

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2023

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Πέμπτη 29 Ιουνίου 2023

8:00 – 11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ
Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο, που αποτελείται
από τρεις (3) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις.

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Η κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1 Δίνεται η λέξη: **ΑΠΕΛΕΥΘΕΡΩΣΗ**

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της. (2 μονάδες)

(β) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της, που ξεκινούν από Α και τελειώνουν σε Η. (3 μονάδες)

A2 (α) Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int (4x^3 - x^2) dx$$

(2 μονάδες)

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int (\kappa - 2)x^\lambda dx = 2x^3 + c$$

(3 μονάδες)

A3 Σε μια οφθαλμολογική κλινική νοσηλεύονται 52 άτομα που πάσχουν από καταρράκτη, 35 άτομα που πάσχουν από γλαύκωμα και 12 άτομα που πάσχουν και από τις δύο ασθένειες. Να βρείτε πόσοι ασθενείς σε αυτή την κλινική:

(α) πάσχουν από τουλάχιστον μία από τις δύο ασθένειες

(β) πάσχουν από καταρράκτη, αλλά όχι από γλαύκωμα

- A4** (α) Να δώσετε τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης. **(2 μονάδες)**
- (β) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης, να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = -2x + 7$, είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} . **(3 μονάδες)**

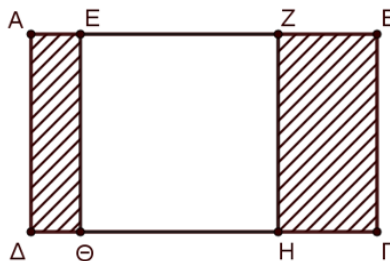
- A5** Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον χρόνο υπερωριών, σε ώρες, 25 εργαζομένων ενός εργοστασίου, τον περασμένο μήνα.

Χρόνος υπερωριών (σε ώρες)	0	1	2	3	4	5
Αρ. εργαζομένων	3	8	6	4	2	2

Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια Q_1 , Q_2 , Q_3 , το ενδοτεταρτημοριακό εύρος IQR και το εύρος R των πιο πάνω παρατηρήσεων.

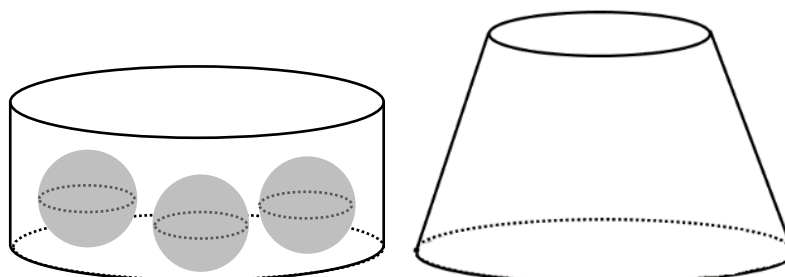
- A6** Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, με πλευρές $AD = x$ και $AB = y$, το οποίο έχει σταθερή περίμετρο ίση με 16 m . Μέσα σε αυτό, βρίσκεται τετράγωνο $EZH\Theta$, του οποίου η πλευρά EZ βρίσκεται πάνω στην πλευρά AB και η πλευρά ΘH πάνω στην πλευρά $\Delta\Gamma$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

- (α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου δίνεται από τον τύπο $E(x) = -2x^2 + 8x$. **(2 μονάδες)**
- (β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία μεγιστοποιείται το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν. **(3 μονάδες)**



- A7** Στο πιο κάτω σχήμα, υπάρχει ένα κυλινδρικό δοχείο, ανοικτό στο πάνω μέρος, με ακτίνα βάσης 8 cm και ύψος 6 cm . Μέσα σε αυτό υπάρχουν 3 σφαίρες ακτίνας 2 cm η κάθε μία. Δίπλα του υπάρχει ένα δοχείο, σε σχήμα κώλου, ανοικτό στο πάνω μέρος, γεμάτο με νερό. Το δοχείο έχει ακτίνα μεγάλης βάσης 8 cm , ακτίνα μικρής βάσης 4 cm και ύψος 8 cm . Αν αδειάσουμε το νερό που υπάρχει στο δοχείο σχήματος κώλου, μέσα στο κυλινδρικό δοχείο, να διερευνήσετε αν αυτό θα υπερχειλίσει ή όχι.

Να δικαιολογήσετε με μαθηματικούς υπολογισμούς την απάντησή σας.



A8 Για την πολυωνυμική συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , ισχύει ότι:

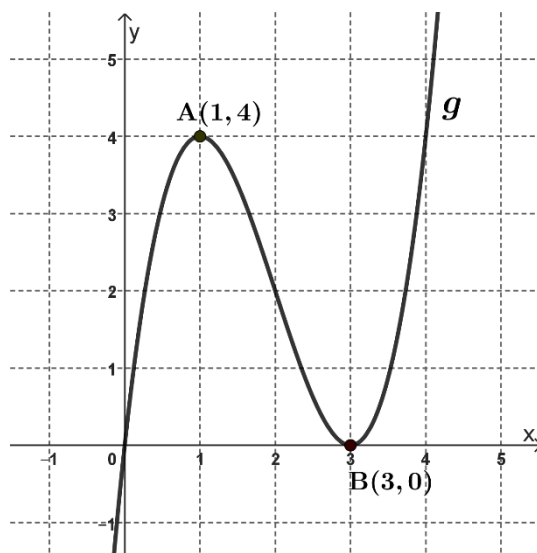
$$f''(x) = 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- (α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητά της. **(1 μονάδα)**
(β) Αν ισχύει ότι $f'(1) = 8$, να βρείτε την τεταγμένη του σημείου στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. **(2 μονάδες)**
(γ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $(0,1)$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f . **(2 μονάδες)**

A9 Η θεατρική ομάδα ενός Λυκείου αποτελείται από 10 μαθητές και 6 μαθήτριες. Η θεατρική ομάδα πρόκειται να ανεβάσει επί σκηνής ένα θεατρικό έργο, το οποίο απαιτεί 6 διαφορετικούς αντρικούς και 2 διαφορετικούς γυναικίους ρόλους. Όλοι οι μαθητές και όλες οι μαθήτριες της θεατρικής ομάδας είναι διαθέσιμοι να αναλάβουν ρόλο.

- (α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των ηθοποιών, αν οι μαθητές υποδυθούν αντρικούς και οι μαθήτριες γυναικίους ρόλους; **(2 μονάδες)**
(β) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των ηθοποιών, αν οι μαθητές υποδυθούν αντρικούς και οι μαθήτριες γυναικίους ρόλους, αλλά ένας συγκεκριμένος μαθητής, αν επιλεγεί, μπορεί να υποδυθεί μόνο ένα συγκεκριμένο αντρικό ρόλο; **(3 μονάδες)**

A10 Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης g . Τα σημεία $A(1,4)$ και $B(3,0)$ είναι τοπικά ακρότατα της g .



- (α) Αν $\int F(x)dx = g(x) + c$, να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης F με τον άξονα των x , δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.
(β) Αν $\int g(x)dx = G'(x) + c$, να βρείτε την τιμή του x , για την οποία η συνάρτηση G παρουσιάζει σημεία καμπής, δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

ΤΕΛΟΣ Α΄ ΜΕΡΟΥΣ – ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ Β΄ ΜΕΡΟΣ

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις.

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Η κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. **(2 μονάδες)**
- (β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς:
- i. τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα **(5 μονάδες)**
- ii. τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της **(1 μονάδες)**
- (γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . **(2 μονάδες)**

B2 Στον πιο κάτω πίνακα, δίνεται η ηλικία 6 ηλεκτρονικών υπολογιστών, σε χρόνια, και ο αριθμός των επισκευών που έγιναν, για τον καθένα, μέχρι σήμερα.

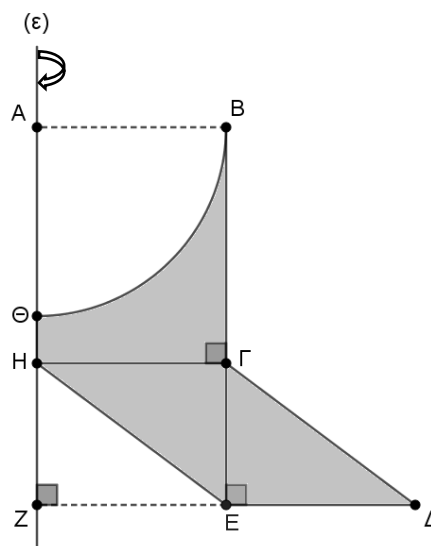
Η.Υ.	Ηλικία Η.Υ. (x_i)	Αρ. επισκευών (y_i)
1	2	4
2	3	6
3	4	8
4	5	10
5	6	11
6	4	9

- (α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς. **(3 μονάδες)**
- (β) Να υπολογίσετε τον γραμμικό συντελεστή συσχέτισης. **(6 μονάδες)**
- (γ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ της ηλικίας των υπολογιστών και του αριθμού των επισκευών που έγιναν για τον καθένα μέχρι σήμερα. **(1 μονάδα)**

B3 Η συνάρτηση $\Pi(t)$ υπολογίζει, συναρτήσει του χρόνου t , σε χρόνια, τον πληθυσμό μιας χώρας, σε εκατομμύρια, για τα επόμενα 25 χρόνια. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού, δίνεται από τη σχέση $\Pi'(t) = -\frac{1}{10}t + 2$, $t \in [0,25]$.

- (α) Αν σήμερα ($t = 0$) ο πληθυσμός της χώρας είναι 30 εκατομμύρια, να αποδείξετε ότι $\Pi(t) = -\frac{t^2}{20} + 2t + 30$, $t \in [0,25]$. **(4 μονάδες)**
- (β) Σε πόσα χρόνια ο πληθυσμός αναμένεται να είναι 45 εκατομμύρια; **(3 μονάδες)**
- (γ) Σε πόσα χρόνια ο πληθυσμός θα αρχίσει να μειώνεται; **(3 μονάδες)**

- B4** Στο διπλανό σχήμα, το τετράπλευρο $HΓΔΖ$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με $HΓ \parallel ΖΔ$, $HΓ = 4 \text{ cm}$, $ZΔ = 8 \text{ cm}$ και $ZH = 3 \text{ cm}$. Το τετράπλευρο $ΑΒΓΗ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με $BΓ = 5 \text{ cm}$. Με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $ΑΒ$ γράφουμε το τόξο $BΘ$. Το σκιασμένο χωρίο $BΓΔΕΗΘΒ$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $(ε)$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



- B5** Ο προσωπικός μυστικός κωδικός εισόδου, ενός πελάτη μιας τράπεζας, στην ηλεκτρονική ιστοσελίδα της, είναι ένας εξαψήφιος αριθμός, που σχηματίζεται με τα ψηφία 0 έως 9. Τα ψηφία αυτά μπορούν να επαναλαμβάνονται και να βρίσκονται σε οποιαδήποτε από τις έξι θέσεις του αριθμού. Για παράδειγμα, οι αριθμοί 099824, 002377, 125760, 000000, 000023, 777766 μπορεί να είναι προσωπικοί κωδικοί εισόδου, πελατών της τράπεζας αυτής, στην ηλεκτρονική της ιστοσελίδα.

- (α) Να βρείτε πόσοι το πολύ προσωπικοί μυστικοί κωδικοί εισόδου μπορούν να σχηματιστούν.

(2 μονάδες)

- (β) Αν ένας πελάτης ξέχασε τον ακριβή προσωπικό μυστικό κωδικό του, αλλά θυμάται ότι αρχίζει ή με το ψηφίο 5 ή με το ψηφίο 6 και είναι άρτιος, ποια είναι η πιθανότητα να σχηματίσει τον αριθμό αυτό με την πρώτη προσπάθεια;

(3 μονάδες)

- (γ) Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης της τράπεζας αυτής να έχει προσωπικό μυστικό κωδικό, του οποίου τα ψηφία είναι διαδοχικά και σε φθίνουσα διάταξη;

(3 μονάδες)

- (δ) Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης της τράπεζας αυτής να έχει προσωπικό μυστικό κωδικό, του οποίου όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά, περιέχει τα ψηφία 5 και 9 και το ψηφίο 9 προηγείται του ψηφίου 5;

(2 μονάδες)

Τ Ε Λ Ο Σ Ε Ξ Ε Τ Α Σ Τ Ι Κ Ο Υ Δ Ο Κ Ι Μ Ι Ο Υ