

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Β΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2022 – 23
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (Α΄ ΣΕΙΡΑ)

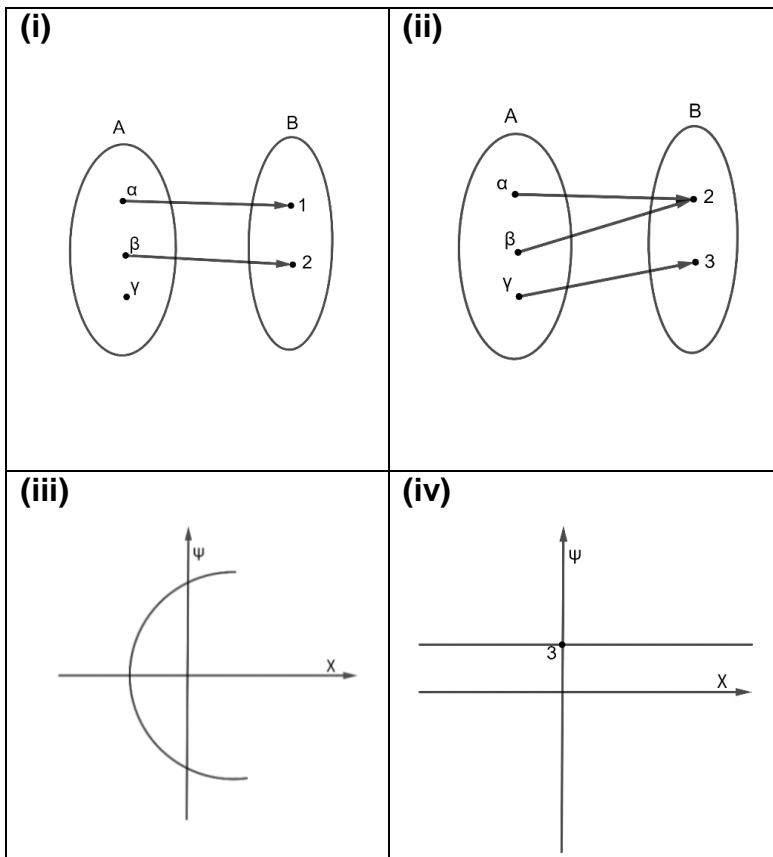
ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: 2B

Οδηγός Διόρθωσης

Σημείωση: Η μικρότερη μονάδα βαθμολόγησης σε κάθε σημείο είναι 0,5.

Αν μαθητής παραλείψει βήμα στο οποίο φαίνεται η εφαρμογή ιδιότητας ή θεωρήματος, αλλά η πορεία της λύσης φανερώνει τη χρήση τους να δίνονται οι αντίστοιχες μονάδες.

A1. Πιο κάτω δίνονται δύο βελοειδή διαγράμματα και δύο γραφικές παραστάσεις. Σε κάθε περίπτωση να εξετάσετε αν ορίζεται ή όχι συνάρτηση και να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας.



Λύση

(i) Δεν ορίζει συνάρτηση γιατί το γ δεν αντιστοιχίζεται με κανένα στοιχείο του Πεδίου Τιμών.

(ii) Ορίζει συνάρτηση γιατί κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται με μόνο ένα στοιχείο του B.

(iii) Δεν ορίζει συνάρτηση γιατί υπάρχουν τιμές του x που αντιστοιχίζονται με 2 στοιχεία του Συνόλου Τιμών

(iv) Ορίζει συνάρτηση γιατί κάθε στοιχείο x του Πεδίου Ορισμού αντιστοιχίζεται με μόνο ένα στοιχείο του Συνόλου Τιμών.

(i) Ορθή απάντηση **(1,5μ)**
Σωστή δικαιολογία **(1μ)**

(ii) Ορθή απάντηση **(1,5μ)**
Σωστή δικαιολογία **(1μ)**

(iii) Ορθή απάντηση **(1,5μ)**
Σωστή δικαιολογία **(1μ)**

(iv) Ορθή απάντηση **(1,5μ)**
Σωστή δικαιολογία **(1μ)**

A2. (α) Να βρείτε την κλίση των ευθειών: **(6 μονάδες)**

(i) $y = 2x$
(ii) $x = 2$
(iii) $y = 10$
(iv) $x + 4y = 6$

(β) Να εξετάσετε αν τα σημεία A(-1, -2) και B(3,0) ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x + 1$.

(4μονάδες)

Λύση:

(α) (i) $\lambda = 2$

(ii) λ δεν ορίζεται

(iii) $\lambda = 0$

(iv) $x + 4y = 6 \Rightarrow 4y = -x + 6 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{6}{4}$

$$\alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4}$$

(β) $-2 = 3 \cdot (-1) + 1 \Rightarrow -2 = -3 + 1 \Rightarrow -2 = -2$ αληθής άρα το A ανήκει στην ευθεία.

$0 = 3 \cdot 3 + 1 \Rightarrow 0 = 9 + 1 \Rightarrow 0 = 10$ ψευδής άρα το B δεν ανήκει στην ευθεία.

(α)

(i) Ορθή απάντηση:(1,5μ)

(ii) Ορθή απάντηση:(1,5μ)

(iii) Ορθή απάντηση:(1,5μ)

(iv) μετατροπή σε λυμένη μορφή $y = \alpha x + \beta$ (1μ)
Ορθή απάντηση:(0,5 μ)

(β) Σωστή αντικατάσταση συντεταγμένων (1μ)
Αληθής (0,5μ)
Ορθή απάντηση (0,5μ)

Σωστή αντικατάσταση(1μ)
Ψευδής (0,5μ)
Ορθή απάντηση (0,5μ)

A3. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις πιο κάτω προτάσεις:

(α) Στο ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιοι είναι ίσες.

(β) Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου τέμνονται κάθετα.

(γ) Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούν τις γωνίες του

(δ) Ο ρόμβος είναι και τετράγωνο.

(ε) Η διαγώνιος ενός τετραγώνου το χωρίζει σε δύο ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα.

Λύση:

(α) Σωστό (β) Λάθος (γ) Λάθος (δ) Λάθος (ε) Σωστό

(2 μ) Δύο μονάδες για κάθε σωστό χαρακτηρισμό

A4. (α) Δίνεται η ευθεία $y = x + 8$ (5 μονάδες)

(i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής της ευθείας με τον άξονα των y .

(ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής της ευθείας με τον άξονα των x .

(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(2, 3)$ και έχει κλίση $\lambda = 2$. **(5 μονάδες)**

Λύση:

(α) (i) $x = 0 \Rightarrow y = 0 + 8 \Rightarrow y = 8$

Άρα τέμνει τον άξονα των y στο $(0, 8)$.

(iii) $y = 0 \Rightarrow 0 = x + 8 \Rightarrow -8 = x$ Άρα τέμνει τον άξονα των x στο $(-8, 0)$

(β) $y = ax + \beta$

$\lambda = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y = 2x + \beta$

$y = 2x + \beta$ και διέρχεται από το σημείο $A(2, 3)$
 $\Rightarrow 3 = 2 \cdot 2 + \beta \Rightarrow 3 = 4 + \beta \Rightarrow 3 - 4 = \beta \Rightarrow -1 = \beta$

Άρα η ευθεία είναι η $y = 2x - 1$

(α)

(i) $x = 0$ **(1μ)**

Πράξεις **(0,5μ)**

Ορθή απάντηση **(1μ)**

Σημείωση: αν δώσουν

κατευθείαν την απάντηση να πάρουν τις 2,5 μονάδες

(ii) $y = 0$ **(1μ)**

Πράξεις **(0,5μ)**

Ορθή απάντηση: **(1μ)**

(αν δεν δίνονται οι

συντεταγμένες των σημείων να αφαιρεθεί συνολικά 0,5 μονάδα)

(β) έκφραση της εξίσωσης στη μορφή $y = ax + \beta$ **(1μ)**

Αναγνώριση της σχέσης $\lambda = a$ **(1μ)**

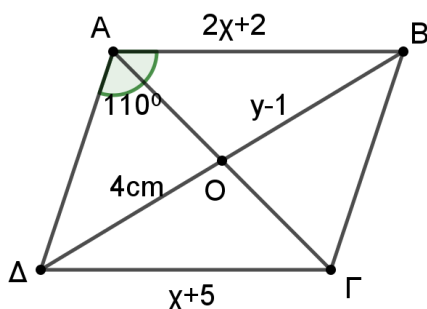
Αντικατάσταση σημείου **(1μ)**

Πράξεις **(0,5μ)**

Ορθή απάντηση β **(0,5μ)**

Ορθή απάντηση τύπου ευθείας **(1μ)**

A5. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με



$AB = (2x + 2) \text{ cm}$, $\Delta\Gamma = (x + 5) \text{ cm}$,

$BO = (y - 1) \text{ cm}$, $\Delta O = 4 \text{ cm}$ και $\widehat{\Delta AB} = 110^\circ$.

Να βρείτε, δείχνοντας τον τρόπο που εργαστήκατε, τα παρακάτω:

(α) Την τιμή του y . **(3 μονάδες)**

(β) Την τιμή του x . **(3 μονάδες)**

(γ) Το μέτρο των γωνιών $\widehat{AB\Gamma}$ και $\widehat{B\Gamma\Delta}$ του παραλληλογράμμου. **(4 μονάδες)**

Λύση:

(α) $y - 1 = 4$ (οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται)
 $y = 4 + 1 \Rightarrow y = 5\text{cm}$

(β) $2x + 2 = x + 5$ (οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου είναι ίσες)
 $2x - x = 5 - 2 \Rightarrow x = 3\text{cm}$

(γ) $\widehat{AB\Gamma} = 70^\circ$ (εντός επί τα αυτά με \hat{A} άρα παραπληρωματικές)
 $\widehat{B\Gamma\Delta} = 110^\circ$ (γιατί οι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου είναι ίσες)

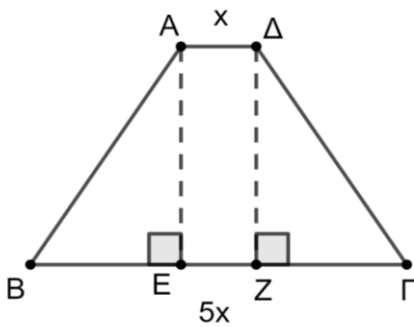
(α) Διατύπωση της εξίσωσης (1 μ)
Αναφορά της Ιδιότητας – αιτιολόγηση (1 μ)
Απάντηση (1 μ)

(β) Διατύπωση της εξίσωσης (1 μ)
Αναφορά της Ιδιότητας – αιτιολόγηση (1 μ)
Απάντηση (1 μ)

(γ) Ορθή απάντηση (1 μ)
Αναφορά Ιδιότητας- αιτιολόγηση (1 μ)
Ορθή απάντηση (1 μ)
Δικαιολογία (1 μ)

A6. Σε ισοσκελές τραπέζιο, η μεγάλη βάση είναι πενταπλάσια από τη μικρή και το ύψος του ισούται με 8cm. Αν το εμβαδόν του τραπέζιου είναι 72cm^2 , να βρείτε την περίμετρό του.

Λύση:



$$\text{Εμβαδόν} = \frac{(B + \beta) \cdot v}{2} \Rightarrow 72 = \frac{(5x + x) \cdot 8}{2} \Rightarrow 72 = 6x \cdot 4$$
$$\Rightarrow 72 = 24x$$

$\Rightarrow x = 3\text{cm}$

Άρα $AD = 3\text{cm}$ και $B\Gamma = 15\text{cm}$

$AD = 3\text{cm} \Rightarrow EZ = 3\text{cm} \Rightarrow BE = 6\text{cm}$

Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ABE

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

$(AB)^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow (AB)^2 = 100 \Rightarrow AB = 10\text{cm}$

$$\Pi_{A\Delta\Gamma B} = 3 + 10 + 15 + 10 = 38\text{cm}$$

Σχήμα (1μ)
(Αν γίνει η ορθή λύση χωρίς σχήμα να δοθεί η μονάδα)
 $AD = x$ και $B\Gamma = 5x$ (1 μ)
(ή $B\Gamma = x$ και $AD = \frac{x}{5}$)
Τύπος εμβαδού (1 μ)

Σωστή αντικατάσταση (1μ)

Σωστές πράξεις (1μ)
Ορθή εύρεση του x (1μ)
Υπολογισμός του BE (1μ)

Ορθή διατύπωση του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο ABE ή ΔΖΓ (1 μ)
(αν δεν το διατυπώσει αλλά προχωρήσει ορθά στην αντικατάσταση να δοθεί η μονάδα)
Σωστό αποτέλεσμα για την AB ή ΓΔ (1μ)

Έκφραση της περιμέτρου (0,5μ)
Απάντηση (0,5 μ.)

ΜΕΡΟΣ Β

B1. Δίνονται στο σχήμα οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών ε_1 , ε_2 και ε_3 . Να βρείτε:

(α) (i) Η κλίση της ε_1

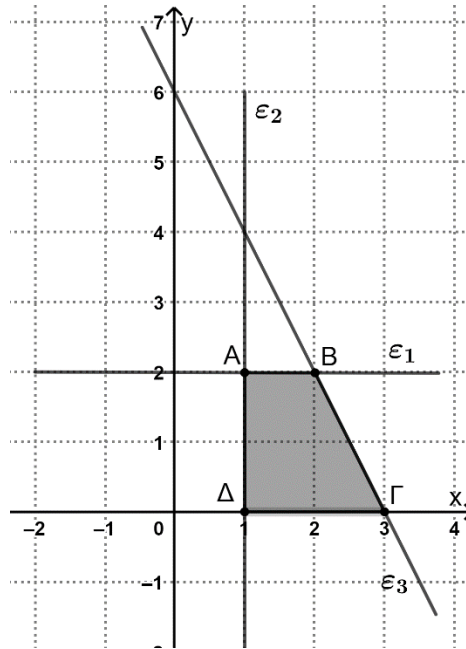
(μονάδες 2)

(ii) Η εξίσωση της ε_2

(μονάδες 2)

(iii) Η εξίσωση της ε_3

(μονάδες 4)



(β) Αν η εξίσωση της ε_3 είναι η $y = -2x + 6$ να βρείτε την τιμή του κ ώστε το σημείο $\Sigma(2\kappa + 3, \kappa)$ να ανήκει στην γραφική της παράσταση. (μονάδες 4)

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 , ε_2 και ε_3 με τον άξονα των x . (μονάδες 3)

Λύση:

(α) (i) $\lambda = 0$

(ii) $x = 1$

(iii) $y = \alpha x + \beta$

Τέμνει τον άξονα των y στο $(0,6)$ άρα $\beta=6$

$$\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow \alpha = -2$$

Άρα η εξίσωση της ε_3 είναι η $y = -2x + 6$

(α)

(i) Απάντηση (2 μ)

(ii) Απάντηση (2 μ)

(iii) Έκφραση της εξίσωσης σε λυμένη μορφή (0,5 μ)

Υπολογισμός του β (1 μ)

Έκφραση του λ ως $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (0,5μ)

Εύρεση και αντικατάσταση ορθών τιμών Δy και Δx από το διάγραμμα (0,5 μ)

Εύρεση της κλίσης και του α (1μ)

Εξίσωση ευθείας (0,5 μ)

(αν βρεί την τιμή του α παίρνοντας και αντικαθιστώντας σημείο από το σχήμα να δοθούν ανάλογα οι μονάδες)

(β) Αφού το σημείο $\Sigma(2\kappa + 3, \kappa)$ ανήκει στην γραφική της ε_3 τότε την επαληθεύει.

$$\kappa = -2(2\kappa + 3) + 6 \Rightarrow \kappa = -4\kappa - 6 + 6 \Rightarrow \kappa + 4\kappa = 0$$

$$\Rightarrow \kappa = 0$$

(γ) $E_{\text{τραπεζίου}} = \frac{(\beta_1 + \beta_2) \nu}{2}$

$$E = \frac{(2+1) \cdot 2}{2} = 3 \text{ τ.μ}$$

(β) Αντικατάσταση του σημείου Σ στην εξ. της ευθείας **(2 μ)**

Λύση της εξίσωσης ως προς κ **(1 μ)**

Ορθή απάντηση **(1μ)**

(γ) τύπος εμβαδού **(1 μ)**

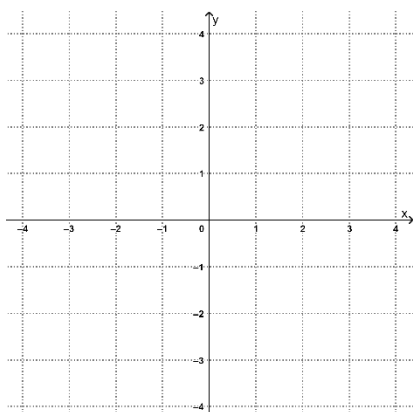
Αντικατάσταση και πράξεις **(1,5 μ)**

Απάντηση **(0,5 μ)**

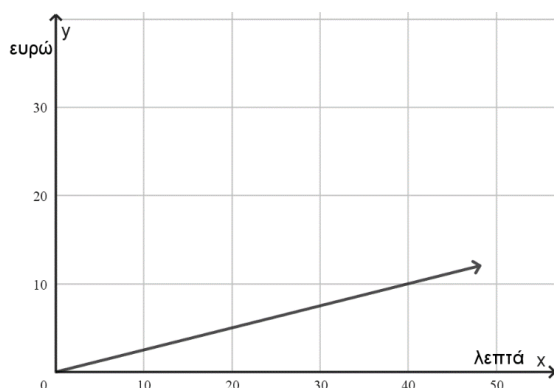
B2. (α) Δίνεται ο πιο κάτω πίνακας τιμών μιας γραμμικής συνάρτησης με $x \in \mathbb{R}$:

x	-1	0	1	2
y	-1	1	3	5

Να κατασκευάσετε, στο πιο κάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, την γραφική παράσταση της συνάρτησης και να βρείτε τον τύπο της. **(6 μονάδες)**



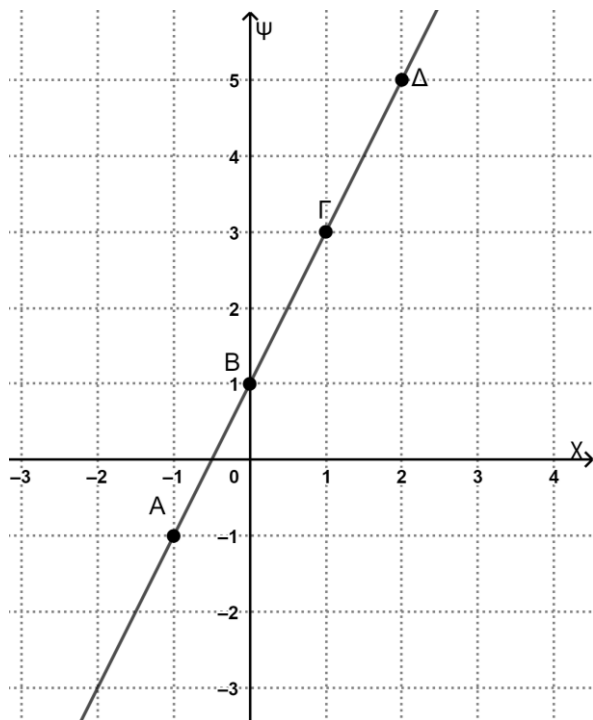
(β) Η πιο κάτω γραφική παράσταση δείχνει το κόστος λειτουργίας (σε ευρώ) μιας μηχανής σε σχέση με το χρόνο που δουλεύει (σε λεπτά). Να βρείτε πόσο κοστίζει η λειτουργία της μηχανής ανά ώρα.



(4 μονάδες)

Λύση :

(α)



$$y = ax + \beta$$

Τέμνει τον άξονα των y στο $(0,1)$ άρα $\beta = 1 \Rightarrow y = ax + 1$

Περνά από το σημείο $(1,3)$ άρα $3 = a + 1 \Rightarrow a = 2$

$$\Rightarrow y = 2x + 1$$

$$(\beta) \lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \lambda = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

Άρα μεταβολή 0,25 ευρώ το λεπτό

Σε μια ώρα $0,25 \cdot 60 = 15$ ευρώ

(α) Αν τοποθετήσει τουλάχιστον τρία σημεία στο καρτεσιανό διάγραμμα σωστά (2 μ)

(να αφαιρείται 0,5 μονάδα για κάθε λανθασμένο σημείο)

Σχηματισμός της ευθείας (1 μ)

Διατύπωση του τύπου της γραμμικής συνάρτησης (0,5 μ)

Εύρεση του β (1μ)

Εύρεση του a (1μ)

Εύρεση του ορθού τύπου της γραμμικής σχέσης(0,5μ)

(β) Τύπος κλίσης: (1 μ)

Ορθή αντικατάσταση Δy και Δx (1 μ)

Ορθή απάντηση: (0,5 μ)

Πολλ/σμός με 60: (1 μ)

Ορθή απάντηση: (0,5 μ)

B3. Ένας ρόμβος είναι ισεμβαδικός με ένα παραλληλόγραμμο. Η μια πλευρά του παραλληλογράμμου είναι 4 cm μεγαλύτερη από την άλλη πλευρά. Η περίμετρος του παραλληλόγραμμου είναι 24 cm και το ύψος που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη πλευρά είναι 3 cm. Αν η μία διαγώνιος του ρόμβου είναι 8 cm, να βρείτε:

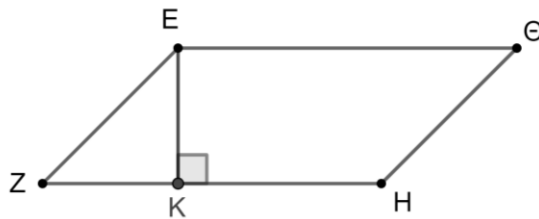
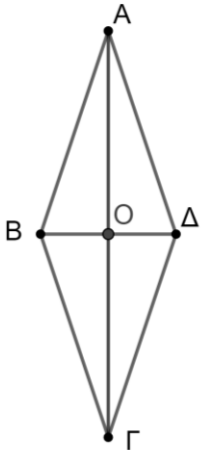
(α) Τα μήκη των πλευρών του παραλληλογράμμου. (μονάδες 6)

(β) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου (μονάδες 2)

(γ) Την περίμετρο του ρόμβου. (μονάδες 7)

Λύση :

(α)



$ZH = E\Theta = x + 4$ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου ίσες)

$ZE = H\Theta = x$ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου ίσες)

$$\Pi = 2\alpha + 2\beta$$

$$(x + x + 4) \cdot 2 = 24 \Rightarrow$$

$$(2x + 4) \cdot 2 = 24 \Rightarrow$$

$$2x + 4 = 12 \Rightarrow$$

$$2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

Άρα οι πλευρές του παραλληλογράμμου είναι 4cm και 8cm .

$$\text{(β) Επαραλληλογράμμου} = \beta \cdot \nu = 8 \cdot 3 = 24\text{cm}^2$$

(α) Κατασκευή του

σχήματος για το

παραλληλόγραμμο (0,5 μ)

(Αν γίνει η ορθή λύση χωρίς σχήμα να δοθεί η 0,5 μονάδα)

$$ZH = x + 4 \text{ και } ZE = x$$

(1 μ)

Διατύπωση της σχέσης

απέναντι πλευρές ίσες (1μ)

(να δοθεί η μονάδα αν δεν

δηλώνεται αλλά φαίνεται μέσα

από την έκφραση της

περιμέτρου)

Τύπος περιμέτρου (1μ)

Αντικατάσταση και πράξεις

(1μ)

Εύρεση του x (0,5 μ)

Εύρεση των πλευρών του

παραλληλογράμμου (1 μ)

(β)

Διατύπωση του τύπου του εμβαδού (1μ)

Ορθή αντικατάσταση (0,5μ)

Ορθή απάντηση (0,5μ)

(αν υπολόγισε λανθασμένα την τιμή του β από το προηγούμενο ερώτημα τότε να αποκοπεί η 0,5 μονάδα της απάντησης)

(γ) Ερόμβου = 24cm^2 (ισεμβαδικά)

$$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2} \Rightarrow \frac{\delta_1 \cdot 8}{2} = 24 \Rightarrow 4\delta_1 = 24 \Rightarrow \delta_1 = 6\text{cm}$$

$\delta_1 = 6\text{cm}$ και $\delta_2 = 8\text{cm} \Rightarrow AO = 4\text{cm}$ και $BO = 3\text{cm}$ (γιατί οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούνται)

Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ABO (διαγώνιοι τέμνονται κάθετα)

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

$$(AB)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow (AB)^2 = 25 \Rightarrow AB = 5\text{cm}$$

$AD = AB = BG = DG = 5\text{cm}$ (οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες)

$$\Pi_{\rho\acute{o}\mu\beta\omicron\upsilon} = 4\alpha \Rightarrow \Pi = 4 \cdot 5 = 20\text{cm}$$

(γ)

Ερόμβου = 24cm^2
επίκληση του ισεμβαδικού
(αν δεν δηλώνεται αλλά φαίνεται μέσα από τις πράξεις να δοθούν οι μονάδες) **(1 μ)**

Διατύπωση τύπου
εμβαδού ρόμβου **(1μ)**

Αντικατάσταση και πράξεις
(0,5μ)

Εύρεση της άγνωστης
διαγώνιου **(0,5 μ)**

Υπολογισμός των AO και
 BO **(1μ)**

Δικαιολόγηση (αναφορά
στην ιδιότητα του ρόμβου)
(0,5 μ)

Εφαρμογή Π.Θ (τύπος και
αντικατάσταση) **(1μ)**

Υπολογισμός της πλευράς
του ρόμβου **(0,5 μ)**

Έκφραση της περιμέτρου

$$\Pi_{\rho\acute{o}\mu\beta\omicron\upsilon} = 4 \cdot \alpha \text{ **(0,5μ)**}$$

Ορθή απάντηση περιμέτρου
(0,5μ)