ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2023

ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Παρασκευή 16 Ιουνίου 2023

8:00 π.μ. – 11:00 π.μ.

Ο ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 20 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int e^x\,(1+e^x)^4\,dx$$

Λύση:

Α' τρόπος

$$\int e^x\,(1+e^x)^4\,dx = \int\ (1+e^x)^4\,d(1+e^x) = \frac{(1+e^x)^5}{5} + c$$

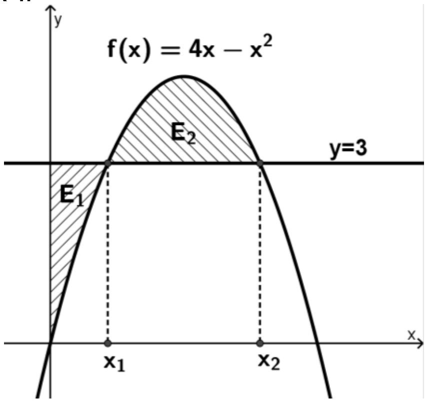
Β' τρόπος

$$u = 1+e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$\int e^x\,(1+e^x)^4\,dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + c$$

$$= \frac{(1+e^x)^5}{5} + c$$

Α2. Η ευθεία $y = 3$ τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4x - x^2$ στα σημεία με τετμημένες x_1 και x_2 και σχηματίζει τα χωρία E_1 και E_2 όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου E_1. **(μονάδες 2)**

(β) Να δείξετε ότι τα χωρία E_1 και E_2 είναι ισεμβαδικά. **(μονάδες 3)**

<u>Λύση</u>

Σημεία τομής ευθείας – καμπύλης:

$$4x - x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

(α) Υπολογισμός $\boldsymbol{E_1}$

$$E_1 = \int_0^1 [3 - (4x - x^2)]dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3} \text{ τ.μ.}$$

(β) Υπολογισμός $\boldsymbol{E_2}$

$$E_2 = \int_1^3 [4x - x^2 - 3]dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^3$$

$$= 18 - 9 - 9 - \left(2 - \frac{1}{3} - 3\right) = \frac{4}{3} \text{ τ.μ.}$$

Συμπεραίνουμε ότι τα δύο χωρία είναι ισεμβαδικά.

Α3. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{\kappa=7}^{100} \kappa^2$$

$$\sum_{\kappa=7}^{100} \kappa^2 = \sum_{\kappa=1}^{100} \kappa^2 - \sum_{\kappa=1}^{6} \kappa^2$$

$$= \frac{100 \cdot (100+1) \cdot (2 \cdot 100 + 1)}{6} - \frac{6 \cdot (6+1) \cdot (2 \cdot 6 + 1)}{6}$$

$$= 338\,350 - 91 = 338\,259$$

Α4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \kappa\ \sigma\upsilon\nu x - \kappa^2\ \eta\mu x + 1,\ \kappa \in \mathbb{R} - \{0\}$. Αν η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

(α) να βρείτε την τιμή του κ **(μονάδες 2)**

(β) να βρείτε τιμή ξ, για την οποία ικανοποιείται το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **(μονάδες 3)**

Λύση

(α) Αφού για την συνάρτηση f ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε ισχύει ότι

$$f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow \kappa + 1 = -\kappa^2 + 1$$

$\kappa = 0$ απορρίπτεται, $\kappa \in \mathbb{R} - \{0\}$,

$\kappa = -1$, δεκτή.

(β) Σύμφωνα με το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

$$f(x) = -\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + 1$$
$$f'(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$$

Άρα $\eta\mu\xi - \sigma\upsilon\nu\xi = 0 \Longrightarrow \eta\mu\xi = \sigma\upsilon\nu\xi \Longrightarrow (\varepsilon\varphi\xi = 1) \Longrightarrow \xi = \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, δεκτή.

Α5. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = 1 - x$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 x^{\kappa}(1-x)^{\lambda}dx = \int_0^1 x^{\lambda}(1-x)^{\kappa}dx \qquad \kappa, \lambda \in \mathbb{N}$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 x(1-x)^{10}dx$$

Λύση:

Θέτουμε:

$$u = 1 - x \Longrightarrow x = 1 - u$$

$$\Longrightarrow dx = -du$$

$$x = 0 \Longrightarrow u = 1$$

$$x = 1 \Longrightarrow u = 0$$

Επομένως:

$$\int_0^1 x^{\kappa}(1-x)^{\lambda}dx = -\int_1^0 (1-u)^{\kappa}u^{\lambda}du$$

$$= \int_0^1 (1-u)^{\kappa}u^{\lambda}du$$

$$= \int_0^1 (1-x)^{\kappa}x^{\lambda}dx$$

$$= \int_0^1 x^{\lambda}(1-x)^{\kappa}dx$$

Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω με $\kappa = 1$ και $\lambda = 10$:

$$\int_0^1 x(1-x)^{10}dx = \int_0^1 (1-x)x^{10}dx$$

$$= \int_0^1 (x^{10} - x^{11})dx$$

$$= \left[\frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{12}}{12}\right]_0^1 = \frac{1^{11}}{11} - \frac{1^{12}}{12} - 0 = \frac{1}{132}$$

Α6. Πάνω σε κάθε πλευρά ενός τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ ορίζουμε 10 σημεία, όλα διαφορετικά από τις κορυφές του $Α, Β, Γ$ και $Δ$. Να βρείτε το πλήθος των τριγώνων που μπορούν να σχηματιστούν με κορυφές από τα 40 αυτά σημεία.

Λύση:

Ά τρόπος

Όλες οι τριάδες που σχηματίζονται από τα 40 σημεία είναι

$$\binom{40}{3} = \frac{40!}{(40-3)!\,3!} = 9880$$

Από αυτές, αφαιρούμε τις τριάδες των συνευθειακών σημείων σε κάθε πλευρά του τετραγώνου

$$4\binom{10}{3} = 4\ \frac{10!}{(10-3)!\,3!} = 480$$

Άρα έχουμε συνολικά

$$9880 - 480 = 9400 \text{ τρίγωνα}$$

Β' τρόπος

<u>Περίπτωση 1</u> (Κάθε κορυφή του τριγώνου βρίσκεται σε διαφορετική πλευρά του τετραγώνου)

Από τις 4 πλευρές του τετραγώνου επιλέγω τις τρεις και από κάθε πλευρά παίρνω ένα σημείο

$$\binom{4}{3}\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1} = \frac{4!}{(4-3)!\,3!}\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 4000$$

<u>Περίπτωση 2</u> (Οι δύο κορυφές του τριγώνου βρίσκονται στην ίδια πλευρά του τετραγώνου ενώ η τρίτη κορυφή βρίσκεται σε διαφορετική πλευρά)

Από τις 4 πλευρές του τετραγώνου επιλέγω την μια και από αυτήν επιλέγω τις 2 κορυφές του τριγώνου και στη συνέχεια από τις υπόλοιπες τρεις πλευρές του τετραγώνου επιλέγω την μία και από αυτή επιλέγω την τρίτη κορυφή του τριγώνου.

$$\binom{4}{1}\binom{10}{2}\binom{3}{1}\binom{10}{1} \text{ ή } \binom{4}{2}\cdot 2!\cdot\binom{10}{2}\binom{10}{1}$$
$$= 4\cdot\frac{10!}{(10-2)!\,2!}\cdot 3\cdot 10 = 5400$$

Άρα έχουμε συνολικά

$$4000 + 5400 = 9400 \text{ τρίγωνα}$$

A7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(2,4)$. Αν η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0,2]$,

(α) να δείξετε ότι $f(x) \leq 2x,\ \forall x \in [0,2]$ **(μονάδες 3)**

(β) να δείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx \leq 4$ **(μονάδες 2)**

Λύση:

(α) Η f είναι συνεχής και κυρτή στο διάστημα $[0,2]$

$$\Rightarrow f(x) \leq y_{OA} \quad \forall\, x \in [0,2] \qquad (1)$$

Εξίσωση ευθείας OA: $\lambda_{OA} = \frac{4-2}{2-0} = 2 \Rightarrow$

$$y - 0 = 2(x-0) \Rightarrow y = 2x \qquad (2)$$

Από (1) και $(2) \Rightarrow f(x) \leq 2x,\ \forall x \in [0,2]$

(β) Από το (α) έχουμε

$$f(x) \leq 2x, \qquad \forall x \in [0,2] \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx \leq \int_0^2 2x dx$$

$$\int_0^2 f(x)dx \leq [x^2]_0^2 = 4 \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx \leq 4$$

A8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = τοξεφx, \quad x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

(μονάδες 1,5)

(β) Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int τοξεφx \, dx$$

(μονάδες 3,5)

(α) $y = τοξεφx, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = εφy, \; y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$

Παραγωγίζουμε

$$1 = τεμ^2 y \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{τεμ^2 y}$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$τεμ^2 y = 1 + εφ^2 y$$

προκύπτει ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{τεμ^2 y} = \frac{1}{1 + εφ^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

δηλαδή

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

(β)

$$\int τοξεφx \; dx = x \cdot τοξεφx - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \; dx$$

$$= x \cdot τοξεφx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} \; d(1+x^2)$$

$$= x \cdot τοξεφx - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

A9. Δίνεται κύκλος (C) ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων και αποκόπτει από τους θετικούς ημιάξονες των τετμημένων και τεταγμένων ευθύγραμμα τμήματα μήκους 6 και 8 μονάδων αντίστοιχα.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου (C) είναι $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

(μονάδες 2)

(β) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $T(x, y)$ του επιπέδου του οποίου η απόσταση από τον άξονα των τεταγμένων είναι ίση με το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο T προς τον κύκλο (C).

(μονάδες 3)

Λύση

(α) Αφού ο κύκλος (C) διέρχεται από την αρχή των αξόνων και αποκόπτει από τους θετικούς ημιάξονες των τετμημένων και τεταγμένων ευθύγραμμα τμήματα μήκους 6 και 8 μονάδων αντίστοιχα,

οι συντεταγμένες του κέντρου του είναι $K(3,4)$ και

$$R^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow R = 5.$$

Επομένως η εξίσωση του κύκλου είναι

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

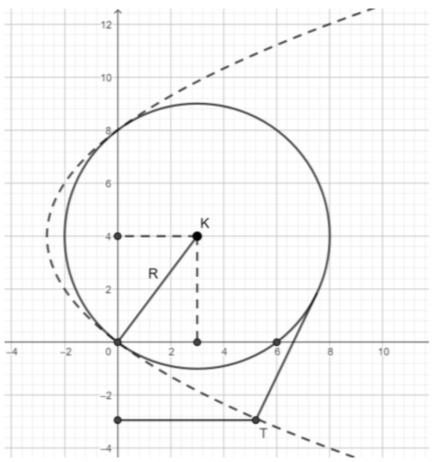
(β) το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο T προς τον κύκλο (C) είναι ίσο με $\sqrt{\Delta_c(T)}$

Η απόσταση του σημείου T από τον άξονα των τεταγμένων είναι ίση με $|x_T|$

$$\sqrt{\Delta_c(T)} = |x_T| \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 8y} = |x_T| \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = x^2 \Rightarrow y^2 - 6x - 8y = 0$$

Παρατηρούμε ότι Ο Γ.Τ. είναι μη κενό σύνολο με προφανή σημεία τα (8,12) και (8,-4)



Α10. Δίνεται η λέξη **Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Ε Σ.**

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(μονάδες 1)

(β) Σε πόσους από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς:

i) τα δύο «**Ε**» είναι σε συνεχόμενες θέσεις και ταυτόχρονα τα δύο «**Ι**» είναι σε μη συνεχόμενες θέσεις.

(μονάδες 2)

ii) υπάρχουν ακριβώς δύο γράμματα μεταξύ των δύο «**Ε**» τα οποία είναι και τα δύο σύμφωνα. **(μονάδες 2)**

Λύση:

(α) Έχουμε 9 γράμματα από τα οποία τα δύο είναι Ε και τα δύο είναι Ι άρα το πλήθος τον αναγραμματισμών είναι

$$M_9^{\varepsilon} = \frac{9!}{2!\,2!} = 90720$$

(β) i) Θα υπολογίσουμε πρώτα το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης που έχουν τα δύο Ε συνεχόμενα. Θεωρώντας τα δύο Ε ως ένα αντικείμενο έχουμε συνολικά 8 γράμματα από τα οποία τα δύο (Ι) είναι ίδια άρα το πλήθος τους είναι

$$\frac{2!}{2!}\frac{8!}{2!} = 20160 \quad ή \quad \frac{8!}{2!} = 20160$$

Από τους αναγραμματισμούς που έχουν τα δύο Ε συνεχόμενα θα υπολογίσουμε αυτούς που έχουν τα δύο Ι συνεχόμενα. Θεωρώντας τα δύο Ε ως ένα αντικείμενο και τα δύο Ι ως άλλο αντικείμενο έχουμε συνολικά 7 γράμματα άρα το πλήθος τους είναι

$$\frac{2!}{2!}\frac{2!}{2!}7! = 5040 \quad ή \quad 7! = 5040$$

Επομένως το σύνολο των ζητούμενων αναγραμματισμών είναι όλοι οι αναγραμματισμοί που έχουν τα δύο Ε μαζί εκτός από αυτούς που έχουν και τα δύο Ι μαζί.

$$20160 - 5040 = 15120$$

Β' τρόπος

Θεωρώντας τα δύο Ε ως ένα αντικείμενο

$$\_\_(EE)\_\_\Pi\_\_T\_\_X\_\_Y\_\_\Sigma\_\_$$

Έχουμε μεταθέσεις 6 διαφορετικών αντικειμένων. Δημιουργούνται 7 κενές θέσεις από τις οποίες θα επιλεγούν 2 για να τοποθετηθούν τα δύο Ι.

$$6! \cdot \binom{7}{2} = 6! \cdot \frac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} = 15120$$

β) ii) Από τα 4 σύμφωνα Π, T, X, Σ επιλέγω τα 2 για να τοποθετηθούν ανάμεσα στα δύο Ε. τα οποία μπορούν να μετατεθούν με

$$\binom{4}{2}2! = 12 \text{ ή } \Delta_2^4 = 12 \text{ τρόπους.}$$

Θεωρούμε την τετράδα αυτή ως ένα αντικείμενο και μαζί με τα υπόλοιπα 5 γράμματα από τα οποία τα δύο είναι Ι, έχουμε συνολικά 6 γράμματα τα οποία μετατίθενται με

$$\frac{6!}{2!} = 360\ \tau\rho\acute{o}\pi o\upsilon\varsigma$$

Άρα έχουμε συνολικά $12 \cdot 360 = 4320$ τρόπους

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. .

(μονάδες 2)

(β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

(μονάδες 6)

(γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f.

(μονάδες 2)

Λύση:

(α) Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης θα πρέπει:

$$x^2+1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -1,$$

σχέση η οποία ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$ και

από το $\ln(x^2+1)$ πρέπει $x^2+1>0 \Leftrightarrow x^2 > -1$,

που ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$.

Επομένως: $D_f = \mathbb{R}$

Σημεία τομής με άξονες συντεταγμένων:

$$x = 0 \Longrightarrow y = f(0) = \frac{\ln(0^2+1)}{0^2+1} = \frac{\ln 1}{1} = 0 \Longrightarrow (0,0)$$

$$y = 0 \Longrightarrow \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2+1) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x^2+1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0,0)$$

(β) Μονοτονία και τοπικά ακρότατα:

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2+1}\cdot(x^2+1) - 2x\cdot\ln(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{2x - 2x\cdot\ln(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x[1-\ln(x^2+1)]}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{2x[1-\ln(x^2+1)]}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$\Longrightarrow 2x = 0 \text{ ή } 1 - \ln(x^2+1) = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0 \text{ ή } \ln(x^2+1) = 1$$

$$\ln(x^2+1) = 1 \Leftrightarrow \ln(x^2+1) = \ln e$$

$$\Leftrightarrow x^2+1 = e \Leftrightarrow x^2 = e-1$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{e-1}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{e-1}$		0		$\sqrt{e-1}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$T.M.$	$\searrow$	$T.E.$	$\nearrow$	$T.M.$	$\searrow$	

Μονοτονία:

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα: $\left(-\infty,-\sqrt{e-1}\right]$ και $\left[0,\sqrt{e-1}\right]$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα: $\left[-\sqrt{e-1},0\right]$ και $\left[\sqrt{e-1},+\infty\right)$.

Η f παρουσιάζει $T.E.$ στο $x = 0$, το $f(0) = 0$.

Η f παρουσιάζει $T.M.$ στο $x = -\sqrt{e-1}$, το

$$f\left(-\sqrt{e-1}\right) = \frac{\ln\left(\left(-\sqrt{e-1}\right)^2+1\right)}{\left(-\sqrt{e-1}\right)^2+1} = \frac{\ln(e-1+1)}{e-1+1} = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

Η f παρουσιάζει $T.M.$ στο $x = \sqrt{e-1}$, το

$$f\left(\sqrt{e-1}\right) = \frac{\ln\left(\left(\sqrt{e-1}\right)^2+1\right)}{\left(\sqrt{e-1}\right)^2+1} = \frac{\ln(e-1+1)}{e-1+1} = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

Ασύμπτωτες:

Ο παρονομαστής της f δεν μηδενίζεται άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, έτσι η γραφική της παράσταση δεν παρουσιάζει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$$

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+1) = +\infty$

άρα έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$

Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του $De\ L'\ Hospital$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[\ln(x^2+1)]'}{[x^2+1]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x\cdot(x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Επομένως ισχύει ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$$

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$

και $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+1) = +\infty$ άρα έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$

Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του $De\ L'\ Hospital$. Είναι:

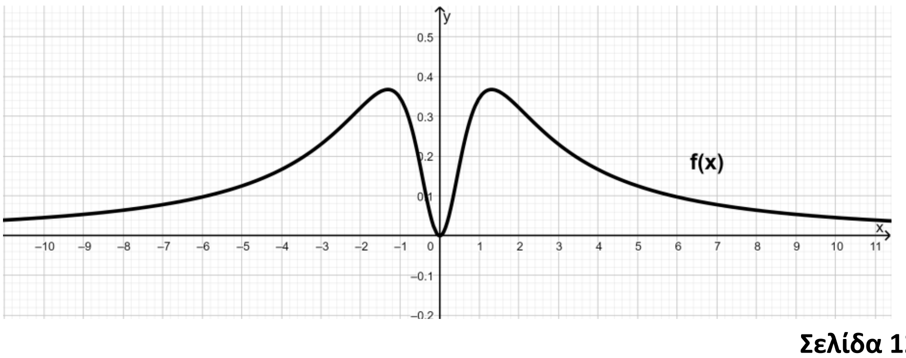
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{[\ln(x^2+1)]'}{[x^2+1]'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{2x\cdot(x^2+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Επομένως ισχύει ότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

Ως εκ τούτου η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφ. παρ. της f.

(γ)



B2. Δίνεται έλλειψη με κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες $E(\gamma,0)$ και $E'(-\gamma,0)$, $\gamma>0$, μεγάλο άξονα $A'A$ και μικρό άξονα $B'B$, τέτοια ώστε η γωνία $E'BE$ είναι ορθή.

(α) Να υπολογίσετε την εκκεντρότητα της έλλειψης. **(μονάδες 2)**

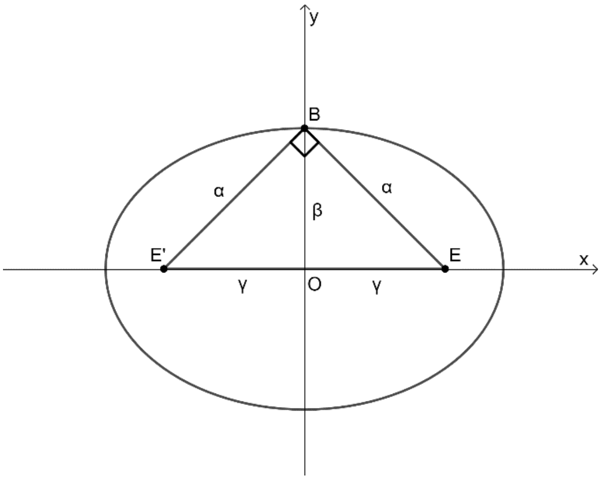
(β) Αν οι διευθετούσες της έλλειψης έχουν εξισώσεις $x=\pm 4\sqrt{2}$ να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης. **(μονάδες 2)**

(γ) Αν η εξίσωση της έλλειψης είναι η $x^2+2y^2=16$, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των ευθυγράμμων τμημάτων BE, AE και της γραφικής παράστασης της έλλειψης στο πρώτο τεταρτημόριο, περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων. **(μονάδες 6)**

Λύση:

(α) Από τα δεδομένα $E(\gamma,0)$, $E'(-\gamma,0)$ και $(BE)+(BE')=2\alpha$.

Λόγω συμμετρίας $(BE)=(BE')=\alpha$



<u>Α' Τρόπος:</u>

Στο ορθογώνιο τρίγωνο EBE', από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$(EE')^2=(BE)^2+(BE')^2$$

$$\Longrightarrow (2\gamma)^2=\alpha^2+\alpha^2 \Longrightarrow 4\gamma^2=2\alpha^2 \Longrightarrow \alpha^2=2\gamma^2 \Longrightarrow \alpha=\gamma\sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow \varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\gamma}{\gamma\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

<u>Β' Τρόπος:</u>

Το τρίγωνο EBE' είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα $O\hat{E}B=O\widehat{E'}B=45°$.

Επομένως και το τρίγωνο EOB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Άρα $\beta=\gamma$.

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2 \Longrightarrow \alpha^2=\gamma^2+\gamma^2 \Longrightarrow \alpha^2=2\gamma^2 \Longrightarrow \alpha=\gamma\sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow \varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\gamma}{\gamma\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(β) Εξισώσεις διευθετουσών: $x=\pm\frac{\alpha}{\varepsilon}$

$$\Longrightarrow \frac{\alpha}{\varepsilon}=4\sqrt{2} \Longrightarrow \frac{\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4\sqrt{2} \Longrightarrow \alpha=4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4$$

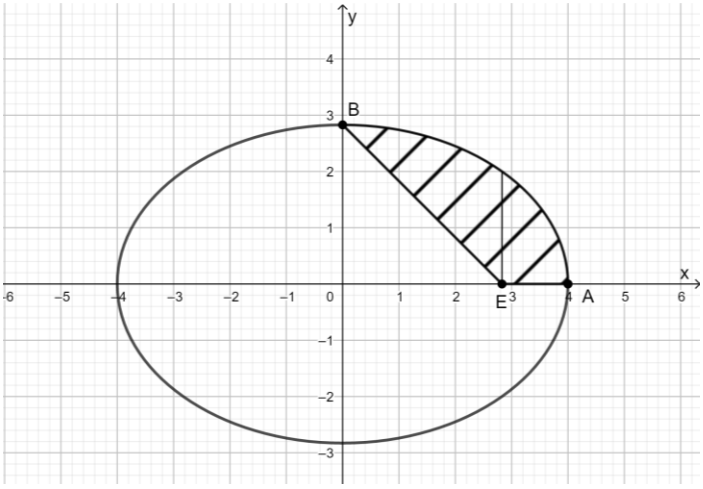
$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\gamma}{4} \Longrightarrow \gamma = 2\sqrt{2}$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Longrightarrow 16 = \beta^2 + 8 \Longrightarrow \beta^2 = 8 \Longrightarrow \beta = 2\sqrt{2}$$

Εξίσωση έλλειψης

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$$

(γ)



$$V = V_1 - V_{\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon}$$

$$V_1 = \pi \int_0^4 y^2_{\acute{\varepsilon}\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\eta\varsigma}\, dx$$

$$V_1 = \pi \int_0^4 \left(8 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \pi \left[8x - \frac{x^3}{6}\right]_0^4 = \pi \left(32 - \frac{32}{3} - 0\right) = \frac{64}{3}\pi$$

$$V_{\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \upsilon}{3} = \frac{\pi \cdot (OB)^2 \cdot (OE)}{3} = \frac{\pi \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(2\sqrt{2}\right)}{3} = \frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$$

$$\Longrightarrow V = \frac{64}{3}\pi - \frac{16\pi\sqrt{2}}{3} = \frac{16}{3}\pi\left(4 - \sqrt{2}\right) \text{ κ.μ.}$$

Β’ τρόπος (για τον υπολογισμό του όγκου του κώνου)

$$\lambda_{EB} = -\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -1$$

$$y - 0 = -1\left(x - 2\sqrt{2}\right) \Rightarrow y = 2\sqrt{2} - x$$

$$V_{\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon} = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(2\sqrt{2} - x\right)^2 dx = \pi \left[-\frac{\left(2\sqrt{2} - x\right)^3}{3}\right]_0^{2\sqrt{2}} = \frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$$

Β3. Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο, η οποία ικανοποιεί την σχέση:

$$x^2 \cdot f(x) = x + \int_1^x t \cdot f(t)dt, \qquad \forall x > 0$$

(α) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 1$. **(μονάδες 1)**

(β) Να αποδείξετε ότι $\forall x > 0$ ισχύει: **(μονάδες 4)**

$$x \cdot f'(x) + f(x) = \frac{1}{x}$$

(γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f. **(μονάδες 5)**

Λύση

(α) Θέτουμε στην δοθείσα σχέση $x = 1$:

$$\Rightarrow 1^2 \cdot f(1) = 1 + \int_1^1 t \cdot f(t)dt$$

$$\Rightarrow f(1) = 1 + 0 \Rightarrow f(1) = 1$$

(β) Παραγωγίζουμε τα μέλη ως προς x (χρησιμοποιούμε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού), για να πάρουμε:

$$2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x) = 1 + x \cdot f(x), \forall x > 0$$

$$\Rightarrow x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x) = 1, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow x \cdot f'(x) + f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$$

(γ) Ολοκληρώνουμε τα μέλη:

$$x \cdot f'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int [x \cdot f'(x) + f(x)]\, dx = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \int [x \cdot f(x)]'\, dx = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow x \cdot f(x) = \ln x + c, \forall x > 0$$

Επειδή $x > 0$, απαλείφοντας την απόλυτη τιμή, λαμβάνουμε:

$$f(x) = \frac{\ln x + c}{x}, \forall x > 0$$

<u>Υπολογισμός c</u>: Χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη από το (α) ερώτημα:

$$f(1) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{\ln 1 + c}{1}$$

$$\Rightarrow 1 = 0 + c \Rightarrow c = 1$$

Άρα ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}, \forall x > 0$$

Β4. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και η εστιακή χορδή AB όπου $A(t^2, 2t), t > 0$ και $B(\rho^2, 2\rho)$. Από τα σημεία A και B φέρουμε κάθετες προς την διευθετούσα της παραβολής, την οποία τέμνουν στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

(α) Να δείξετε ότι $t\rho = -1$ **(μονάδες 2)**

(β) Αν $S = (A\Gamma) + (B\Delta)$, να δείξετε ότι $S = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2$. **(μονάδες 4)**

(γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου t ώστε το S να ελαχιστοποιείται. **(μονάδες 4)**

Λύση:

(α)

$$\lambda_{AE} = \lambda_{EB} \Rightarrow \frac{2t}{t^2-1} = \frac{2\rho}{\rho^2-1} \Rightarrow$$

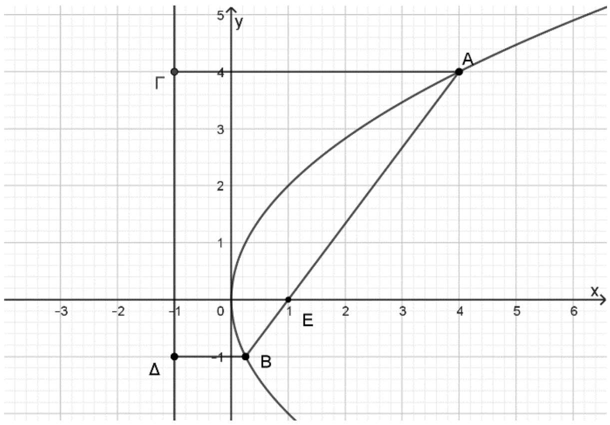
$$2t(\rho^2 - 1) = 2\rho(t^2 - 1) \Rightarrow$$

$$t\rho^2 - t = \rho t^2 - \rho \Rightarrow$$

$$t\rho^2 - \rho t^2 = t - \rho \Rightarrow$$

$$t\rho(\rho - t) = (t - \rho) \Rightarrow$$

$$t\rho = -1 \quad (t \neq \rho, \qquad t, \rho \neq \pm 1)$$



(β)

$$S = (A\Gamma) + (B\Delta) = (x_A + 1) + (x_B + 1) = t^2 + 1 + \rho^2 + 1$$

Από (α) $\Rightarrow \rho = -\frac{1}{t} \Rightarrow S = t^2 + 1 + \rho^2 + 1 = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2$

(γ)

$$S(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 \Rightarrow S'(t) = 2t - \frac{2}{t^3}$$

$$S'(t) = 0 \Rightarrow 2t - \frac{2}{t^3} = 0 \Rightarrow \frac{t^4 - 1}{t^3} = 0 \Rightarrow t = 1, \qquad (t > 0)$$

$$S'(t) = 2t - \frac{2}{t^3} \Rightarrow S''(t) = 2 + \frac{6}{t^4} \Rightarrow$$

$$S''(1) > 0$$

Από το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου το S ελαχιστοποιείται για $\mathrm{t} = 1$.

Β’ τρόπος (α):

$$\lambda_{AB} = \frac{2\rho - 2t}{\rho^2 - t^2} = \lambda_{EB} \Rightarrow \frac{2}{\rho + t}$$

$$AB\colon y - 2t = \frac{2}{t + p}(x - t^2) \Rightarrow$$

$$AB\colon\ y(t + p) = 2x + 2tp$$

Εστιακή χορδή περνά από την εστία (1,0)

$$0 = 2 + 2tp \Rightarrow tp = -1$$

Β’ τρόπος (γ)

$$S = (A\Gamma) + (B\Delta)$$

$S = (AE) + (BE)$ από ορισμό παραβολής

$$S = (AB)$$

Το μήκος της εστιακής χορδής AB είναι ελάχιστο όταν χορδή είναι κάθετη στον άξονα της παραβολής (latus rectum)

$$ά\rho\alpha\ t^2 = 1$$

$$t = 1,\ \ t > 0$$

B5. Δίνονται τρία δοχεία με μπάλες. Το πρώτο και το δεύτερο δοχείο περιέχουν από μία κόκκινη και δύο άσπρες μπάλες το καθένα, ενώ το τρίτο δοχείο περιέχει τρεις άσπρες μπάλες. Όλες οι μπάλες του ίδιου χρώματος είναι όμοιες μεταξύ τους. Επιλέγουμε τυχαία ένα δοχείο και στη συνέχεια επιλέγουμε τυχαία από αυτό δύο μπάλες, χωρίς επανατοποθέτηση.

(α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου οι δύο μπάλες να είναι άσπρες. **(μονάδες 3)**

(β) Αν γνωρίζουμε ότι οι δύο μπάλες που επιλέξαμε είναι άσπρες, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η μπάλα που έμεινε στο δοχείο που επιλέξαμε να είναι κόκκινη. **(μονάδες 5)**

(γ) Αν γνωρίζουμε ότι από τις δύο μπάλες που επιλέξαμε, ακριβώς μία είναι άσπρη, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η μπάλα που έμεινε στο δοχείο που επιλέξαμε να είναι άσπρη. **(μονάδες 2)**

Λύση: Ά τρόπος

Δοχείο 1: 2Α και 1Κ, Δοχείο 2: 2Α και 1Κ, Δοχείο 3: 3Α

(α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

Λ:«επιλέγουμε 2 άσπρες μπάλες»

Δ_i:«επιλέγουμε το Δοχείο i» $i = 1,2,3$

$$P(\Lambda) = P(\Lambda \cap \Delta_1) + P(\Lambda \cap \Delta_2) + P(\Lambda \cap \Delta_3)$$

$$= P(\Delta_1) \cdot P(\Lambda|\Delta_1) + P(\Delta_2) \cdot P(\Lambda|\Delta_2) + P(\Delta_3) \cdot P(\Lambda|\Delta_3)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

(β) Ορίζουμε το ενδεχόμενο

K: «η μπάλα που έμεινε στο δοχείο που επιλέξαμε είναι κόκκινη»

$$P(K|\Lambda) = \frac{P(K \cap \Lambda)}{P(\Lambda)} = \frac{P(\Lambda \cap \Delta_1) + P(\Lambda \cap \Delta_2)}{P(\Lambda)}$$

$$= \frac{P(\Delta_1) \cdot P(\Lambda|\Delta_1) + P(\Delta_2) \cdot P(\Lambda|\Delta_2)}{P(\Lambda)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{9}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{5}$$

(γ) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A_1: «ακριβώς μία μπάλα που επιλέξαμε είναι άσπρη»

A: «η μπάλα που έμεινε στο δοχείο είναι άσπρη»

$$P(A|A_1) = 1$$

Λύση: (Β τρόπος)

Δοχείο 1: 2Α και 1Κ, Δοχείο 2: 2Α και 1Κ, Δοχείο 3: 3Α

(α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

Λ:«επιλέγουμε 2 άσπρες μπάλες»

Δ_i:«επιλέγουμε το Δοχείο i» $i = 1,2,3$

$$P(\Delta_1) = \frac{1}{3}$$
$$P(\Lambda|\Delta_1) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3}$$
$$P(\Delta_1) \cdot P(\Lambda|\Delta_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(\Delta_2) = \frac{1}{3}$$
$$P(\Lambda|\Delta_2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3}$$
$$P(\Delta_2) \cdot P(\Lambda|\Delta_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(\Delta_3) = \frac{1}{3}$$
$$P(\Lambda|\Delta_3) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{2}} = 1$$
$$P(\Delta_2) \cdot P(\Lambda|\Delta_2) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$P(\Lambda) = P(\Lambda \cap \Delta_1) + P(\Lambda \cap \Delta_2) + P(\Lambda \cap \Delta_3)$$
$$= P(\Delta_1) \cdot P(\Lambda|\Delta_1) + P(\Delta_2) \cdot P(\Lambda|\Delta_2) + P(\Delta_3) \cdot P(\Lambda|\Delta_3)$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

(β) Ορίζουμε το ενδεχόμενο

K: «η μπάλα που έμεινε στο δοχείο που επιλέξαμε είναι κόκκινη»

$$P(K|\Lambda) = \frac{P(K \cap \Lambda)}{P(\Lambda)} = \frac{P(\Lambda \cap \Delta_1) + P(\Lambda \cap \Delta_2)}{P(\Lambda)}$$

$$P(\Lambda \cap \Delta_1) + P(\Lambda \cap \Delta_2) = P(\Delta_1) \cdot P(\Lambda|\Delta_1) + P(\Delta_2) \cdot P(\Lambda|\Delta_2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

$$P(K|\Lambda) = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{5}$$

(γ) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A_1: «ακριβώς μία μπάλα που επιλέξαμε είναι άσπρη»

A: «η μπάλα που έμεινε στο δοχείο είναι άσπρη»

$$P(A_1 \cap A) = \frac{4}{9}$$

$$P(A|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A_1)} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{4}{9}} = 1$$