ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2015

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τρίτη, 02/06/2015
8:00 – 11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ
Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από δυο (2) σελίδες.

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u> **Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.**
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-1}{3x+\eta\mu x}$

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int (3x^2+\sigma\upsilon\nu x+1)dx$

3. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$

   Να δείξετε ότι $A^2+A^{-1}=A+B$

4. Δίνονται τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 5, 6, 9.
   Να βρείτε:
   α. Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω ψηφία, αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου.
   β. Πόσοι από τους πιο πάνω τριψήφιους αριθμούς:
      i. Είναι μεγαλύτεροι του 300
      ii. Διαιρούνται με το 5

5. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A)=\frac{1}{2}$,

$P(A\cup B)=\frac{5}{6}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{12}$, να υπολογίσετε:

α. Τις πιθανότητες των ενδεχομένων: $P(B)$, $P(A-B)$ και $P(A'\cup B)$.

β. Την πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιηθεί το Α, δεδομένου ότι δεν πραγματοποιήθηκε το Β.

6. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, αν το σημείο καμπής της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^3-6\chi^2+14$, είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της συνάρτησης $g(\chi)=\chi^2+\alpha\chi+\beta$

7. α. Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης.

β. Δίνεται η έλλειψη $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$, $\alpha>\beta$ με εστίες Ε και Ε΄ και Β το σημείο τομής της έλλειψης με τον θετικό ημιάξονα Οψ. Αν το τρίγωνο ΒΕΕ΄ είναι ισόπλευρο, να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.

8. Δίνεται ο κύκλος $\chi^2+\psi^2-6\chi+1=0$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) και την εξίσωση της κάθετης (κ) του κύκλου στο σημείο του Α(5,2)

β. Αν η (ε) τέμνει τον άξονα χ΄χ στο σημείο Β και η (κ) τον άξονα ψ΄ψ στο σημείο Γ, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

9. α. Δίνεται η καμπύλη $f(\chi)=\chi^3$ και σημείο $B(\kappa,0)$ με $\kappa>0$. Από το σημείο Β φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των ψ, η οποία τέμνει την καμπύλη στο σημείο Α. Να δείξετε ότι η καμπύλη f(χ) χωρίζει το τρίγωνο ΟΑΒ (Ο η αρχή των αξόνων) σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

β. Έστω Τ το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη, την ευθεία ΑΒ και τον άξονα των χ .Το χωρίο Τ όταν περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα χ΄χ δημιουργεί στερεό με όγκο V_χ , ενώ όταν περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα ψ΄ψ δημιουργεί στερεό με όγκο V_ψ.

Αν $V_x=\dfrac{10}{7}V_\psi$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α.

10. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$f(0)=0$ και $f'(\chi)=\dfrac{\chi^2+1}{\chi^4+\chi^2+2}$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$

α. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $g(\chi)=f(\chi)-\chi$

β. Να αποδείξετε ότι $0<f(\chi)<\chi$ για κάθε $\chi>0$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u> **Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.**
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(\chi)=\dfrac{\chi}{\chi^2-5\chi+4}$

   Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, να την παραστήσετε γραφικά.

2. Δίνεται η παραβολή $\psi^2=4\chi$ και το σημείο της $P(p^2,2p),\ p>0$. Φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα PA κάθετο στον άξονα Οψ (Α σημείο του άξονα Οψ). Από το Α φέρουμε ευθεία (ε) κάθετη στην ΟΡ (Ο η αρχή των αξόνων).

   α. Να δείξετε ότι η (ε) τέμνει τον άξονα Οχ σε σταθερό σημείο Β.

   β. Αν Γ σημείο της παραβολής τέτοιο ώστε η ΓΟ να είναι κάθετη στην ΡΟ, να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΡΟΓ είναι $E=4p+\dfrac{16}{p}$

   γ. Να βρείτε για ποια τιμή του p το πιο πάνω εμβαδόν Ε, γίνεται ελάχιστο.

3. Στον τελικό του πρωταθλήματος καλαθόσφαιρας ανδρών, προκρίθηκαν οι ομάδες Α και Β. Η ομάδα Α έχει πιθανότητα $\dfrac{2}{3}$ να κερδίσει την ομάδα Β σε κάθε αγώνα. Το πρωτάθλημα θα το κερδίσει η ομάδα που θα κερδίσει πρώτη τρεις αγώνες.

   α. Να βρείτε την πιθανότητα η ομάδα Α να κερδίσει το πρωτάθλημα.
   β. Αν η ομάδα Α κέρδισε το πρωτάθλημα, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου η ομάδα Β να κέρδισε μόνο στον πρώτο αγώνα.

4. Η κάθετη της υπερβολής $\chi\psi = c^2$ στο σημείο της $A(ct, \frac{c}{t}),\ t > 0,\ t \neq 1$ τέμνει την υπερβολή στο σημείο $B(cp, \frac{c}{p})$

   Να δείξετε ότι:

   α. $t^3 \cdot p = -1$

   β. Η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ του ΑΒ είναι $c^2(\chi^2 - \psi^2)^2 = -4\chi^3\psi^3$

5. α. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.
   Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\chi = \alpha + \beta - u$, να αποδείξετε ότι

   $$\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - \chi)d\chi$$

   β. Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(\chi+3)}{\ln(\chi+3)+\ln(4-\chi)}d\chi = \frac{1}{2}$

   γ. Αν $f(\chi) = \dfrac{\chi^2+1}{e^{\chi}+1}$ να αποδείξετε ότι:

   i. $f(\chi) + f(-\chi) = \chi^2 + 1,\ \ \forall\ \chi \in \mathbb{R}$

   ii. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(\chi)d\chi = \frac{4}{3}$

------ Τ Ε Λ Ο Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Η Σ ------