ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Δευτέρα, 06/06/2016

8:00 – 11:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u> **Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.**
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνεται έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών, την εκκεντρότητα και τις εξισώσεις των διευθετουσών της έλλειψης

Λύση

$\alpha = 5$ και $\beta = 4$, $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Rightarrow \gamma^2 = 5^2 - 4^2 \Rightarrow \gamma^2 = 9 \Rightarrow \gamma = \pm 3$

Εστίες: $E(3,0)$, $E'(-3,0)$ Εκκεντρότητα: $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \varepsilon = \frac{3}{5}$

Διευθετούσες $x = \mp\frac{\alpha}{\varepsilon} = \mp\frac{25}{3}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^4$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο πεδίο ορισμού της.

Λύση

$f'(x) = 4(x-1)^3 \Rightarrow f''(x) = 12(x-1)^2 \Rightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Άρα στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $A^2 = I$ (όπου I είναι ο 2×2 μοναδιαίος πίνακας).

(β) Να βρείτε τον πίνακα $B = A^{2017} + 2A^{-1} - 3A$.

Λύση

(α) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$

(β) $|A| = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) = -4 + 3 = -1 \neq 0$

Άρα υπάρχει αντίστροφος πίνακας A^{-1}

$A^2 = I \Rightarrow A^{-1} \cdot A^2 = A^{-1} \cdot I \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot A = A^{-1} \Rightarrow I \cdot A = \boldsymbol{A^{-1}} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A^{-1}}$

$A^{2017} + 2A^{-1} - 3A = (A^2)^{1008} \cdot A + 2A - 3A = (I)^{1008} \cdot A - A = A = A - A = (\boldsymbol{O})$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x + 5,\ \ x \in [-1,2]$.

Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f.

Λύση

$f(x) = -x^2 + 2x + 5,\ \ x \in [-1,2] \Rightarrow \frac{df}{dx} = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \in [-1,2]$

x	-1		1		2
$\frac{df}{dx}$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	5

Τοπικό μέγιστο της συνάρτησης f σε εσωτερικό σημείο είναι το $(1,6)$,

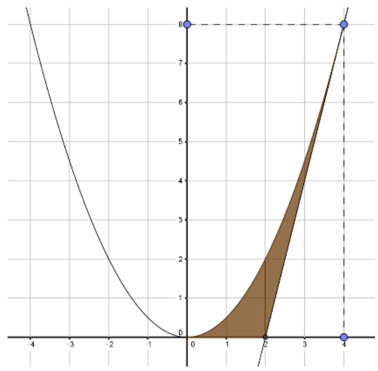
Τοπικά ελάχιστα εμφανίζονται στα άκρα του π.ο $(-1,2)$ *και* $(2,5)$

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(4,8)$ είναι (ϵ): $y = 4x - 8$.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την εφαπτομένη (ϵ) και τον ημιάξονα Ox.

Λύση



$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = x \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = f'(4) = 4$$

Εξίσωση εφαπτομένης: $y - 8 = 4(x - 4) \Rightarrow y = 4x - 8$

$$E = \int_0^4 \frac{x^2}{2} dx - E_{\tau\rho\iota\gamma} = \frac{x^3}{6}\Big]_0^4 - \frac{2 \cdot 8}{2} = \frac{64}{6} - 8 = \frac{8}{3} \tau.\mu.$$

6. (α) Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής.

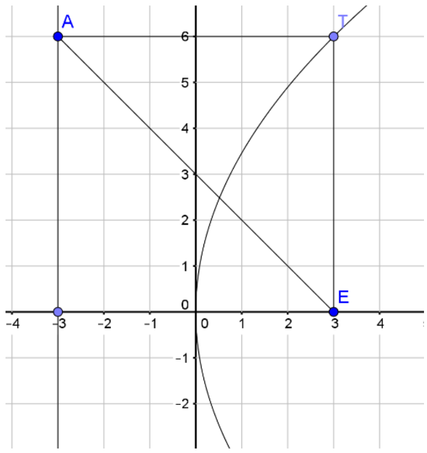
(β) Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax$ με εστία E. Σημείο T της παραβολής και σημείο A της διευθετούσας είναι τέτοια ώστε η ευθεία TA είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$ με $AE = 6\sqrt{2}$ μονάδες. Αν η περίμετρος του τριγώνου TAE είναι ίση με $(12 + 6\sqrt{2})$ μονάδες, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου TAE.

Λύση

(α) Παραβολή είναι ο Γ. Τόπος του σημείου του επιπέδου που κινείται έτσι ώστε να ισαπέχει από σταθερό σημείο Ε και σταθερή ευθεία (δ) του επιπέδου.

Το σημείο E ονομάζεται Εστία και η ευθεία (δ) ονομάζεται διευθετούσα της παραβολής.

(β) από τον ορισμό της παραβολής $TA = TE$



Περίμετρος = $12 + 6\sqrt{2} \Rightarrow TA + TE + AE = 12 + 6\sqrt{2} \Rightarrow$

$$TA + TA + 6\sqrt{2} = 12 + 6\sqrt{2} \Rightarrow TA = 6$$

Ισχύει $(AE)^2 = (AT)^2 + (TE)^2$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ το τρίγωνο ATE είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

$$E_{ATE} = \frac{1}{2} TA \cdot TE = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18\ \tau.\mu.$$

7. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$, για $x > 4$ χρησιμοποιώντας είτε την αντικατάσταση $x = 3 + \tau\varepsilon\mu\theta,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ είτε οποιονδήποτε άλλο τρόπο.

Λύση

$x = 3 + \tau\varepsilon\mu\theta,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = \tau\varepsilon\mu\theta\ \varepsilon\varphi\theta\ d\theta$

$\varepsilon\varphi^2\theta = \tau\varepsilon\mu^2\theta - 1 \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = +\sqrt{\tau\varepsilon\mu^2\theta - 1} = \sqrt{(x-3)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}} = \int \frac{\tau\varepsilon\mu\theta\ \varepsilon\varphi\theta}{|\varepsilon\varphi\theta|} d\theta = \int \frac{\tau\varepsilon\mu\theta\ \varepsilon\varphi\theta}{\varepsilon\varphi\theta} d\theta = \int \tau\varepsilon\mu\theta\ d\Theta =$$

$$\ln|\tau\varepsilon\mu\theta + \varepsilon\varphi\theta| + c = \ln\left(x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 8}\right) + c$$

8. Να βρείτε πόσοι από τους ενιαψήφιους αριθμούς που σχηματίζονται χρησιμοποιώντας τους φυσικούς αριθμούς $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ χωρίς επανάληψη, έχουν το 2 πριν από το 3 και το 8 πριν από το 9 (π.χ. ο $145\mathbf{8}6\mathbf{29}7\mathbf{3}$ είναι ένας τέτοιος αριθμός).

Λύση

Α΄ τρόπος: Από τις 9 θέσεις επιλέγονται οι δύο για να τοποθετηθούν πρώτα το 2 και μετά το 3 .

Από τις 7 υπόλοιπες θέσεις επιλέγονται οι δύο για να τοποθετηθεί το 8 και μετά το 9

Οι υπόλοιποι 5 αριθμοί μπορούν να τοποθετηθούν με διάταξη

$$\binom{9}{2}\binom{7}{2}5! = 90720$$

Β΄ τρόπος: Οι 9 αριθμοί μπορούν να τοποθετηθούν με διάταξη $9!$

στην συνέχεια από τις διατάξεις $2{,}3$ και $3{,}2$ επιτρέπεται μόνο το $2{,}3$ άρα διαιρούμε με $2!$

Με όμοιο τρόπο για το $8{,}9$

$$\frac{9!}{2!\,2!} = 90720$$

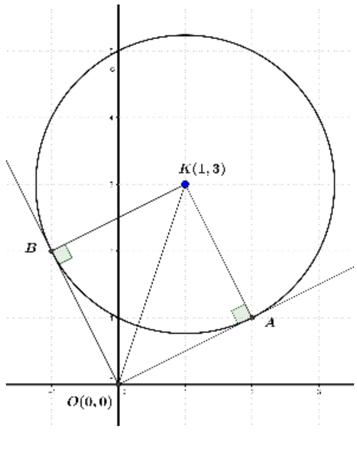
Γ΄ τρόπος: Το 2 μπορεί να πάρει 8 θέσεις οπότε ανάλογα το διατεταγμένο ζεύγος $(2{,}3)$ έχει $8 + 7 + 6 + \ \dots\ + \ 2 + 1 = \ 36$

Στην συνέχεια από τις 7 υπόλοιπες θέσεις οπότε ανάλογα το διατεταγμένο ζεύγος $(8{,}9)$ έχει $6 + \ \dots\ + \ 2 + 1 = \ 21$

Οι υπόλοιποι αριθμοί τοποθετούνται με $5!$ τρόπους $36 \cdot 21 \cdot 5! = 90270$

9. Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο $K(1{,}3)$ και με ακτίνα τέτοια ώστε η αρχή των αξόνων O να βρίσκεται εκτός του κύκλου. Από το O φέρουμε τις εφαπτόμενες ε_1, ε_2 προς τον κύκλο. Αν η μια από τις εφαπτόμενες έχει εξίσωση $x - 2y = 0$, να βρείτε την εξίσωση της άλλης εφαπτομένης.

Λύση



Έστω η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση

$y = \lambda x \Rightarrow \lambda x - y = 0$

$$d(K, \varepsilon_1) = d(K, \varepsilon_2) \Rightarrow \frac{|1 - 2 \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|\lambda \cdot 1 - 3|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{|\lambda - 3|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \Rightarrow \frac{25}{5} = \frac{\lambda^2 - 6\lambda + 9}{\lambda^2 + 1} \Rightarrow 5 = \frac{\lambda^2 - 6\lambda + 9}{\lambda^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 5\lambda^2 + 5 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 \Rightarrow 4\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = \ 0 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{\frac{1}{2}} \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \boldsymbol{\lambda_2} = \mathbf{-2}$$

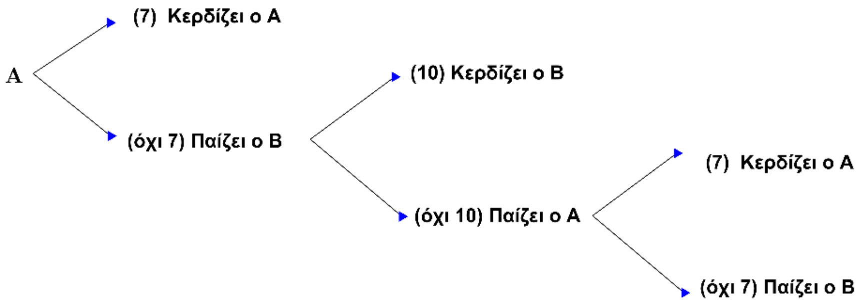
Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $\boldsymbol{y = -2x}$

10. Σε ένα παιχνίδι με ζάρια οι παίχτες Α και Β ρίχνουν δύο αμερόληπτα ζάρια ο κάθε ένας και υπολογίζουν κάθε φορά το άθροισμα των αριθμών που εμφανίζονται στις πάνω έδρες τους. Ο A κερδίζει το παιχνίδι εάν κατά την ρίψη των δύο ζαριών του φέρει άθροισμα ενδείξεων 7 και ο B κερδίζει το παιχνίδι εάν κατά την ρίψη των δύο ζαριών του φέρει άθροισμα ενδείξεων 10. Οι A και B παίζουν το παιχνίδι, ο ένας μετά τον άλλο, μέχρι να κερδίσει ο ένας από τους δύο. Αν ο A ξεκίνησε να παίζει πρώτος,

(α) να βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει ο B στην πρώτη του προσπάθεια.

(β) να βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει το παιχνίδι ο B.

Λύση



Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A_i: "$O\ A\ \varphi έ\rho\varepsilon\iota\ ά\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \varepsilon\nu\delta\varepsilon ί\xi\varepsilon\omega\nu$ 7 $\sigma\tau\eta\nu\ i\ \tau o\upsilon\ \pi\rho o\sigma\pi ά\theta\varepsilon\iota\alpha$"

B_i: "$O\ B\ \varphi έ\rho\varepsilon\iota\ ά\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \varepsilon\nu\delta\varepsilon ί\xi\varepsilon\omega\nu$ 10 $\sigma\tau\eta\nu\ i\ \tau o\upsilon\ \pi\rho o\sigma\pi ά\theta\varepsilon\iota\alpha$" , $i = 1, 2, 3, 4, \dots$

Σύνολο αποτελεσμάτων = 36

- Τρόποι για να έχουμε άθροισμα 7 είναι $\{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$

Η πιθανότητα του A για να κερδίσει σε μια συγκεκριμένη ρίψη είναι, $P(A_i) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Η πιθανότητα του A για να μην κερδίσει σε συγκεκριμένη ρίψη, $P\,(A_i') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

- Τρόποι για να έχουμε άθροισμα 10 είναι $\{(4,6), (6,4), (5,5)\}$
- Η πιθανότητα του B για να κερδίσει σε μια συγκεκριμένη ρίψη $P(B_i) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
- Η πιθανότητα του B για να χάσει σε συγκεκριμένη ρίψη, $P(B_i') = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

(α) $P(A_1') \cdot P(B_1|A_1') = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{72}$

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$= P(A_1') \cdot P(B_1) + P(A_1') \cdot P(B_1') \cdot P(A_2') \cdot P(B_2) + \cdots$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{12} + \frac{5}{6} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{12} + \frac{5}{6} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{12} + \cdots = \frac{\frac{5}{72}}{1 - \frac{11}{12} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{5}{17}$$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>   Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{2x^2}{x+1}$

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής της με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες, να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση

$y = \frac{2x^2}{x+1}$.   Πεδίο ορισμού, $\mathbb{R} - \{-1\}$ Σημείο τομής της με τους άξονες, $(0,0)$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}$, $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -2$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$\frac{dy}{dx}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	-8	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	
		$\mathrm{T.M}(-2,-8)$				$\mathrm{T.E}(0,0)$			

Διαστήματα Μονοτονίας

Αύξουσα στα διαστήματα (-∞,-2) , (0,+∞) , φθίνουσα (-2,-1), (-1,0)

Κατακόρυφες Ασύμπτωτες (Κ.Α.):

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2}{x+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{x+1} = +\infty \ \Rightarrow x = -1 \quad K.A.$$

Οριζόντιες Ασύμπτωτες (Ο.Α.):

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{x+1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{x+1} = +\infty \ \Rightarrow \Delta\varepsilon\nu\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ O.A.$$

$$y = \frac{2x^2}{x+1} = 2(x-1) + \frac{2}{x+1}$$

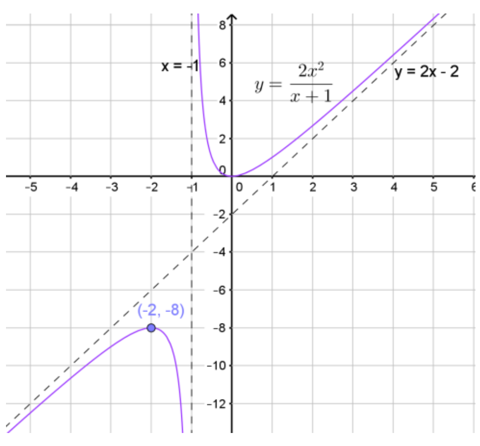
Πλάγιες Ασύμπτωτες (Π.Α.)

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x^2}{x+1} - \big(2(x-1)\big)\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2x^2}{x+1} - \big(2(x-1)\big)\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x+1} = 0$$

$\therefore \quad y = 2(x-1)\ \Pi.A.$

<u>Γραφική Παράσταση</u>



2. Σε ένα κουτί K_1 υπάρχουν 2 πράσινες και 5 μαύρες φανέλες και σε ένα άλλο κουτί K_2 υπάρχουν 3 γαλάζιες και 4 μαύρες φανέλες. Από μία ομάδα 12 κοριτσιών και 8 αγοριών, επιλέγεται τυχαία ένα παιδί. Αν είναι κορίτσι θα πάρει 2 φανέλες από το κουτί K_1 ενώ αν είναι αγόρι θα πάρει 2 φανέλες από το κουτί K_2. Η επιλογή των δύο φανελών θα γίνει τυχαία χωρίς επανατοποθέτηση. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

(α) E_1: "να επιλεγεί αγόρι και να επιλέξει φανέλες διαφορετικού χρώματος".

(β) E_2: "οι δύο φανέλες που θα επιλεγούν να είναι διαφορετικού χρώματος".

(γ) E_3: "να έχει επιλεγεί αγόρι δεδομένου ότι οι δύο φανέλες που έχουν επιλεχθεί είναι διαφορετικού χρώματος".

(δ) E_4: "να έχει επιλεγεί αγόρι δεδομένου ότι οι φανέλες που έχουν επιλεχθεί είναι και οι δύο γαλάζιες".

Λύση

Έστω Α επιλέχθηκε αγόρι, Δ επιλέχθηκαν φανέλες διαφορετικού χρώματος,
Γ επιλέχθηκαν δύο γαλάζιες

$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ $\qquad$ $P(A') = P(K) = \frac{3}{5}$

$P(\Delta|A) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ $\qquad$ $P(\Delta|A') = \frac{\binom{2}{1}\binom{5}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{10}{21}$

(α) $P(E_1) = P(A \cap \Delta) = P(A) \cdot P(\Delta\,|A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{35}$

(β) $P(E_2) = P(\Delta) = P(A) \cdot P(\Delta|A) + P(A') \cdot P(\Delta|A') = \frac{8}{35} + \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{21} = \frac{18}{35}$

(γ) $P(E_3) = P(A \mid \Delta) = \frac{P(A\cap\Delta)}{P(\Delta)} = \frac{P(A)\cdot P(\Delta|\,A)}{P(\Delta)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{18}{35}} = \frac{4}{9}$

(δ) $P(E_4) = P(\,A \mid \Gamma) = 1$

3. Δίνεται ισοσκελής υπερβολή $xy = c^2$ με εστίες E και E'.

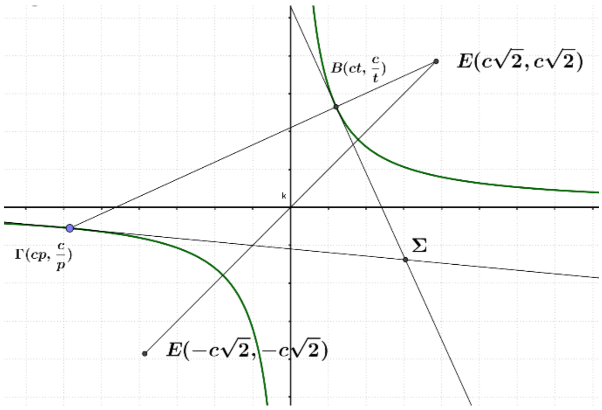
Τα $B\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ και $\Gamma\left(c\rho, \frac{c}{\rho}\right)$ με $t, \rho \neq 0,$ και $t, \rho \neq \pm 1,$ είναι τυχαία σημεία της υπερβολής.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $B\Gamma$ έχει εξίσωση $t\rho y + x = c(t + \rho)$.

(β) Φέρουμε τις εφαπτόμενες της υπερβολής στα σημεία B και Γ. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου τομής Σ των εφαπτομένων είναι $\left(\frac{2ct\rho}{t+\rho}, \frac{2c}{t+\rho}\right)$.

(γ) Αν η ευθεία $B\Gamma$ περνά από την εστία E, να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Σ.

Λύση



(α)$\lambda_{B\Gamma} = \frac{\left(\frac{c}{t}-\frac{c}{\rho}\right)}{ct-c\rho} = -\frac{1}{t\rho}$

Εξίσωση ΒΓ: $y-\frac{c}{t} = -\frac{1}{t\rho}(x-ct) \Rightarrow$

$yt\rho - c\rho = -x + ct \Rightarrow \boldsymbol{t\rho y + x = c(t+\rho)}$.

(β) $y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x}$

$\Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = y'|_B = -\frac{1}{t^2}$

εξίσωση εφαπτομένης στο Β $y-\frac{c}{t} = -\frac{1}{t^2}(x-ct) \Rightarrow t^2y + x = 2ct$ (1)

Ομοίως η εφαπτομένη στο Γ $\rho^2 y + x = 2c\rho$ *(2)*

Από τις (1) και (2) έχουμε $(t^2-\rho^2)y = 2c(t-\rho) \Rightarrow y = \frac{2c}{t+\rho} \Rightarrow x = \frac{2ct\rho}{t+\rho}$

$$\Sigma\left(\frac{2ct\rho}{t+\rho},\frac{2c}{t+\rho}\right)$$

(γ) Η ΒΓ περνά από την εστία τότε οι συντεταγμένες της εστίας επαληθεύουν την εξίσωση της ΒΓ.

$E(c\sqrt{2}, c\sqrt{2})$

$\boldsymbol{t\rho y} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c(t+\rho)} \Rightarrow t\rho c\sqrt{2} + c\sqrt{2} = c(t+\rho) \Longrightarrow t\rho\sqrt{2} + \sqrt{2} = t + \rho$ *(3)*

$y = \frac{2c}{t+\rho} \Rightarrow \boldsymbol{t+\rho = \frac{2c}{y}}$ *(4)* $\quad x = \frac{2ct\rho}{t+\rho} \Rightarrow 2ct\rho = x(t+\rho) \Rightarrow t\rho = \frac{x(t+\rho)}{2c} \Rightarrow \boldsymbol{t\rho = \frac{x}{y}}$ ***(5)***

Αντικαθιστώντας την (4) και (5) στην (3) προκύπτει

$$\frac{x}{y}\sqrt{2} + \sqrt{2} = \frac{2c}{y} \Rightarrow x\sqrt{2} + y\sqrt{2} = 2c$$

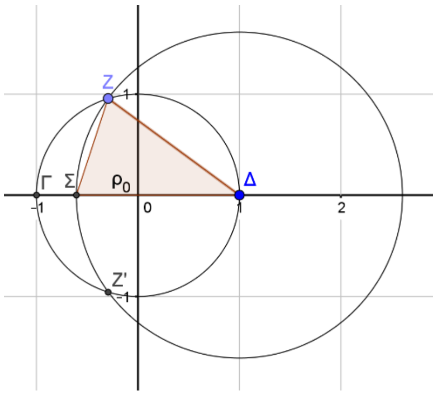
4. Δίνεται κύκλος κ_1 με εξίσωση κ_1: $x^2+y^2=1$ ο οποίος τέμνει τον άξονα των τετμημένων $x'x$ στα σημεία Γ και Δ. Ένας άλλος κύκλος κ_2 με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα ρ με $0<\rho<2$, τέμνει τον κύκλο κ_1 στα σημεία Z και Z'. Έστω Z το σημείο με θετική τεταγμένη ($y>0$) και Σ το σημείο τομής του κ_2 με το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$.

(α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta\Sigma Z$ δίνεται από τον τύπο

$$E(\rho) = \frac{\rho^2\sqrt{4-\rho^2}}{4}$$

(β) Να βρείτε την ακτίνα ρ ώστε το εμβαδόν του τρίγωνου $\Delta\Sigma Z$ να είναι μέγιστο.

Λύση



(α) $x^2 + y^2 = 1$ (1)

Σημεία τομής με ΟΧ $Γ(-1{,}0)$ $Δ(1{,}0)$

$$κ_2: (x-1)^2 + y^2 = ρ^2 \ (2)$$

Αφαιρώντας την (1) από την (2)

$$-2x + 1 = ρ^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{2-ρ^2}{2}$$

Τότε $(\frac{2-ρ^2}{2})^2 + y^2 = 1$ $τότε$ $y^2 = 1 - (\frac{2-ρ^2}{2})^2 = \frac{4-(2-ρ^2)}{4}$

$$y^2 = \frac{ρ^2(4-ρ^2)}{4} \Rightarrow y = \frac{ρ\sqrt{4-ρ^2}}{2}$$

$$E(ρ) = \frac{(ΣΔ)\cdot y_z}{2} = \frac{ρ\cdot\frac{ρ\sqrt{4-ρ^2}}{2}}{2} = \frac{ρ^2\sqrt{4-ρ^2}}{4}$$

β) $E(ρ) = \frac{ρ^2\sqrt{4-ρ^2}}{4}$ $τότε$ $E'(ρ) = \frac{2ρ\sqrt{4-ρ^2}}{4} + \frac{ρ^2(-2ρ)}{4\cdot 2\sqrt{4-ρ^2}}$

$\cdot\, E'(ρ) = \frac{8ρ-3ρ^3}{4\cdot\sqrt{4-ρ^2}}$ $\qquad E'(ρ) = 0 \Rightarrow \frac{8ρ-3ρ^3}{4\cdot\sqrt{4-ρ^2}} = 0 \Rightarrow ρ = \sqrt{\frac{8}{3}}$

$ρ$	0		$\sqrt{\frac{8}{3}}$		2
E'		$+$	0	$-$	
E		$\nearrow$		$\searrow$	

Το εμβαδόν του τρίγωνου $ΔΣΖ$ είναι μέγιστο όταν $ρ = \sqrt{\frac{8}{3}}$

5. Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις,

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(-x) = f(x)$ και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(-x) = -g(x)$.

(α) Να δείξετε ότι:

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(β) Να υπολογίσετε το:

$$\int_{-\frac{π}{2}}^{\frac{π}{2}} \frac{συν^2x + 5}{2e^{ημx} + 2}dx$$

Λύση

(α) Θέτουμε $u=-x,\ du=-dx$

x	$-a$	0
u	a	0

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx=\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx+\int_{0}^{\alpha}\frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx=$$

$$-\int_{a}^{0}\frac{f(-u)}{e^{g(-u)}+1}du+\int_{0}^{\alpha}\frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx=\int_{0}^{a}\frac{f(-x)}{e^{g(-x)}+1}du+\int_{0}^{\alpha}\frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx$$

$$\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{e^{-g(x)}+1}dx+\int_{0}^{\alpha}\frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx=\int_{0}^{a}\frac{f(x)e^{g(x)}}{1+e^{g(x)}}dx+\int_{0}^{\alpha}\frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx=$$

$$\int_{0}^{a}\left(\frac{f(x)e^{g(x)}}{1+e^{g(x)}}+\frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}\right)dx=\int_{0}^{\alpha}\frac{f(x)(e^{g(x)}+1)}{1+e^{g(x)}}dx=\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$$

(β) *Αν* $f(x)=\sigma\upsilon\nu^2x+5$ *τότε και* $f(-x)=\sigma\upsilon\nu^2(-x)+5=\sigma\upsilon\nu^2x+5=f(x)$

Αν $g(x)=\eta\mu x$ *τότε και* $g(-x)=\eta\mu(-x)=-\eta\mu x=-g(x)$

Αν $\alpha=\frac{\pi}{2}$

Τότε βάσει του (α)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu^2x+5}{2e^{\eta\mu x}+2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu^2x+5}{2(e^{\eta\mu x}+1)}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sigma\upsilon\nu^2x+5)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu 2x+1}{2}+5\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\eta\mu 2x}{4}+\frac{11x}{2}\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{11\pi}{8}$$

------ Τ Ε Λ Ο Σ Ε Ξ Ε Τ Α Σ Η Σ ------