

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2021-2022
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΕΤΑΡΤΗ 26 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 4-ΩΡΟ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
(Α΄ ΣΕΙΡΑ)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Γ0049

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 4-ΩΡΟ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΤΕΣΕΚ: 90 ΛΕΠΤΑ

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ
ΚΑΙ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

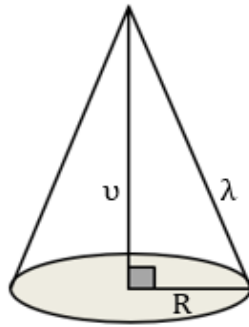
ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα.**
3. **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο απαντήσεων.
4. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
5. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή **μόνο με μαύρη πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις κλπ.
6. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού και διορθωτικής ταινίας.
7. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
8. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
9. Επισυνάπτεται Τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις του μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

- A1.** Δίνεται κώνος με ακτίνα βάσης $R = 3\text{cm}$ και ύψος $v = 4\text{cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας (E_{κ}) του.



- A2.** Να μελετήσετε την πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα, αν υπάρχουν.

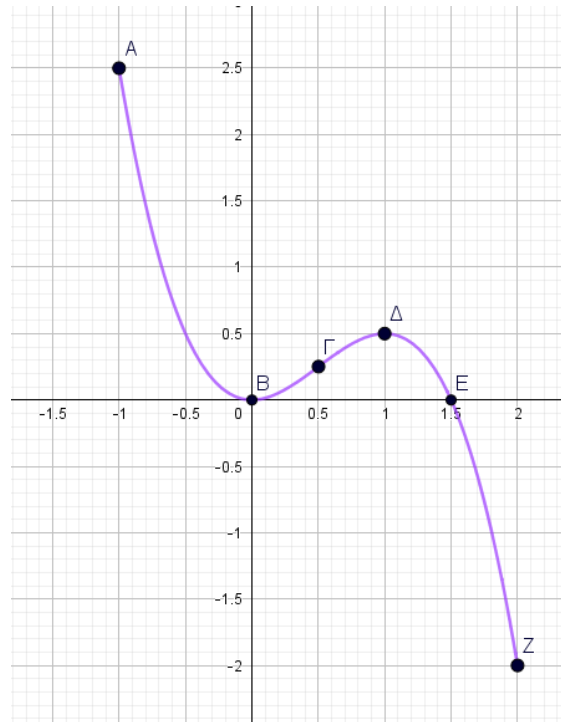
- A3.** Δίνονται οι μέγιστες θερμοκρασίες που παρατηρήθηκαν στην περιοχή Τροόδους για τις πρώτες δεκατέσσερις (14) μέρες του περασμένου Δεκεμβρίου:

9, 4, 5, 7, 18, 12, 3, 13, 14, 15, 10, 2, 12, 13

Να υπολογίσετε:

- (α) τη διάμεσο (Q_2). (2 μονάδες)
- (β) το ενδοτεταρτημοριακό εύρος (IQR). (3 μονάδες)

A4. Δίνεται η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $f : [-1, 2] \rightarrow [-2, 2.5]$, η οποία παρουσιάζει σημείο καμπής στο Γ .



(α) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η $f(x)$ παρουσιάζει ολικά ακρότατα και να τα χαρακτηρίσετε.

(2 μονάδες)

(β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύουν τα πιο κάτω:

(i) $f'(x) = 0$

(ii) $f''(x) = 0$

(iii) $f''(x) < 0$

(3 μονάδες)

A5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + \alpha x^2 + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, με σημείο καμπής το $A(2, 10)$.

Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A6. Δίνεται κύλινδρος ακτίνας (R) και ύψους (ν) για τον οποίο ισχύει $R + \nu = 30$.

Να βρείτε την ακτίνα (R) του κυλίνδρου που έχει μέγιστο όγκο (V).

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄.

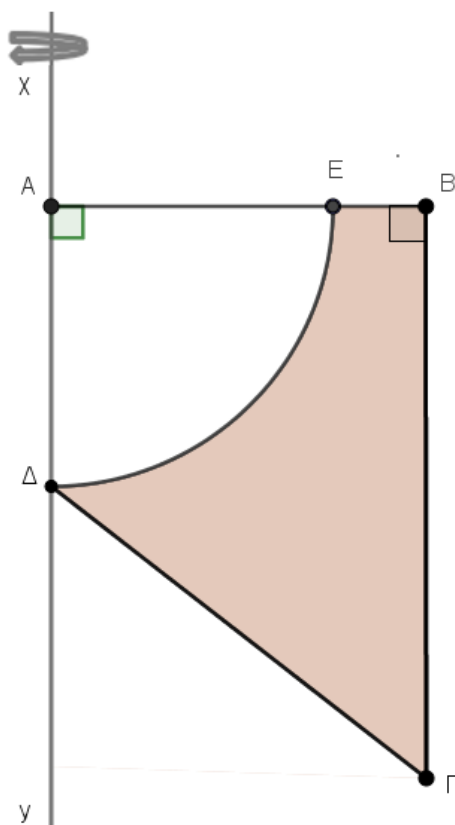
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις του μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

B1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$, $x \in \mathbb{R}$. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , αφού πρώτα βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία είναι κοίλη ή κυρτή και τα σημεία καμπής της.

B2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ ($\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$) με $\Delta\Gamma = 10\text{cm}$ και $B\Gamma = 12\text{cm}$. Με κέντρο το Α και ακτίνα $R=(AE) = 6\text{cm}$ γράφουμε τόξο ΔΕ. Το σκιασμένο χωρίο ΒΓΔΕΒ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα χγ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας ($E_{ολ}$) και τον όγκο ($V_{ολ}$) του στερεού που παράγεται.



B3. Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι βαθμοί δέκα (10) μαθητών ενός τμήματος ΤΕΣΕΚ στα Μαθηματικά (x_i) και στην Ηλεκτρολογία (y_i).

Μαθητής/τρια	Βαθμός στα Μαθηματικά (x_i)	Βαθμός στην Ηλεκτρολογία (y_i)
M1	9	15
M2	11	16
M3	10	15
M4	13	14
M5	11	12
M6	14	17
M7	10	13
M8	17	20
M9	19	20
M10	16	18

(α) Δίνονται τα αθροίσματα:

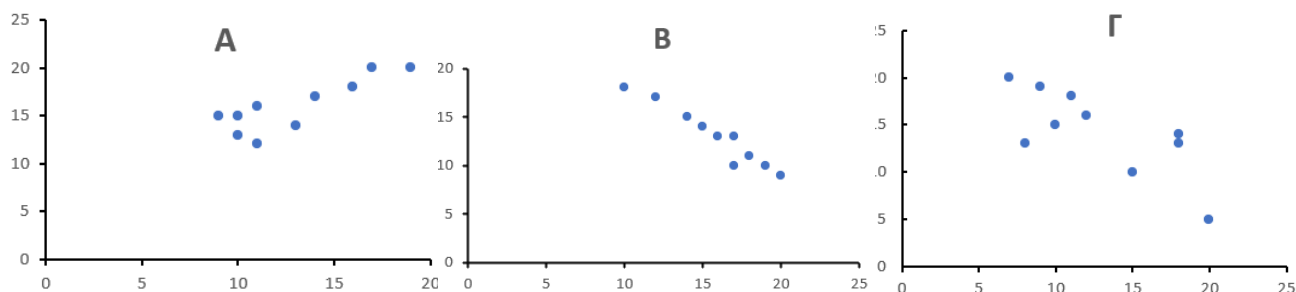
$$\sum x_i = 130, \quad \sum y_i = 160, \quad \sum x_i y_i = 2151, \quad \sum (x_i - \bar{x})^2 = 104 \quad \text{και} \quad \sum (y_i - \bar{y})^2 = 68,$$

όπου \bar{x}, \bar{y} η μέση τιμή των x_i, y_i , αντίστοιχα.

Να υπολογίσετε:

- (i) τη μέση τιμή \bar{x} και \bar{y} του βαθμού στα Μαθηματικά (x_i) και του βαθμού στην Ηλεκτρολογία (y_i), αντίστοιχα. (4 μονάδες)
- (ii) τον συντελεστή συσχέτισης (r) των βαθμών στα Μαθηματικά (x_i) και στην Ηλεκτρολογία (y_i). (4 μονάδες)

(β) Αν ο συντελεστής συσχέτισης είναι $r = 0,845$, να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης και να επιλέξετε το διάγραμμα διασποράς Α, Β, Γ στο οποίο αντιστοιχεί.



(2 μονάδες)

ΤΕΛΟΣ ΔΟΚΙΜΙΟΥ - ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΤΡΑΜΗΝΩΝ

1. Στατιστική

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2}{v}} \quad \text{ή} \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i (x_i - \bar{x})^2}{v}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i x_i^2}{v} - \bar{x}^2},$$

$$\text{όπου } v = \sum_{i=1}^{\kappa} f_i$$

$$r = \frac{\sum_{xy} - v\bar{x}\bar{y}}{vS_x S_y}, \quad \text{όπου } \sum_{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_v y_v$$

2. Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B$$

$$\sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$t = \varepsilon\varphi\alpha$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{B-A}{2} \eta\mu \frac{A+B}{2}$$

Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

	Σε μοίρες	Σε ακίνια
$\eta_{\mu x} = \eta_{\mu \alpha}$	$x = 360^\circ \kappa + \alpha$ ή $x = 360^\circ \kappa + 180^\circ - \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi\kappa + \alpha$ ή $x = 2\pi\kappa + \pi - \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$
$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \alpha$	$x = 360^\circ \kappa \pm \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi\kappa \pm \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$
$\epsilon\phi x = \epsilon\phi \alpha$	$x = 180^\circ \kappa + \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = \pi\kappa + \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

3. Γεωμετρία

Ορθό πρίσμα	$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon$	$V = E_{\beta} \cdot \upsilon$
Κανονική Πυραμίδα	$E_{\pi} = \frac{1}{2} \Pi_{\beta} \cdot h$	$V = \frac{E_{\beta} \cdot \upsilon}{3}$
Κύλινδρος	$E_{\kappa} = 2\pi R \upsilon$	$V = \pi R^2 \upsilon$
Κώνος	$E_{\kappa} = \pi R \lambda$	$V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_{\kappa} = \pi(R + \rho) \lambda$	$V = \frac{\pi \upsilon}{3} (R^2 + R\rho + \rho^2)$
Σφαίρα	$E = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$

4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόσταση του σημείου $A(x_1, y_1)$ από την ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$: $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Έλλειψη

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \alpha > \beta$$

Εστίες $(\pm\gamma, 0)$, Διευθετούσες $x = \pm \frac{\alpha}{\epsilon}$,

Εκκεντρότητα $\epsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$

5. Παράγωγοι

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x \qquad (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x \qquad (\epsilon\varphi x)' = \tau\epsilon\mu^2 x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

6. Ολοκληρώματα

$$\int \tau\epsilon\mu x \, dx = \ln|\tau\epsilon\mu x + \epsilon\varphi x| + c \qquad \int \sigma\tau\epsilon\mu x \, dx = \ln\left|\epsilon\varphi \frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \tau\omicron\xi\eta\mu \frac{x}{\alpha} + c \qquad \int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha} \tau\omicron\xi\epsilon\varphi \frac{x}{\alpha} + c$$

7. Απλός Τόκος

$$T = \frac{K \cdot E \cdot X}{100}$$