ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Β΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2022-23
Α΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ

ΔΕΥΤΕΡΑ 22 ΜΑΪΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (Α΄ ΣΕΙΡΑ)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Α037

ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ

<u>Γενική Σημείωση:</u>
(α) Η ελάχιστη υποδιαίρεση βαθμού σε κάθε σημείο αξιολόγησης είναι 0,5 της μονάδας.
(β) Για την γενική παράληψη των μονάδων μέτρησης αφαιρείται 1 μονάδα.

ΜΕΡΟΣ Α΄:

Α1 . Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2 - 5x - 2 > 0$

Λύση:

Βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

$$\alpha = 3, \beta = -5, \gamma = -2 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} \dfrac{5+7}{6} = 2 \\ \dfrac{5-7}{6} = -\mathbf{\dfrac{1}{3}} \end{cases}$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου:

λ	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$\lambda^2 + 2\lambda - 3$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Λύση ανίσωσης: $\mathbf{x} \in (-\infty, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}) \cup (\mathbf{2}, +\infty)$

Αναγνώριση α,β,γ **1μ**
(αν δεν δηλωθούν ονομαστικά αλλά η αντικατάσταση στον τύπο είναι ορθή να δοθεί η μονάδα)

Τύπος **1μ**

Αντικατάσταση και εύρεση των ορθών λύσεων της εξίσωσης **2μ**

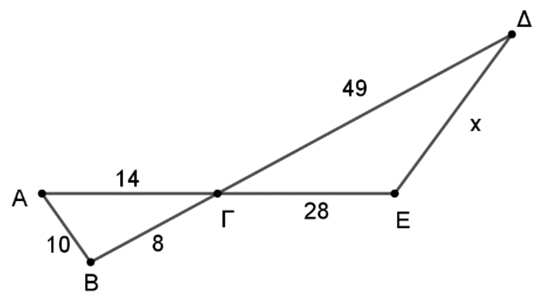
Ορθή τοποθέτηση λύσεων στον πίνακα **2μ**

Ορθή τοποθέτηση των προσήμων στον πίνακα **2μ**

Εύρεση λύσεων ανίσωσης **2μ**

(**Εάν η λύση δοθεί γραφικά ή αλγεβρικά να γίνει αποδεκτή**)

Α2 . Στο επόμενο σχήμα οι ευθείες AE και $B\Delta$ τέμνονται στο σημείο Γ. Δίνονται τα μήκη των πλευρών, $A\Gamma = 14cm$, $B\Gamma = 8cm$, $\Gamma\Delta = 49cm$, $\Gamma E = 28cm$ και $AB = 10cm$. Να βρείτε το μήκος της ΔE.



Λύση:

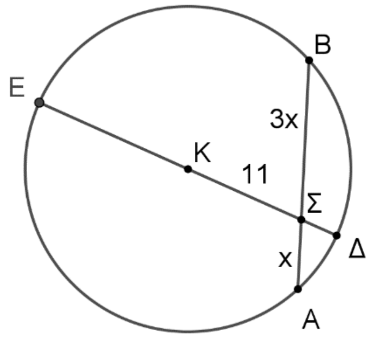
Παρατηρούμε από το σχήμα ότι:

$\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{14}{49} = \frac{2}{7}$ καθώς και $\frac{B\Gamma}{\Gamma E} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$

Αναγνώριση ότι θα πρέπει να συγκρίνει ως προς την ομοιότητα τα δυο τρίγωνα **2μ**

Εύρεση ομολόγων πλευρών και λόγου ομοιότητας **2μ**

$\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E}$ (κατακορυφήν γωνίες). Άρα τα τρίγωνα ΑΓΒ και ΔΓΕ είναι όμοια αφού έχουν 2 πλευρές ανάλογες και την περιεχόμενη γωνία ίση. $\Rightarrow \mathrm{A\Gamma B} \approx \Delta\Gamma\mathrm{E}$ Επομένως αφού τα τρίγωνα είναι όμοια θα ισχύει πως $\frac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}} = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{10}{\mathrm{x}} = \frac{2}{7} \Rightarrow 2\mathrm{x} = 70 \Rightarrow$ $\mathbf{x = 35}\boldsymbol{cm}$.	Εντοπισμός των γωνιών για την σύγκριση των τριγώνων **1μ** Αναφορά στο κριτήριο ομοιότητας **2μ** Αναλογία **1μ** Αποτέλεσμα **2μ**
Α3. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 6x - 1 = 0$, με λύσεις x_1 και x_2. Χωρίς να λύσετε την εξίσωση, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A} = x_1 + x_2 + 4x_1 \cdot x_2$ **<u>Λύση:</u>** Στην εξίσωση $2x^2 - 6x - 1 = 0$ έχουμε ότι $\alpha = 2, \beta = -6, \gamma = -1$ $\mathrm{S} = \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ $= -\frac{-6}{2} = \mathbf{3}$ $\mathrm{P} = \mathrm{x}_1 \cdot \mathrm{x}_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ $= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ $\mathrm{A} = x_1 + x_2 + 4x_1 \cdot x_2$ $= S + 4P$ $= 3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)$ $= 3 - 2 = 1$ $\Rightarrow \mathbf{A = 1}$	Εύρεση α, β, γ **1μ** (αν δεν τα δηλώσει αλλά η πορεία της λύσης φανερώνει την ορθή αναγνώρισή τους να δοθεί η μονάδα) Εύρεση S **2μ** (**1μ** για τον τύπο και **1μ** για το αποτέλεσμα) Εύρεση P **2μ** (**1μ** για τον τύπο και **1μ** για το αποτέλεσμα) Πράξεις **3μ** Αποτέλεσμα **2μ**

A4 . Στο σχήμα δίνεται κύκλος κέντρου K με ακτίνα $\mathrm{K\Delta} = 13\mathrm{cm}$. Η ακτίνα $\mathrm{K\Delta}$ και η χορδή AB τέμνονται στο σημείο Σ. Αν $\mathrm{A\Sigma} = \mathrm{x\ cm}$, $\mathrm{\Sigma B} = 3\mathrm{x\ cm}$ και $\mathrm{K\Sigma} = 11\mathrm{cm}$, να υπολογίσετε την τιμή του x.  **<u>Λύση:</u>** Αφού η ακτίνα του κύκλου είναι $13\mathrm{cm}$ θα έχουμε: $\mathrm{\Sigma\Delta} = 2\mathrm{cm}$ και $\mathrm{\Sigma E} = 24\mathrm{cm}$ Σύμφωνα με το θεώρημα για τις τεμνόμενες χορδές κύκλου (Δύναμης του σημείου Σ ως προς τον κύκλο) θα ισχύει: $(\mathrm{\Sigma\Delta})\cdot(\mathrm{\Sigma E}) = (\mathrm{\Sigma A})\cdot(\mathrm{\Sigma B}) \Rightarrow 2\cdot 24 = \mathrm{x}\cdot 3\mathrm{x} \Rightarrow 3\mathrm{x}^2 = 48$ $\Rightarrow \mathrm{x}^2 = 16 \Rightarrow \mathbf{x = \pm 4cm}$ Η αρνητική τιμή του x απορρίπτεται διότι εκφράζει μήκος.	Εύρεση μήκους (ΣΕ) **1μ** Εύρεση μήκους (ΣΔ) **1μ** Αναφορά στο Θεώρημα τεμνόμενων χορδών **2μ** Ορθή αντικατάσταση **2μ** Πράξη **2μ** Αποτέλεσμα **2μ** • **Αν δώσει ως λύση το $\boldsymbol{x = \pm 4}$ χωρίς να απορρίψει την αρνητική λύση να αφαιρεθεί 1 μονάδα** • **Αν δώσει ως λύση το $\boldsymbol{x = 4}$ χωρίς να γίνεται αναφορά στην αρνητική τιμή να αφαιρεθεί 0,5 μονάδα**
A5 . Να απλοποιήσετε το κλάσμα: $$A = \frac{(2x+1)(x^2-5x+6)}{2x^3-5x^2-3x}$$ **<u>Λύση:</u>** Αρχικά παραγοντοποιούμε το τριώνυμο $\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} + 6 = (\mathrm{x}-3)(\mathrm{x}-2)$	Παραγοντοποίηση $\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} + 6$ **2μ** (Μια μονάδα για κάθε παράγοντα)

Ο παρονομαστής $2x^3-5x^2-3x$ γράφεται $x\cdot(2x^2-5x-3)$	Παραγοντοποίηση $2x^3-5x^2-3x$ Κοινός Παράγοντας $\mathbf{x}$ **0,5μ**
Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $2x^2-5x-3$ θα βρούμε τις λύσεις του: $$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot2\cdot(-3)}}{2\cdot2}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{4}=\begin{cases}\frac{5+7}{4}=3\\ \frac{5-7}{4}=-\frac{1}{2}\end{cases}$$	Εύρεση των ριζών του Τριωνύμου **2μ**
Επομένως: $2x^2-5x-3=2(x-3)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-3)\cdot(2x+1)$	Παραγοντοποίηση **2μ** **(1μ** για κάθε παράγοντα**)**
Τελικά το κλάσμα γίνεται: $$A=\frac{(2x+1)(x^2-5x+6)}{2x^3-5x^2-3x}=\frac{(2x+1)(x-3)(x-2)}{x(x-3)(2x+1)}=\boldsymbol{\frac{x-2}{x},x\neq0,3,-\frac{1}{2}}$$	Τελικό αποτέλεσμα απλοποίησης **2μ** Περιορισμοί **1,5μ**
Α6. Δίνεται η εξίσωση της παραβολής: $f(x)=(\lambda^2+2\lambda-3)x^2+(3\lambda-1)x+\lambda^2-1,\lambda\in R-\{-3,1\}$ Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η παραβολή: **(α)** να έχει μέγιστο **(4 μονάδες)** **(β)** να τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο με τεταγμένη $\psi=15$ **(3 μονάδες)** **(γ)** να έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=0$. **(3 μονάδες)** **<u>Λύση:</u>** **(α)** Για να έχει μέγιστο θα πρέπει το $\alpha<0$.	 **(α)** Αναγνώριση της προϋπόθεσης ότι $\alpha<0$. **1μ**

<table>
<tr>
<td>

$\lambda^2 + 2\lambda - 3 < 0 \Rightarrow (\lambda + 3)(\lambda - 1) < 0$

<table>
<tr><td>λ</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-3</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lambda^2 + 2\lambda - 3$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table>

Άρα: $\boldsymbol{\lambda} \in (\mathbf{-3}, \mathbf{1})$

</td>
<td>

Λύση Ανίσωσης:

Λύσεις εξίσωσης **1μ**

Ορθή τοποθέτηση στον πίνακα **1μ**

(0,5μ για τις λύσεις και 0,5μ για τα πρόσημα)

Λύση αλγεβρική ή γραφική **1μ**

</td>
</tr>
<tr>
<td>

(β) Κάθε παραβολή της μορφής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ γνωρίζουμε πως τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ στο γ.

Επομένως:

$$\lambda^2 - 1 = 15$$
$$\Rightarrow \lambda^2 = 16$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \pm\mathbf{4}$$

</td>
<td>

(β) Αναφορά στην ιδιότητα του γ **1μ**

Σχηματισμός και λύση εξίσωσης **2μ**
(αν αναφέρει μόνο την μια λύση του λ να αφαιρεθεί 0,5 μονάδα)

(Αν παραλείψει την αναφορά στην ιδιότητα του γ αλλά η λύση είναι ορθή να πάρει όλες τις μονάδες)

</td>
</tr>
<tr>
<td>

(γ) Ο άξονας συμμετρίας έχει εξίσωση:

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$
$$= -\frac{3\lambda - 1}{2(\lambda^2 + 2\lambda - 3)}$$
$$\lambda \neq -3 \text{ και } \lambda \neq 1$$

Θα έχουμε:

$$-\frac{3\lambda - 1}{2(\lambda^2 + 2\lambda - 3)} = 0$$
$$\Rightarrow -3\lambda + 1 = 0$$
$$\Rightarrow 3\lambda = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

ΤΕΛΟΣ Α΄ ΜΕΡΟΥΣ

</td>
<td>

(γ) Αναφορά στον τύπο του άξονα συμμετρίας **1μ**

Σχηματισμός εξίσωσης **0,5μ**

Εξίσωση του αριθμητή με το 0 (μηδέν) **0,5μ**

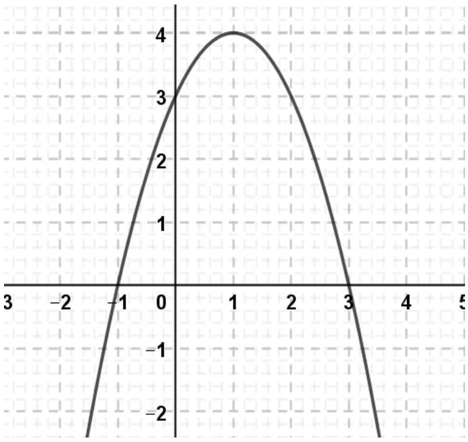
Αποτέλεσμα **1μ**

</td>
</tr>
</table>

ΜΕΡΟΣ Β΄:

Β1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.



Να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα **δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.**

(α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. **(2 μονάδες)**

(β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. **(2 μονάδες)**

(γ) Να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 3$. **(2 μονάδες)**

(δ) Να βρείτε τη διακρίνουσα και το είδος των λύσεων της εξίσωσης:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (x-1)^2 + 4 \ ,$$

όπου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι η συνάρτηση $f(x)$.

(4 μονάδες)

<u>Λύση:</u>

(α) Σύνολο Τιμών $f(x) \in (-\infty, \mathbf{4}]$

(αφού έχει μέγιστο το 4 ,το Σ.Τ. θα είναι από το $(-\infty, 4]$)

(α) Σωστό Σ.Τ. **1μ**

Δικαιολογία **1μ**

(β) $\mathbf{x_1 = -1}$ και $\mathbf{x_2 = 3}$

(σημεία τομής με άξονα τετμημένων)

(β) Για κάθε σωστή λύση **(0,5+0,5) μ**

Για δικαιολόγηση **1μ**

(γ) Αναζητούμε τις τιμές του x για τις οποίες το μέρος της γραφικής παράστασης της f είναι πάνω από την ευθεία y= 3 .

Λύση: $\mathbf{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{2}]$

(γ) Λύση **1μ**

Δικαιολογία **1μ**

(δ) Κάθε παραβολή της μορφής $\mathrm{f(x)} = \alpha \mathrm{x}^2 + \beta \mathrm{x} + \gamma$ γνωρίζουμε πως τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ στο γ.

(δ) Εύρεση γ **0,5μ**

Δικαιολόγηση **0,5μ**

Επομένως: $\gamma = 3$

$$S = x_1 + x_2 = -1 + 3 = 2 = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = (-1) \cdot 3 = -3 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$-3 = \frac{3}{\alpha} \Rightarrow \alpha = -1$$

Εύρεση α **0,5μ**

Δικαιολόγηση **0,5μ**

$$2 = -\frac{\beta}{-1} \Rightarrow \beta = 2$$

Εύρεση β **0,5μ**

Δικαιολόγηση **0,5μ**

Αντικαθιστώντας τις τιμές που βρήκαμε στην σχέση που μας δόθηκε θα έχουμε:

$$-x^2 + 2x + 3 = (x-1)^2 + 4$$

$$\Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 + 4$$

$$\Rightarrow -x^2 - x^2 + 2x + 2x + 3 - 5 = 0$$

Αντικατάσταση, πράξεις και αποτέλεσμα **0,5μ**

$$\Rightarrow -2x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x_1 = x_2 = 1}$$

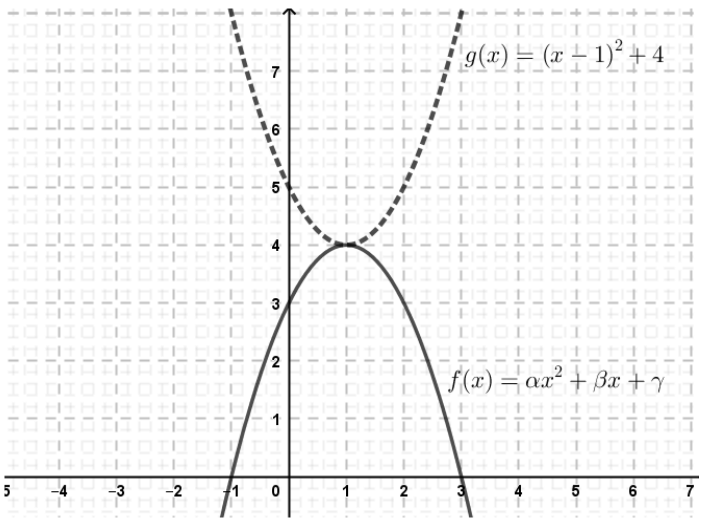
$$\Rightarrow \boldsymbol{\Delta = 0}$$

Επομένως, η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και ίσες

Συμπέρασμα **0,5μ**

<u>Β΄ τρόπος</u>:

Γραφική παράσταση της συνάρτησης: $g(x) = (x-1)^2 + 4$



Παρατηρούμε πως εφάπτεται της δοθείσας $f(x)$. Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = g(x)$ θα έχει μία λύση και άρα διακρίνουσα ίση

Σχήμα και δικαιολόγηση **3μ**

Συμπέρασμα **1μ**

<table>
<tr>
<td>με μηδέν ($\Delta = 0$). Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και ίσες.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

B2. Οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 + 2\lambda + 5)x + 3 = 0$ αποτελούν το μήκος και το πλάτος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(α) Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. **(5 μονάδες)**

(β) Να δείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου συναρτήσει του λ είναι

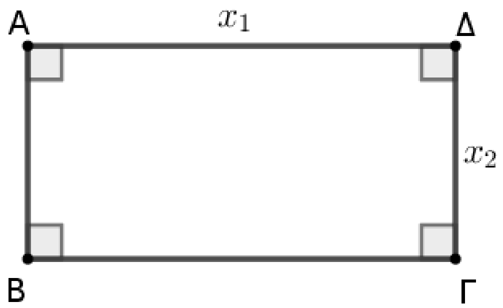
$$\Pi(\lambda) = 2\lambda^2 + 4\lambda + 10$$ **(5 μονάδες)**

(γ) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου;

(5 μονάδες)

<u>Λύση:</u> Από την εξίσωση που δίνεται έχουμε:

$\alpha = 1, \beta = -(\lambda^2 + 2\lambda + 5)$ και $\gamma = 3$



(α) $$\mathrm{E} = \mathrm{P} = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$= \frac{3}{1} = \mathbf{3\ \tau.\mu.}$$

(β) $$\Pi = 2(x_1 + x_2) = 2S = 2\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$= 2\left(-\frac{[-(\lambda^2 + 2\lambda + 5)]}{1}\right)$$

$$= 2(\lambda^2 + 2\lambda + 5)$$

</td>
<td>

(α)Αναγνώριση πως το Εμβαδόν είναι ίσο με το Γινόμενο των ριζών (Ε = Ρ) **2μ**

Τύπος του $\mathrm{P} = \frac{\gamma}{\alpha}$ **1μ**

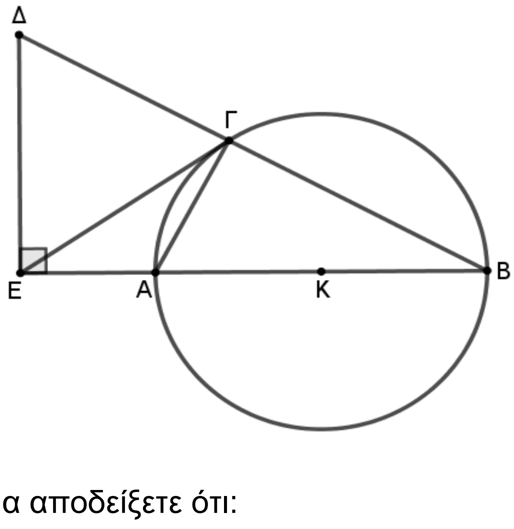
Αντικατάσταση **1μ**

Αποτέλεσμα **1μ**

(β) Αναγνώριση πως η Περίμετρος είναι ίση με το διπλάσιο του αθροίσματος των ριζών ($\Pi = 2S$) **2μ**

Τύπος του

</td>
</tr>
</table>

$= (\mathbf{2\lambda^2 + 4\lambda + 10})$ **μ.** **(γ)** Η περίμετρος του παραλληλογράμμου δίνεται από τη σχέση: $$\Pi(\lambda) = 2\lambda^2 + 4\lambda + 10$$ Είναι παραβολή με α > 0 που σημαίνει ότι παρουσιάζει ελάχιστο. Επομένως για να βρούμε την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει θα βρούμε την τεταγμένη της κορυφής της. $$K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, \Pi\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$$ $$\lambda = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{4}{2\cdot 2} = -1$$ $$\Pi = \Pi\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \Pi(-1) = 2(-1)^2 + 4\cdot(-1) + 10 = \boldsymbol{8\mu}.$$	$S = -\frac{\beta}{\alpha}$ **1μ** Αντικατάσταση **1μ** Αποτέλεσμα **1μ** **(γ)** Αναγνώριση ότι είναι παραβολή με α > 0 και άρα έχει ελάχιστη τιμή **1μ** Διατύπωση άξονα συμμετρίας $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ **1μ** Εύρεση του λ **1μ** Αντικατάσταση **1μ** Πράξεις και Αποτέλεσμα **1μ**
Β3. Δίνεται κύκλος με κέντρο Κ και διάμετρο ΑΒ. Από σημείο Ε στην προέκταση της διαμέτρου ΑΒ προς το Α φέρουμε την εφαπτομένη ΕΓ του κύκλου. Η κάθετη στην ΑΒ στο Ε τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Δ.  **(α)** Να αποδείξετε ότι: i. $\frac{ΕΓ}{ΕΑ} = \frac{ΕΒ}{ΕΓ}$ **(5 μονάδες)** ii. $(ΒΓ)\cdot(ΒΔ) = (ΒΑ)\cdot(ΒΕ)$ **(5 μονάδες)**	

(β) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να δείξετε ότι: $(\mathrm{Ε\Gamma})^2 + (\mathrm{Β\Gamma}) \cdot (\mathrm{Β\Delta}) = (\mathrm{ΕΒ})^2.$ **(5 μονάδες)**	
<u>**Λύση:**</u> **(α)**	
Α΄ τρόπος: **i.** Συγκρίνω τα τρίγωνα ΓEB και ΓEA $\hat{B} = E\hat{\Gamma}A$ (θεώρημα χορδής και εφαπτομένης) $\Gamma\hat{E}B$ (κοινή γωνία) $\Rightarrow BE\Gamma \approx \Gamma EA$ (Τα δύο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες ίσες μια προς μια.)	**(α)** **Α΄τρόπος:** **(i)** Ορθή επιλογή τριγώνων για σύγκριση **1μ** Απόδειξη ομοιότητας **2μ**
Άρα θα ισχύει η αναλογία: $$\frac{BE}{\Gamma E} = \frac{B\Gamma}{\Gamma A} = \frac{E\Gamma}{EA} \Rightarrow \frac{\mathbf{Ε\Gamma}}{\mathbf{ΕΑ}} = \frac{\mathbf{ΕΒ}}{\boldsymbol{E\Gamma}}$$	Ορθή έκφραση αναλογίας. **1μ** Απόδειξη ζητούμενης σχέσης. **1μ**
Β΄ τρόπος: Από την αναλογία $\frac{\mathrm{Ε\Gamma}}{\mathrm{ΕΑ}} = \frac{\mathrm{ΕΒ}}{\mathrm{Ε\Gamma}}$ προκύπτει ότι: $$(\mathbf{Ε\Gamma})^2 = (\mathbf{ΕΑ}) \cdot (\mathbf{ΕΒ})$$	**Β΄ τρόπος:** **(i)** Έκφραση της αναλογίας σε μορφή $(\mathbf{Ε\Gamma})^2 = (\mathbf{ΕΑ}) \cdot (\mathbf{ΕΒ})$ **2μ**
(Δύναμη του σημείου Ε ως προς τον κύκλο.) Αφού EAB είναι μια τέμνουσα του κύκλου και $E\Gamma$ είναι ένα εφαπτόμενο τμήμα που άγεται από το σημείο Ε.	Ορθή έκφραση της δύναμης του σημείου Ε ως προς τον κύκλο και της σχέσης $(\mathbf{Ε\Gamma})^2 = (\mathbf{ΕΑ}) \cdot (\mathbf{ΕΒ})$ **3μ**
ii. Για να αποδείξουμε τη ζητούμενη σχέση θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΕΒ και ΑΓΒ: $\hat{\mathrm{E}} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ (Η γωνία Γ βαίνει σε ημικύκλιο) $\hat{\mathrm{B}}$ κοινή γωνιά $\Rightarrow \Delta EB \approx A\Gamma B$ (Τα δύο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες ίσες μια προς μια.)	**(ii)** Εύρεση των δύο τριγώνων προς σύγκριση **1μ** Απόδειξη ομοιότητας **2μ**
Άρα ισχύει η αναλογιά:	Ορθή έκφραση αναλογιών **1μ**

$\frac{ΔΕ}{ΑΓ} = \frac{ΕΒ}{ΓΒ} = \frac{ΔΒ}{ΑΒ}$ $\Rightarrow (\mathbf{ΒΓ}) \cdot (\mathbf{ΒΔ}) = (\mathbf{ΒΑ}) \cdot (\mathbf{ΒΕ})$	Απόδειξη της σχέσης **1μ**
(β) Α΄ μέλος: $(ΕΓ)^2 + (ΒΓ) \cdot (ΒΔ)$ $= (EA)(EB) + (BA)(BE)\ \big(από\ το\ (i)\ και\ το\ (ii)\big)$ $= (EB)[(EA) + (BA)]$ $= (EB)(EB)$ $= (EB)^2$: Β΄ μέλος $\Rightarrow (\mathbf{ΕΓ})^{\mathbf{2}} + (\mathbf{ΒΓ}) \cdot (\mathbf{ΒΔ}) = (\mathbf{ΕΒ})^{\mathbf{2}}$.	**(β)**Αντικατάσταση από το (i) και από το (ii) **2μ** Κοινός παράγοντας **1μ** $(EA) + (BA) = EB$ **1μ** Συμπέρασμα **1μ**