ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΕΤΡΑΜΗΝΩΝ 2021 – 22

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Κ.Κ. (Α΄ΣΕΙΡΑ)

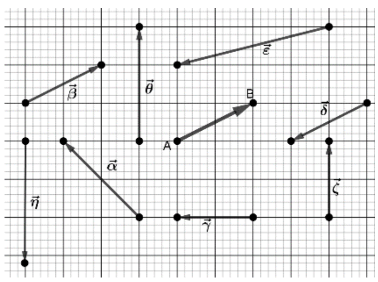
ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Α043

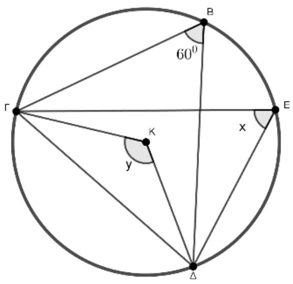
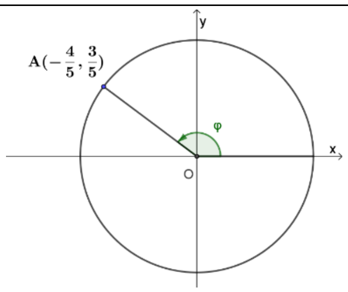
Τάξη: Α΄

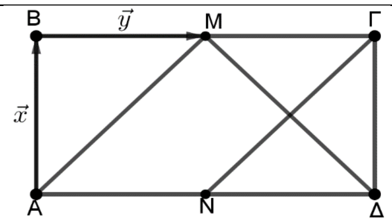
Ημερομηνία εξέτασης: ΤΡΙΤΗ 25 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2022

<u>Προτεινόμενες Λύσεις</u>

ΜΕΡΟΣ Α :

Α1.	Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χρησιμοποιώντας ιδιότητες ριζών, χωρίς την χρήση υπολογιστικής μηχανής: **(α)** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$ **(β)** $\sqrt{23+\sqrt[3]{8}}$ **<u>Λύση:</u>** **(α)** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}=\sqrt{2\cdot 32}=\sqrt{64}=8$ **(β)** $\sqrt{23+\sqrt[3]{8}}=\sqrt{23+2}=\sqrt{25}=5$	**(α)** Εφαρμογή ιδιότητας: **1μ** (αν $\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=4\sqrt{2}$ να δοθεί η μονάδα) Γινόμενο: **1μ** Αποτέλεσμα: **0,5μ** **(β)** $\sqrt[3]{8}=2$: **1 μ** Άθροισμα: **1μ** Αποτέλεσμα: **0,5μ**
Α2.	Με βάση το πιο κάτω σχήμα να βρείτε ένα διάνυσμα που να είναι:  **(α)** αντίθετο με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ **(2 μονάδες)** **(β)** ίσο με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ **(2 μονάδες)** **(γ)** αντίρροπο με το διάνυσμα $\vec{\zeta}$ **(1 μονάδα)**	

	<u>Λύση:</u> **(α)** αντίθετο με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$: $\vec{\boldsymbol{\delta}}$ **(β)** ίσο με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$: $\vec{\boldsymbol{\beta}}$ **(γ)** αντίρροπο με το διάνυσμα $\vec{\zeta}$: $\vec{\boldsymbol{\eta}}$	**(α)** Διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{\delta}}$: **2μ** **(β)** Διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{\beta}}$: **2μ** **(γ)** Διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{\eta}}$: **1μ** *(Να δοθεί μια μονάδα στο σύνολο των πέντε μονάδων, εφόσον το ερώτημα δεν απαντηθεί πλήρως, στην περίπτωση που οι απαντήσεις αιτιολογούνται)*
Α3.	Στο διπλανό σχήμα το σημείο K είναι το κέντρο του κύκλου και η γωνία $\Gamma B \Delta$ έχει μέτρο 60^o. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών x και y, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας. **(Μπορείτε να μεταφέρετε το σχήμα στο τετράδιο απαντήσεων)**  **<u>Λύση:</u>** $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{60^o}$ $\left(\begin{matrix} \textit{οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν} \\ \textit{στο ίδιο τόξο είναι ίσες} \end{matrix}\right)$ $\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{120^o}$ $\left(\begin{matrix} \textit{η επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια της} \\ \textit{αντίστοιχης εγγεγραμμένης} \end{matrix}\right)$	$\hat{x} = 60^o$: **1,5μ** Ορθή δικαιολογία**:** **1μ** $\hat{y} = 120^o$: **1,5μ** Ορθή δικαιολογία: **1μ** *(Εάν το λεκτικό της αιτιολόγησης δεν είναι πλήρες αλλά* ***παραπέμπει*** *στην πρόταση, να γίνει δεκτή η αιτιολόγηση)*
Α4.	Στο διπλανό σχήμα η τελική πλευρά της γωνίας φ, που είναι σε κανονική θέση, τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο A με συντεταγμένες $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\varphi$, $\sigma\upsilon\nu\varphi$, $\varepsilon\varphi\varphi$ και $\sigma\varphi\varphi$.  	

	Λύση: $\eta\mu\varphi = y_A = \frac{3}{5}$ $\sigma\upsilon\nu\varphi = x_A = -\frac{4}{5}$ $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{y_A}{x_A} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$ $\sigma\varphi\varphi = \frac{x_A}{y_A} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$	Υπολογισμοί: ***ημφ:*** **1,5μ** ***συνφ:*** **1,5μ** *(λάθος στο πρόσημο να αφαιρεθεί 0,5μ)* *(Να μην αφαιρεθεί μονάδα αν δεν γίνει αναφορά στο x_A και y_A)* *Αν ο μαθητής εργαστεί με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να δοθούν μονάδες ανόλογα με την πληρότητα της απάντησης.* ***εφφ:*** **1μ** *(0,5μ τύπος / 0,5μ αποτέλεσμα)* ***σφφ:*** **1μ** *(0,5μ τύπος / 0,5μ αποτέλεσμα)*
Α5.	Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$, με $Μ$ και $Ν$ τα μέσα των πλευρών $ΒΓ$ και $ΑΔ$ αντίστοιχα.  Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$ και $\overrightarrow{BM} = \vec{y}$: **(α)** Να εκφράσετε τα πιο κάτω διανύσματα συναρτήσει των $\vec{x}$ και $\vec{y}$: **i)** $\overrightarrow{AM}$ **(2 μονάδες)** **ii)** $\overrightarrow{MΔ}$ **(2 μονάδες)** **(β)** Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{NΓ}$ είναι ίσα. **(1 μονάδα)** (**Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας**) **Λύση:** **(α)** (i) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{x} + \vec{y}$ (ii) $\overrightarrow{MΔ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AΔ}$ $= -\vec{y} - \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{y} - \vec{x}$ είτε $\overrightarrow{MΔ} = \overrightarrow{MΓ} + \overrightarrow{ΓΔ} = \vec{y} - \vec{x}$ **(β)** Από το ερώτημα (α): $\overrightarrow{AM} = \vec{x} + \vec{y}$ $\overrightarrow{NΓ} = \overrightarrow{NΔ} + \overrightarrow{ΔΓ} = \vec{y} + \vec{x}$ Επομένως, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NΓ}$	**(α)** **(i)** $\overrightarrow{AM} = \vec{x} + \vec{y}$: **2μ** **(ii)** $\overrightarrow{MΔ} = \vec{y} - \vec{x}$: **2μ** *(Να δοθούν οι 2μ για οποιαδήποτε ορθή απάντηση δώσει ο μαθητής ή μέρος αυτών ανάλογα με τη λύση που θα δοθεί)* **(β)** $\overrightarrow{NΓ} = \overrightarrow{NΔ} + \overrightarrow{ΔΓ}$: **0,5μ** $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AB} = \vec{y} + \vec{x}$: **0,5μ** *(Να δοθεί η 1μ για οποιαδήποτε άλλη ορθή λύση)*

Α6.	Αν $συνω = -\frac{3}{5}$ $και$ $90° < ω < 180°$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $A = 15συνω - 6εφω - 10ημω$ **<u>Λύση:</u>** $ημ^2ω + συν^2ω = 1 \Longrightarrow ημω = \pm\sqrt{1 - συν^2ω}$ $= \pm\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$ $\Longrightarrow ημω = \frac{4}{5}$, $90° < ω < 180°$ $εφω = \frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$ $\mathrm{A} = 15 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - 6 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 10 \cdot \left(+\frac{4}{5}\right) = -9 + 8 - 8 = -9$	Αναφορά στην τριγωνομετρική ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$: **0,5μ** Υπολογισμός $ημω$: **1μ** Ορθή επιλογή πρόσημου: **0,5μ** Αναφορά στον τύπο $εφω = \frac{ημω}{συνω}$: **1μ** *(Αν δεν γίνει αναφορά στον τύπο αλλά γίνουν οι αντικαταστάσεις στο πηλίκο και είναι ορθές, να δοθούν οι μονάδες)* Αντικατάσταση: **0,5μ** Αποτέλεσμα: **0,5μ** Υπολογισμός της τιμής της παράστασης Α : **1μ**

ΜΕΡΟΣ Β :

Β1.	**(α)** Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt[3]{α + 5} = 2$, $α > -5$ **(4 μονάδες)** **(β)** Αν $α = 3$, να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής: **i)** $K = \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{α}} + α^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{12}$ **(3 μονάδες)** **ii)** $\Lambda = \frac{1}{3-\sqrt{α}} + \frac{1}{3+\sqrt{α}}$ **(3 μονάδες)** **<u>Λύση:</u>** (α) $\sqrt[3]{α + 5} = 2 \Longrightarrow \left(\sqrt[3]{α + 5}\right)^3 = 2^3 \Longrightarrow α + 5 = 8 \Longrightarrow$ $α = 8 - 5 \Longrightarrow α = 3$, δεκτή $(α > -5)$ (β) i) $K = \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{α}} + α^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{12} = \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} + 3^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{12} =$	**(α)** Απαλοιφή της ρίζας με οποιοδήποτε τρόπο *(ορισμός, ύψωση σε δύναμη, δύναμη σε ρητό εκθέτη)*: **2μ** Λύση εξίσωσης: **1μ** Διερεύνηση: **1μ** **(β) (i)** Αντικατάσταση $α = 3$: **0,5μ** Εφαρμογή ιδιοτήτων: **1,5μ**

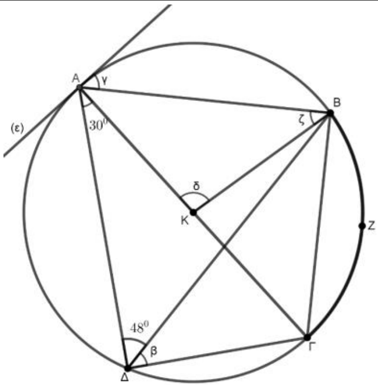
<table>
<tr>
<td></td>
<td>$\sqrt[3]{\frac{81}{3}} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt[3]{27} + \sqrt{3 \cdot 12} =$

$3 + \sqrt{36} = 3 + 6 = 9$

ii) $\Lambda = \frac{1}{3-\sqrt{3}} + \frac{1}{3+\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}$

$= \frac{6}{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{6}{9-3} = \frac{6}{6} = 1$</td>
<td>($\sqrt[3]{\frac{81}{3}}$ ή $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}$,
$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12}$)
(0,5μ για κάθε ιδιότητα)

Πράξεις-Αποτέλεσμα: **1μ**
(αν δοθεί ορθό αποτέλεσμα χωρίς τις πράξεις να δοθεί η 1 μ)

(ii) ΕΚΠ: **1μ**
Διαφορά τετραγώνων: **0,5μ**
Πράξεις στον αριθμητή: **0,5μ**
Πράξεις στον παρονομαστή: **0,5μ**
Αποτέλεσμα: **0,5μ**</td>
</tr>
<tr>
<td>Β2.</td>
<td>Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, ρ). Η $A\Gamma$ είναι μια διάμετρος του και η ευθεία (ε) είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A. Αν δίνεται ότι $\Delta\hat{A}\Gamma = 30^o$ και $B\hat{\Delta}A = 48^\circ$, να υπολογίσετε:


(α) τα μέτρα των γωνιών β, γ, δ και ζ (6 μονάδες)
(β) το μέτρο του τόξου $BZ\Gamma$ (2 μονάδες)
(γ) το μέτρο της γωνίας $\Delta\Gamma B$ (2 μονάδες)
(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)

<u>Λύση:</u>
(α) $\boldsymbol{A\hat{\Delta}\Gamma = 90^o}$ (εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο)
$\hat{\beta} + 48^o = 90^o \Rightarrow \hat{\beta} = 90^o - 48^o \Rightarrow \boldsymbol{\hat{\beta} = 42^o}$
$\boldsymbol{\hat{\gamma} = 48^o}$ $(\Theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha\ X o\rho\delta\acute{\eta}\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ E\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\varsigma)$
$\boldsymbol{\hat{\delta} = 96^o}$ $\begin{pmatrix} \eta\ \varepsilon\pi\acute{\iota}\kappa\varepsilon\nu\tau\rho\eta\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \delta\iota\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota\alpha\ \tau\eta\varsigma \\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau o\iota\chi\eta\varsigma\ \varepsilon\gamma\gamma\varepsilon\gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\varsigma \end{pmatrix}$
Το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές $(KA = KB = \rho)$
$\Rightarrow K\hat{B}A = K\hat{A}B$ (παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου)
Άρα έχουμε:
$\hat{\delta} + 2\hat{\zeta} = 180^o \Rightarrow 96^o + 2\hat{\zeta} = 180^o \Rightarrow 2\hat{\zeta} = 180^o - 96^o$
$\Rightarrow 2\hat{\zeta} = 84^o \Rightarrow \boldsymbol{\hat{\zeta} = 42^o}$</td>
<td>(α)
$A\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$: 0,5μ
Ορθή δικαιολογία: 0,5μ
$\hat{\beta} = 42^o$: 0,5μ
$\hat{\gamma} = 48^o$: 1μ
Ορθή δικαιολογία: 0,5μ
$\hat{\delta} = 96^o$: 1μ
Ορθή δικαιολογία: 0,5μ
$\hat{\zeta} = 42^o$: 1μ
Ορθή δικαιολογία: 0,5μ</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

(β) Τόξο $BZ\Gamma = 2\hat{\beta} = \mathbf{84^o}$ *(το τόξο έχει διπλάσιο μέτρο από το μέτρο της αντίστοιχης εγγεγραμμένης γωνίας)*
(γ) $\Delta\hat{A}B = 30^o + \hat{\zeta} = 30^o + 42^o = \mathbf{72^o}$
$\Delta\hat{\Gamma}B + \Delta\hat{A}B = 180^o$ *(Απέναντι γωνίες εγγεγραμμένου τετράπλευρου)*
$\Delta\hat{\Gamma}B + 72^o = 180^o \Rightarrow \Delta\hat{\Gamma}B = 180^o - 72^o \Rightarrow \Delta\hat{\Gamma}B = \mathbf{108^o}$
</td>
<td>

(β) $BZ\Gamma = 84^o$: **1μ**
Ορθή δικαιολογία: **1μ**
(γ)
$\Delta\hat{A}B = 30^o + 42^o$: **0,5μ**
$\Delta\hat{\Gamma}B + \Delta\hat{A}B = 180^o$: **0,5μ**
Ορθή δικαιολογία: **0,5μ**
Εξίσωση και ορθή απάντηση: **0,5μ**
(Εάν το λεκτικό της αιτιολόγησης δεν είναι πλήρες αλλά ***παραπέμπει*** *στην πρόταση, να γίνει δεκτό)*
Κάθε άλλη ορθή πορεία λύσης να πάρει τις αντίστοιχες μονάδες.
</td>
</tr>
<tr>
<td>

B3.
</td>
<td>

(α) Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα:
$\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\varphi x = \frac{1}{\eta\mu x}$ **(6 μονάδες)**
(β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{\eta\mu x} = 2$ στο διάστημα $90^o \le x \le 180^o$ **(4 μονάδες)**
<u>Λύση:</u>
(α) $A'\mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma = \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\varphi x = \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$
$= \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x(1-\sigma\upsilon\nu x)}{(1-\sigma\upsilon\nu x)\cdot\eta\mu x}$
$= \frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)\cdot\eta\mu x} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)\cdot\eta\mu x} = \frac{1}{\eta\mu x} = B'\mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma$
(β) $\frac{1}{\eta\mu x} = 2 \Rightarrow 2\eta\mu x = 1 \Rightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, $90^o \le x \le 180^o$
</td>
<td>

(α) Ο τύπος της *σφx*: **0,5μ**
Ομώνυμα: **1μ**
Πράξεις στον αριθμητή: **1μ**
Ο παρονομαστής σε παραγοντοποιημένη μορφή: **0,5μ**
Αναγνώριση της ταυτότητας: $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$: **1,5μ**
Διαγραφή : **1μ**
Αποτέλεσμα : **0,5μ**
(β) Μετασχηματισμός εξίσωσης ως προς *ημx*: **2μ**
Αναγνώριση τελικής πλευράς στο β' τεταρτημόριο: **1μ**
Αποτέλεσμα : **1μ**
(Αν $x = 30^0$ να ***αφαιρείται*** *μια μονάδα)*
</td>
</tr>
</table>