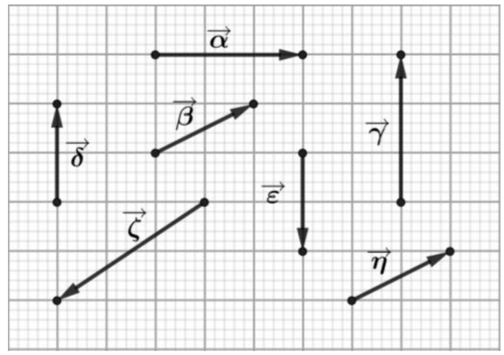
Α΄ ΤΑΞΗ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (Α043)
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ - ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ - Α΄ ΣΕΙΡΑ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>: Αποτελείται από 6 ασκήσεις και βαθμολογείται με 60 μονάδες.

Α1. Από το διπλανό σχήμα, να βρείτε δύο διανύσματα τα οποία να είναι:

(α) ίσα

(β) αντίθετα



<u>Λύση</u>:

(α) $\vec{\beta}\,,\ \vec{\eta}$ ή $\vec{\beta} = \vec{\eta}$ 5μ

(β) $\vec{\delta}\,,\ \vec{\varepsilon}$ ή $\vec{\delta} = -\vec{\varepsilon}$ 5μ

Α2. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$

(β) $\sqrt{12 - \sqrt[3]{27}}$

<u>Λύση</u>:

2,5μ 1,5μ

(α) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{72}{2}} = \sqrt{36} = 6$ 1μ

(β) $\sqrt{12 - \sqrt[3]{27}} = \sqrt{12 - 3} = \sqrt{9} = 3$ 1μ

2μ 2μ

Α3. Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας θ, αν:

(α) $\theta = 135^{\circ}$
(β) $\theta = -30^{\circ}$
(γ) $\varepsilon\varphi\theta < 0$ και $\eta\mu\theta > 0$
(δ) $\eta\mu\theta = -\dfrac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = -\dfrac{4}{5}$

<u>Λύση</u>:

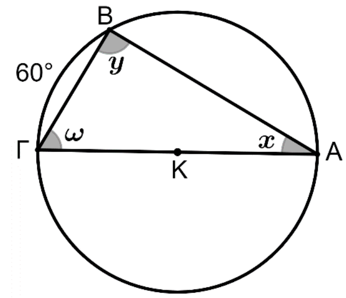
(α) 2ο τεταρτημόριο

(β) 4ο τεταρτημόριο 4 x 2,5μ

(γ) 2ο τεταρτημόριο

(δ) 3ο τεταρτημόριο

Α4. Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο $Κ$. Η πλευρά $ΑΓ$ του τριγώνου είναι διάμετρος του κύκλου και το τόξο $ΒΓ$ έχει μέτρο 60°. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών x , y και ω, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



<u>Λύση</u>:

$\hat{x} = \frac{\widehat{ΒΓ}}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$ 2μ (το μέτρο της εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου) 2μ

$\hat{y} = \frac{180°}{2} = 90°$ 2μ (εγγεγραμμένη γωνία κύκλου που βαίνει σε ημικύκλιο) 2μ

$\hat{x} + \hat{y} + \widehat{\omega} = 180°$ 1μ ή (άθροισμα γωνιών τριγώνου)

$30° + 90° + \widehat{\omega} = 180°$ 0,5μ

$\widehat{\omega} = 180° - 30° - 90°$

$\widehat{\omega} = 60°$ 0,5μ

Σημείωση: Αν η αιτιολόγηση δεν είναι πλήρης, αλλά το νόημα αποδίδεται ικανοποιητικά, να γίνει αποδεκτή.

Α5. Δίνονται οι κύκλοι $(Κ, R_1)$, $(Λ, R_2)$, και $(Μ, R_3)$, οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά μεταξύ τους, όπως φαίνεται στην πιο κάτω εικόνα ενός επιτοίχιου διακοσμητικού. Αν $R_1 = 4cm$, $R_2 = 2cm$, $R_3 = 3cm$ και τα σημεία $Κ$, $Λ$ και $Μ$ είναι συνευθειακά, να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $ΚΜ$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>:

1μ

$ΚΜ = ΚΛ + ΛΜ$ (τα σημεία $Κ$, $Λ$ και $Μ$ είναι συνευθειακά)

1μ $(ΚΛ) = R_1 + R_2$ και $(ΛΜ) = R_2 + R_3$ (οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά)

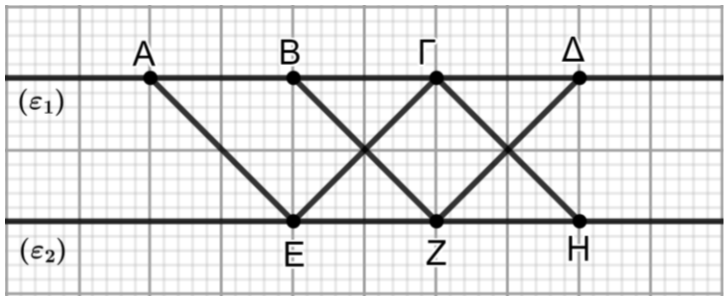
2μ $(ΚΜ) = R_1 + R_2 + R_2 + R_3$ 1μ 2μ

$(ΚΜ) = 4 + 2 + 2 + 3$ 2μ

$(ΚΜ) = 11\ cm$ 1μ

Σημείωση: Αν δεν έχει μονάδα μέτρησης να αφαιρεθεί 0,5μ

Α6. Στο πιο κάτω σχήμα οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες. Οι αποστάσεις μεταξύ όλων των διαδοχικών σημείων, σε κάθε ευθεία, είναι ίσες.



(α) Να βρείτε το διάνυσμα που αντιστοιχεί στα πιο κάτω:

i) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{E\Gamma}$

ii) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BZ}+\overrightarrow{ZE}$

iii) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{HE}$ **(6 μονάδες)**

(β) Αν $\overrightarrow{AE}=\vec{\kappa}$ και $\overrightarrow{E\Gamma}=\vec{\lambda}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta Z}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ συναρτήσει των $\vec{\kappa}$ και $\vec{\lambda}$.

(4 μονάδες)

<u>Λύση</u>:

(α)

i) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{E\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$ 2μ

2μ

ii) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BZ}+\overrightarrow{ZE}=\overrightarrow{AE}$

0,5μ 0,5μ 1μ 0,5μ 0,5μ

iii) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{\Gamma E}$ ή $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{\Gamma H}+\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{\Gamma E}$ 1μ

1μ

(β)

1μ

$\overrightarrow{\Delta Z}=-\overrightarrow{E\Gamma}=-\vec{\lambda}$ ($\Gamma\Delta ZE$ παραλληλόγραμμο)

0,5μ

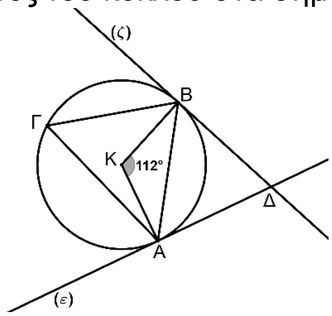
$\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{E\Gamma}=\vec{\kappa}+\vec{\lambda}$

0,5μ 0,5μ 0,5μ

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>: Αποτελείται από 3 ασκήσεις και βαθμολογείται με 40 μονάδες.

Β1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, ρ). Η γωνία AKB έχει μέτρο $112°$ και οι ευθείες (ε) και (ζ) είναι εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία A και B αντίστοιχα.



(α) Να υπολογίσετε:

i) το μέτρο των γωνιών $A\Gamma B$, $BA\Delta$ και KBA, **(6 μονάδες)**

ii) το μέτρο του τόξου $A\Gamma B$. **(2 μονάδες)**

(β) Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta B$. **(2 μονάδες)**

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)

<u>Λύση</u>:

(α) i) $A\hat{\Gamma}B = \dfrac{A\hat{K}B}{2} = \dfrac{112°}{2} = 56°$ 1μ (θεώρημα εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας) 1μ

$B\hat{A}\Delta = A\hat{\Gamma}B = 56°$ 1μ (θεώρημα χορδής και εφαπτομένης) 1μ

0,5μ $A\hat{K}B + K\hat{B}A + K\hat{A}B = 180°$ ή (άθροισμα γωνιών τριγώνου AKB)

0,5μ $112° + K\hat{B}A + K\hat{B}A = 180°$ ($K\hat{A}B = K\hat{B}A$ ως γωνίες βάσης ισοσκελούς

$2K\hat{B}A = 180° - 112°$ τριγώνου BKA $(KA = KB = \rho)$) 0,5μ

0,5μ $K\hat{B}A = 34°$

ii) $\widehat{AB} = 112°$ 0,5μ (το μέτρο ενός τόξου ισούται με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας) 0,5μ

0,5μ $\widehat{A\Gamma B} + \widehat{AB} = 360°$ ή (άθροισμα τόξων κύκλου)

$\widehat{A\Gamma B} = 360° - \widehat{AB} = 360° - 112° = 248°$ 0,5μ

(β) $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}B = 56°$ 0,5μ (θεώρημα χορδής και εφαπτομένης) 0,5μ

Άρα $A\hat{B}\Delta = B\hat{A}\Delta = 56°$ συνεπώς, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με $\Delta A = \Delta B$ 0,5μ

0,5μ

Σημείωση: Αν η αιτιολόγηση δεν είναι πλήρης, αλλά το νόημα αποδίδεται ικανοποιητικά, να γίνει αποδεκτή.

Β2. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \left(3\sqrt{6} + 4\sqrt{24} + \sqrt{96}\right) \div \sqrt{150} \quad \text{και} \quad B = \frac{2}{3+\sqrt{3}} + \frac{2}{3-\sqrt{3}}$$

(α) Να αποδείξετε ότι $A = 3$ και $B = 2$. **(10 μονάδες)**

(β) Να λύσετε την εξίσωση $x^{\frac{2}{3}} = 6A \cdot B,\ x \geq 0$. **(5 μονάδες)**

<u>Λύση</u>:

0,5μ 0,5μ

(α) $A = \left(3\sqrt{6} + 4\sqrt{4 \cdot 6} + \sqrt{16 \cdot 6}\right) \div \sqrt{25 \cdot 6}$ 0,5μ

0,5μ $= \left(3\sqrt{6} + 4\sqrt{4} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{6}\right) \div \left(\sqrt{25} \cdot \sqrt{6}\right)$

0,5μ $= \left(3\sqrt{6} + 4 \cdot 2\sqrt{6} + 4\sqrt{6}\right) \div \left(5\sqrt{6}\right)$ 0,5μ

$= \left(3\sqrt{6} + 8\sqrt{6} + 4\sqrt{6}\right) \div \left(5\sqrt{6}\right)$ 0,5μ

0,5μ $= \left(15\sqrt{6}\right) \div \left(5\sqrt{6}\right)$

$= 3$ 1μ

0,5μ 0,5μ 1μ 0,5μ

$$B = \frac{2}{3+\sqrt{3}} + \frac{2}{3-\sqrt{3}} = \frac{2\left(3-\sqrt{3}\right)+2\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)} = \frac{6-2\sqrt{3}+6+2\sqrt{3}}{(3)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{12}{9-3} = \frac{12}{6} = 2$$

0,5μ 0,5μ 0,5μ 1μ

0,5μ + 0,5μ 1μ

(β) Για $A = 3$ και $B = 2 \ \Rightarrow \ x^{\frac{2}{3}} = 6 \cdot 3 \cdot 2,\ x \geq 0 \ \Rightarrow \ x^{\frac{2}{3}} = 36,\ x \geq 0$

Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στη δύναμη $\frac{3}{2}$

0,5μ 1μ

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = (36)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}} = \left(6^{2}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = 6^{2\cdot\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = 6^3 = 216$$

0,5μ 0,5μ 0,5μ

Β3. Δίνεται ότι $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{12}{13}$, $90° < \theta < 180°$. Με τη χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων:

(α) να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \frac{5\sigma\varphi\theta - 13\eta\mu\theta}{26\sigma\upsilon\nu\theta + 24\varepsilon\varphi\theta}$ **(10 μονάδες)**

(β) αν $A = \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu^2\theta(1+\varepsilon\varphi^2\theta) + \eta\mu^2\theta(1+\sigma\varphi^2\theta) = 4A$ **(5 μονάδες)**

<u>Λύση</u>:

(α) $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta$ 1μ

0,5μ $\Rightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$ 0,5μ $\Rightarrow \eta\mu\theta = \pm\sqrt{\frac{25}{169}} = \pm\frac{5}{13}$ 0,5μ

0,5μ $90° < \theta < 180°$ (2ο τεταρτημόριο) άρα $\eta\mu\theta > 0$ $\Rightarrow \eta\mu\theta = +\frac{5}{13}$ 0,5μ

Συνεπώς, $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ 0,5μ $= \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$ 1μ και $\sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta}$ 0,5μ $= -\frac{12}{5}$ 1μ

Τότε, $A = \frac{5\cdot\left(-\frac{12}{5}\right) - 13\cdot\left(\frac{5}{13}\right)}{26\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) + 24\cdot\left(-\frac{5}{12}\right)} = \frac{-12-5}{2\cdot(-12)+2\cdot(-5)} = \frac{-17}{-24-10} = \frac{-17}{-34} = \frac{1}{2}$

0,5μ 0,5μ 0,5μ 0,5μ 0,5μ 0,5μ 0,5μ

(β) Για $A = \frac{1}{2}$, έχουμε ότι: $\sigma\upsilon\nu^2\theta(1+\varepsilon\varphi^2\theta) + \eta\mu^2\theta(1+\sigma\varphi^2\theta) = 4\cdot\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta(1+\varepsilon\varphi^2\theta) + \eta\mu^2\theta(1+\sigma\varphi^2\theta) = 2$ 0,5μ

Α΄ μέλος $= \sigma\upsilon\nu^2\theta(1+\varepsilon\varphi^2\theta) + \eta\mu^2\theta(1+\sigma\varphi^2\theta)$

$= \sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta\cdot\varepsilon\varphi^2\theta + \eta\mu^2\theta + \eta\mu^2\theta\cdot\sigma\varphi^2\theta$ 1μ

$= \underbrace{\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta} + \sigma\upsilon\nu^2\theta\left(\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)^2 + \eta\mu^2\theta\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}\right)^2$

0,5μ $= 1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta\frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} + \eta\mu^2\theta\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^2\theta}$ 0,5μ 0,5μ

0,5μ $= 1 + \underbrace{\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta}$ 0,5μ

$= 1 + 1$ 0,5μ

0,5μ $= 2 =$ Β΄ μέλος

ΤΕΛΟΣ ΟΔΗΓΟΥ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ