτόν, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Αν η τροχιά της μπάλας έχει εξίσωση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, x \in [0,10], \alpha \neq 0$, με τη βοήθεια σχήματος, να βρείτε:

(α) το πρόσημο του α **(4 μονάδες)**

(β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής **(3 μονάδες)**

(γ) το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει η μπάλα. **(3 μονάδες)**



ΛΥΣΗ:

(α) το πρόσημο του α είναι αρνητικό ή $\alpha < 0$ 4μ

(β) η εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής είναι $x = 5$ 3μ

(γ) το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει η μπάλα είναι $3m$ 3μ

Α5. Να απλοποιήσετε το κλάσμα: $\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-2x}$

ΛΥΣΗ:

$x^2 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0\,,\ x \neq 2$

$2x^2 - 3x - 2$ **(αν ο μαθητής γράψει <u>μόνο</u> $\alpha = 2,\ \beta = -3,\ \gamma = -2$ παίρνει 1,5 μονάδες)**

2μ 0,5μ 0,5μ

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2} = \frac{+3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{+3 \pm 5}{4}$$

1μ $\Rightarrow\ x_1 = 2\,,\ x_2 = -\dfrac{1}{2}$ 1μ

(αν ο μαθητής γράψει <u>μόνο</u> τον τύπο για τον υπολογισμό των ριζών παίρνει 1 μονάδα)

Επομένως, $2x^2 - 3x - 2 = 2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-2)(2x+1)$ 1μ

0,5μ 0,5μ 0,5μ

(αν ο μαθητής αναλύσει το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2 = (x-2)(2x+1)$ χωρίς τη χρήση του τύπου παίρνει τις 7,5 μονάδες)

1μ

Συνεπώς, $\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-2x} = \dfrac{(x-2)(2x+1)}{x(x-2)} = \dfrac{2x+1}{x}\,,\ x \neq 0\,, x \neq 2$

1,5μ

Α6. Το άθροισμα των ηλικιών του Πέτρου και της Μαρίας είναι 23 και το γινόμενο των ηλικιών τους 120. Αν ο Πέτρος είναι μεγαλύτερος από τη Μαρία, να βρείτε την ηλικία του καθενός.

ΛΥΣΗ:

α΄ τρόπος

Έστω x η ηλικία του Πέτρου και y η ηλικία της Μαρίας

Σύστημα εξισώσεων: $\begin{cases} x+y=23 \\ xy=120 \end{cases}$ 1μ 1μ

$x+y=23 \Leftrightarrow x=23-y$ 1μ

Αντικαθιστούμε το $x=23-y$ στην εξίσωση $xy=120$ και έχουμε:

1μ $(23-y)y=120 \Leftrightarrow -y^2+23y=120 \Leftrightarrow y^2-23y+120=0$ 1μ

1μ $\Leftrightarrow (y-8)(y-15)=0 \quad \Rightarrow \quad y=8$ 1μ ή $y=15$ 1μ

Αντικαθιστούμε τις τιμές του y στην εξίσωση $x=23-y$ και έχουμε:

για $y=8 \Longrightarrow x=23-8=15$ 0,5μ

για $y=15 \Longrightarrow x=23-15=8$ 0,5μ

Ο Πέτρος είναι 15 χρονών και η Μαρία 8 χρονών (ο Πέτρος είναι μεγαλύτερος της Μαρίας) 1μ

β΄ τρόπος

Έστω, x_1 η ηλικία του Πέτρου και x_2 η ηλικία της Μαρίας $(x_1>x_2)$

2μ $S=x_1+x_2=23$ και $P=x_1\cdot x_2=120$ 2μ

$x^2-Sx+P=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-23x+120=0$ 2μ

$\Leftrightarrow (x-8)(x-15)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=15 \ , \ x_2=8$

1μ 1μ 1μ

Ο Πέτρος είναι 15 χρονών και η Μαρία 8 χρονών (ο Πέτρος είναι μεγαλύτερος της Μαρίας) 1μ

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>: Αποτελείται από 3 ασκήσεις και βαθμολογείται με 40 μονάδες.
Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με 10 μονάδες και οι ασκήσεις Β2 και Β3 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία.

Β1. Στο διπλανό διάγραμμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ x \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0.$

Να βρείτε:

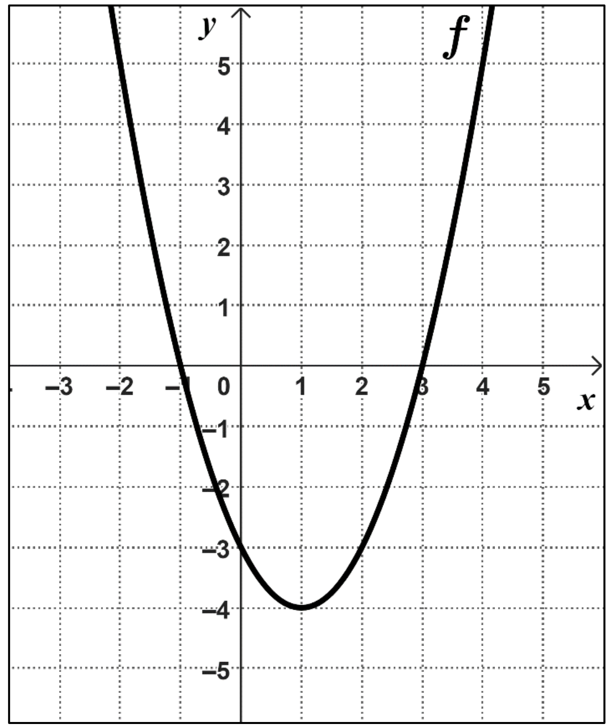
(α) την τιμή του γ

(β) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

(γ) το πρόσημο της διακρίνουσας της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

(δ) τις λύσεις $x_1,\ x_2$ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

(ε) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0$



(10 μονάδες)

ΛΥΣΗ:

(α) $\gamma = -3$

(β) $[-4\,,+\infty)$

(γ) $\Delta > 0$

5 x 2μ

(δ) $x_1 = -1,\ x_2 = 3$

(ε) $x \in [-1\,,3]$

B2. Αν x_1, x_2 είναι οι πραγματικές λύσεις της εξίσωση $x^2 - 6x + 4 = 0$, **χωρίς να λύσετε την εξίσωση**, να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $x_1 + x_2$ **(3 μονάδες)**

(β) $x_1 \cdot x_2$ **(3 μονάδες)**

(γ) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ **(4 μονάδες)**

(δ) $(x_1 - 3)(x_2 - 3)$ **(5 μονάδες)**

ΛΥΣΗ:

0,5μ

(α) $x_1 + x_2 = S = -\dfrac{\beta}{a} = \dfrac{6}{1} = 6$ 1μ

1μ 0,5μ

1μ 0,5μ

(β) $x_1 \cdot x_2 = P = \dfrac{\gamma}{a} = \dfrac{4}{1} = 4$ 1μ

0,5μ

1μ 0,5μ

(γ) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ 1μ

1μ 0,5μ

(δ) $(x_1 - 3)(x_2 - 3) = x_1 x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 9 = x_1 \cdot x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 = 4 - 3 \cdot 6 + 9 = -5$

4 x 0,5μ 1μ 0,5μ 0,5μ 1μ

Β3. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\kappa - 2)x + 5 - \kappa = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

(α) Να υπολογίσετε την τιμή του κ, $\kappa \in \mathbb{R}$, για κάθε περίπτωση ξεχωριστά, ώστε η εξίσωση να έχει:

(i) λύση τον αριθμό 3 **(4 μονάδες)**

(ii) λύσεις αντίστροφες **(4 μονάδες)**

(β) Για ποιες τιμές του κ, $\kappa \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει λύσεις πραγματικές και άνισες; **(7 μονάδες)**

ΛΥΣΗ:

(α) (i) Αντικαθιστούμε το $x = 3$ στην εξίσωση $x^2 + (\kappa - 2)x + 5 - \kappa = 0$:

$$3^2 + (\kappa - 2) \cdot 3 + 5 - \kappa = 0 \iff 9 + 3\kappa - 6 + 5 - \kappa = 0 \iff 3\kappa - \kappa = -9 + 6 - 5$$

0,5μ 0,5μ 1μ

$$\iff 2\kappa = -8 \iff \kappa = -4$$

1μ 1μ

(ii) Η εξίσωση έχει λύσεις αντίστροφες, όταν:

0,5μ

$$P = 1 \iff \frac{\gamma}{\alpha} = 1 \Rightarrow \frac{5 - \kappa}{1} = 1 \iff 5 - \kappa = 1 \iff \kappa = 4$$

1μ 1μ 0,5μ 1μ

(β) Η εξίσωση έχει λύσεις πραγματικές και άνισες, όταν:

1μ 0,5μ 0,5μ 0,5μ

$$\Delta > 0 \iff \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \Rightarrow (\kappa - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5 - \kappa) > 0$$

$$\iff \kappa^2 - 4\kappa + 4 - 20 + 4\kappa > 0 \iff \kappa^2 - 16 > 0 \iff (\kappa - 4)(\kappa + 4) > 0$$

0,5μ 0,5μ

Οι ρίζες του τριωνύμου $(\kappa - 4)(\kappa + 4)$ είναι $\kappa_1 = 4$, $\kappa_2 = -4$

0,5μ 0,5μ

Πίνακας προσήμου του τριωνύμου $(\kappa - 4)(\kappa + 4)$

κ	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$(\kappa - 4)(\kappa + 4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1,5μ

Έχουμε ότι, $(\kappa - 4)(\kappa + 4) > 0$, όταν $\kappa \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$ 1μ

ΤΕΛΟΣ ΟΔΗΓΟΥ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ