ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2021-22
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ / ΤΕΣΕΚ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΕΤΑΡΤΗ 26 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (Α΄ ΣΕΙΡΑ)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Γ037

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: 90 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΔΙΟΡΘΩΤΕΣ

Επισημαίνεται ότι οι διορθωτές πρέπει να ακολουθούν πιστά τις οδηγίες βαθμολόγησης όσον αφορά στην κατανομή των μονάδων, χωρίς να προβαίνουν σε υποδιαίρεση της βαθμολογίας

<u>ΜΕΡΟΣ Α:</u> Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις του Μέρους Α.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα

$$\int (5x + e^{3x} + \text{ημ}2x)dx$$

Λύση:

1.5 1.5 1.5 0.5

$$\int (5x + e^{3x} + \text{ημ}2x)dx = \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{2}\text{συν}2x + c$$

Σημείωση: Να αφαιρείται 0.5 μονάδα για παράλειψη της σταθεράς c μόνο μια φορά σε όλο το γραπτό.

Α2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB, αν δίνονται τα σημεία $A(1,-5)$ και $B(9,1)$.

Λύση:

Έστω $K(\alpha,\beta)$ το κέντρο του κύκλου και R η ακτίνα του.
Το κέντρο K είναι το μέσο της διαμέτρου AB.
Συνεπώς,

0.5 0.5 0.5 0.5

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+9}{2} = 5 \text{ και } \beta = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-5+1}{2} = -2$$

Το μήκος της ακτίνας του κύκλου είναι ίσο με το μισό του μήκους της διαμέτρου AB
Συνεπώς,

0.5 0.5 0.5

$$R = \frac{(AB)}{2} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(1+5)^2 + (9-1)^2}}{2} = 5 \text{ μονάδες}$$

Άρα, η εξίσωση του κύκλου (K,R) είναι

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+2)^2 = 25$$

0.5 1

Σημείωση: Αν δοθούν ορθές απαντήσεις χωρίς τύπους (μέσου, απόστασης, κύκλου) να δίνονται όλες οι μονάδες.

Α3. (α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού. (2μ)

(β) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(1,3)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (-1,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): 2x + y - 5 = 0$ (3μ)

Λύση:

(α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), τότε, υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει 2

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

(β) Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,1)$.
Συνεπώς η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[-1,1]$. 1
Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(-1)}{1-(-1)} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$ 0.5

Επομένως η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ είναι ίση με $\lambda_{\varepsilon\varphi\Gamma} = f'(\xi) = \frac{1}{2}$. 0.5
Η κλίση της ευθείας (ε): $2x + y - 5 = 0$ είναι ίση με $\lambda_{\varepsilon} = -2$ 0.5
Επομένως, ισχύει ότι

$$\lambda_{\varepsilon\varphi\Gamma} \cdot \lambda_{\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$$

Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (-1,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): 2x + y - 5 = 0$ 0.5

A4. Να βρείτε τα ολοκληρώματα

(α) $\int \varepsilon\varphi^9 x \tau\varepsilon\mu^2 x dx$ (2μ)

(β) $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$ (3μ)

Λύση:

0.5 1 0.5

(α) $\int (\varepsilon\varphi^9 x \cdot \tau\varepsilon\mu^2 x) dx = \int \varepsilon\varphi^9 x \, d(\varepsilon\varphi x) = \frac{\varepsilon\varphi^{10} x}{10} + c$

<u>2^{ος} τρόπος</u>

0.5 1 0.5

$$\int (\varepsilon\varphi^9 x \cdot \tau\varepsilon\mu^2 x) dx = \int \varepsilon\varphi^9 x \, (\varepsilon\varphi x)' dx = \frac{\varepsilon\varphi^{10} x}{10} + c$$

(β) $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx = \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{x+1}{(x+1)^2} dx - \int \frac{1}{(x+1)^2} dx$ 1

$$= \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{(x+1)^2} dx$$ 0.5

$$= \ln|x+1| + (x+1)^{-1} + c$$

$$= \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

0.5

0.5 0.5

<u>2</u>

2ος τρόπος

$$\frac{x}{(x+1)^2} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

0.5

$$x \equiv A(x+1) + B$$

Επιλέγουμε κατάλληλες τιμές για τη μεταβλητή x.

Για $x = -1$

$$-1 = 0 + B \Longrightarrow B = -1$$

0.5

Για $x = 0$

$$0 = A + B \Longrightarrow A = -B \Longrightarrow A = 1$$

0.5

$$\int \frac{x}{(x+1)^2}dx = \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$= \ln|x+1| + (x+1)^{-1} + c$$

$$= \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

0.5

0.5 0.5

Α5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα. (3μ)

(β) Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α), να συγκρίνετε τους αριθμούς 3^{π} και π^3 (2μ)

Λύση:

(α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $(0, +\infty)$

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της f

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

0.5

Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

0.5

Μελετούμε το πρόσημο της παραγώγου της f

x	0		e		$+\infty$
f'	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|\|$	$\nearrow$	$T.M.$	$\searrow$	

0.5

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e, +\infty)$. 1

Η f παρουσιάζει τοπικό (ολικό) μέγιστο για $x = e$, το $f(e) = \frac{1}{e}$ 0.5

Σημείωση: Να αφαιρείται 0.5 μονάδα σε όλες τις περιπτώσεις ασκήσεων του γραπτού όπου υπάρχει ορθός πίνακας προσήμων αν δε γράφεται ο χαρακτηρισμός της μονοτονίας ή της κυρτότητας με λόγια.

(β) Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e, +\infty)$ και $e < 3 < \pi$ έχουμε ότι: 0.5

$$f(3) > f(\pi) \Leftrightarrow \frac{\ln 3}{3} > \frac{\ln \pi}{\pi} \Leftrightarrow \pi \ln 3 > 3 \ln \pi \Leftrightarrow \ln 3^{\pi} > \ln \pi^{3}$$ 0.5

Αφού η συνάρτηση $y = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ έχουμε ότι 0.5

$$3^{\pi} > \pi^{3}$$ 0.5

Α6. Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x) = \text{τοξεφ}x, \quad x \in \mathbb{R}$$

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (2,5μ)

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(-1, g(-1))$ και $B\big(0, g(0)\big)$ είναι η $(\varepsilon): y = \frac{\pi}{4}x$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι:

$$4\text{τοξεφ}x < \pi x \quad , \quad \forall x \in (-1,0)$$ (2,5μ)

Λύση:

(α) Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης g

$$g'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$ 0.5

και στη συνέχεια τη δεύτερη παράγωγο της

$$g''(x) = (-1)(1 + x^2)^{-2}(1 + x^2)' = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}$$ 0.5

Είναι

$$g''(x) = 0 \Longrightarrow \frac{-2x}{(1 + x^2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$ 0.5

Μελετούμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g''		$+$	0	$-$	
g		$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$	

Η συνάρτηση g είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο διάστημα $[0, +\infty)$. 0.5

Το σημείο

$$\big(0, g(0)\big) = (0, \text{τοξεφ}0) = (0,0)$$ 0.5

είναι σημείο καμπής, για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

(β) Έχουμε ότι

$$A\left(-1, g(-1)\right) = A(-1, \text{τοξεφ}(-1)) = A\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$$ 0.5

και

$$B\left(0, g(0)\right) = B(0, \text{τοξεφ}(0)) = B(0,0)$$ 0.5

Η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα A και B είναι

$$\lambda_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-\frac{\pi}{4} - 0}{-1 - 0} = \frac{\pi}{4}$$

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα A και B είναι

$$y - y_B = \lambda_{AB}(x - x_B) \Rightarrow y - 0 = \frac{\pi}{4}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}x$$ 0.5

Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι η g είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, 0]$

Επιπλέον $-1 \in (-\infty, 0]$ και $0 \in (-\infty, 0]$

Συνεπώς, 0.5

$$\text{τοξεφ}\xi \leq \frac{\pi}{4}\xi \ , \forall \xi \in (-1,0)$$

(Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει $\xi \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $\text{τοξεφ}\xi = \frac{\pi}{4}\xi$)

Επομένως, $\text{τοξεφ}\xi < \frac{\pi}{4}\xi \quad \forall \xi \in (-1,0) \Rightarrow 4\text{τοξεφ}x < \pi x, \qquad \forall x \in (-1,0)$

0.5

<u>ΜΕΡΟΣ Β</u>: Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις του Μέρους Β.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = (x + 1)e^{-x}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης και να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση:

<u>Πεδίο Ορισμού</u>

$$D_f = \mathbb{R}$$ 0.5

<u>Σημεία τομής με τους άξονες</u>

Αν $x = 0 \Rightarrow y = 1$ και

αν$y = 0 \Rightarrow x = -1$

$(e^{-x} > 0 \quad \forall x \epsilon \mathbb{R})$ 0.5

Τα σημεία τομής με τους άξονες είναι $(0,1)$ και $(-1,0)$ 0.5

Μονοτονία

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της f

$$f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x}$$
$$= e^{-x}(1 - x - 1)$$
$$= -xe^{-x}$$

0.5

Είναι

$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ 0.5

$(e^{-x} > 0 \quad \forall x \epsilon \mathbb{R})$

Μελετούμε το πρόσημο της παραγώγου της f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$T.M.$	$\searrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ 1

Τοπικά ακρότατα

Η f παρουσιάζει τοπικό (ολικό) μέγιστο για $x = 0$, το $f(0) = 1$. 0.5

Ασύμπτωτες

Κατακόρυφες Ασύμπτωτες:

Αφού το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής σε αυτό, δεν παρουσιάζει κατακόρυφη ασύμπτωτη. 0.5

Οριζόντιες Ασύμπτωτες:

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left((x+1)\cdot e^{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x}$$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases} \Longrightarrow$ Απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$ 0.5

Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος De l' Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$$ 0.5

Άρα,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στην περιοχή του $+\infty$, την ευθεία $y = 0$. 0.5

Είναι 0.5

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

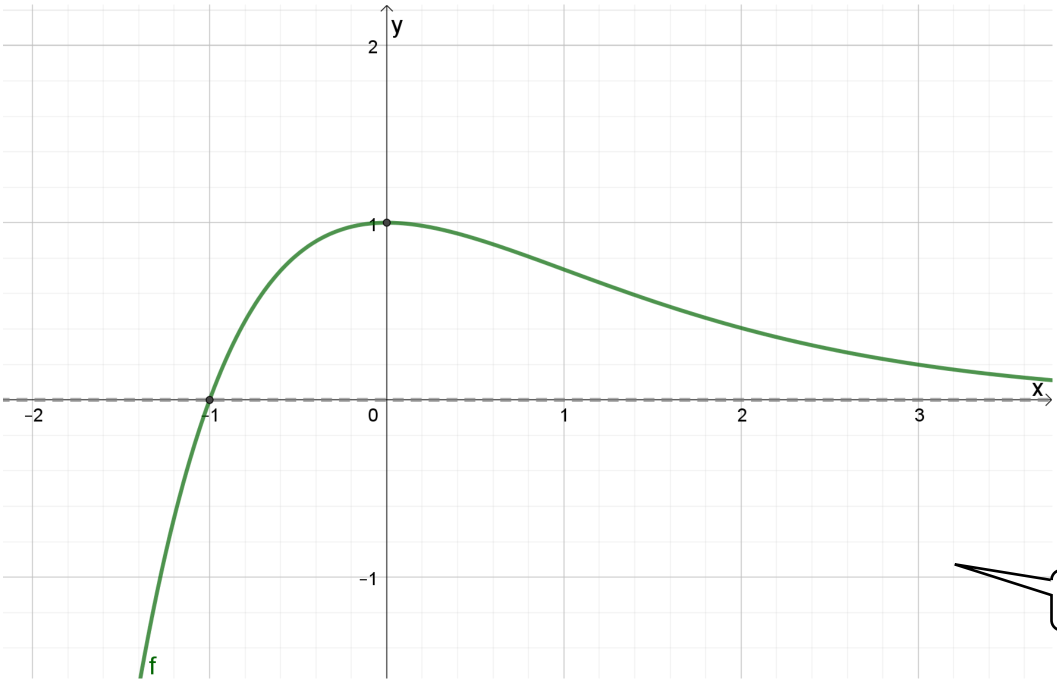
Άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στην περιοχή του $-\infty$

Πλάγιες Ασύμπτωτες:
Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)e^{-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x}=1\cdot(+\infty)=+\infty$$

0.5

Άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στην περιοχή του $-\infty$.



3

B2. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2+y^2+2x-2y+1=0$ και $C_2: x^2+y^2+2x-3=0$

(α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εσωτερικά. (3μ)

(β) Να βρείτε την εξίσωση (ε) της εφαπτομένης του κύκλου C_2 που άγεται προς αυτόν από το σημείο $\Sigma(0,-2)$ και έχει θετική κλίση. (2μ)

(γ) Η εφαπτομένη (ε) τέμνει την κοινή εφαπτομένη των κύκλων C_1 και C_2 στο σημείο A. Να δείξετε ότι το σημείο A έχει συντεταγμένες $A(3,2)$ και να βρείτε τις δυνάμεις του σημείου A ως προς τους δύο κύκλους. (2μ)

(δ) Αν το σημείο $T(-1+2\text{συν}\theta, 2\text{ημ}\theta)$ με $\theta\in[0,2\pi)$ είναι τυχαίο σημείο του κύκλου C_2, να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου $M(x,y)$ του ευθύγραμμου τμήματος AT. (3μ)

Λύση:

(α) Για τον κύκλο C_1 ισχύει ότι

$$g_1=1,\ f_1=-1 \text{ και } c_1=1$$

Συνεπώς, το κέντρο του κύκλου C_1 είναι $K_1(-1,1)$ και το μήκος της ακτίνας του είναι

$$R_1=\sqrt{1^2+(-1)^2-1}=1 \text{ μονάδα}$$

1

Για τον κύκλο C_2 ισχύει ότι

$$g_2 = 1,\ f_2 = 0 \text{ και } c_1 = -3$$

Συνεπώς, το κέντρο του κύκλου C_2 είναι $K_2(-1, 0)$ και το μήκος της ακτίνας του είναι

$$R_2 = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 3} = 2 \text{ μονάδες}$$ 1

Το μήκος της διακέντρου των δύο κύκλων είναι

$$\delta = \sqrt{(-1+1)^2 + 1^2} = 1 \text{ μονάδα}$$ 0.5

Αφού ισχύει ότι

$$R_2 - R_1 = 2 - 1 = 1 = \delta$$

οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά. 0.5

(β) Έστω ότι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$

Αφού διέρχεται από το σημείο $\Sigma(0, -2)$ έχουμε ότι

$$y = \lambda x + \beta \Longrightarrow -2 = \lambda \cdot 0 + \beta$$
$$\Longrightarrow \beta = -2$$ 0.5

Αφού η ευθεία $\lambda x - y - 2 = 0$ είναι εφαπτομένη του κύκλου C_2 έχουμε ότι η απόσταση της ευθείας από το κέντρο του κύκλου είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου. Δηλαδή,

0.5 $$d = R_2 \Longrightarrow \frac{|\lambda \cdot (-1) - 0 - 2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2$$
$$\Longrightarrow \frac{|\lambda + 2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2$$
$$\Longrightarrow (\lambda + 2)^2 = 4(\lambda^2 + 1)$$
$$\Longrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 4\lambda^2 + 4$$
$$\Longrightarrow 3\lambda^2 - 4\lambda = 0$$
$$\Longrightarrow 3\lambda\left(\lambda - \frac{4}{3}\right) = 0$$
$$\Longrightarrow \lambda = \tfrac{4}{3} \text{ ή } \lambda = 0 \text{ (απορρίπτεται)}$$
$$\Longrightarrow \lambda = \frac{4}{3}$$ 0.5

Συνεπώς, η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι

$$y = \frac{4}{3}x - 2$$ 0.5

<u>2ος τρόπος</u>

Έστω ότι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$

Αφού διέρχεται από το σημείο $\Sigma(0, -2)$ έχουμε ότι

$$y = \lambda x + \beta \Longrightarrow -2 = \lambda \cdot 0 + \beta$$
$$\Longrightarrow \beta = -2$$ 0.5

$y = \lambda x - 2$ και $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$

$$x^2 + (\lambda x - 2)^2 + 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x^2 + \lambda^2 x^2 - 4\lambda x + 4 + 2x - 3 = 0$$
$$\Longrightarrow (1 + \lambda^2)x^2 + 2x(1 - 2\lambda) + 1 = 0$$

Αφού η ευθεία $y = \lambda x - 2$ είναι εφαπτομένη του κύκλου C_2 έχουμε ότι η διακρίνουσα της πιο πάνω εξίσωσης είναι ίση με 0 $(\Delta = 0)$. 0.5

$$\Longrightarrow 4(1 - 2\lambda)^2 - 4(1 + \lambda^2) = 0$$
$$\Longrightarrow 4(1 - 4\lambda + 4\lambda^2 - 1 - \lambda^2) = 0$$

$$\Rightarrow 3\lambda^2 - 4\lambda = 0$$
$$\Rightarrow 3\lambda\left(\lambda - \frac{4}{3}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \text{ ή } \lambda = 0 \text{ (απορρίπτεται)}$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{4}{3}$$

0.5

Συνεπώς, η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι

$$y = \frac{4}{3}x - 2$$

0.5

(γ) Η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των κύκλων C_1 και C_2 είναι

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 - (x^2 + y^2 + 2x - 3) = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 - x^2 - y^2 - 2x + 3 = 0$$
$$\Rightarrow -2y = -4$$
$$\Rightarrow y = 2$$

0.5

Αφού η εφαπτομένη (ε) τέμνει την κοινή εφαπτομένη των κύκλων C_1 και C_2 στο σημείο A έχουμε ότι

$$y = \frac{4}{3}x - 2 \Rightarrow 2 = \frac{4}{3}x - 2$$
$$\Rightarrow \frac{4}{3}x = 4$$
$$\Rightarrow x = 3$$

0.5

Άρα, οι συντεταγμένες του σημείου A είναι

$$A(3,2)$$

Η δύναμη του σημείου A ως προς τον κύκλο C_1 είναι

$$\Delta_{C_1}(A) = 3^2 + 2^2 + 2\cdot 3 - 2\cdot 2 + 1 = 16$$

0.5

Αφού το σημείο A ανήκει στο ριζικό άξονα των δύο κύκλων έχουμε ότι

$$\Delta_{C_2}(A) = \Delta_{C_1}(A) = 16$$

0.5

Εναλλακτικά

$$\Delta_{C_2}(A) = 3^2 + 2^2 + 2\cdot 3 - 3 = 16.$$

0.5

(δ) Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AT

$$x_M = \frac{x_T + x_A}{2} = \frac{-1 + 2\text{συν}\theta + 3}{2}$$
$$= \frac{2 + 2\text{συν}\theta}{2}$$
$$= 1 + \text{συν}\theta$$

0.5

και

$$y_M = \frac{y_T + y_A}{2}$$
$$= \frac{2\text{ημ}\theta + 2}{2}$$
$$= \text{ημ}\theta + 1$$

0.5

Συνεπώς,

$$\sigma\upsilon\nu\theta = x_M - 1$$ 0.5

και

$$\eta\mu\theta = y_M - 1$$ 0.5

Έτσι, 0.5

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Longrightarrow (y_M - 1)^2 + (x_M - 1)^2 = 1$$ 0.5

Άρα, η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AT είναι

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

Σημείωση: Να μην αφαιρείται 0.5 μονάδα αν η εξίσωση του γ.τ. είναι ορθή και δεν γράψει την τριγ. ταυτότητα.

Β3. (α) Να δείξετε ότι για $x \in (0,\pi)$,

$$\int \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}\,dx = -\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + c$$ (3μ)

(β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = -\sqrt{2}\eta\mu^2 x\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x} \quad ,\forall x \in (0,\pi)$$

και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$. (4μ)

(γ) Αν η πιο πάνω συνάρτηση f έχει τύπο $f(x) = \eta\mu 2x$, $x \in (0,\pi)$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $P(x,y)$ της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης της είναι ελάχιστη. (3μ)

Λύση:

(α)

$$\int \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}\,dx = \int \sqrt{2\eta\mu^2 x}\,dx$$ 1

$$= \sqrt{2}\int |\eta\mu x|\,dx$$ 0.5

Αφού $x \in (0,\pi)$ ισχύει ότι $\eta\mu x > 0$ και $|\eta\mu x| = \eta\mu x$ 0.5

Συνεπώς,

$$\int \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}\,dx = \sqrt{2}\int \eta\mu x\, dx$$ 0.5

$$= -\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + c$$ 0.5

(β)

$$f'(x)\eta\mu x - f(x)\,\sigma\upsilon\nu x = -\sqrt{2}\eta\mu^2 x\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} = -\sqrt{2}\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}$$ 1

$$\Rightarrow \frac{f'(x)\eta\mu x - f(x)(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x} = -\sqrt{2}\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)' = -\sqrt{2}\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}$$ 0.5

$$\Rightarrow \int\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)' dx = -\sqrt{2}\int\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}\,dx$$ 0.5

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\eta\mu x} = -\sqrt{2}\left(-\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x\right) + c$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 2\sigma\upsilon\nu x + c$$ 0.5

Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$ ισχύει ότι

0.5 $$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Για $x = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}\right) + c \Rightarrow \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} + c$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2} + c$$

$$\Rightarrow c = 0$$ 0.5

Συνεπώς,

$$\frac{f(x)}{\eta\mu x} = 2\sigma\upsilon\nu x + 0 \Rightarrow f(x) = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu 2x, \quad x \in (0,\pi)$$

0.5

(γ) Η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $P(x,y)$ είναι

$$f'(x) = (\eta\mu 2x)' = 2\sigma\upsilon\nu 2x$$ 0.5

Ορίζουμε

$$g(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$$

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης g

$$g'(x) = -4\eta\mu 2x$$ 0.5

Είναι

$$g'(x)=0 \Rightarrow -4\eta\mu 2x=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=2\kappa\pi,\ \ \kappa\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=\kappa\pi,\ \ \kappa\in\mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ 2x=2\kappa\pi+\pi,\ \ \kappa\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \ \kappa\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Συνεπώς, η λύση της εξίσωσης $g'(x)=0$ στο διάστημα $(0,\pi)$ είναι

$$x=\frac{\pi}{2}$$

0.5

Αφού

0.5

$$g''(x)=-8\sigma\upsilon\nu 2x \quad \text{και} \quad g''\left(\frac{\pi}{2}\right)=8>0$$

η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο διάστημα $(0,\pi)$ για $x=\dfrac{\pi}{2}$

0.5

Είναι

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\left(2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=0$$

Συνεπώς, οι συντεταγμένες του σημείου $P(x,y)$ της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης της είναι ελάχιστη είναι

$$P\left(\frac{\pi}{2},0\right)$$

0.5

<u>2ος τρόπος</u>

Η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $P(x,y)$ είναι

$$f'(x)=(\eta\mu 2x)'=2\sigma\upsilon\nu 2x$$

0.5

Ορίζουμε

$$g(x)=2\sigma\upsilon\nu 2x$$

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης g

$$g'(x)=-4\eta\mu 2x$$

0.5

Είναι

$$g'(x)=0 \Rightarrow -4\eta\mu 2x=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=2\kappa\pi,\ \ \kappa\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=\kappa\pi,\ \ \kappa\in\mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ 2x=2\kappa\pi+\pi,\ \ \kappa\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \ \kappa\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Συνεπώς, η λύση της εξίσωσης $g'(x)=0$ στο διάστημα $(0,\pi)$ είναι

$$x=\frac{\pi}{2}$$

0.5

Μελετούμε το πρόσημο της παραγώγου της g

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
g'	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$
g	$\|\|$	↘	$T.E.$	↗	$\|\|$

0.5

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο διάστημα $(0,\pi)$ για $x=\frac{\pi}{2}$ 0.5

Είναι

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\left(2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=0$$

Συνεπώς, οι συντεταγμένες του σημείου $P(x,y)$ της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης της είναι ελάχιστη είναι

$$P\left(\frac{\pi}{2},0\right)$$ 0.5

<u>3^{ος} τρόπος</u>

Η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $P(x,y)$ είναι

$$f'(x)=(\eta\mu 2x)'=2\sigma\upsilon\nu 2x$$ 0.5

Ορίζουμε

$$g(x)=2\sigma\upsilon\nu 2x$$

Ισχύει $\forall x\in(0,\pi)$ ότι

0.5

$$\sigma\upsilon\nu 2x\geq -1\Longrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 2x\geq -2\Longrightarrow g(x)\geq -2$$

0.5 0.5

με την ισότητα να ισχύει όταν $x=\frac{\pi}{2}$

Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο διάστημα $(0,\pi)$ για $x=\frac{\pi}{2}$ 0.5

Είναι

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\left(2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=0$$

Συνεπώς, οι συντεταγμένες του σημείου $P(x,y)$ της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης της είναι ελάχιστη είναι

$$P\left(\frac{\pi}{2},0\right)$$ 0.5