ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2023

ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Πέμπτη 29 Ιουνίου 2023

8:00 – 11:00

Ο ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΔΕΚΑΤΕΣΣΕΡΙΣ (14) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις.
Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Η κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1 Δίνεται η λέξη: **ΑΠΕΛΕΥΘΕΡΩΣΗ**

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της. **(2 μονάδες)**

(β) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της, που ξεκινούν από Α και τελειώνουν σε Η. **(3 μονάδες)**

Λύση:

(α) $M_{12}^{\varepsilon} = \frac{12!}{3!} = 79833600$

(β) $M_{10}^{\varepsilon} = \frac{10!}{3!} = 604800$

Α2 (α) Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int (4x^3 - x^2\ )\, dx$$

(2 μονάδες)

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int (\kappa - 2)x^{\lambda}\, dx = 2x^3 + c$$

(3 μονάδες)

Λύση:

(α) $\int (4x^3 - x^2\ )\, dx = \frac{4x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + c = x^4 - \frac{x^3}{3} + c$

(β) **α΄ τρόπος**

$$\left.\begin{array}{r} \int (\kappa - 2)x^{\lambda}\, dx = 2x^3 + c \\ \int (\kappa - 2)x^{\lambda}\, dx = \frac{\kappa-2}{\lambda+1} x^{\lambda+1} + c \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\kappa-2}{\lambda+1} x^{\lambda+1} = 2x^3\ , \quad \lambda \neq -1$$

$\lambda + 1 = 3 \quad \Rightarrow \lambda = 2$

$\frac{\kappa-2}{\lambda+1} = 2 \quad \Rightarrow \frac{\kappa-2}{3} = 2 \quad \Rightarrow \kappa = 8$

β΄ τρόπος

$\int (\kappa - 2)x^{\lambda}\, dx = 2x^3 + c \Rightarrow \left(\int (\kappa - 2)x^{\lambda}\, dx\right)' = (2x^3 + c)'$

$\Rightarrow (\kappa - 2)x^{\lambda} = 6x^2$

$\Rightarrow (\kappa - 2) = 6 \Rightarrow \kappa = 8$ και $\lambda = 2$

Α3 Σε μια οφθαλμολογική κλινική νοσηλεύονται 52 άτομα που πάσχουν από καταρράκτη, 35 άτομα που πάσχουν από γλαύκωμα και 12 άτομα που πάσχουν και από τις δύο ασθένειες. Να βρείτε πόσοι ασθενείς σε αυτή την κλινική:

(α) πάσχουν από τουλάχιστον μία από τις δύο ασθένειες

(β) πάσχουν από καταρράκτη, αλλά όχι από γλαύκωμα

Λύση: α΄ τρόπος

Αν Α το σύνολο των ατόμων που πάσχουν από καταρράκτη τότε $\nu(A) = 52$

Αν Β το σύνολο των ατόμων που πάσχουν από γλαύκωμα τότε $\nu(B) = 35$

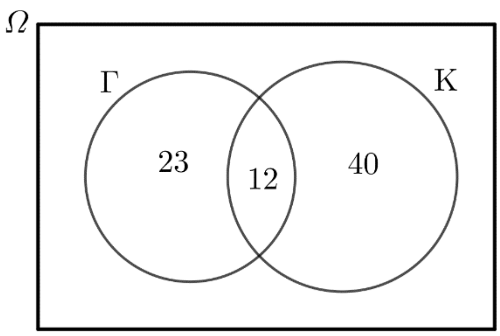
Αν $A \cap B$ το σύνολο των ατόμων που πάσχουν και από τις δύο ασθένειες τότε

$\nu(A \cap B) = 12$

(α) $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B) = 52 + 35 - 12 = 75$

(β) $\nu(A \cap B') = \nu(A) - \nu(A \cap B) = 52 - 12 = 40$

β΄ τρόπος



Από το Βέννειο διάγραμμα έχουμε ότι:

(α) $\nu(\Gamma \cup K) = 23 + 12 + 40 = 75$

(β) $\nu(\Gamma' \cap K) = 40$

Α4 (α) Να δώσετε τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης.

(2 μονάδες)

(β) **Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης**, να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = -2x + 7$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. **(3 μονάδες)**

Λύση:

(α) Μία συνάρτηση $f: \Delta \to \mathbb{R}$, με Δ ένα διάστημα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ονομάζεται **γνησίως φθίνουσα στο Δ,** αν για οποιαδήποτε x_1, x_2 που ανήκουν στο Δ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$.

(β) Παίρνουμε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

$\Rightarrow \quad -2x_1 > -2x_2$

$\Rightarrow \quad -2x_1 + 7 > -2x_2 + 7$

$\Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$

$\Rightarrow$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Α5 Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον χρόνο υπερωριών, σε ώρες, 25 εργαζομένων ενός εργοστασίου τον περασμένο μήνα.

Χρόνος υπερωριών (σε ώρες)	0	1	2	3	4	5
Αρ. Εργαζομένων	3	8	6	4	2	2

Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια $Q_1, \; Q_2, \; Q_3$, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος IQR και το εύρος R των πιο πάνω παρατηρήσεων.

Λύση:

Οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $\nu = 25$ (περιττός αριθμός)

και επομένως διάμεσος είναι η 13η παρατήρηση.

$\Rightarrow$ η διάμεσος είναι: $Q_2 = 2$

Οι διατεταγμένες παρατηρήσεις που είναι αριστερά του Q_2 είναι:

0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2

Το πλήθος των παρατηρήσεων αυτών είναι $\nu = 12$ (άρτιος αριθμός)

$\Rightarrow$ το πρώτο τεταρτημόριο είναι: $Q_1 = \frac{1+1}{2} = 1$

Οι διατεταγμένες παρατηρήσεις που είναι δεξιά του Q_2 είναι:

2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5

Το πλήθος των παρατηρήσεων αυτών είναι $\nu = 12$ (άρτιος αριθμός)

$\Rightarrow$ το τρίτο τεταρτημόριο είναι: $Q_3 = \frac{3+3}{2} = 3$

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρατηρήσεων είναι:

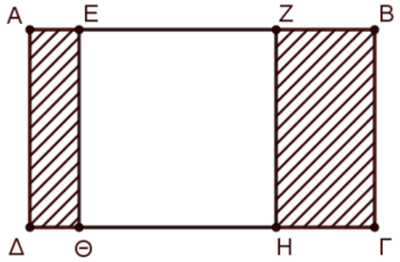
$$IQR = Q_3 - Q_1 \quad \Rightarrow IQR = 3 - 1 \Rightarrow IQR = 2$$

Το εύρος των παρατηρήσεων είναι: $R = 5 - 0 = 5$

Α6 Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$, με πλευρές $ΑΔ = x$, $ΑΒ = y$, το οποίο έχει σταθερή περίμετρο ίση με $16\ m$. Μέσα σε αυτό, βρίσκεται το τετράγωνο $ΕΖΗΘ$ του οποίου η πλευρά $ΕΖ$ βρίσκεται πάνω στην πλευρά $ΑΒ$ και η πλευρά $ΘΗ$ πάνω στην πλευρά $ΔΓ$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

(α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου δίνεται από τον τύπο $E(x) = -2x^2 + 8x$. **(2 μονάδες)**

(β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία μεγιστοποιείται το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν. **(3 μονάδες)**



Λύση:

α) $\left.\begin{aligned} E_{ορθ.} &= x \cdot y \\ Π_{ορθ.} = 2x + 2y = 16 \Rightarrow x + y = 8 &\Rightarrow y = 8 - x \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_{ορθ.} = x(8 - x) = 8x - x^2$

$E_{τετρ.} = x^2 \Rightarrow E_{γραμ.} = E(x) = 8x - x^2 - x^2 \Rightarrow\ E(x) = 8x - 2x^2\ ,\ \ x \in (0,4)$

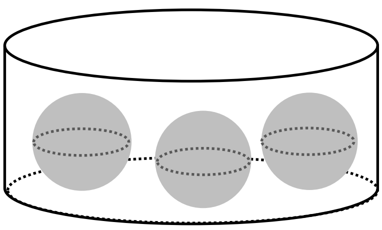
β) $E(x) = 8x - 2x^2 \Rightarrow E'(x) = 8 - 4x$

$E'(x) = 0 \Rightarrow 8 - 4x = 0 \Rightarrow x = 2$

x	0		2		4
E'		$+$	0	$-$	
E		$\nearrow$		$\searrow$	

Η $E(x)$ γνησίως αύξουσα στο $(0,2]$, η $E(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $[2,4)$.
$\Rightarrow$ Η $E(x)$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή για $x = 2m$

Α7 Στο πιο κάτω σχήμα, υπάρχει ένα κυλινδρικό δοχείο, ανοικτό στο πάνω μέρος, με ακτίνα βάσης $8\ cm$ και ύψος $6\ cm$. Μέσα σε αυτό υπάρχουν 3 σφαίρες ακτίνας $2\ cm$ η κάθε μια. Δίπλα του υπάρχει ένα δοχείο, σε σχήμα κόλουρου κώνου, ανοικτό στο πάνω μέρος, γεμάτο με νερό. Το δοχείο έχει ακτίνα μεγάλης βάσης $8\ cm$, ακτίνα μικρής βάσης $4\ cm$ και ύψος $8\ cm$. Αν αδειάσουμε το νερό που υπάρχει στο δοχείο σχήματος κόλουρου κώνου, μέσα στο κυλινδρικό δοχείο, να διερευνήσετε αν θα υπερχειλίσει ή όχι.
Να δικαιολογήσετε με μαθηματικούς υπολογισμούς την απάντησή σας.



Λύση:

$$V_{κυλ.} = \pi R^2 υ = \pi \cdot 8^2 \cdot 6 = 384\pi\ cm^3$$

$$V_{σφ.} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{32}{3}\pi\ cm^3 \quad \Longrightarrow 3V_{σφ.} = 32\pi\ cm^3$$

$$V_{κενού\ μέρους} = 384\pi - 32\pi = 352\pi\ cm^3$$

$$V_{κόλ.κώνου} = \tfrac{1}{3}\pi(R^2 + \rho^2 + R\rho)υ = \tfrac{1}{3}\pi(8^2 + 4^2 + 8 \cdot 4)8 = \tfrac{896}{3}\pi\ cm^3 \cong 298{,}6\pi\ cm^3$$

$\Longrightarrow V_{κενού\ μέρους} > V_{κόλ.κώνου}$ $\Longrightarrow$Ο κύλινδρος δεν θα υπερχειλίσει

Α8 Για την πολυωνυμική συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$f''(x) = 3, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητά της. **(1 μονάδα)**

(β) Αν ισχύει ότι $f'(1) = 8$, να βρείτε την τετμημένη του σημείου στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. **(2 μονάδες)**

(γ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο (0,1), να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f. **(2 μονάδες)**

Λύση:

(α) Η $f''(x) = 3 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ή

$f''(x) = 3,\ \forall x \in \mathbb{R}$ κατασκευάζουμε τον πίνακα κυρτότητας:

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\boldsymbol{f''}$	$+$
$\boldsymbol{f}$	

$\Rightarrow f$ κυρτή στο $\mathbb{R}$

(β) $f''(x) = 3 \ \Rightarrow\ f'(x) = \int 3\,dx \ \Rightarrow\ f'(x) = 3x + c$

$f'(1) = 8 \ \Rightarrow 8 = 3 + c \ \Rightarrow\ c = 5 \ \Rightarrow f'(x) = 3x + 5$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x + 5 = 0 \ \Rightarrow\ x = -\frac{5}{3}$

t	$-\infty$	$-\dfrac{5}{3}$		$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	
f	$\nearrow$		$\searrow$	

$\Rightarrow$ η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο με τετμημένη $x = -\frac{5}{3}$

(γ) $f'(x) = 3x + 5 \;\Rightarrow\; f(x) = \int (3x+5)dx \;\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}\,x^2 + 5x + c$

Η συνάρτηση f περνά από το σημείο $(0{,}1)$

$\Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}\,x^2 + 5x + 1,\; x \in \mathbb{R}$

A9 Η θεατρική ομάδα ενός Λυκείου αποτελείται από 10 μαθητές και 6 μαθήτριες. Η θεατρική ομάδα πρόκειται να ανεβάσει επί σκηνής ένα θεατρικό έργο, το οποίο απαιτεί 6 διαφορετικούς αντρικούς και 2 διαφορετικούς γυναικείους ρόλους. Όλοι οι μαθητές και όλες οι μαθήτριες της θεατρικής ομάδας είναι διαθέσιμοι να αναλάβουν ρόλο.

(α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των ηθοποιών, αν οι μαθητές υποδυθούν αντρικούς και οι μαθήτριες γυναικείους ρόλους; **(2 μονάδες)**

(β) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των ηθοποιών, αν οι μαθητές υποδυθούν αντρικούς και οι μαθήτριες γυναικείους ρόλους, αλλά ένας συγκεκριμένος μαθητής, αν επιλεγεί, μπορεί να υποδυθεί μόνο ένα συγκεκριμένο αντρικό ρόλο; **(3 μονάδες)**

Λύση:

(α) $\Delta_6^{10} \cdot \Delta_2^6 = \frac{10!}{4!} \cdot \frac{6!}{4!} = 4536000$ τρόποι

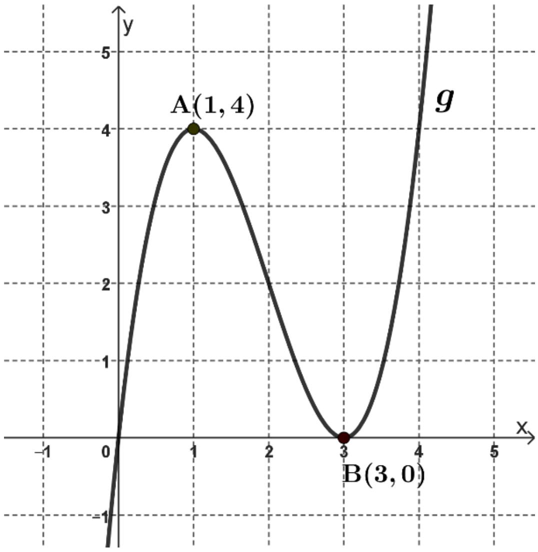
(β) Αν επιλεγεί να υποδυθεί τον ρόλο: $\Delta_5^9 \cdot \Delta_2^6 = \frac{9!}{4!} \cdot \frac{6!}{4!} = 453600$

Αν δεν επιλεγεί να υποδυθεί τον ρόλο: $\Delta_6^9 \cdot \Delta_2^6 = \frac{9!}{3!} \cdot \frac{6!}{4!} = 1814400$

$\Rightarrow 453600 + 1814400 = 2268000$ τρόποι

.

A10 Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης g. Τα σημεία $A(1,4)$ και $B(3,0)$ είναι τοπικά ακρότατα της g.



(α) Αν $\int F(x)dx = g(x) + c$, να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης F με τον άξονα των x, δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

(β) Αν $\int g(x)dx = G'(x) + c$, να βρείτε την τιμή του x, για την οποία η συνάρτηση G παρουσιάζει σημεία καμπής, δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

Λύση:

(α) $\int F(x)dx = g(x) + c \implies F(x) = g'(x)$

Αφού $A(1,4)$ και $B(3,0)$ είναι τοπικά ακρότατα της g

$\implies g'(1) = 0$ και $g'(3) = 0 \implies F(1) = 0$ και $F(3) = 0$

$\implies (1,0)$ και $(3,0)$ τα σημεία τομής της F με τον άξονα των x

(β) $\int g(x)dx = G'(x) + c \implies g(x) = G''(x)$

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι η g τέμνει τον άξονα των x στα σημεία

για τα οποία $x = 0$ και $x = 3$.

Επομένως $g(0) = 0$ και $g(3) = 0 \implies G''(0) = 0$ και $G''(3) = 0$

Για $x = 0$ η G'' αλλάζει πρόσημο άρα παρουσιάζει σημείο καμπής

Για $x = 3$ η G'' δεν αλλάζει πρόσημο άρα δεν παρουσιάζει σημείο καμπής

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>: Αποτελείται από 5 ασκήσεις.
Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Η κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. **(2 μονάδες)**

(β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς:

i. τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα **(5 μονάδες)**

ii. τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της **(1 μονάδες)**

(γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. **(2 μονάδες)**

Λύση:

(α) Π.Ο. $\mathbb{R}$ (πολυωνυμική συνάρτηση)

Σ.Τ. με άξονες

Για $y = 0 \Rightarrow x\left(\frac{1}{3}x^2 - 4\right) = 0 \Rightarrow x = 0$ και $x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow (0,0)$, $(2\sqrt{3}, 0)$, $(-2\sqrt{3}, 0)$

Για $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$

(β) i. Μονοτονία και Τοπικά Ακρότατα

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$ και στο $[2, +\infty)$

Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 2]$

Για $x = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 - 4(-2) = \frac{16}{3} \Rightarrow \left(-2, \frac{16}{3}\right)$ $T.M.$

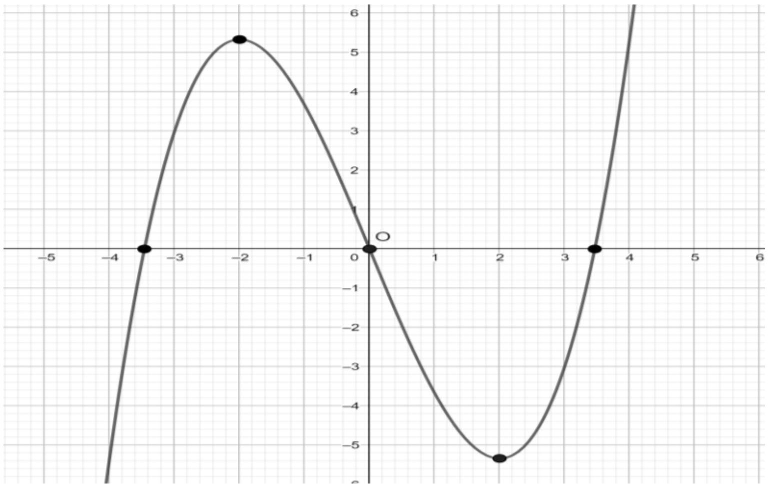
Για $x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 - 4(2) = \frac{16}{3} \Rightarrow \left(2, -\frac{16}{3}\right)$ $T.E.$

ii. Συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^3 = +\infty$$

(γ) Γραφική Παράσταση



Β2 Στον πιο κάτω πίνακα, δίνεται η ηλικία 6 ηλεκτρονικών υπολογιστών και ο αριθμός των επισκευών που έγιναν για τον καθένα μέχρι σήμερα.

Η.Υ.	Ηλικία Η.Υ. (x_i)	Αρ. επισκευών (y_i)
1	2	4
2	3	6
3	4	8
4	5	10
5	6	11
6	4	9

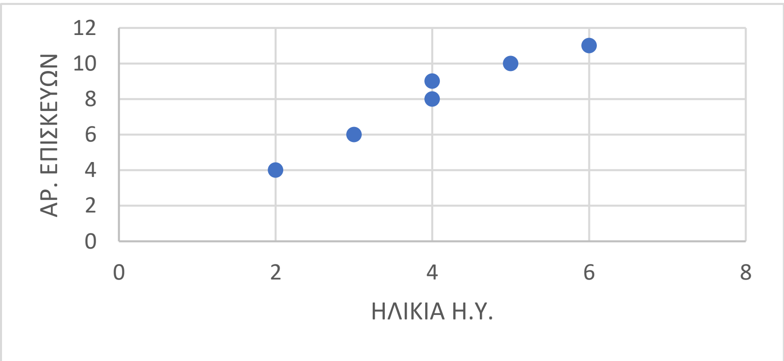
(α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς. **(3 μονάδες)**

(β) Να υπολογίσετε τον γραμμικό συντελεστή συσχέτισης. **(6 μονάδες)**

(γ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ της ηλικίας των υπολογιστών και του αριθμού των επισκευών που έγιναν για τον καθένα μέχρι σήμερα. **(1 μονάδα)**

Λύση:

(α)



(β)

x_i	y_i	$x_i y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
2	4	8	4	16
3	6	18	1	4
4	8	32	0	0
5	10	50	1	4
6	11	66	4	9
4	9	36	0	1
$\Sigma_x = 24$	$\Sigma_y = 48$	$\Sigma_{xy} = 210$	$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 10$	$\Sigma(y_i - \bar{y})^2 = 34$

$\bar{x} = \frac{24}{6} = 4 \quad \bar{y} = \frac{48}{6} = 8 \quad s_x = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{10}{6}} \cong 1{,}291 \quad s_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{34}{6}} \cong 2{,}380$

$$r = \frac{\Sigma_{xy} - \nu\bar{x}\bar{y}}{\nu s_x s_y} \cong \frac{210 - 6 \cdot 4 \cdot 8}{6 \cdot 1{,}291 \cdot 2{,}380} \cong 0{,}976$$

(γ) Υπάρχει ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ της ηλικίας των υπολογιστών και του αριθμού των επισκευών που έγιναν για τον καθένα μέχρι σήμερα.

Β3 Η συνάρτηση $\Pi(t)$ υπολογίζει, συναρτήσει του χρόνου t, σε χρόνια, τον πληθυσμό μιας χώρας, σε εκατομμύρια, για τα επόμενα 25 χρόνια. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού, δίνεται από τη σχέση $\Pi'(t) = -\frac{1}{10}t + 2,\ t \in [0,25]$.

(α) Αν σήμερα $(t = 0)$ ο πληθυσμός της χώρας είναι 30 εκατομμύρια, να αποδείξετε ότι $\Pi(t) = -\frac{t^2}{20} + 2t + 30,\ t \in [0,25]$. **(4 μονάδες)**

(β) Σε πόσα χρόνια ο πληθυσμός αναμένεται να είναι 45 εκατομμύρια; **(3 μονάδες)**

(γ) Σε πόσα χρόνια ο πληθυσμός θα αρχίσει να μειώνεται; **(3 μονάδες)**

Λύση:

(α) $\Pi'(t) = -\frac{1}{10}t + 2 \Rightarrow \Pi(t) = \int\left(-\frac{1}{10}t + 2\right)dt \Rightarrow \Pi(t) = -\frac{1}{20}t^2 + 2t + c$

$\Pi(0) = 30 \Longrightarrow c = 30 \Rightarrow \Pi(t) = -\frac{1}{20}t^2 + 2t + 30$

(β) $\Pi(t) = 45 \Longrightarrow -\frac{1}{20}t^2 + 2t + 30 = 45 \Longrightarrow -t^2 + 40t + 600 = 900$

$\Longrightarrow t^2 - 40t + 300 = 0$

$\Longrightarrow (t - 10)(t - 30) = 0$

$t = 10$ *δεκτή* *και* $t = 30$ *απορρίπτεται* (γ) $\Pi'(t) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{10}t + 2 = 0 \Rightarrow t = 20$

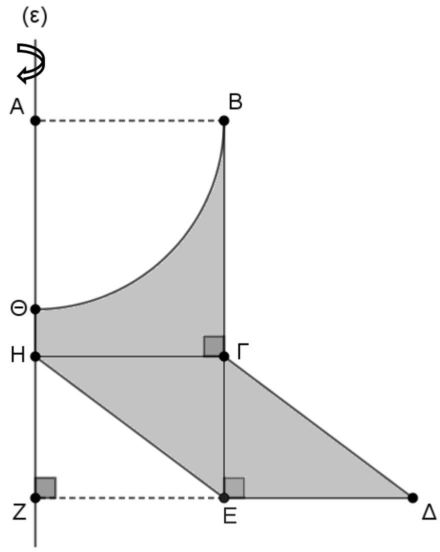
t	0	20	25
Π'	$+$	0	$-$
Π	↗		↘

Η $\Pi(t)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,20]$ και $\Pi(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[20,25]$

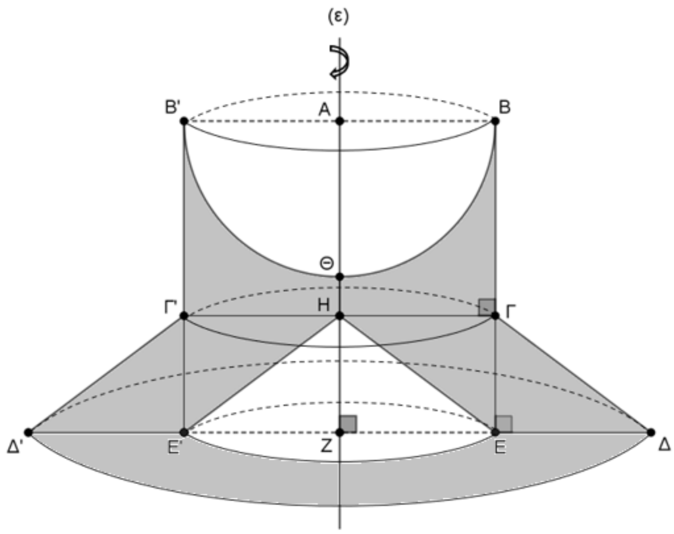
$\Rightarrow \gamma\iota\alpha\ t = 20 \Rightarrow \ \Pi_{max}$

⟹ ο πληθυσμός θα αρχίσει να μειώνεται σε 20 χρόνια

B4 Στο διπλανό σχήμα, το τετράπλευρο $ΗΓΔΖ$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με $ΗΓ \parallel ΖΔ$, $ΗΓ = 4\ cm$, $ΖΔ = 8\ cm$ και $ΖΗ = 3\ cm$. Το τετράπλευρο $ΑΒΓΗ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με $ΒΓ = 5\ \mathrm{cm}$. Με κέντρο το σημείο $Α$ και ακτίνα $ΑΒ$ γράφουμε το τόξο $ΒΘ$. Το σκιασμένο χωρίο $ΒΓΔΕΗΘΒ$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε). Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



Λύση:



Ημισφαίριο

- $R = 4\ cm$

Κύλινδρος

- $R = 4\ cm, \upsilon = 5\ cm$

Κώνος

- $R = 4\ cm, \upsilon = 3\ cm, \lambda = 5\ cm$
- Π.Θ.: $\lambda^2 = R^2 + \upsilon^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow \lambda = 5\ cm$

Κόλουρος Κώνος

- $\rho = 4\ cm, R = 8\ cm,\ \upsilon = 3\ cm, \lambda = 5\ cm$
- Π.Θ.: $\lambda^2 = (R-\rho)^2 + \upsilon^2 = (8-4)^2 + 9 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow \lambda = 5\ cm$

$E_{\eta\mu\iota\sigma\varphi} = \frac{4\pi R^2}{2} = 2\pi \cdot 4^2 = 32\pi\ cm^2$
$E_{\kappa.\kappa\upsilon\lambda.} = 2\pi R\upsilon = 2\pi \cdot 4 \cdot 5 = 40\ \pi\ cm^2$
$E_{\kappa.\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon} = \pi R\lambda = \pi \cdot 4 \cdot 5 = 20\pi\ cm^2$
$E_{\kappa.\kappa\acute{o}\lambda o\upsilon\rho o\upsilon} = \pi(R+\rho)\lambda = \pi \cdot (8+4) \cdot 5 = 60\pi\ cm^2$
$E_{\delta\alpha\kappa\tau\upsilon\lambda\acute{\iota}o\upsilon} = \pi R^2 - \pi\rho^2 = 64\pi - 16\pi = 48\pi\ cm^2$

$$\begin{aligned}
E_{o\lambda} &= E_{B\Gamma} + E_{\Gamma\Delta} + E_{\Delta E} + E_{EH} + E_{\Theta B} \\
&= E_{\kappa.\kappa\upsilon\lambda} + E_{\kappa.\kappa\acute{o}\lambda o\upsilon\rho o\upsilon} + E_{\delta\alpha\kappa\tau\upsilon\lambda\acute{\iota}o\upsilon} + E_{\kappa.\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon} + E_{\eta\mu\iota\sigma\varphi} \\
&= 40\ \pi + 60\pi + 48\pi + 20\pi + 32\pi \\
\Rightarrow E_{o\lambda} &= 200\pi\ cm^2
\end{aligned}$$

$V_{\eta\mu\iota\sigma\varphi} = \frac{4\pi R^3}{3\cdot 2} = \frac{2\pi\cdot 4^3}{3} = \frac{128}{3}\pi\ cm^3$
$V_{\kappa\upsilon\lambda.} = \pi R^2\upsilon = \pi \cdot 4^2 \cdot 5 = 80\pi\ cm^3$
$V_{\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon} = \frac{\pi R^2\upsilon}{3} = \frac{\pi\cdot 4^2\cdot 3}{3} = 16\pi\ cm^3$
$V_{\kappa\acute{o}\lambda o\upsilon\rho o\upsilon} = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2 + R\cdot\rho + \rho^2) = \frac{\pi\cdot 3}{3}(64 + 32 + 16) = 112\pi\ cm^3$

$$\begin{aligned}
V_{o\lambda} &= V_{\kappa\upsilon\lambda} + V_{\kappa\acute{o}\lambda o\upsilon\rho o\upsilon} - V_{\eta\mu\iota\sigma\varphi} - V_{\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon} \\
&= 80\pi + 112\pi - \frac{128}{3}\pi - 16\pi \\
\Rightarrow V_{o\lambda} &= \frac{400}{3}\pi\ cm^3
\end{aligned}$$

Β5 Ο προσωπικός μυστικός κωδικός εισόδου, ενός πελάτη μιας τράπεζας, στην ηλεκτρονική ιστοσελίδα της, είναι ένας εξαψήφιος αριθμός, που σχηματίζεται με τα ψηφία 0 έως 9. Τα ψηφία αυτά μπορούν να επαναλαμβάνονται και να βρίσκονται σε οποιαδήποτε από τις έξι θέσεις του αριθμού. Για παράδειγμα, οι αριθμοί 099824, 002377, 125760, 000000, 000023, 777766 μπορεί να είναι προσωπικοί κωδικοί εισόδου, πελατών της τράπεζας αυτής, στην ηλεκτρονική της ιστοσελίδα.

(α) Να βρείτε πόσοι το πολύ προσωπικοί μυστικοί κωδικοί εισόδου μπορούν να σχηματιστούν.

(2 μονάδες)

(β) Αν ένας πελάτης ξέχασε τον ακριβή προσωπικό μυστικό κωδικό του, αλλά θυμάται ότι αρχίζει ή με το ψηφίο 5 ή με το ψηφίο 6 και είναι άρτιος, ποια είναι η πιθανότητα να σχηματίσει τον αριθμό αυτό με την πρώτη προσπάθεια;

(3 μονάδες)

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης της τράπεζας αυτής να έχει προσωπικό μυστικό κωδικό, του οποίου τα ψηφία είναι διαδοχικά και σε φθίνουσα διάταξη;

(3 μονάδες)

(δ) Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης της τράπεζας αυτής να έχει προσωπικό μυστικό κωδικό, του οποίου όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά, περιέχει τα ψηφία 5 και 9 και το ψηφίο 9 προηγείται του ψηφίου 5;

(2 μονάδες)

Λύση:

(α) $\delta_6^{10} = 10^6 = 1000000$

(β) $P(B) = \frac{1}{2\cdot\delta_4^{10}\cdot 5} = \frac{1}{2\cdot 10^4\cdot 5} = \frac{1}{100000}$

(γ) Οι προσωπικοί μυστικοί κωδικοί, των οποίων τα ψηφία είναι διαδοχικά και σε φθίνουσα διάταξη είναι:

987654 876543 765432 654321 543210

$$P(\Gamma) = \frac{5}{\delta_6^{10}} = \frac{5}{10^6} = \frac{1}{200000}$$

(δ) $P(\Delta) = \dfrac{\binom{6}{2}\Delta_4^8}{\delta_6^{10}} = \dfrac{15\cdot\frac{8!}{4!}}{10^6} = \dfrac{63}{2500}$