ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2023

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

8:00 – 11:00

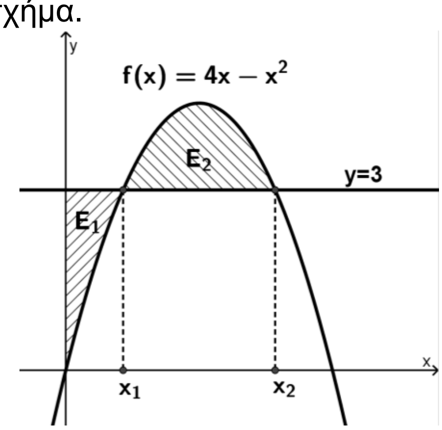
ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ.
Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο το οποίο αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int e^{x}\,(1+e^{x})^{4}\,dx$$

Α2. Η ευθεία $y=3$ τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=4x-x^2$ στα σημεία με τετμημένες x_1 και x_2 και σχηματίζει τα χωρία E_1 και E_2 όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου E_1. **(μονάδες 2)**

(β) Να δείξετε ότι τα χωρία E_1 και E_2 είναι ισεμβαδικά. **(μονάδες 3)**

Α3. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{\kappa=7}^{100} \kappa^2$$

Α4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \kappa\ \sigma\upsilon\nu x - \kappa^2\ \eta\mu x + 1,\ \kappa \in \mathbb{R} - \{0\}$. Αν η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

(α) να βρείτε την τιμή του κ **(μονάδες 2)**

(β) να βρείτε τιμή ξ, για την οποία ικανοποιείται το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **(μονάδες 3)**

Α5. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = 1 - x$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 x^{\kappa}(1-x)^{\lambda}dx = \int_0^1 x^{\lambda}(1-x)^{\kappa}dx \qquad \kappa, \lambda \in \mathbb{N}$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 x(1-x)^{10}dx$$

Α6. Πάνω σε κάθε πλευρά ενός τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ ορίζουμε 10 σημεία, όλα διαφορετικά από τις κορυφές του $Α, Β, Γ$ και $Δ$. Να βρείτε το πλήθος των τριγώνων που μπορούν να σχηματιστούν με κορυφές από τα 40 αυτά σημεία.

Α7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(2,4)$. Αν η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0,2]$,

(α) να δείξετε ότι $f(x) \leq 2x,\ \forall x \in [0,2]$ **(μονάδες 3)**

(β) να δείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx \leq\ 4$ **(μονάδες 2)**

A8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = τοξεφx, \quad x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,, \forall x \in \mathbb{R}$$

(μονάδες 1,5)

(β) Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int τοξεφx\, dx$$

(μονάδες 3,5)

A9. Δίνεται κύκλος (C) ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων και αποκόπτει από τους θετικούς ημιάξονες των τετμημένων και τεταγμένων ευθύγραμμα τμήματα μήκους 6 και 8 μονάδων αντίστοιχα.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου (C) είναι $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

(μονάδες 2)

(β) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $T(x, y)$ του επιπέδου του οποίου η απόσταση από τον άξονα των τεταγμένων είναι ίση με το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο T προς τον κύκλο (C).

(μονάδες 3)

A10. Δίνεται η λέξη **Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Ε Σ.**

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(μονάδες 1)

(β) Σε πόσους από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς:

i) τα δύο «**Ε**» είναι σε συνεχόμενες θέσεις και ταυτόχρονα τα δύο «**Ι**» είναι σε μη συνεχόμενες θέσεις.

(μονάδες 2)

ii) υπάρχουν ακριβώς δύο γράμματα μεταξύ των δύο «**Ε**» τα οποία είναι και τα δύο σύμφωνα. **(μονάδες 2)**

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. .

(μονάδες 2)

(β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

(μονάδες 6)

(γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f.

(μονάδες 2)

Β2. Δίνεται έλλειψη με κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$, $\gamma > 0$, μεγάλο άξονα $A'A$ και μικρό άξονα $B'B$, τέτοια ώστε η γωνία $E'BE$ είναι ορθή.

(α) Να υπολογίσετε την εκκεντρότητα της έλλειψης. **(μονάδες 2)**

(β) Αν οι διευθετούσες της έλλειψης έχουν εξισώσεις $x = \pm 4\sqrt{2}$ να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης. **(μονάδες 2)**

(γ) Αν η εξίσωση της έλλειψης είναι η $x^2 + 2y^2 = 16$, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των ευθυγράμμων τμημάτων BE, AE και της γραφικής παράστασης της έλλειψης στο πρώτο τεταρτημόριο, περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων. **(μονάδες 6)**

Β3. Δίνεται συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο, η οποία ικανοποιεί την σχέση:

$$x^2 \cdot f(x) = x + \int_1^x t \cdot f(t)dt, \qquad \forall x > 0$$

(α) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 1$. **(μονάδες 1)**

(β) Να αποδείξετε ότι $\forall x > 0$ ισχύει: **(μονάδες 4)**

$$x \cdot f'(x) + f(x) = \frac{1}{x}$$

(γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f. **(μονάδες 5)**

B4. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και η εστιακή χορδή AB όπου $A(t^2, 2t), t > 0$ και $B(\rho^2, 2\rho)$. Από τα σημεία A και B φέρουμε κάθετες προς την διευθετούσα της παραβολής, την οποία τέμνουν στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

(α) Να δείξετε ότι $t\rho = -1$ **(μονάδες 2)**

(β) Αν $S = (A\Gamma) + (B\Delta)$, να δείξετε ότι $S = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2$. **(μονάδες 4)**

(γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου t ώστε το S να ελαχιστοποιείται. **(μονάδες 4)**

B5. Δίνονται τρία δοχεία με μπάλες. Το πρώτο και το δεύτερο δοχείο περιέχουν από μία κόκκινη και δύο άσπρες μπάλες το καθένα, ενώ το τρίτο δοχείο περιέχει τρεις άσπρες μπάλες. Όλες οι μπάλες του ίδιου χρώματος είναι όμοιες μεταξύ τους. Επιλέγουμε τυχαία ένα δοχείο και στη συνέχεια επιλέγουμε τυχαία από αυτό δύο μπάλες, χωρίς επανατοποθέτηση.

(α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου οι δύο μπάλες να είναι άσπρες. **(μονάδες 3)**

(β) Αν γνωρίζουμε ότι οι δύο μπάλες που επιλέξαμε είναι άσπρες, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η μπάλα που έμεινε στο δοχείο που επιλέξαμε να είναι κόκκινη.

(μονάδες 5)

(γ) Αν γνωρίζουμε ότι από τις δύο μπάλες που επιλέξαμε, ακριβώς μία είναι άσπρη, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η μπάλα που έμεινε στο δοχείο που επιλέξαμε να είναι άσπρη.

(μονάδες 2)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ