ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2022-23

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Α΄ ΣΕΙΡΑ)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: 2Γ

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: 90 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΕΝΝΕΑ (9) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΔΙΟΡΘΩΤΕΣ

Επισημαίνεται ότι οι διορθωτές πρέπει να ακολουθούν πιστά τις οδηγίες βαθμολόγησης όσον αφορά στην κατανομή των μονάδων, χωρίς να προβαίνουν σε υποδιαίρεση της βαθμολογίας

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ – Α΄ ΣΕΙΡΑ

Γενικές Οδηγίες

- Σε όλες τις ασκήσεις, όπου κρίνετε ότι οι κάποιες ενδιάμεσες πράξεις δεν είναι απαραίτητο να δίνονται από τους μαθητές και τις μαθήτριες και ότι αυτές μπορούν να εκτελούνται απευθείας, όπως για παράδειγμα:
  αντί να δοθεί $(y+4)^2 = y^2 + 2\cdot y\cdot 4 + 4^2 = y^2 + 8y + 16$
  να δοθεί $(y+4)^2 = y^2 + 8y + 16$
  τότε να δίνονται όλες οι μονάδες.
- Αν σε κάποια άσκηση, μαθητής ή μαθήτρια δώσει άλλο τρόπο λύσης από αυτόν ή αυτούς που αναγράφονται στον οδηγό διόρθωσης και είναι μαθηματικά σωστός, να δίνονται όλες οι μονάδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Α1. Να βρείτε τα αναπτύγματα των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $(y+4)^2$ (β) $(x-6)(x+6)$

ΛΥΣΗ:

1 1,5 1 0,5 0,5 0,5

(α) $(y+4)^2 = y^2 + 2\cdot y\cdot 4 + 4^2 = y^2 + 8y + 16$

(β) $(x-6)(x+6) = x^2 - 6^2 = x^2 - 36$

1,5 1,5 1 1

Α2. Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $3\alpha^2 + \alpha^3$ (β) $9 - 4y^2$ (γ) $\alpha^3 + 8$

ΛΥΣΗ:

1 1 1

(α) $3\alpha^2 + \alpha^3 = \alpha^2(3+\alpha)$

0,5 0,5 1 1

(β) $9 - 4y^2 = 3^2 - (2y)^2 = (3-2y)(3+2y)$

0,5 0,5 0,5 0,5 1

(γ) $\alpha^3 + 8 = \alpha^3 + 2^3 = (\alpha+2)(\alpha^2 - 2\alpha + 4)$ 1

Α3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $(x-8)(3x+5)=0$ (β) $3x^2+2=5x$

ΛΥΣΗ:

1 1 1

(α) $(x-8)(3x+5)=0 \Leftrightarrow x-8=0$ ή $3x+5=0 \Leftrightarrow$

1 $\boxed{x=8}$ ή $3x=-5 \Leftrightarrow \boxed{x=-\frac{5}{3}}$

1

0,5

(β) $3x^2+2=5x \Leftrightarrow 3x^2-5x+2=0$ $\alpha=3,\ \beta=-5,\ \gamma=2$ 0,5

1 0,5 0,5 0,5 0,5

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{6}=\frac{5\pm1}{6}$$

$x_1=\frac{5+1}{6}=\frac{6}{6}=1$ 0,5

$x_2=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ 0,5

Α4. Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:

(α) $\frac{x^2-7x+10}{3x^2-6x}:\frac{(x-5)^3}{9x^4}$ (4μ) (β) $\frac{3\alpha-2}{\alpha^2+4\alpha-12}-\frac{5}{12+2\alpha}$ (6μ)

ΛΥΣΗ:

0,5 (για αντιστροφή κλάσματος)

1

(α) $\frac{x^2-7x+10}{3x^2-6x}:\frac{(x-5)^3}{9x^4}=\frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x-5)}}{\cancel{3x}\cancel{(x-2)}}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cancel{x^4}^{\,3}}{(x-5)^{\cancel{3}\,2}}=\frac{3x^3}{(x-5)^2}$ 1

1 0,5

$$(\beta)\quad \frac{3\alpha-2}{\alpha^2+4\alpha-12}-\frac{5}{12+2\alpha}=\frac{\overset{2}{\frown}\,3\alpha-2}{(\alpha+6)(\alpha-2)}-\frac{\overset{\alpha-2}{\frown}\,5}{2(6+\alpha)}$$

1 0,5

1

$$=\frac{2(3\alpha-2)-5(\alpha-2)}{2(\alpha+6)(\alpha-2)}=\frac{6\alpha-4-5\alpha+10}{2(\alpha+6)(\alpha-2)}$$

1

1

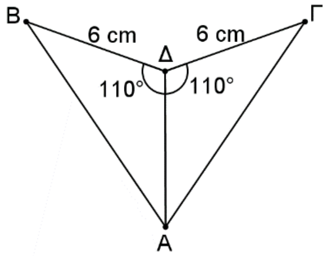
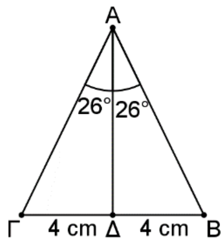
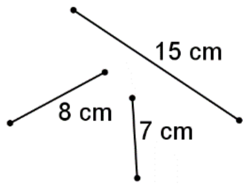
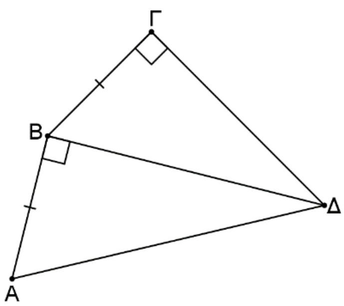
$$=\frac{\cancel{\alpha+6}}{2\cancel{(\alpha+6)}(\alpha-2)}$$

1

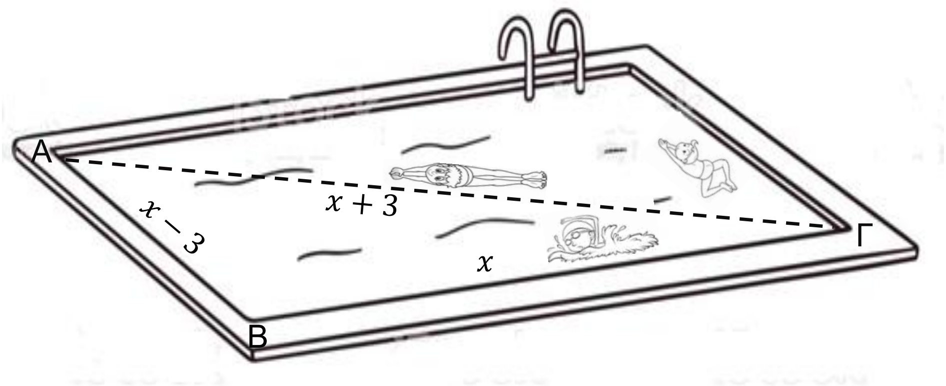
$$=\frac{1}{2(\alpha-2)}$$

0,5

A5. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις βάζοντας σε κύκλο τον κατάλληλο χαρακτηρισμό.

(α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προς μια, τότε είναι ίσα.	2 ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ που δίνονται στο πιο κάτω σχήμα είναι ίσα.  .	2 ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ) Το πιο κάτω τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.  	2 ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ) Τα πιο κάτω ευθύγραμμα τμήματα μπορούν να είναι πλευρές του ιδίου τριγώνου.  	2 ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ που δίνονται στο πιο κάτω σχήμα είναι ίσα.  	2 ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Α6. Στο πιο κάτω σχήμα, απεικονίζεται μια πισίνα σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Κολυμπώντας, ο Αντρέας διήνυσε απόσταση ίση με το μήκος της πισίνας, η Μαρία διήνυσε απόσταση ίση με το πλάτος της πισίνας και ο Κώστας διήνυσε απόσταση ίση με τη διαγώνιο της επιφάνειας της πισίνας. Η απόσταση που διήνυσε ο Κώστας είναι 3 m μεγαλύτερη από την απόσταση που διήνυσε ο Αντρέας και η απόσταση που διήνυσε η Μαρία είναι 3 m μικρότερη από την απόσταση που διήνυσε ο Αντρέας. Να υπολογίσετε το μήκος και το πλάτος της πισίνας.



ΛΥΣΗ:

Έστω $x =$ η απόσταση που διήνυσε ο Αντρέας = μήκος πισίνας   0,5

0,5

$x+3 =$ η απόσταση που διήνυσε ο Κώστας = διαγώνιος της επιφάνειας της πισίνας

$x-3 =$ η απόσταση που διήνυσε η Μαρία = πλάτος πισίνας   0,5

Εφαρμογή του Πυθαγόρειου Θεωρήματος:

$(\mathrm{А\Gamma})^2 = (\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{B\Gamma})^2$ 1

$\Leftrightarrow (x+3)^2 = (x-3)^2 + x^2$ 1

$\Leftrightarrow x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 + x^2$ 1

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 - 6x + 9 + x^2$ 1

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 - x^2 - 6x - 9 = 0$ 0,5

$\Leftrightarrow x^2 - 12x = 0$ 0,5

$\Leftrightarrow x(x-12) = 0$ 1

$\Leftrightarrow x = 0$ Απορρίπτεται ή $x = 12$ Δεκτή

0,5   0,5   0,5

Άρα το μήκος της πισίνας είναι $x = 12$ m   0,5

και το πλάτος της πισίνας είναι $x - 3 = 12 - 3 = 9$ m   0,5

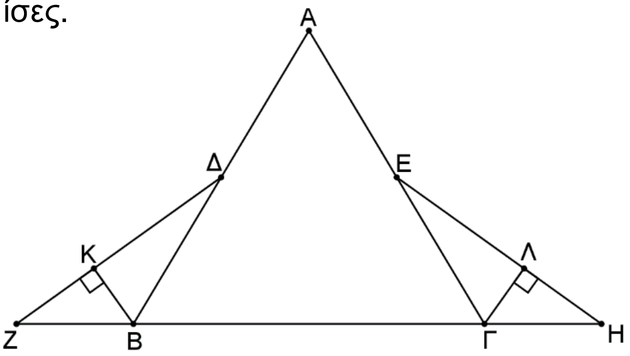
ΜΕΡΟΣ Β΄: **Αποτελείται από 3 ασκήσεις και βαθμολογείται με 40 μονάδες.**
Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.
Δυο ασκήσεις βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία και μία άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Στις προεκτάσεις της πλευράς ΒΓ παίρνουμε σημεία Ζ και Η τέτοια ώστε ΒΖ = ΓΗ.

(α) Να δείξετε ότι ΔΖ = ΕΗ. (4μ)

(β) Αν $Z\hat{\Delta}B = 24^{o}$ και $\Gamma\hat{H}E = 35^{o}$ να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ. (2μ)

(γ) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των σημείων Β και Γ από τις πλευρές ΖΔ και ΕΗ αντίστοιχα είναι ίσες. (4μ)



ΛΥΣΗ:

0,5

(α) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΖΔ και ΓΗΕ.

(1) ΒΖ = ΓΗ (Δεδομένο) **(Π)** 0,5

0,5 0,5

(2) ΒΔ = ΓΕ (Μισές πλευρές ίσων πλευρών) **(Π)**

ή ($B\Delta = \frac{1}{2}AB,\ \Gamma E = \frac{1}{2}A\Gamma$ και $AB = A\Gamma$)

ή ($AB = A\Gamma$, Δ μέσο της ΑΒ και Ε μέσο της ΑΓ)

0,5 0,5

(3) $Z\hat{B}\Delta = H\hat{\Gamma}E$ (Παραπληρωματικές ίσων γωνιών) **(Γ)**

ή ($Z\hat{B}\Delta = 180^{o} - A\hat{B}\Gamma$, $E\hat{\Gamma}H = 180^{o} - A\hat{\Gamma}B$ και $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B$)

Από **(1), (2), (3)** ⇒ $\overset{\Delta}{BZ\Delta} = \overset{\Delta}{\Gamma HE}$ (Π – Γ – Π) 0,5

⇒ ΔΖ = ΕΗ (αντίστοιχα στοιχεία ίσων τριγώνων) 0,5

(β) $\Delta\hat{Z}B = \Gamma\hat{H}E = 35^{o}$ (αντίστοιχα στοιχεία ίσων τριγώνων) 0,5

$A\hat{B}\Gamma = 24^{o} + 35^{o} = 59^{o}$ (εξωτερική γωνία του τριγώνου ΔΖΒ) 0,5

$A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma = 59^\circ$ (ΑΒ=ΑΓ) 0,5

0,5

$\hat{A} = 180^\circ - (59^\circ + 59^\circ) = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)

(γ) <u>1^{ος} τρόπος</u>

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΖΚ και ΓΗΛ 0,5

(1) ΒΖ = ΓΗ (Δεδομένο) **(Π)** 0,5

0,5 0,5

(2) $B\hat{Z}\Delta = \Gamma\hat{H}E$ (Από (α) ερώτημα - Αντίστοιχα στοιχεία ίσων τριγώνων) **(Γ)**

ή ($\overset{\Delta}{BZ\Delta} = \overset{\Delta}{\Gamma HE}$)

0,5 0,5

(3) $B\hat{K}Z = \Gamma\hat{\Lambda}H = 90^\circ$ (ΒΚ, ΓΛ αποστάσεις) **(Ο)**

ή (ΒΚ ⊥ ΖΔ και ΓΛ ⊥ ΕΗ)

Από **(1), (2), (3)** $\overset{\Delta}{BZK} = \overset{\Delta}{\Gamma H\Lambda}$ (Π – Γ – Ο) 0,5

⇒ ΒΚ = ΓΛ (Αντίστοιχα στοιχεία ίσων τριγώνων) 0,5

<u>2^{ος} τρόπος</u>

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΔΚ και ΓΕΛ 0,5

(1) ΒΔ = ΓΕ (Μισά ίσων πλευρών) **(Π)** 0,5

0,5 0,5

(2) $B\hat{\Delta}K = \Gamma\hat{E}\Lambda$ (Από (α) ερώτημα - Αντίστοιχα στοιχεία ίσων τριγώνων) **(Γ)**

ή ($\overset{\Delta}{BZ\Delta} = \overset{\Delta}{\Gamma HE}$)

0,5 0,5

(3) $B\hat{K}\Delta = \Gamma\hat{\Lambda}E = 90^\circ$ (ΒΚ, ΓΛ αποστάσεις) **(Ο)**

ή (ΒΚ ⊥ ΖΔ και ΓΛ ⊥ ΕΗ)

(1), (2), (3) ⇒ $\overset{\Delta}{BK\Delta} = \overset{\Delta}{\Gamma E\Lambda}$ (Π – Γ – Ο) 0,5

⇒ ΒΚ = ΓΛ (Αντίστοιχα στοιχεία ίσων τριγώνων) 0,5

<u>3^{ος} τρόπος</u>

Από το (α) ερώτημα, αφού τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΓΕΗ ισούνται, τότε θα έχουν:

(α) ίσο εμβαδόν και 2

(β) ίσες βάσεις, δηλαδή ΖΔ = ΕΗ. 1

1

Άρα και τα ύψη ΒΚ και ΓΛ των τριγώνων ΒΖΔ και ΓΗΕ αντίστοιχα είναι ίσα.

B2. (α) Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα: (6μ)

$$(x-y)^3 - x^2y = x(y+x)(x-y) - y(y-2x)^2$$

(β) Αν $x+y=5$ και $xy=3$, να αποδείξετε ότι:

(i) $x^2+y^2=19$ (4μ) (ii) $\dfrac{\dfrac{x^4-y^4}{x^5+yx^4}}{\dfrac{y^2}{x}-\dfrac{y^3}{x^2}}=\dfrac{19}{9}$ (5μ)

ΛΥΣΗ:

2 0,5

(α) Α΄ Μέλος $= x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-x^2y = x^3-4x^2y+3xy^2-y^3$

0,5 0,5

Β΄ Μέλος $= x(x^2-y^2) - y[y^2 - 2\cdot y\cdot 2x + (2x)^2]$

0,5 0,5

$= x^3 - xy^2 - y(y^2-4yx+4x^2)$

$= x^3 - xy^2 - y^3 + 4xy^2 - 4x^2y$ 0,5

$= x^3 + 3xy^2 - y^3 - 4x^2y$ 0,5

Άρα: Α΄ Μέλος = Β΄ Μέλος 0,5

(β) (i) Αφού ισχύει $x+y=5$ τότε $(x+y)^2=5^2$ 0,5

$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=25$ 1

1

$\Leftrightarrow x^2+2\cdot 3+y^2=25$ $(xy=3)$

$\Leftrightarrow x^2+6+y^2=25$ 0,5

$\Leftrightarrow x^2+y^2=25-6$ 0,5

$\Leftrightarrow x^2+y^2=19$ 0,5

(ii) Α΄ Μέλος $= \dfrac{\dfrac{x^4 - y^4}{x^5 + yx^4}}{\dfrac{y^2}{x} - \dfrac{y^3}{x^2}} = \dfrac{x^4-y^4}{x^5+yx^4} : \left(\overset{x}{\dfrac{y^2}{x}} - \overset{1}{\dfrac{y^3}{x^2}} \right)$

0,5 0,5

$$= \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^4(x+y)} : \frac{xy^2-y^3}{x^2}$$

0,5 0,5

0,5 0,5

$$= \frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}{x^4(x+y)} : \frac{y^2(x-y)}{x^2}$$

0,5

$$= \frac{\cancel{(x-y)}\cancel{(x+y)}(x^2+y^2)}{\cancel{(x+y)}\cancel{x^4}2} \cdot \frac{\cancel{x^2}}{y^2\cancel{(x-y)}}$$

0,5

$$= \frac{x^2+y^2}{x^2y^2} = \frac{x^2+y^2}{(xy)^2}$$

0,5

0,5

$= \dfrac{19}{3^2} = \dfrac{19}{9} =$ Β΄ Μέλος ($x^2 + y^2 = 19$ και $xy = 3$)

Β3. (α) Να λύσετε την εξίσωση: (7μ)

$$\frac{x-1}{2x-6}-\frac{2}{4-x}=\frac{2}{x^2-7x+12}$$

(β) Δίνονται τα πολυώνυμα:

$\Delta=\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta^2-\beta\gamma$ και $\mathrm{E}=y^2-4+6y\beta+9\beta^2$

(ι) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα Δ και Ε. (6 μ)

(ιι) Αν α, β και γ είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ και $\Delta=0$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (2 μ)

ΛΥΣΗ:

(α)

$$\frac{x-1}{2x-6}-\frac{2}{4-x}=\frac{2}{x^2-7x+12}\Leftrightarrow\frac{\overset{x-4}{x-1}}{2(x-3)}+\frac{\overset{2(x-3)}{2}}{x-4}=\frac{\overset{2}{2}}{(x-4)(x-3)}$$

0,5 0,5 0,5

Ε.Κ.Π$=2(x-4)(x-3)\neq 0\Rightarrow x\neq 4,\ x\neq 3$ 1

$(x-1)(x-4)+4(x-3)=4$ 1

$x^2-4x-x+4+4x-12-4=0$ 1

0,5 0,5

$x^2-x-12=0\Leftrightarrow(x-4)(x+3)=0$

$x=4$ (Απορρίπτεται) $x=-3$ (Δεκτή)

0,5 0,5 0,5

(β) (i)

1 1 1

$\Delta=\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta^2-\beta\gamma=\alpha(\beta-\gamma)+\beta(\beta-\gamma)=(\beta-\gamma)(\alpha+\beta)$

0,5 1

$\mathrm{E}=y^2-4+6y\beta+9\beta^2=y^2+6y\beta+9\beta^2-4=(y+3\beta)^2-4$

$=(y+3\beta-2)(y+3\beta+2)$ 1,5

0,5 0,5 0,5

(ii) Δ=0 $\Rightarrow(\beta-\gamma)(\alpha+\beta)=0\Rightarrow\beta-\gamma=0$ ή $\alpha+\beta=0$ (Απορρίπτεται διότι $\alpha,\beta>0$)

‘Αρα: $\beta=\gamma\Rightarrow$ Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. 0,5