

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ**  
**ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**  
**ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ**

**ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2022–23**

**Β΄ ΤΑΞΗΣ ΤΕΣΕΚ**

**Παρασκευή 20 Ιανουαρίου 2023**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 3-ΩΡΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (Α΄ ΣΕΙΡΑ)**

**ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Β0043**

**ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 90΄ ΛΕΠΤΑ**

**Προτεινόμενες λύσεις – Οδηγός διόρθωσης**

**ΜΕΡΟΣ Α΄:**

<b>A1.</b>	<p>Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:</p> <p>(α) <math>2^x = 8</math></p> <p>(β) <math>\log_5 x = 2</math></p> <p><b><u>Λύση:</u></b></p> <p>(α) <math>2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3</math></p> <p>(β) <math>\log_5 x = 2 \Rightarrow 5^2 = x \Rightarrow x = 25</math></p>	<p><b>(5,5)</b></p> <p><b>(α)</b></p> <p>Έκφραση του 8 ως δύναμη <b>2μ</b></p> <p>Εξίσωση εκθετών - αποτέλεσμα <b>3μ</b></p> <p><b>(β)</b></p> <p>Εφαρμογή ορισμού του λογαρίθμου <b>3μ</b></p> <p>Αποτέλεσμα <b>2μ</b></p>
<b>A2.</b>	<p>Σε τρίγωνο <math>AB\Gamma</math> δίνονται <math>\alpha = 20\text{cm}</math>, <math>\gamma = 10\sqrt{3}\text{cm}</math> και <math>\hat{\Gamma} = 60^\circ</math>.            Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας <math>\hat{A}</math> του τριγώνου.</p> <p><b><u>Λύση:</u></b></p> $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \Rightarrow \frac{20}{\eta\mu A} = \frac{10\sqrt{3}}{\eta\mu 60^\circ} \Rightarrow \eta\mu A = \frac{20 \cdot \eta\mu 60^\circ}{10\sqrt{3}}$ $\Rightarrow \eta\mu A = \frac{20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{10\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$	<p>Νόμος ημιτόνων <b>2μ</b></p> <p>Αντικατάσταση <b>2μ</b></p> <p>Πράξεις <b>4μ</b></p> <p>Υπολογισμός <math>\hat{A}</math> <b>2μ</b></p>

<p><b>A3.</b></p>	<p>Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης <math>f</math>.</p> <p>Να βρείτε:</p> <p>(α) τις τιμές <math>f(0)</math> και <math>f(1)</math> (2 μονάδες)</p> <p>(β) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης <math>f</math> (8 μονάδες)</p> <p><b>Λύση:</b></p> <p>(α) <math>f(0) = 1</math> και <math>f(1) = 2</math></p> <p>(β) Π.Ο. = <math>[-4, 4]</math> Σ.Τ. = <math>[-1, 3]</math></p>	<p>(2,8)</p> <p>(α) <math>f(0) = 1</math>      1μ <math>f(1) = 2</math>      1μ</p> <p>(β) Ορθό Π.Ο.      4μ Ορθό Σ.Τ.      4μ <i>(Ανοικτό διάστημα ή οποιοδήποτε παρόμοιο λάθος στο διάστημα αφαιρείται 1μ για το καθένα)</i></p>
<p><b>A4.</b></p>	<p>Η μέση τιμή των βαθμών της Αναστασίας στο Α' Τετράμηνο είναι <math>\bar{x}_A = 19,6</math> και η αντίστοιχη τυπική απόκλιση είναι <math>S_A = 3,4</math>. Η μέση τιμή των βαθμών της Βασιλικής στο Α' Τετράμηνο είναι <math>\bar{x}_B = 19,2</math> και η αντίστοιχη τυπική απόκλιση είναι <math>S_B = 1,8</math>.</p> <p>(α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας των βαθμών της κάθε μαθήτριας. (8 μονάδες)</p> <p>(β) Να βρείτε ποιας μαθήτριας οι βαθμοί, έχουν τη μεγαλύτερη ομοιογένεια και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (2 μονάδες)</p> <p><b>Λύση:</b></p> <p>(α) <math>CV_A = \frac{S_A}{ \bar{x}_A } = \frac{3,4}{19,6} = 0,1734 = 17,34\%</math></p> <p><math>CV_B = \frac{S_B}{ \bar{x}_B } = \frac{1,8}{19,2} = 0,0937 = 9,37\%</math></p> <p>(β) Μεγαλύτερη ομοιογένεια έχουν οι βαθμοί της Βασιλικής γιατί έχουν πιο μικρό συντελεστή μεταβλητότητας από ότι οι βαθμοί της Αναστασίας (<math>CV_B &lt; CV_A</math>).</p>	<p>(8,2)</p> <p>(α) Για το <math>CV_A</math> Σωστός τύπος      2μ Αντικατάσταση      1μ Αποτέλεσμα      1μ</p> <p>Για το <math>CV_B</math> Σωστός τύπος      2μ Αντικατάσταση      1μ Αποτέλεσμα      1μ</p> <p>(β) Απάντηση      1μ Ορθή αιτιολόγηση      1μ</p>

<p><b>A5.</b></p>	<p>Δίνονται οι συναρτήσεις <math>f: A \rightarrow \mathbb{R}</math> και <math>g: B \rightarrow \mathbb{R}</math>, <math>A, B \subseteq \mathbb{R}</math> με τύπους <math>f(x) = x^2 - 1</math> και <math>g(x) = x - 1</math>.</p> <p>Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων <math>f - g</math> και <math>\frac{g}{f}</math> (Να γίνουν όλες οι δυνατές πράξεις).</p> <p><b>Λύση:</b></p> <p><math>A = \mathbb{R}</math> αφού η <math>f</math> είναι πολυωνυμική συνάρτηση</p> <p><math>B = \mathbb{R}</math> αφού η <math>g</math> είναι πολυωνυμική συνάρτηση</p> <p>Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης <math>f - g</math> είναι το <math>\mathbb{R}</math></p> $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 1 - (x - 1)$ $= x^2 - 1 - x + 1 = x^2 - x, \forall x \in \mathbb{R}$ <p>Για το πεδίο ορισμού της <math>\frac{g}{f}</math>, ισχύει <math>f(x) \neq 0</math></p> $\Rightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$ <p>συνεπώς, το πεδίο ορισμού της είναι <math>\mathbb{R} - \{-1, 1\}</math></p> $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ $= \frac{x - 1}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{1}{x + 1}, \forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$	<p>Π.Ο. της <math>f</math>      <b>1μ</b></p> <p>Π.Ο. της <math>g</math>      <b>1μ</b></p> <p><b>(f - g)</b></p> <p>Π.Ο. της <math>f - g</math>    <b>0,5μ</b></p> <p>Ορθή αντικατάσταση <b>1μ</b></p> <p>Πράξεις            <b>1μ</b></p> <p>Αποτέλεσμα      <b>1μ</b></p> <p><b>(g/f)</b></p> <p><math>x \neq \pm 1</math>            <b>0,5μ</b></p> <p>Π.Ο. της <math>\frac{g}{f}</math>        <b>0,5μ</b></p> <p>Ορθή αντικατάσταση <b>1μ</b></p> <p>Παραγοντοποίηση παρονομαστή <b>1μ</b></p> <p>Αποτέλεσμα      <b>1,5μ</b></p>
-------------------	--	--

**A6.** Το τρίγωνο των Βερμούδων βρίσκεται στο δυτικό τμήμα του Βόρειου Ατλαντικού ωκεανού και είναι μεταξύ της Φλόριντα, του Πουέρτο Ρίκο και των Βερμούδων, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

Αν ισχύει  $AB = 1546km$ ,  $AG = 1666km$  και  $BΓ = 1661km$ , να υπολογίσετε:

(α) το μέτρο της γωνίας  $A\hat{B}\Gamma$

(β) το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$

(Οι απαντήσεις να δοθούν με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων)



(5,5)

**Λύση:**

(α)  $\gamma = AB = 1546km$ ,  $\beta = AG = 1666km$ ,  $\alpha = B\Gamma = 1661km$   
 $A\hat{B}\Gamma = \hat{B}$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} = \frac{1661^2 + 1546^2 - 1666^2}{2 \cdot 1661 \cdot 1546} = 0,46$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu B = 0,46 \Rightarrow \hat{B} = 62,61^\circ$$

(β)  $E = \frac{\alpha\gamma\eta\mu B}{2} \Rightarrow E = \frac{1661 \cdot 1546 \cdot \eta\mu 62,61^\circ}{2}$

$$\Rightarrow E = 1140016,34km^2$$

(α)

Εφαρμογή νόμου  
 συνημιτόνων 2μ

Αντικατάσταση 1μ

Αποτέλεσμα 1μ

Υπολογισμός  
 γωνιάς 1μ

(β)

Τύπος εμβαδού 2μ

Αντικατάσταση 2μ

Αποτέλεσμα 1μ

**ΜΕΡΟΣ Β΄:**

<b>B1.</b>	<p>Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:</p> <p>(α) <math>4^{3x} = 2^4 \cdot 16^x</math> <span style="float: right;"><b>(7 μονάδες)</b></span></p> <p>(β) <math>\log x + \log(x - 1) = \log 24 - \log 4</math> <span style="float: right;"><b>(8 μονάδες)</b></span></p> <p><b>Λύση:</b></p> <p>(α) <math>4^{3x} = 2^4 \cdot 16^x</math>  <math>\Rightarrow (2^2)^{3x} = 2^4 \cdot (2^4)^x</math>  <math>\Rightarrow 2^{6x} = 2^4 \cdot 2^{4x}</math>  <math>\Rightarrow 2^{6x} = 2^{4+4x}</math>  <math>\Rightarrow 6x = 4 + 4x</math>  <math>\Rightarrow 6x - 4x = 4</math>  <math>\Rightarrow 2x = 4</math>  <math>\Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2</math></p> <p>(β) <math>\log x + \log(x - 1) = \log 24 - \log 4</math>  <i>Από την αρχική εξίσωση προκύπτουν οι περιορισμοί:</i>  <math>\begin{cases} x &gt; 0 \\ x - 1 &gt; 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &gt; 0 \\ x &gt; 1 \end{cases} \Rightarrow x &gt; 1</math>  <math>\log x + \log(x - 1) = \log 24 - \log 4</math>  <math>\Rightarrow \log[x(x - 1)] = \log\left(\frac{24}{4}\right)</math>  <math>\Rightarrow x(x - 1) = 6</math>  <math>\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0</math>  <math>\Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0</math>  <math>\Rightarrow x = 3 \text{ ή } x = -2</math></p> <p><i>Δεκτή λύση η <math>x = 3</math> γιατί <math>3 \in (1, +\infty)</math></i>  <i>ενώ απορρίπτεται η <math>x = -2</math> γιατί <math>-2 \notin (1, +\infty)</math></i></p>	<p><b>(7,8)</b></p> <p><b>(α)</b></p> <p>Ανάλυση σε δυνάμεις με βάση το 2 <span style="float: right;"><b>0,5 μ + 0,5μ</b></span></p> <p>Εφαρμογή ιδιοτήτων των δυνάμεων στον εκθέτη <span style="float: right;"><b>1μ+1μ</b></span></p> <p>Εξίσωση εκθετών <span style="float: right;"><b>1μ</b></span></p> <p>Πράξεις <span style="float: right;"><b>2μ</b></span></p> <p>Αποτέλεσμα <span style="float: right;"><b>1μ</b></span></p> <p><b>(β)</b></p> <p>Περιορισμοί <span style="float: right;"><b>1μ</b></span></p> <p>Εφαρμογή ιδιοτήτων λογαρίθμων <span style="float: right;"><b>(1+1)μ</b></span></p> <p>Ορθός σχηματισμός εξίσωσης β' βαθμού <span style="float: right;"><b>2μ</b></span></p> <p>Επίλυση εξίσωσης β' βαθμού <span style="float: right;"><b>2μ</b></span>  <math>x = 3</math> δεκτή <span style="float: right;"><b>0,5μ</b></span></p> <p><math>x = -2</math> απορ. <span style="float: right;"><b>0,5μ</b></span></p>
------------	---	---

**B2.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  με τύπους:

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

(6 μονάδες)

(β) Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι ίσες. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ , ώστε οι συναρτήσεις να είναι ίσες.

(9 μονάδες)

**Λύση:**

(α)  $x \neq 0$ , άρα  $A = \mathbb{R} - \{0\}$

$$x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2, \text{ άρα } B = \mathbb{R} - \{2\}$$

(β) Οι πραγματικές συναρτήσεις  $f$  και  $g$  έχουν ίδιο πεδίο τιμών το  $\mathbb{R}$ .

Οι δύο συναρτήσεις δεν είναι ίσες αφού έχουν διαφορετικό πεδίο ορισμού.

Παρατηρούμε ότι  $A \cap B = \mathbb{R} - \{0, 2\}$  και

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{x} = \frac{x(x+2)}{x} = x + 2, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$g(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x + 2, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

Άρα  $f(x) = g(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$

Επομένως, οι δυο συναρτήσεις είναι ίσες ( $f = g$ ) στο  $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

(6,9)

(α)

$x \neq 0$  1,5μ

Π.Ο. της  $f$  1,5μ

$x \neq 2$  1,5μ

Π.Ο. της  $g$  1,5μ

(Γίνεται δεκτή οποιαδήποτε άλλη ορθή έκφραση του Π.Ο.)

(β)

Συμπέρασμα  $f \neq g$  1μ

Ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  2μ

Παραγοντοποίηση και απλοποίηση της  $f$  2μ

Παραγοντοποίηση και απλοποίηση της  $g$  2μ

Συμπέρασμα  $f = g$  2μ

<p><b>B3.</b></p>	<p><b>(α)</b> Σε τρίγωνο <math>ABΓ</math> ισχύει η σχέση  <math>2R \cdot \beta \cdot \eta\mu B = \alpha^2 - 2R \cdot \gamma \cdot \eta\mu Γ</math>, όπου <math>R</math> η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.</p> <p><b>(β)</b> Αν σε τρίγωνο <math>ABΓ</math> ισχύει η σχέση <math>a\sigma\upsilon\nu\Gamma = \gamma\sigma\upsilon\nu A</math>, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.</p> <p><b>Λύση:</b></p> <p><b>(α)</b> <math>2R \cdot \beta \cdot \eta\mu B = \alpha^2 - 2R \cdot \gamma \cdot \eta\mu Γ</math>  <math>\Rightarrow 2R \cdot \beta \cdot \frac{\beta}{2R} = \alpha^2 - 2R \cdot \gamma \cdot \frac{\gamma}{2R}</math>  <math>\Rightarrow \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2</math>  <math>\Rightarrow \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2</math>  <i>Επομένως, το τρίγωνο <math>ABΓ</math> είναι ορθογώνιο αφού ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα.</i></p> <p><b>(β)</b> <math>a\sigma\upsilon\nu\Gamma = \gamma\sigma\upsilon\nu A</math>  <math>\Rightarrow \alpha \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} = \gamma \cdot \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}</math>  <math>\Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\beta} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta}</math>  <math>\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2</math>  <math>\Rightarrow 2\alpha^2 - 2\gamma^2 = 0</math>  <math>\Rightarrow \alpha^2 - \gamma^2 = 0</math>  <math>\Rightarrow (\alpha + \gamma) \cdot (\alpha - \gamma) = 0</math>,  <math>\alpha + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = -\gamma</math> (αδύνατο), <math>\alpha, \gamma &gt; 0</math>  ή <math>\alpha - \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \gamma</math></p> <p><i>Άρα, το τρίγωνο <math>ABΓ</math> είναι ισοσκελές</i></p>	<p><b>(5,5)</b></p> <p><b>(α)</b>  Αντικατάσταση  ορθών τύπων <b>1μ</b></p> <p>Πράξεις <b>2μ</b>  Αποτέλεσμα (Π.Θ.) <b>1μ</b>  Συμπέρασμα <b>1μ</b></p> <p><b>(β)</b>  Αντικατάσταση  ορθών τύπων <b>1μ</b></p> <p>Πράξεις <b>2μ</b>  <math>\alpha = -\gamma</math> (αδύνατο) <b>0,5μ</b>  <math>\alpha = \gamma</math> <b>0,5μ</b>  Ισοσκελές <b>1μ</b></p>
-------------------	---	--

ΤΕΛΟΣ ΟΔΗΓΟΥ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ