ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ – ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ – Α΄ ΣΕΙΡΑ

Μέρος Α΄: Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

Α1. Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου των κύκλων $(K, 6cm)$ και $(\Lambda, 2cm)$, ώστε οι κύκλοι να εφάπτονται εξωτερικά.

ΛΥΣΗ:

0.5 0.5 0.5

$R = 6cm$, $r = 2cm$, $\delta = K\Lambda$

Για να εφάπτονται εξωτερικά οι κύκλοι πρέπει

2

$\delta = R + r$

1.5

Άρα $\delta = 6 + 2 = 8cm$

(Αν δεν έχει μονάδα μέτρησης -0.5 μ)

Α2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \binom{-3}{4}$ και $\vec{\beta} = \binom{2}{-3}$. Να βρείτε:

α) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$

β) Τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$

ΛΥΣΗ:

1+1 0.5

α) $|\boldsymbol{\vec{\alpha}}| = \sqrt{(\mathbf{-3})^{\mathbf{2}} + \mathbf{4}^{\mathbf{2}}} = \mathbf{5}$ μονάδες

0.5 0.5

β) $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = 3 \cdot \binom{-3}{4} + 2 \cdot \binom{2}{-3}$

0.5 0.5 0.5

$\Rightarrow \vec{\gamma} = \binom{-9}{12} + \binom{4}{-6} = \binom{-5}{6}$

A3. Αν $ημx = \frac{4}{5}$, $90^{\circ} < x < 180^{\circ}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της πιο κάτω παράστασης, χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$A = \frac{15συνx}{στεμx+σφx}$$

ΛΥΣΗ:

$ημx = \frac{4}{5}$, $90° < x < 180°$

0.5

$ημ^2x + συν^2x = 1 \Rightarrow συν^2x = 1 - ημ^2χ$

$$συν^2x = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25}$$ 0.5

0.5

$\Rightarrow συνx = \pm\sqrt{\frac{9}{25}}$

$\Rightarrow συνx = -\frac{3}{5}$ (2ο τεταρτημόριο, $συνx < 0$)

0.5 0.5 0.5 0.5 0.5

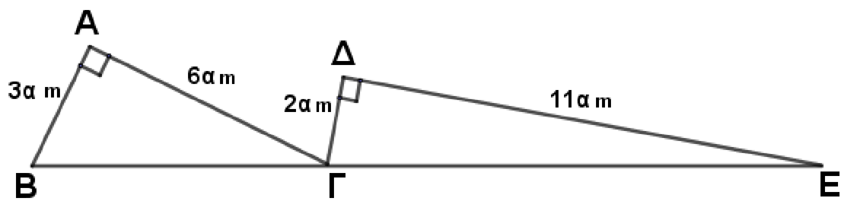
Άρα, $στεμx = \frac{1}{ημx} = \frac{5}{4}$ και $σφx = \frac{συνx}{ημx} = \frac{\frac{-3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$.

Τότε, $A = \frac{15συνx}{στεμx+σφx} = \frac{15\cdot(-\frac{3}{5})}{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}} = \frac{-9}{\frac{2}{4}} =$ -18 0.5

Άρα, $A = -18$

0.5

Α4. Ένας τοπογράφος έκανε τις παρακάτω μετρήσεις σε ένα αγροτεμάχιο ΑΒΓΔΕ, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Αν $\alpha > 0$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ριζών:

α) Να δείξετε ότι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος BE είναι $8\sqrt{5}\alpha$ m

β) Αν $\alpha = \sqrt[4]{\sqrt[3]{45^{11}}} \div \sqrt{\sqrt[6]{45^5}}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή του BE

ΛΥΣΗ:

0.5 0.5

α) $(B\Gamma) = \sqrt{9\alpha^2 + 36\alpha^2} = \sqrt{45\alpha^2} = \sqrt{9 \cdot 5\alpha^2} = 3\alpha\sqrt{5}$ m, $\alpha > 0$

$(\Gamma E) = \sqrt{4\alpha^2 + 121\alpha^2} = \sqrt{125\alpha^2} = \sqrt{25 \cdot 5\alpha^2} = 5\alpha\sqrt{5}$ m, $\alpha > 0$

0.5 0.5

$(BE) = (B\Gamma) + (\Gamma E) = 3\alpha\sqrt{5} + 5\alpha\sqrt{5} = 8\alpha\sqrt{5}$ m 0.5

0.5 0.5 0.5

β) $\alpha = \sqrt[12]{45^{11}} \div \sqrt[12]{45^5} = \sqrt[12]{45^6} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$

0.5

Τότε, $BE = 8\sqrt{5}\alpha = 8\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 24 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 = 24 \cdot 5 = 120m$

(Αν δεν έχει μονάδα μέτρησης -0.5 μ)

0.5

A5. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\tau\varepsilon\mu\theta - \varepsilon\varphi\theta + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\eta\mu\theta} = 2\tau\varepsilon\mu\theta$

<u>Λύση</u>:

Α΄μέλος$= \tau\varepsilon\mu\theta - \varepsilon\varphi\theta + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\eta\mu\theta}$

0.5 0.5 0.5 0.5

$$= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} - \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\eta\mu\theta} = \frac{1-\eta\mu\theta-\eta\mu\theta(1-\eta\mu\theta)+\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta(1-\eta\mu\theta)} = \frac{1-\eta\mu\theta-\eta\mu\theta+\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta(1-\eta\mu\theta)}$$

1 0.5

$$= \frac{1-2\eta\mu\theta+1}{\sigma\upsilon\nu\theta(1-\eta\mu\theta)} = \frac{2-2\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta(1-\eta\mu\theta)}$$

0.5 0.5

$$= \frac{2(1-\eta\mu\theta)}{\sigma\upsilon\nu\theta(1-\eta\mu\theta)} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

0.5

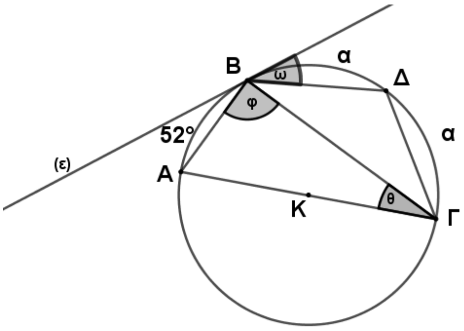
$= 2\tau\varepsilon\mu\theta =$ Β΄μέλος

Α6. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ο κύκλος (K, R). Η $ΑΓ$ είναι διάμετρος του κύκλου, η ευθεία (ε), εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B, $\widehat{AB} = 52^{\circ}\, και\ \widehat{BΔ} = \widehat{ΓΔ} = \alpha$

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α. **(Μονάδες 2)**

β) Αν $\alpha = 64°$, να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών θ, φ και ω. **(Μονάδες 3)**

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



0.5

<u>Λύση</u>:

(α) $ΑΓ$ διάμετρος, επομένως το τόξο $\widehat{ΑΒΓ} = 180°$

$\Longrightarrow 52° + \alpha + \alpha = 180°$ 0.5

$\Leftrightarrow 52° + 2\alpha = 180°$ 0.5

$\Leftrightarrow \alpha = 64°$ 0.5

0.5+0.5

(β) $\hat{\varphi} = 90°$ (εγγεγραμμένη γωνία η οποία βαίνει σε ημικύκλιο)

0.5+0.5

$\hat{\theta} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{52°}{2} = 26°$ (μέτρο εγγεγραμμένης γωνίας θ είναι ίσο με το μισό μέτρο του αντίστοιχου τόξου AB)

$\hat{\omega} = \widehat{ΒΓΔ}$ (θεώρημα χορδής εφαπτομένης) 0.5

$\widehat{ΒΓΔ} = \frac{\alpha}{2} = 32°$ (μέτρο εγγεγραμμένης γωνίας είναι ίσο με το μισό μέτρο του αντίστοιχου τόξου)

Άρα $\hat{\omega} = 32°$.

0.5

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

Μέρος Β΄: Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

Β1. α) Να λύσετε τις εξισώσεις: $x^3 - 27 = 0$ και $\sqrt{y+14} = 6 - y$. **(Μονάδες 5)**

β) Αν $x = 3$ και $y = 2$

i) Να αποδείξετε ότι $\frac{7}{\sqrt{y}+x} - \frac{7}{\sqrt{y}-x} = 6$ **(Μονάδες 3)**

ii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[4]{y}$ και $\sqrt[6]{x}$. **(Μονάδες 2)**

ΛΥΣΗ:

0.5 0.5

α) $x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$

Για να έχει πραγματική λύση η εξίσωση $\sqrt{y+14} = 6 - y$ πρέπει:

$y + 14 \geq 0$ και $6 - y \geq 0$

0.5 0.5

$y \geq -14$ και $y \leq 6$

Άρα, $-14 \leq y \leq 6$ 0.5

$\sqrt{y+14} = 6 - y$ υψώνουμε και τα δύο μέλη στη 2η δύναμη

$\left(\sqrt{y+14}\right)^2 = (6-y)^2$ 0.5

$\Rightarrow y + 14 = 36 - 12y + y^2$ 0.5

0.5

$\Leftrightarrow y^2 - 13y + 22 = 0 \Rightarrow (y-2)(y-11) = 0$

0.5 0.5

$y = 2$ δεκτή $-14 \leq y \leq 6$ ή $y = 11$ απορρίπτεται $-14 \leq y \leq 6$

(Αν δεν τεκμηριώσει τις λύσεις -0.5 μ)

β) i) Για $x = 3$ και $y = 2$ η παράσταση $\frac{7}{\sqrt{y}+x} - \frac{7}{\sqrt{y}-x}$ γίνεται:

0.5 0.5 0.5 0.5

$$\frac{7}{\sqrt{2}+3} - \frac{7}{\sqrt{2}-3} = \frac{7(\sqrt{2}-3)-7(\sqrt{2}+3)}{(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-3)} = \frac{7\sqrt{2}-21-7\sqrt{2}-21}{(\sqrt{2})^2-3^2} = \frac{-42}{2-9} = \frac{-42}{-7} = 6$$

0.5 0.5

ii) Για $x = 3$ και $y = 2$ οι αριθμοί $\sqrt[4]{y}$ και $\sqrt[6]{x}$ γίνονται $\sqrt[4]{2}$ και $\sqrt[6]{3}$

Μετατρέπω τις δύο ρίζες στον ίδιο δείκτη

0.5 0.5 0.5

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[4]{2} = \sqrt[3\cdot 4]{2^3} = \sqrt[12]{8} \\ \sqrt[6]{3} = \sqrt[2\cdot 6]{3^2} = \sqrt[12]{9} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[12]{8} < \sqrt[12]{9}. \ \textbf{Άρα,} \quad \sqrt[4]{2} < \sqrt[6]{3}$$

0.5

B2. Δίνονται τα σημεία $A(-4,6)$ και $B(-14,10)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. **(Μονάδες 2)**

β) Να βρείτε τη διανυσματική ακτίνα του μέσου Μ του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 2)

γ) Να βρείτε μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο με το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$.

(Μονάδες 3)

δ) Δίνεται το σημείο $K(3,9)$. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου $T(x, 11)$, έτσι ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{KT}$ να είναι παράλληλα. **(Μονάδες 3)**

ΛΥΣΗ:

0.5 1

α) $A(-4,6)$ και $B(-14,10)$ τότε $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14+4 \\ 10-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix}$

0.5

β) $x_M = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-4-14}{2} = \frac{-18}{2} = -9$ 0.5

Άρα $M(-9, 8)$

$y_M = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{6+10}{2} = \frac{16}{2} = 8$ 0.5 1

Η διανυσματική ακτίνα του μέσου Μ του $\overrightarrow{AB}$ είναι $\overrightarrow{OM} = -9\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}$ ή $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix}$

γ) $A(-4,6) \quad M(-9,8)$

$$\overrightarrow{AM} = \binom{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \binom{-9+4}{8-6} = \binom{-5}{2}$$ 0.5

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29} \text{ μονάδες}$$ 1

0.5 1

Μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο με το $\overrightarrow{AM}$ είναι το $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} = \dfrac{\binom{-5}{2}}{\sqrt{29}} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{\sqrt{29}} \\ \frac{2}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$

0.5

δ) $M(-9,8), \quad B(-14,10), \quad \overrightarrow{MB} = \binom{-14+9}{10-8} = \binom{-5}{2} \Rightarrow \lambda_{\overrightarrow{MB}} = -\frac{2}{5}$

0.5

$K(3,9), \quad T(x,11), \quad \overrightarrow{KT} = \binom{x-3}{11-9} = \binom{x-3}{2} \Rightarrow \lambda_{\overrightarrow{MB}} = \frac{2}{x-3}$

0.5 0.5

Για να ισχύει $\overrightarrow{MB} \,//\, \overrightarrow{KT} \Rightarrow \lambda_{\overrightarrow{MB}} = \lambda_{\overrightarrow{KT}}$ 0.5

Άρα $\quad -\frac{2}{5} = \frac{2}{x-3}$

$\Leftrightarrow -x + 3 = 5$

$\Leftrightarrow x = -2$ 0.5

B3. α) Δίνονται οι παραστάσεις :

$$A = \frac{\sigma\varphi(\pi+\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)\cdot\varepsilon\varphi(2\pi+\omega)}{\eta\mu(\pi-\omega)\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu(-\omega)} \quad \text{και} \quad B = \tau\varepsilon\mu\omega - \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{\tau\varepsilon\mu\omega}$$

i) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu\omega$ και $B = \sigma\upsilon\nu\omega$ **(Μονάδες 6)**

ii) Να υπολογίσετε τη γωνία ω, αν: $\sqrt{2}\cdot\eta\mu\omega = A^2 + B^2,\ \omega \in (0,\pi)$

(Μονάδες 2)

β) Δίνεται η παράσταση: $\Gamma = 9 - 2\sigma\upsilon\nu\theta,\ \theta \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $7 \le \Gamma \le 11$.

(Μονάδες 2)

Λύση:

(i) $A = \dfrac{\sigma\varphi(\pi+\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)\cdot\varepsilon\varphi(2\pi+\omega)}{\eta\mu(\pi-\omega)\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu(-\omega)}$

5X0,5

0.5

$$A = \frac{\sigma\varphi\omega\cdot(-\eta\mu\omega)\cdot\varepsilon\varphi\omega}{\eta\mu\omega\cdot(-\sigma\tau\varepsilon\mu\omega)} = +\frac{\sigma\varphi\omega\cdot\varepsilon\varphi\omega}{\sigma\tau\varepsilon\mu\omega}$$

0.5

$$A = \frac{1}{\sigma\tau\varepsilon\mu\omega} = \eta\mu\omega$$ 0.5

$$B = \tau\varepsilon\mu\omega - \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{\tau\varepsilon\mu\omega}$$

$$B = \frac{\tau\varepsilon\mu^2\omega - \varepsilon\varphi^2\omega}{\tau\varepsilon\mu\omega}$$ 0.5

1

$$B = \frac{1}{\tau\varepsilon\mu\omega} = \sigma\upsilon\nu\omega$$ 0.5

(ii) $\sqrt{2}\cdot\eta\mu\omega = A^2 + B^2, \quad \omega\epsilon(0,\pi)$

$\sqrt{2}\cdot\eta\mu\omega = \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega$ 0.5

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot\eta\mu\omega = 1$ 0.5

$\Leftrightarrow \eta\mu\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$ και επειδή $\omega \in (0,\pi)$

$\widehat{\omega_1} = \dfrac{\pi}{4}$ ή $\widehat{\omega_2} = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$ 0.5+0.5

0.5

(β) $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\theta \leq 1 \quad \theta \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad -2 \leq -2\sigma\upsilon\nu\theta \leq 2$ 0.5

$\Leftrightarrow -2+9 \leq 9 - 2\sigma\upsilon\nu\theta \leq 2+9$ 0.5

$\Leftrightarrow 7 \leq \Gamma \leq 11$ 0.5

ΤΕΛΟΣ ΟΔΗΓΟΥ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ